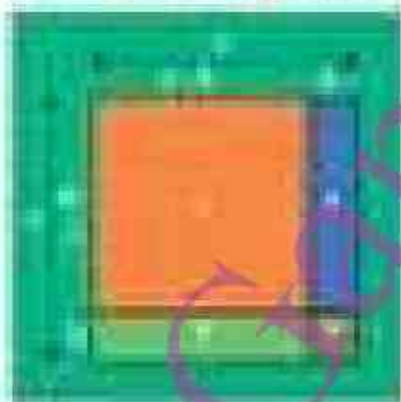
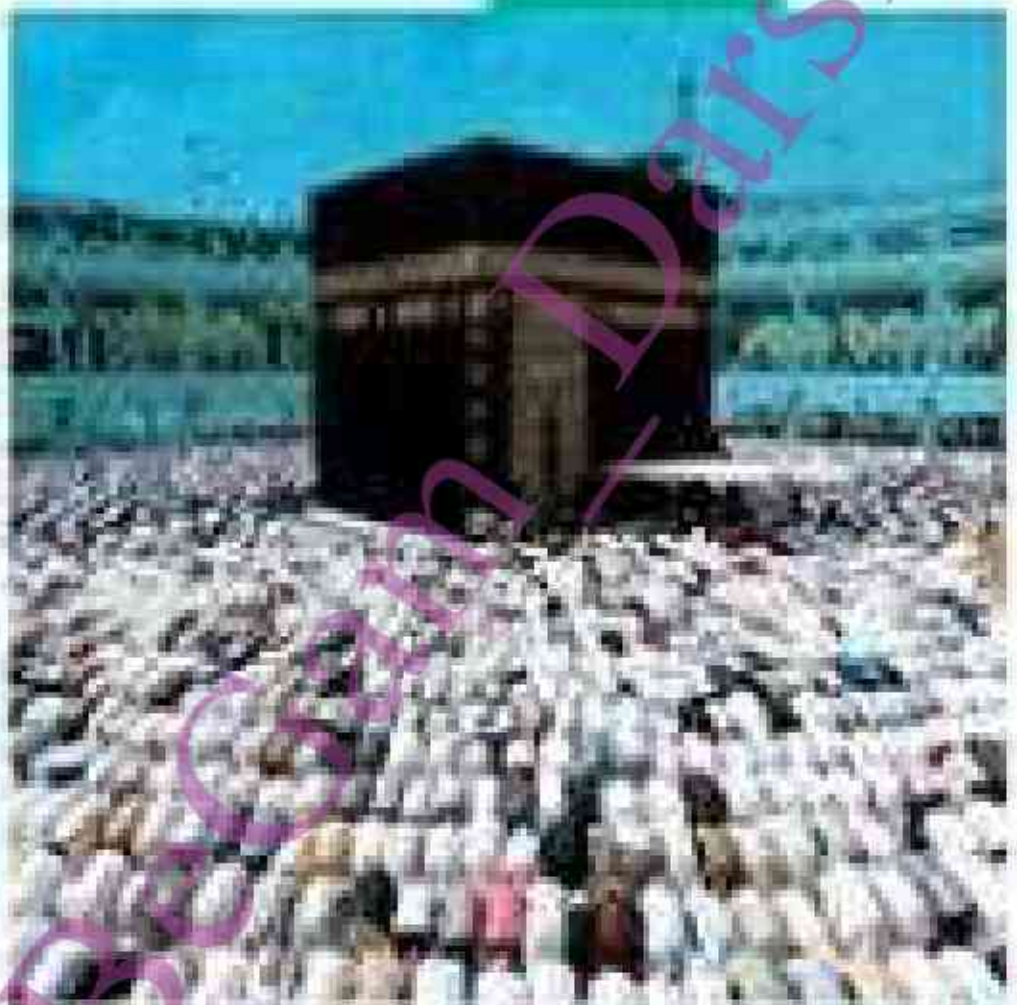


ریاضی و آثار (۱)

پہلی تقریر
تعمیرات اور تعمیراتی فنون
۱۱-۲۲۲

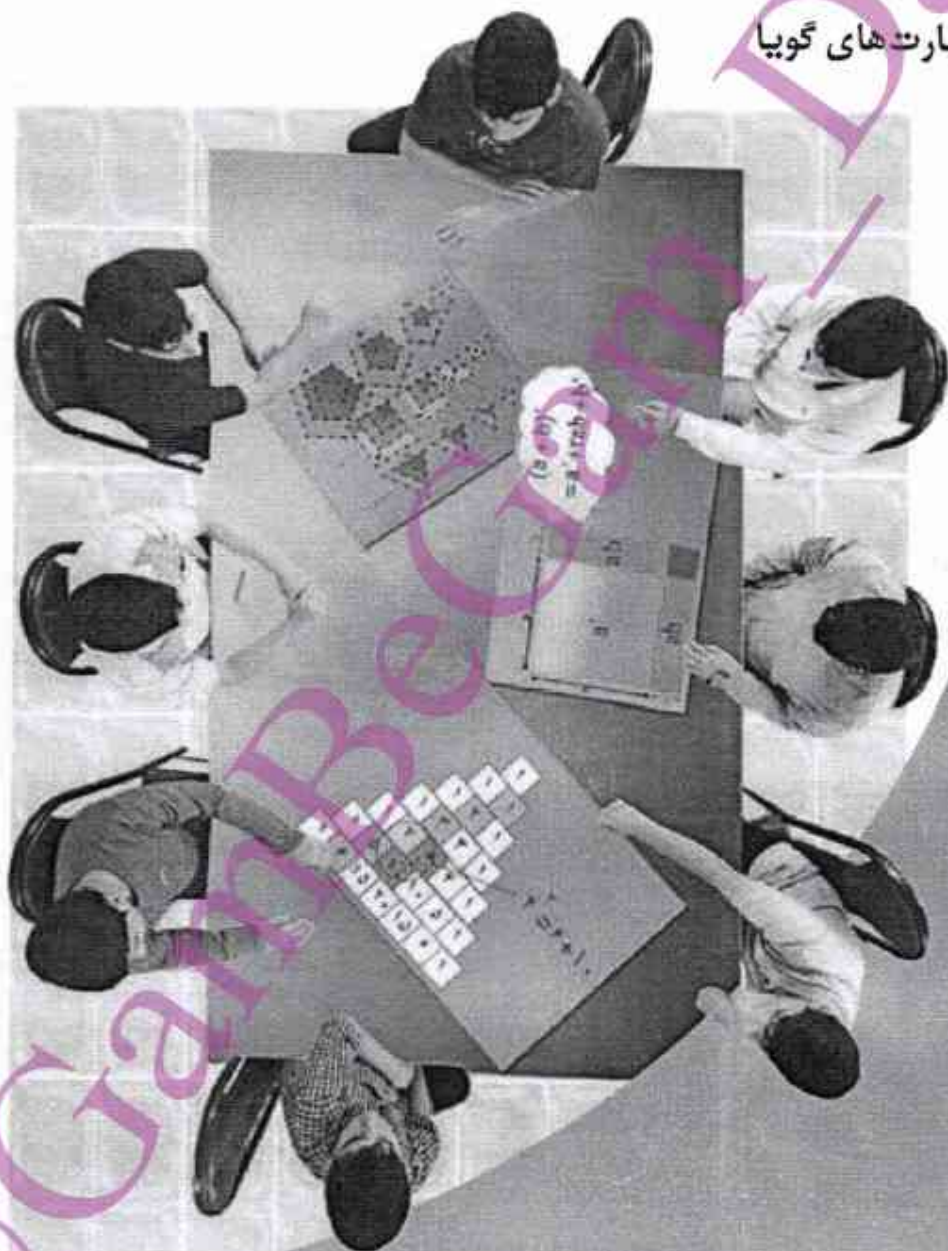


عبارت‌های جبری

فصل
اول

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



@Ganbari

درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

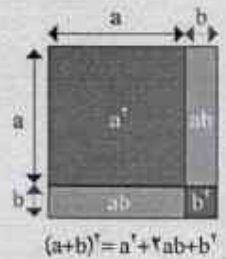
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(3a-1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$

پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + 2b + \frac{1}{2}b^2$

ت) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$

ث) $(x+4)(x+3) = x^2 + 7x + 12$

ج) $(3x+2)(3x-5) = 9x^2 - 9x - 10$

ح) $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

کار در کلاس



با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$

تهیه کننده:



مثلث خیام

در اینجا باید به رخدان مهمی که با نتایج کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت پرداختیم. می دانسیم که صورت بسط یافته دو جمله ای به طراحی مثلثی عددی می انجامد که پیش از این مثلث نیوتن - پاسکال نامیده می شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین های اسلامی از خود پرسیدند: «آیا ممکن است این روش بسط دو جمله ای ها در سرزمین های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی ها به حضور این بسط در کتاب مفتاح الحساب غیث الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیر الدین طوسی باز می گردد و در فصل اول از کتاب جوامع الحساب طوسی دیده می شود. ادامه پژوهش ها نیز ردیابی این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین های اسلامی و حدود شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱ حکیم، عمر خیام، طراکبر ولایتی
انتشارات آفتاب تهران، ۱۳۸۹.

کار در کلاس



عبارت جبری $(a+b)^n$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای و حاصل ضرب عبارت های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

برای ساده کردن $(a+b)^n$ ، چگونه عمل می کنید؟ آیا این پرسش را می توان برای توان های بزرگ تر از ۳ نیز

طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست

$$\text{آورد؟} \quad (a+b)^4 = (a+b)^3 (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = \dots$$

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.

می توان برای توان های بیشتر چنین عمل کرد ولی مراحل طولانی خواهد شد.

فعالیت



جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	$(a+b)^0 = 1$
۱ ۱	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
	...
	...

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی

بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

هر عدد سطر سوم از جمع دو عدد بالای آن در سطر دوم به دست می آید.
هر عدد سطر چهارم از جمع دو عدد بالای آن در سطر سوم به دست می آید.
هر عدد سطر پنجم از جمع دو عدد بالای آن در سطر چهارم به دست می آید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{ب) } x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{ب) } 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 - 2(2x) + (1)^2 = (2x - 1)^2$$

$$\text{ت) } y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-2)(y+5)$$

$$\text{ت) } 9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8$$

$$= (3x)^2 + (2 + 4)(3x) + (2)(4)$$

$$= (3x + 2)(3x + 4)$$

کار در کلاس



عبارت‌های جبری زیر را به صورت ساده‌ترین حالت، تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 12x^2(x^2+6)^2 - 8x^2(x^2+6)^2$$

$$= 4x^2(x^2+6)^2(3x^2-2(x^2+6))$$

$$= 4x^2(x^2+6)^2(x^2-12)$$

$$= 4x^2(x^2+6)^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$$

$$\text{ب) } x^4 - 64x^2 = x^2(x^2 - 64)$$

$$= x^2(x^2 - 8^2) = x^2(x-8)(x+8)$$

$$= x^2(x-\sqrt{64})(x+\sqrt{64}) = x^2(x-8)(x+8)$$

کار در کلاس



بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\text{الف) } (999)^2 = (1000-1)^2 = \dots = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

$$\text{ب) } 96 \times 104 = (100-4)(100+4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$$

$$\text{ب) } (102)^2 = (100+2)^2 = \dots = 100^2 + 2(100 \times 2) + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.

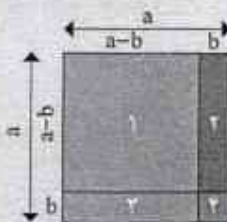
ت) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

$$\text{ت) } 507 \times 493 = (500+7)(500-7) = 500^2 - 7^2 = 250000 - 49 = 249951$$

ت) در حساب کردن مساحت مربع



آفرینش، دقتش تا باز شد
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد.
دست حق تا نقش عالم می‌نگاشت
در سیرت «دایره»، «بی» می‌گذاشت
شکل‌های هندسی و «منتظم»
او نهاده در نهاد هر قلم
با «مثلث»، «دایره»، «مستطیل»
می‌شود اندام این عالم شکل!
آسمان، از اختران پر کرده است
روز و شب را در «ناظر» کرده است
این همه مجموعه‌های بی‌نظیر
که کائنات‌های شمارش‌ناپذیر!
نظم این اعداد، در اوج کمال
در تناسب گشته عالم، بی‌مثال
زلفی عالم تا برشان می‌شود.
این ریاضی، شانه‌های آن می‌شود!
با به استقرار و با «برهان خلف»
می‌شود شانه، برشان زلف!
باز، بین جغرافیای بی‌حدود
کوچه‌ها رشت‌ها گشته «عمود»!
از حیات و از جماد و از نبات
بُر نمود این «دستگاه مختصات»



$$s_1 = (a-b)^2$$

$$s_2 = s - s_1 - s_3 - s_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - (a-b)b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۷ سطر ۱ ۴ ۱۵ ۴۰ ۱۰۵ ۲۱۰ ۳۵۰ ۵۰۴ ۶۷۲ ۸۱۷ ۱

۸ سطر ۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱۷ ۱

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟ به ترتیب از چپ به راست با هم برابرند

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های

$(a+b)$ وجود دارد؟ ضرایب توان $(a+b)^n$ برابر اعداد سطر $(n+1)$ ام سطرهای واقع در مثلث خیام است.

۷. با توجه به اینکه $a-b = a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را بر اساس اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

به دست آورید.

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

با توجه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a^1b + 2ab^1 + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2a^1b + 2ab^1 - b^2$$

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

الف) $(2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$

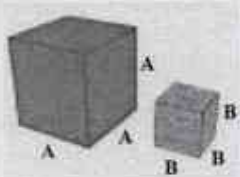
ب) $(\frac{1}{3}a - 2)^2 = \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}a + 4$

ج) $(2a-2b)^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$

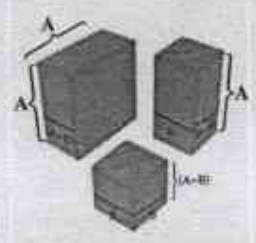
د) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2$

$$* (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

(مجموعه -) (مجموعه +) = مجموع - مجموع



$$A^3 - B^3$$



$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$$

کار در کلاس



با توجه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارات جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

فعالیت



با استفاده از اتحادهای بالا، عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

$$8y^3 - 1 = (2y)^3 - 1^3 = (2y-1)((2y)^2 + (2y) + 1) = (2y-1)(4y^2 + 2y + 1)$$

$$8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a+1)((2a)^2 - 2a + 1) =$$

$$2a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a+b)((2a)^2 - 2ab + b^2)$$

$$t^3 - \frac{1}{8} = (t)^3 - (\frac{1}{2})^3 = (t - \frac{1}{2})(t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$$

تمرین



۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارات جبری زیر را بنویسید.

$$(x-1)^3, (y+\frac{1}{4})^3, (2-\frac{a}{3})^3, (2z-\frac{1}{4})^3, (\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + \dots + 2$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + \dots$$

$$(\sqrt{3} + x)^2 = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^2 + \dots$$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1, 1 + z^2, 8 - t^2$$

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$25x^2 + 25x + 6$$

$$4x^2 + 14x + 12$$

۴. کدام یک از عبارت‌های زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟

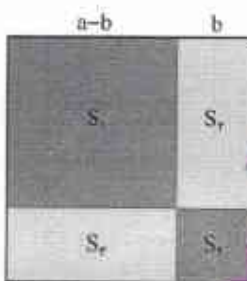
$$(3x + 5)(9x^2 - 20x + 15), (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(4x + y)(16x^2 + 4xy + y^2), (7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

الف) $12x^2(x^2 + 5)^2 - 10x^2(x^2 + 5)^2$

ب) $x^4 - 625x^2$



۶. مربع روبه‌رو را که اندازه، ضلع آن a است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو باره خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 را به دست آورید.

ب) مساحت S را بر حسب مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 و S_5 به دست آورید.

پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^2 = \dots$$

$$(99)^2 = (100 - 1)^2 = \dots$$

$$(x-1)^r = (x)^r - r(r)(1) + (-1)^r = x^r - rx + 1 \quad (-1)$$

$$(y + \frac{1}{r})^r = (y)^r + r(y)(\frac{1}{r}) + (\frac{1}{r})^r = y^r + \frac{1}{r}y + \frac{1}{r^r}$$

$$(r - \frac{a}{r})^r = (r)^r - r(r)(\frac{a}{r}) + (\frac{a}{r})^r = r^r - \frac{r}{r}a + \frac{a^r}{r^r}$$

$$(rz - \frac{1}{r})^r = (rz)^r - r(rz)(\frac{1}{r}) + r(rz)(\frac{1}{r})^r - (\frac{1}{r})^r = r^r z^r - rz + \frac{r}{r^r}z - \frac{1}{r^r}$$

$$(\frac{1}{r} + \frac{b}{r})^r = (\frac{1}{r})^r + r(\frac{1}{r})(\frac{b}{r}) + r(\frac{1}{r})(\frac{b}{r})^r + (\frac{b}{r})^r = \frac{1}{r^r} + \frac{1}{r}b + \frac{1}{r^r}b^r + \frac{b^r}{r^r}$$

$$(a + \sqrt{r})^r = a^r + r\sqrt{r}a + r \quad (-2)$$

$$(1 - rx)^r = 1 - rx + rx^r$$

$$(\sqrt{r} + x)^r = r\sqrt{r} + rx + r\sqrt{r}x^r + x^r$$

$$x^4 - 1 = (x^r + 1)(x^r - 1) = (x + 1)(x^r - x + 1)(x - 1)(x^r + x + 1) \quad (-3)$$

$$1 + z^r = (1 + z)(1 - z + z^r)$$

$$1 - t^r = (r - t^r)(r + rt^r + t^r) = (\sqrt{r} - t)(\sqrt{r} + t)(r + rt^r + t^r)$$

$$rx^r - rx + 1 = (rx - 1)^r$$

$$r\omega x^r + r\omega x + r = (\omega x + r)(\omega x + r)$$

$$rx^r + rrx + rr = (rx + r)(rx + r)$$

(۴)

$$\times (\sqrt{x} + a)(9x^r - 2ax + 1a) \rightarrow \text{با } -1.5x \text{ با } 2$$

$$\sqrt{(x+r)}(x^r - 2x + 1)$$

$$\times (\epsilon x + y)(14x^r + \epsilon xy + y^r) \rightarrow \text{با } \epsilon xy \text{ با } 2$$

$$\sqrt{(x-r)}(\epsilon 9x^r + 1\epsilon x + \epsilon)$$

(۴)

الف) $S_1 = (a-b)^r = a^r - rab + b^r$

$$S_2 = b(a-b) = ab - b^r$$

$$S_3 = (a-b)b = ab - b^r$$

$$S_4 = (b)^r = b^r$$

ب) $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a^r - rab + b^r) + (ab - b^r) + (ab - b^r) + (b^r) = a^r$

ج) $(a-b)^r + r(a-b)(b) + b^r = a^r \Rightarrow$

$$(a-b)^r = a^r - b^r - r(a-b)(b) \Rightarrow (a-b)^r = a^r - b^r - rab + rb^r$$

$$\Rightarrow (a-b)^r = a^r - rab + b^r$$

(۴)

الف) $12x^r(x^r+a)^r - 10x^r(x^r+a)^r = 2x^r(x^r+a)^r [4x^r - a(x^r+a)]$
 $= 2x^r(x^r+a)^r (x^r - 2a) = 2x^r(x^r+a)^r (x-a)(x+a)$

ب) $x^a - 42ax^r = x^r(x^r - 42a) = x^r(x^r + 2a)(x^r - 2a)$
 $= x^r(x^r + 2a)(x+a)(x-a)$

✓) $(1000)^r = (1000+1)^r = \binom{r}{0}(1000)^r + \binom{r}{1}(1000)^{r-1} + \binom{r}{2}(1000)^{r-2} + \dots + \binom{r}{r-1}(1000) + \binom{r}{r}(1)$
 $= 1000^r + r \cdot 1000^{r-1} + \dots + r \cdot 1000 + 1$

$(99)^r = (100-1)^r = \binom{r}{0}(100)^r - \binom{r}{1}(100)^{r-1} + \binom{r}{2}(100)^{r-2} - \dots + \binom{r}{r-1}(100) - \binom{r}{r}(1)$
 $= 100^r - r \cdot 100^{r-1} + r \cdot 100 - 1 = 970499$

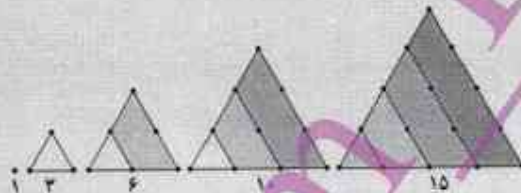
خواندنی

ابوعلی سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و درباره خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی سینا در مورد رابطه بین این اعداد آمده است.

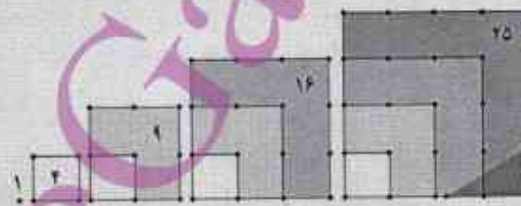
همان گونه که مشاهده می کنید $۱۵, ۱۰, ۶, ۳, ۱$... اعداد مثلثی و $۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵$... اعداد مربعی اند.

حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.



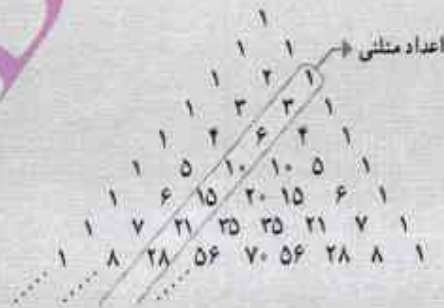
عددهای مثلثی

این اعداد در این مثلث قابل مشاهده اند و می توان یک الگو بر اساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به دست آورد.



عددهای مربعی

فَيَكُونُ كُلُّ مُرَبَّعٍ مِنْ مُثَلَّثٍ فِي دَرَجَتِهِ وَ مُثَلَّثٌ أَنْقَصَ مِنْ دَرَجَتِهِ بِوَاحِدٍ
مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه



مثلث خیام

چگونه می توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی از طریق مثلث خیام به دست آورید؟

درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها، همچنین با جمع و تفریق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم. کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. اگر صورت یا مخرج کسری، پس از ساده شدن، چند جمله‌ای نباشد، در این صورت آن عبارت گویا نیست.

فعالیت



عبارت‌های گویا را با و عبارت‌های غیر گویا را با مشخص کنید.

$$\sqrt{x^2+1} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}} \quad \text{[✓]}$$

$$\frac{x-3}{2x^2-3x+5} \quad \text{[✓]}$$

$$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{\sqrt{5x}}{x} \quad \text{[✓]}$$

$$x^2+3x-4 \quad \text{[✓]}$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{[✓]}$$

$$\sqrt{x} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{|x|}{x^2+2} \quad \text{[X]}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+2}{x-5}$ به ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قرار دادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

تهیه کننده:

به ازای $z = \frac{5}{3}$ تعریف نشده است. $z = \frac{5}{3}$ $3z = 5$ $z = \frac{5}{3}$ $3z - 5 = 0$ (الف)

به ازای $a = 2$ و $a = -2$ تعریف شده است. $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
 $a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$
 به ازای $a = 2$ تعریف شده است. $(a-2)(a+2) = 0$
 $a^2 - 4 = 0$ (ت)
 به ازای $a = -2$ تعریف شده است. $a^2 - 4 = 0$ (ت)
 به ازای $x^2 + 1 \neq 0$ (ج)

کار در کلاس 

کدام یک از عبارت های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت های گویا به ازای چه مفادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

- الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$ ✓
 ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x-3}}$ ✗
 ج) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$ ✓
 د) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$ ✓
 ه) $\frac{x\sqrt{x+1}}{3-x}$ ✗
 و) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$ ✓

ساده کردن عبارت های گویا

اگر a و b و k عددهایی حقیقی باشند؛ به طوری که $b, k \neq 0$ در این صورت داریم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k, b \neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k, k \neq 0$ کسر را ساده کرده ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\frac{ka}{k}}{\frac{kb}{k}} = \frac{a}{b}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می شود. (یادآوری می کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می زنیم باید مخالف صفر باشد.)

کار در کلاس 

۱. مانند نمونه های حل شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده ایم.

$$= \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

با شرط $x+3 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده ایم. توجه کنید که برای با معنی بودن کسر باید $x-3 \neq 0$ باشد.

$$= \frac{(x+3)}{(x-3)} \quad (\text{ساده شده کسر})$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد
تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر
را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

با شرط $x-1 \neq 0$ از صورت و مخرج
کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید
که برای بامعنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$
باشد.

$$= \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} \text{ (ساده شده کسر)}$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2-9}{4x^2+10x+6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+2)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$\text{ت) } \frac{x^3-8x}{2x^2-8x+8} = \frac{x(x^2-8)}{2(x^2-4x+4)} = \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)(x-2)} = \frac{x(x^2+2x+4)}{2(x-2)}$$

$$\text{ت) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 2x^3(x^2+4)^2}{x^4-16x^2}$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^2+y^2}{y^2} = \frac{2x^2+y^2}{y^2} = 2x^2+1$$

فقط اگر این عوامل صورت و مخرج
ضرب باشند می توان جملات را ساده کرد.

۳. فرض کنیم $x=1$ است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2=1$ است استدلال زیر
را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x=1$$

$$x^2=x$$

$$x^2-1=x-1$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x+1=1 \rightarrow 2=1$$

چون برعکس صفر تقسیم کرده است

$$\text{ت) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 2x^3(x^2+4)^2}{x^4-16x^2} = \frac{2x^3(x^2+4)^2 (3x^2 - 2(x^2+4))}{x^4(x^2-16)}$$

$$= \frac{2x^3(x^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(x^2-4)(x^2-4)} = \frac{2(x^2+4)(x^2-8)}{x(x^2-4)}$$

$$1) P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$$

$$5) \frac{A(x)}{P(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)^2} = (x+4) \quad , \quad \frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)(x+6)} = (x-1)$$

جمع و تفریق عبارات گویا

برای جمع و تفریق عبارات گویا باید «مخرج مشترک» گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارات گویا می آید.



فعالیت

چند جمله ای های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱. چند جمله ای های بالا را تجزیه کنید.

۲. عبارات مشترک در تجزیه این دو چند جمله ای را مشخص کنید. $x-1$

۳. عبارات غیر مشترک در تجزیه این دو چند جمله ای را مشخص کنید $(x+4)$

۴. حاصل ضرب عبارات مشترک با بزرگ ترین توان را در عبارات غیر مشترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید.

$$A(x) = (x-1)^2(x+4)$$

۵. عبارات $\frac{A(x)}{Q(x)}$ و $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ **بله**

۷. آیا می توانید مضرب های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟ **بله ***

۸. از بین مضرب های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیر x درجه کوچک تری دارد؟ $A(x)$

مضرب مشترک دو عبارت $(x+1), (x-1)$
چند جمله ای (x^2-1)
است. از طرفی $(x^2-1)^2$
با $(x^2-1)^2$ یا $(x^2-1)^2$
مضرب های مشترک این دو
عبارت هستند، اما (x^2-1)
مضرب مشترکی است که
نسبت به متغیر x از درجه
کوچک تر است.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چند جمله ای $P(x)$ و $Q(x)$ به طوری که نسبت به x از کوچک ترین درجه باشد، ابتدا هر یک از چند جمله ای ها را تجزیه می کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارات مشترک با بزرگ ترین توان در عبارات غیر مشترک را به دست می آوریم و آن را $A(x)$ می نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می کنیم.

$$1) \text{ مخرج } (x-1)^2(x+4)$$

$$2) \text{ مخرج } (x-1)^2(x+2)^2$$

$$3) \text{ مخرج } 7(x-1)^2(x+4)$$

$$4) \text{ مثال } (x-1)^2(x+2)(x+3)$$

* (V)



۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چند جمله‌ای‌ها را به دست آورید؛ به طوری که نسبت به متغیر a آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف) $P(x) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$
 $Q(x) = a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$

$P \cdot Q = (a+3)^2(a-3)$

ب) $P(x) = a^2 - b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b)$
 $Q(x) = a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$P \cdot Q = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

پ) $P(x) = a^2 + 2a^2 - 3a^2 = a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a-1)(a+3)$
 $Q(x) = a^2 + 8a^2 + 15a = a(a^2 + 8a + 15) = a(a+3)(a+5)$

اشتباه‌هایی (با پرده باشد)

جواب $= a^2(a+3)(a-1)(a+5)$

حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان
 حاصل ضرب عبارت‌های غیر مشترک

۲. برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخارج مشترک می‌گیریم. مخارج مشترک همان مضرب مشترک بین مخارج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به x است. در زیر مخارج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}$

مخرج کسراول $A(x) = x^2 + x = x(x+1)$

مخرج کسر دوم $B(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x-1)(x+1)^2$

مخرج مشترک $= x(x-1)(x+1)^2$

ب) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2}$ $P \cdot Q = (x-3)(x+2)$

مخرج کسراول $= x-3$

مخرج کسر دوم $= x+2$

ب) $\frac{1}{x^2 - 11x} + \frac{1+x}{x^2} + \frac{x+2}{x-2}$

مخرج کسراول $= x^2 - 11x = x(x^2 - 11) = x(x-2)(x^2 + 2x + 5)$

مخرج کسر دوم $= x^2$

مخرج کسر سوم $= x-2$

$P \cdot Q = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 5)$



فعالیت

عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

$$\text{مخرج مشترک} = x(x-1)(x+1)$$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{زیرا:}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x)}{(x-1)(x+1)(x)}$$

۳. همان طور که می بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده اند. در زیر این دو کسر را با هم جمع کرده ایم. جای خالی را پر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1) + x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x - 4 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$



کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x+1)(x-1)$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^2 - 1$$

$$* \text{ت}) \frac{2n+3}{2n-2} - \frac{5}{n^2-1} - \frac{2n-3}{2n+2} = \frac{2n+3}{2(n-1)} - \frac{5}{(n-1)(n+1)} - \frac{2n-3}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+3)(n+1) - 5(2) - (2n-3)(n-1)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2n^2+2n+2n+3-10-2n^2+2n+3n-3}{2(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{2n-10}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2(n-5)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{n-5}{(n-1)(n+1)}$$

$$\text{ب}) \frac{y+8}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} = \frac{y+8}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-2}{y(y+2)}$$

$$= \frac{(y+8)y}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2+8y+y^2-y-2y+2}{y(y+2)(y-1)} = \frac{2y^2+5y+2}{y(y+2)(y-1)}$$

$$\text{ب}) \frac{4+x^2-2x}{2+x} - \frac{x-2}{1} = \frac{4+x^2-2x+(-x-2)(2+x)}{2+x} = \frac{4+x^2-2x-2x-2x^2-4-2x}{2+x} = \frac{-x^2-4x-4}{2+x}$$

$$* \text{ت}) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2}$$

تمرین

۱. عبارت های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+4}$

پ) $\frac{5}{x^2+x}$

ن) $\frac{x^2+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$

ت) $\frac{3x^2y+6xy^2}{x^2}$

ج) $\frac{42a^3-3a^2m}{am^2-25a}$

ج) $\frac{b^2x^2-ab^2x^2}{a^2b^2x^2-a^2b^2x}$

ح) $\frac{x^2-n^2}{ax^2-a^2x}$

۲. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1$

ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1$

ب) $\frac{1}{m} + 1$

ت) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

ن) $\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x}$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

الف) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$ ①
 به ازای $x=1, x=-1$ تعریف نشده است.

ب) $x^2 + \epsilon \neq 0$ به ازای تمام اعداد تعریف شده است.

ج) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$
 به ازای $x=0, x=-1$ تعریف نشده است.

د) $x(x+1)(x^2-4) = 0 \rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2) = 0$
 $x=0$
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$
 $x-2=0 \Rightarrow x=2$
 $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
 به ازای $x=0, x=-1, x=2, x=-2$ تعریف نشده است.

ه) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

ز) $am^2 - 2da = 0 \rightarrow a(m^2 - 2d) = 0 \rightarrow a(m-d)(m+d) = 0$
 $a=0$
 $m-d=0 \Rightarrow m=d$
 $m+d=0 \Rightarrow m=-d$
 به ازای $m=d, m=-d, a=0$ تعریف نشده است.

ح) $a^2 b^2 x^2 - a^3 b^2 x = 0 \rightarrow a^2 b^2 x(x-a) = 0$
 $a^2 = 0 \Rightarrow a=0$
 $b^2 = 0 \Rightarrow b=0$
 $x=0$
 $x-a=0 \Rightarrow x=a$
 به ازای $a=0, b=0, x=0, x=a$ تعریف نشده است.

ط) $ax^3 - a^3 x = 0 \Rightarrow ax(x^2 - a^2) = 0 \rightarrow ax(x-a)(x+a) = 0$
 $a=0$
 $x=0$
 $x-a=0 \Rightarrow x=a$
 $x+a=0 \Rightarrow x=-a$
 به ازای $x=a, x=0, a=0, x=-a$ تعریف نشده است.

الف) $\frac{f}{g} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} + 1 = \frac{f(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2)} - \frac{cx(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2)} + \frac{1(1 + xy^2)}{1(1 + xy^2)} = \frac{xy^2 - cx^2 + 1 + xy^2}{1 + xy^2}$ (۲)

$$ب) \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1(x-1)}{1(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$د) \frac{\frac{1}{m} + 1}{m+1} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1(m)}{1(m)}}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{m+1} = \frac{1(1+m)}{m(1+m)} = \frac{1}{m}$$

$$ج) \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1(x-y)}{(x+y)} - \frac{1(x+y)}{(x-y)}$$

$$= \frac{2x + x - y - x - y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x - 2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$$

$$ح) \frac{x+3}{x^2-4x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{\Delta}{3-x} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(x+2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

$$- \frac{\Delta(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+4x+9 - x^2+x+4 + \Delta x^2 - \Delta}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{\Delta x^2 + 5x - 3}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$ز) \frac{y-3}{y^2-9} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-3)(y-2)}{(y-2)(y+2)(y-2)} - \frac{(y+2)(y+2)}{(y-2)(y+2)} - \frac{2(y-2)(y+2)}{-(y-2)(y-2)(y+2)}$$

$$= \frac{y^2-5y+6 - y^2-4y+4 + 2y^2-8}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{2y^2-9y-4}{(y-2)^2(y+2)}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



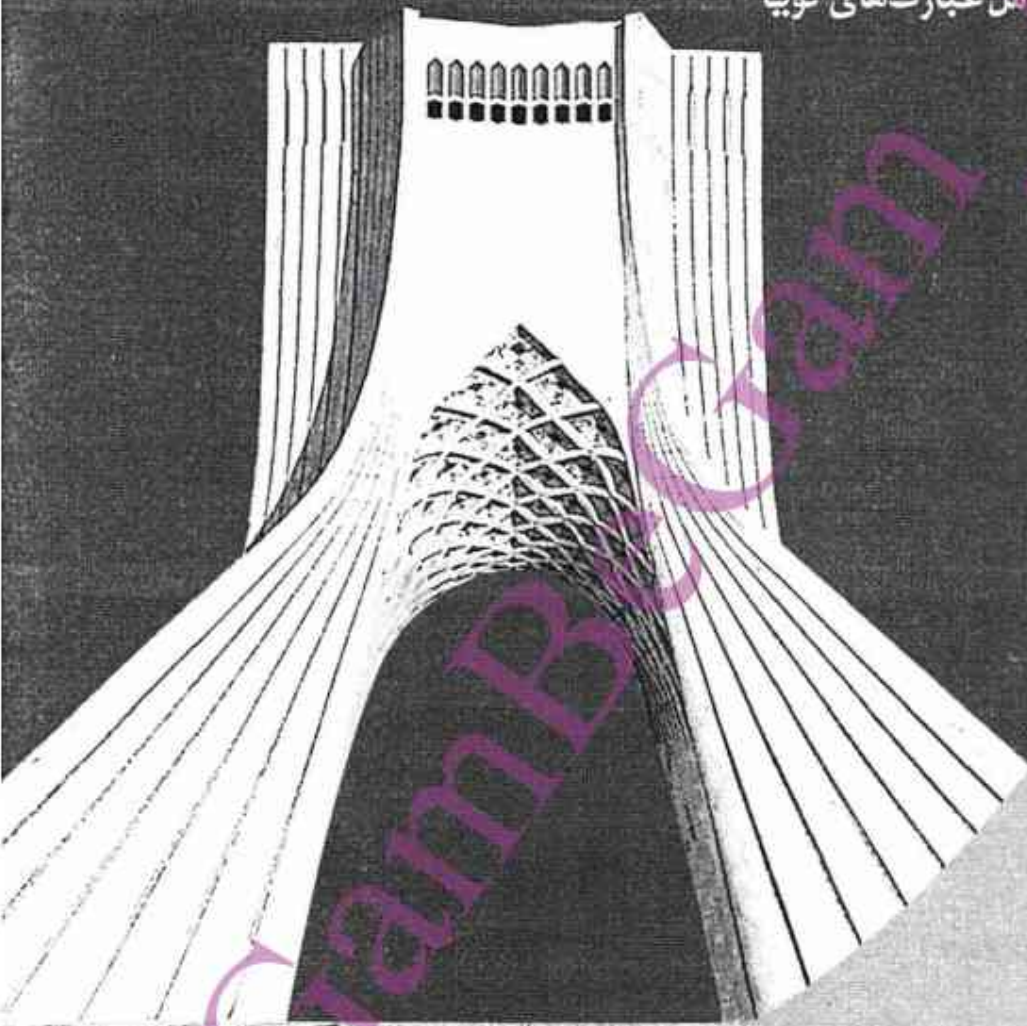
فصل دوم

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادلات شامل عبارتهای گویا



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ۱

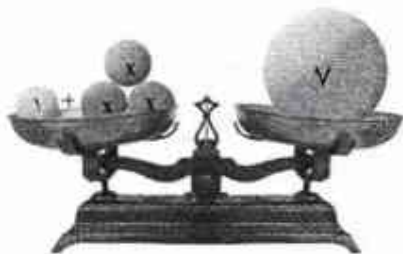
معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود. $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



$$1 + 3x = 7$$
$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

فعالیت



$x = ?$ عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند.

جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟) چون:

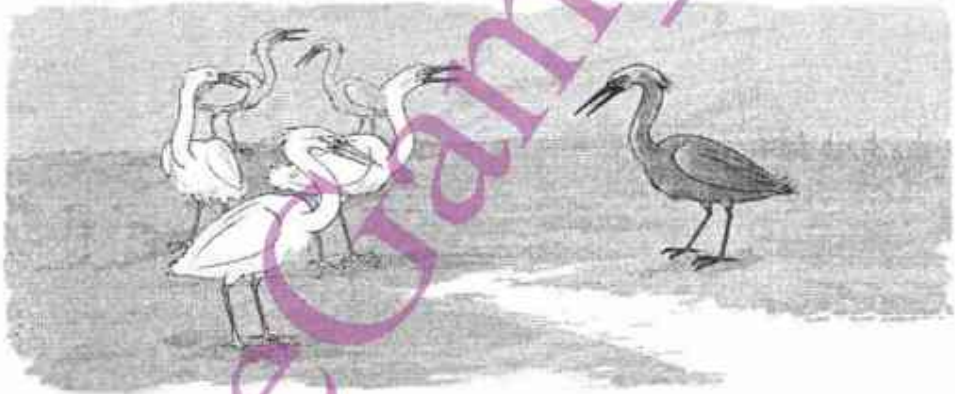
$$ax+b=0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

فرض کنید $a \neq 0$

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قسم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:
«ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما چهلگی صد می شویم.»
لطفاً به برنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد.
اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$1 = 100 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 100 \Rightarrow \frac{4}{4}x + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4}x = 100 \Rightarrow \frac{7}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{99 \times 4}{7} = 56.57$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ چون بزرگترین توان (درج) متغیر آن $(+)$ برابر یک است.

ضرایب a و b کدام اند؟
 $a = \frac{7}{4}$ و $b = -99$

* تشریحی از موافقت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

نصفه ای از نصف ما:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$$

جنگل حرا، جزیره قشم



حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در بهنه جلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مأسن بیش از ۲۲ برنده بومی و مهاجر است. حواصل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

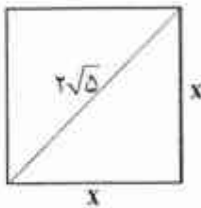


یادی از گذشته



زبانیه کتاب هم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.



به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

$$x^2 + x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

بنابراین:

$$2x^2 = \frac{2 \cdot 5}{1} \dots \Rightarrow x = \dots \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر $x = \sqrt{5}$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = \dots$$

معادله $2x^2 = 20$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



نیما از پسرعموش کیان سه سال بزرگتر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچکتر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر $x-3$ است. بنابراین:

$$x - 3 = 5 \quad (1)$$

$$x \times (x - 3) = 40$$

$$x - 3 = 5 \quad (2)$$

پس جواب $x=8$ و $x=5$ است.

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه ۲

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ این جواب در این سؤال معنی

دارد؟ خیر، $x = -5$ غیر قابل قبول است، چون سن نمی‌تواند عدد منفی باشد.

$$x = 8 \quad (1)$$

$$x - 3 = 8 - 3 = 5 \quad (2)$$



تمرین

۱) هر کدام از عبارات زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو، برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد. $5x + 2 = 3x - 2$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است. $x^2 = x + 1$

۲) در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (نکستین) و $\frac{2}{3}$

مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس

و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون

تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه

چقدر است؟



۳) با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود

را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع

تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

۴) اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

۵) حقوق یک مهندس $2x$ و حقوق یک فن‌ورز $\frac{2}{3}x$ است. حقوق مدیر $\frac{3}{2}x$ است. حقوق کل 55.5 میلیون تومان است. $3x + 2x + \frac{2}{3}x = 55.5$

۶) $31x \times 4 = 124$ هزار تن

۷) $15x \times 4 = 60$ هزار تن

۸) $x = 1.5$ میلیون تومان

۹) $x = 1.5$ میلیون تومان

x سن نیما و $x-3$ سن کیان
 $x-3$ سن نیما و x سن کیان

Handwritten notes and calculations for problem 3, showing the derivation of the equation $31x \times 4 = 124$ and the solution $x = 4$.

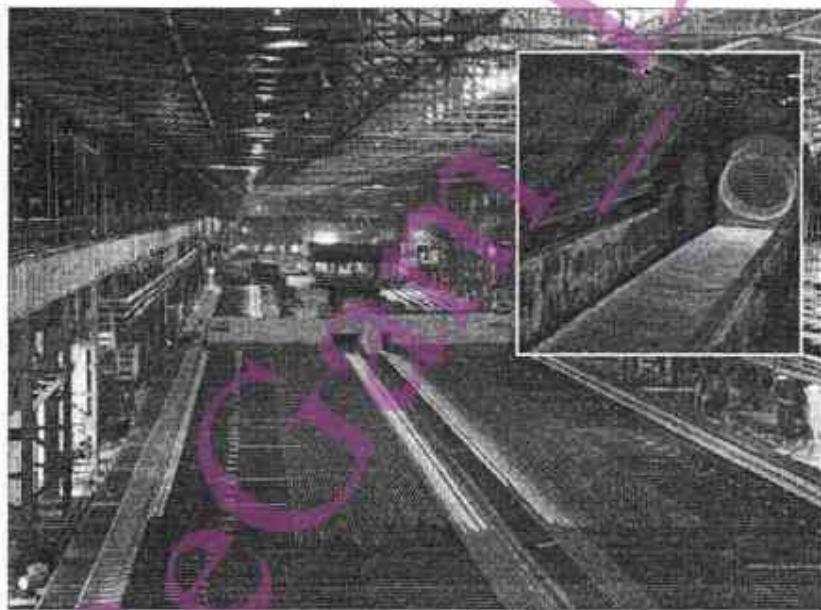
Handwritten notes and calculations for problem 4, showing the equation $3x + 2x + \frac{2}{3}x = 55.5$ and the solution $x = 1.5$.

تهیه کننده:

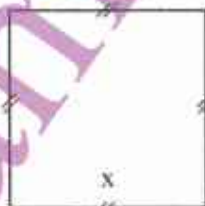
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کارخانه ذوب آهن اصفهان

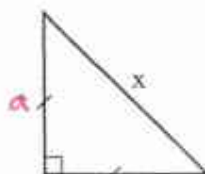
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طیس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره‌برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است. این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



۴) اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشند، طول ضلع مربع چقدر است؟ $x = ?$



شکل (۱)
مساحت مربع $= x^2$



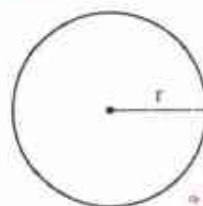
شکل (۲)

$$a^2 + a^2 = x^2$$

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\right)^2$$

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مجموع مساحت‌ها} = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	س
۱۵	ش
۱۶	ص
۱۷	ض
۱۸	ط
۱۹	ظ
۲۰	ع
۲۱	غ
۲۲	ف
۲۳	ق
۲۴	ک
۲۵	گ
۲۶	ل
۲۷	م
۲۸	ن
۲۹	ی
۳۰	...
۳۱	...
۳۲	...

بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت ax^n مشخص شده اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=4$) و دارای دو نقطه است ($n=2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{ج} & + & \text{ح} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 31 & + & 7x^2 & + & 29x & + & 22x & + & 31 \end{array}$$

معادل ریاضی غنچه $\rightarrow 22x + 29x + 7x^2 + 31$

حال با توجه به توضیح فوق:
۱- جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	الگوی ریاضی معادل آن
آب = آب	$2x^1 + 1x^1$
آب	$2x^3 + 1$
آب	$4x^2 + 12 + 11x$

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
 $4x^2 + 28 + 8 + 12 + 12 + 2x^1 + 28 + 1x^1 + 32 + 3x^3$

۳- آیا می توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

$$28 + 1x + 27 + 15$$

من دوست تو هستم $28 + 1x + 27 + 15 + 31 + 20 + 4x^2 + 4x^2 + 15 + 30 + 10 + 29x^1 + 28$

تهیه کننده:

معنی درازن قالی ۱۲۰۰ مربع ۷×۷ وجود دارد. $\frac{۲۸۰ \times ۲۱۰}{۷ \times ۷} = ۱۲۰۰$ مساحت قالی = مساحت مربع ۷×۷



تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷ = $\frac{۵,۸۸۰,۰۰۰}{۱۲۰۰} = ۴۹۰۰$ تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷

برای پیدا کردن تعداد گره‌های موجود در یک ضلع این مربع $\sqrt{۴۹۰۰} = ۷۰$

پس این قالی، به عرض دارد \rightarrow تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷۰ یعنی مربع ۷۰×۷۰ = مربع ۷۰×۷۰ \rightarrow یعنی مربع

۶) اگر در یک قالی با ابعاد $۲/۸۰ \text{ m} \times ۲/۱۰ \text{ m}$ (که عموماً ۲×۲ نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $۵,۸۸۰,۰۰۰$ عدد باشد: $۲/۸۰ \text{ cm}$ $۲/۱۰ \text{ cm}$ تبدیل به cm

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره ۱ cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟ $۵,۸۸۰,۰۰۰ \text{ cm} \div ۱۰۰ = ۵۸,۸۰۰ \text{ m}$

ج) یک قالی بافت حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی بافت ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟ $x = ۳۰۰۰۰$

د) اگر این قالی بافت برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۲۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی بافت برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

درآمد $۳۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۲۰۰,۰۰۰ = ۲۹,۴۰۰,۰۰۰$ $\div ۱۹۷ = ۱۴۹,۰۰۰$ $\div ۱۹۷ = ۱۵۰,۰۰۰$

میزان سود در یک هفته ۱۹۷ $\div ۱۹۷ = ۱۵۰,۰۰۰$ $\div ۱۹۷ = ۱۵۰,۰۰۰$



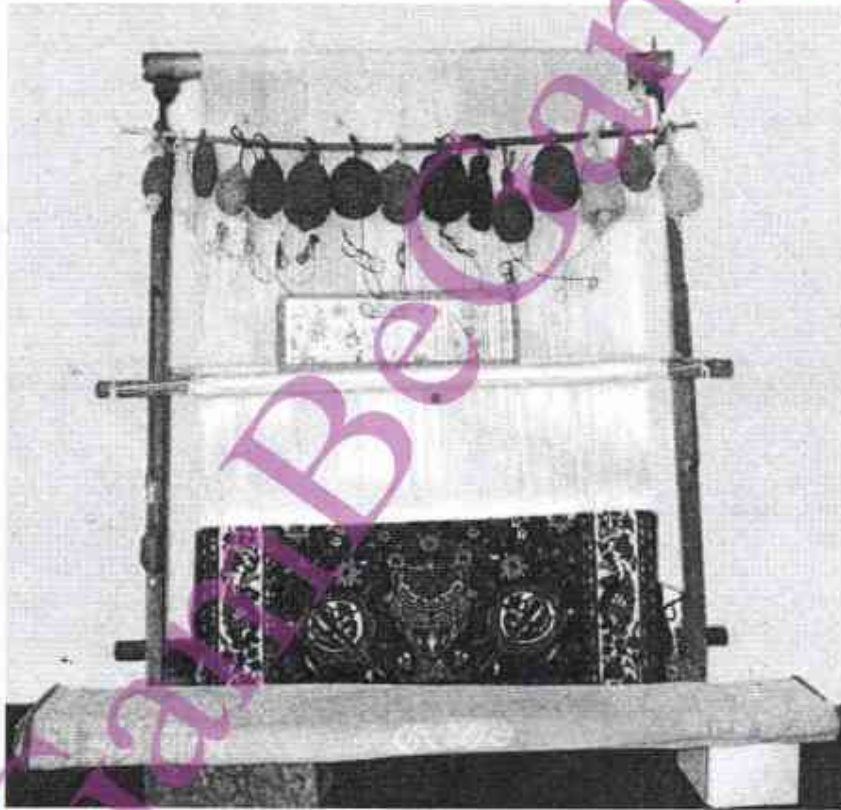
۷. فرج قالی عبارت است از تعداد گره‌های قالی در ۷ cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی ۵۰ رج، وجود ۵۰ گره در یک ضلع مربع ۷×۷ است.

رج قالی = تعداد گره‌های قالی در ۷ cm طول یا عرض قالی



صنعت قالی بافی

یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی بافی است. در این حرفه به نخ‌هایی که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نسج افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تار و پود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافته قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تار و پود قالی است.



درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

پس خلاف آنچه در «کار در کلاس های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است توان جواب های معادله درجه ۲ را حدس نزنیم.
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم.

روش اول: تجزیه عبارات های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارات های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می کنیم:

- اتحاد مربع دو جمله ای: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
اتحاد مربع دو جمله ای
- اتحاد مربع سه جمله ای: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
اتحاد مربع سه جمله ای
- اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- اتحاد جمله مشترک: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

فعالیت



دوم طرف دو تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خواننده شده کامل کنید:

الف) اتحاد مربع سه جمله ای: $(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

ب) اتحاد مزدوج: $(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$

ج) اتحاد مربع سه جمله ای: $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

د) اتحاد جمله مشترک: $x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$

نهیته کننده:

یادآوری:

شکل کلی معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$ (with $c=0$)	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$ ریشه مضاعف
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$ (with $b=0$)	روش ۱: $x^2 - 16 = (x-4)(x+4) = 0$ $\Rightarrow x = +4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -3$ یا $x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$ $(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 5$ ریشه مضاعف

در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ فاکتورگیری
- ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟ $a \pm 2ab + b^2$
- پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری ba در چه شرطی صدق می‌کند؟ $b = 0$
- آیا علامت‌های a و c مهم است؟ بله - باید مختلف علامت باشند.
- ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟ اتحاد مربع دو جمله‌ای
- ۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
 $(x + \sqrt{2})^2$

$x^2 + 9 = 0$ و $-x^2 - 5 = 0$

تهیه کننده:

① جواب (الف) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$ یا $x = -2$
 (روش دوم: تفاضل گیری)

(ب) $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$ یا $x = -1$
 $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$ یا $x = -1$

(پ) $x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$
 $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
 $x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2}$ یا $x = -\sqrt{2}$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
 اتحاد مربع کامل

$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$

$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0$

$x = \frac{1}{2}$ یا $x = \frac{1}{2}$

ریشه مضاعف

(روش دوم: ضرب طرفین در 4 و بعد استفاده از اتحاد مربع مشترک)

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

$2x(x - 4) = 0$

$x = 0$ یا $x = 4$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0$

$x = 3$ یا $x = 2$

(د) $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$x = 0$ یا $x = 3$

(ه) $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{5}{2}}$ یا $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

(و) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$

$x = -2$ یا $x = -2$

(ز) $9x^2 + 2x - 2 = 0$

$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$

$(3x + 1)(3x - 2) = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ یا $x = \frac{2}{3}$

(ح) $(x - 3)^2 = 4$

$x - 3 = +2$ یا $x - 3 = -2$
 $x = 5$ یا $x = 1$

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:
 $-4 \otimes + 1 = -4 \checkmark$ یا $+4 \otimes - 1 = -4 \checkmark$
 $-4 \oplus + 1 = -3 \checkmark$ یا $+4 \oplus - 1 = +3 \checkmark$
 $+2 \otimes - 2 = -4 \checkmark$ یا $+2 \oplus - 2 = 0$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$\Rightarrow (x - 1)(x + 4) = 0$

$\Rightarrow (x - 1) = 0$ یا $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -4$

۲) $4x^2 - (2 - x)^2 = 0$

(۲x)

با استفاده از اتحاد مربع عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (4x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ یا $x = -2$

$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

تمرین



۱) معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $2x^2 - 8 = 0$ (ب) $(x+2)(x-3) = x-2$ (ج) $x^2 - 2x^2 = 0$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$ (ث) $2x^2 - 8x = 0$ (ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(د) $\frac{x^2}{3} = x$ (ح) $x^2 = 5 - x^2$ (خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(ذ) $(x-3)^2 = 4$ (د) $9x^2 + 2x - 2 = 0$

۲) از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24 cm^2 است.

طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

مساحت مربع = $6 \times 6 = 36$
 مساحت مربع کوچک = x^2
 مساحت دو مثلث = $2 \times (\frac{1}{2} \times x \times x) = x^2$
 مساحت باقی مانده = $36 - x^2 - x^2 = 36 - 2x^2 = 24$
 $36 - 2x^2 = 24 \Rightarrow 2x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$36 - 2x^2 = 24$
 $-2x^2 = 24 - 36$
 $-2x^2 = -12$
 $x^2 = 6$
 $x = \pm\sqrt{6}$

۳) معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ و $x = -3$ جواب‌های آن باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$x = 2$ یا $x = -3$

$x - 2 = 0$ یا $x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

جواب ۴) $x=1$ یا $x=1$
 $x-1=0$ یا $x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0$
 $x^2-2x+1=0$

جواب ۵) مستقیم الف) $k=2 \rightarrow (x-1)^2=2$
 $x-1=+\sqrt{2}$ یا $x-1=-\sqrt{2}$
 $x=1+\sqrt{2}$ یا $x=1-\sqrt{2}$

۴) معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ بله
 ۵) در معادله $(x-1)^2=K$:

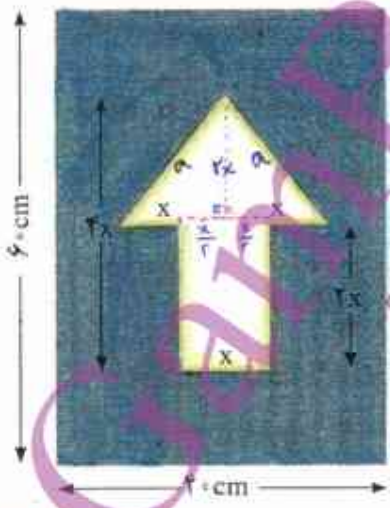
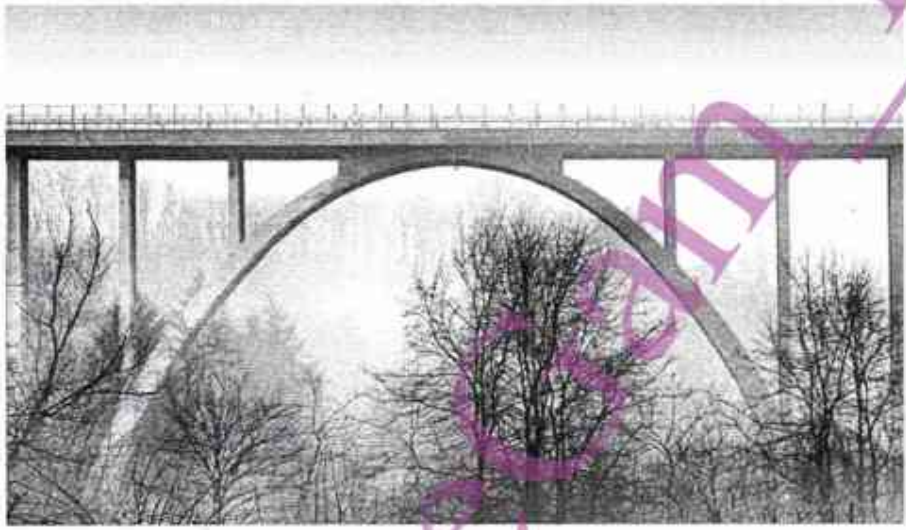
$k=4 \rightarrow (x-1)^2=4$
 $x-1=+2$ یا $x-1=-2$
 $x=3$ یا $x=-1$

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2, K=4, K=0, K=-1$ به دست آورید.
 ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟ $k=0$
 پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟ $k > 0$ (مقادیر مثبت k)
 ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟ $k < 0$ (مقادیر منفی k)

$k=0 \rightarrow (x-1)^2=0$
 $(x-1)(x-1)=0$
 $x=1$ یا $x=1$
 ریشه مضاعف

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک بل، مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید 30 تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی 10 تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی $27,000$ تومان شده است.

$k=-9 \rightarrow (x-1)^2=-9$
 سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی نمیگردد یا اینکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند پس معادله جواب ندارد.



الف) اندازه x چقدر است؟
 ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رویه رو از خطوط برجسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلوی $34,800$ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

مساحت مثلث + مساحت مستطیل = مساحت کل (الف)
 $= \frac{1}{2} \times 4 \times x + 4 \times 2 = 2x + 8 = 5x^2$
 هزینه برجسب آبی 10 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلوی $34,800$ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟
 $10 \times 5x^2 = 34,800 \Rightarrow 50x^2 = 34,800 \Rightarrow x^2 = 696 \Rightarrow x = \pm \sqrt{696}$

$1500x^2 + 24000 - 500x^2 = 27000$
 $1000x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = +\sqrt{3}$

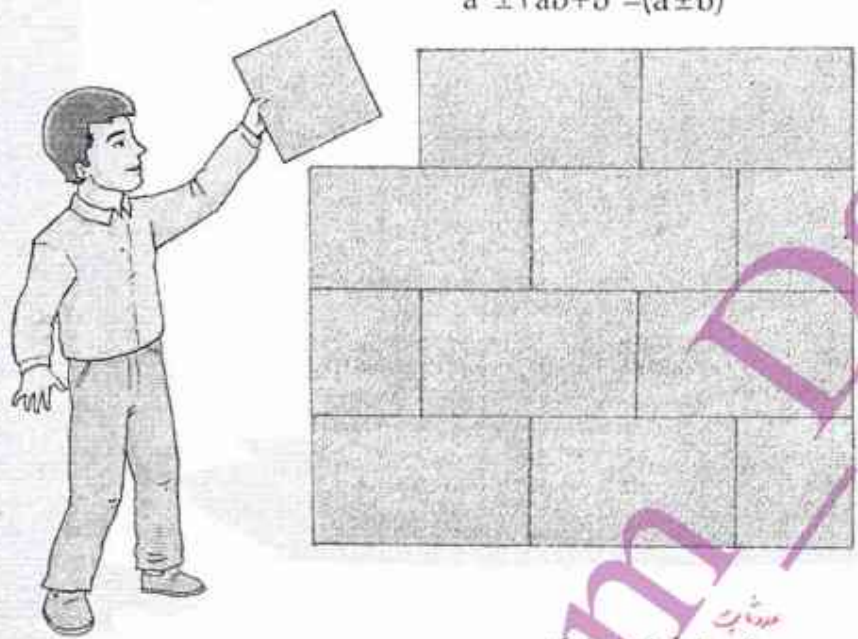
$(24000 - 500x^2) \times 10 = 27000 - 500x^2$

ب) هزینه $12x \times 100 = 1200x$
 $1000x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x+18)(x-9) = 0$
 $x = -18$ یا $x = 9$

$a^2 = (x + \frac{10}{x})^2 + (2x)^2$
 $a^2 = \frac{100}{x^2} + 4x^2 + 4x^2 = \frac{100}{x^2} + 8x^2$
 $a = \pm \frac{10}{x}$
 $a = \frac{10}{x}$

روشن دوم مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

همیشه جلالت مثال در اهمیت استادی باشد.

ابتدا قرینه عدد ثابت معادله: یعنی $... + 5$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = 5 \quad (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

اگر ضریب x^2 مخالف 1 باشد، دو طرف معادله را به ضریب x^2 تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را بر عدد 2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2 + 3x}{2} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

در عبارت $\frac{3}{2}x$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله ای $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله $2ab$ ، $\frac{3}{2}x$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم:

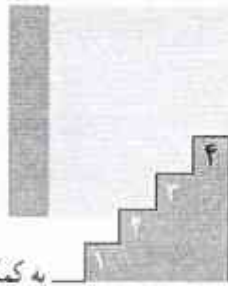
$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (2) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (3)$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۲) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 a^2 $b \times a$ b^2 $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (۴)$$

با استفاده از ریشه‌گیری از طرف تساوی، مقدار x به دست می‌آید:

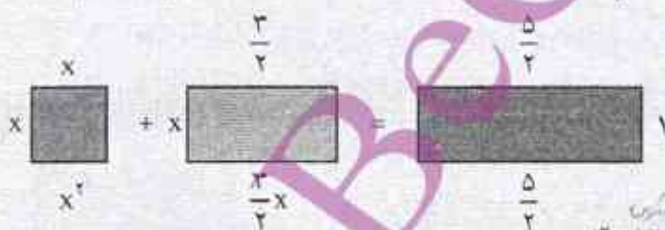
$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

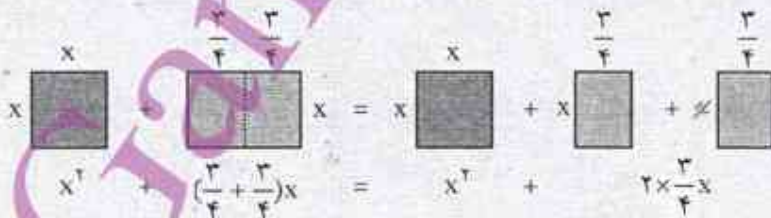
$$x = -\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad x = 1 \quad \text{هستند.}$$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی زیر نیز می‌توان بیان کرد:

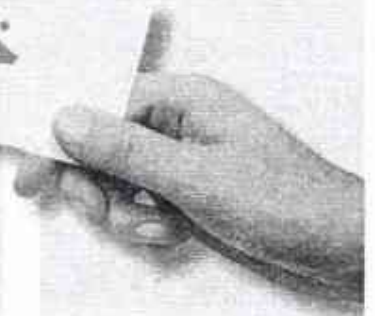
اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{2}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{2}$ و عرض x در نظر بگیریم:



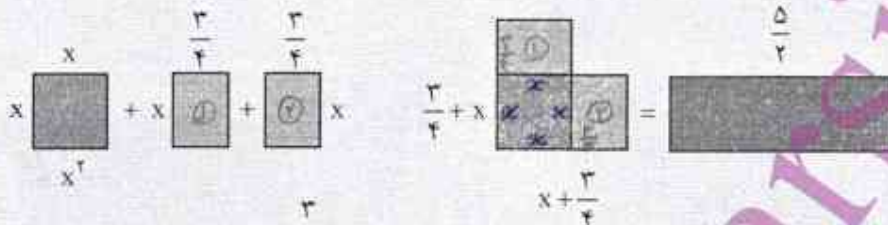
- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{2}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۲):



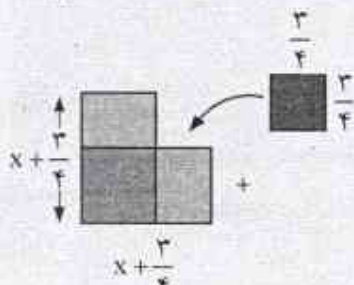
خواندنی



و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع x^2 ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:



شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ دارد.



به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:



$$(x + \frac{3}{4})^2 = x^2 + 2x + \frac{9}{16} = \frac{49}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x = 1$ و $x = -\frac{5}{4}$ است البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x = -\frac{5}{4}$ معنی پیدا نمی کند.

نسبتاً حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد! اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رایرت جستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

حیدر طریفی



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

1) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

$2x^2 - 4x + 2x - 1 = 0 + 1$

$\frac{2x^2 - 6x - 1}{2} = \frac{1}{2}$

$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$

$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$
 $x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$
 $x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$
 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

مسابقه

2) $2x^2 - 2 = 6x$

$\frac{2x^2 - 6x - 2}{2} = \frac{2}{2}$

$x^2 - 3x = 1$

$x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{4}$
 $x^2 - 2x + 1 = \frac{13}{4}$

$(x-1)^2 = \frac{13}{4}$

$\begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$



$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$
 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{cases}$



اضافه کردن هر دو طرف
 $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 - 4$

برای آنکه
 $x^2 - 2(\frac{5}{2}x) = -4 \rightarrow x^2 - 2(\frac{5}{2}x) + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4}$
 $(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$
 $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$
 $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

افزودن هر دو طرف
 $(-)(x^2 + 2x - 2 = 0) \rightarrow x^2 + 2x - 2 + 2 = 0 + 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x = 2$
 $x^2 + 2(\frac{1}{4}x) = 2 \rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{4}x) + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$
 $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
 $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{4} \rightarrow x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$
 $x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$
 $x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$

ب) $x^2 + \frac{1}{4}x = -x \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4}$
 $x^2 + 2(\frac{1}{4}x) = -\frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{4}x) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = 0 \rightarrow (x + \frac{1}{4}) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$
 بر مبنای آنکه
 ریشه مضارب است



ت) $x^2 + 4x + 9 - 9 = 0 - 9 \rightarrow x^2 + 4x = -9 \rightarrow x^2 + 2(\frac{4}{2}x) = -9$
 $x^2 + 2(\frac{4}{2}x) + 4 = -9 + 4$
 $(x + 2)^2 = 0 \rightarrow (x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$

معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.
 الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 ب) $x^2 + \frac{1}{4}x - 3 = 0$
 ج) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 د) $x^2 + 3x - 2 = 0$

از آنجا
 $(x + 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

۱- فرقیته عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:
 $ax^2 + bx = -c$ (۱)
 $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$
 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ (۲)

۲- دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می کنیم:
 ضرب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده: یعنی $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

۳- عبارت سمت چپ تساوی (۲) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:
 $x^2 + 2(\frac{b}{2a})x = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$ (۳)

۴- $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

۵- با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه گیری از ۲ طرف تساوی:

$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تهیه کننده:

دلتا

عبارت $b^2 - 4ac$ را بین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟) چون اعداد حقیقی، ریشه دوم ندارند.

فعالیت



۱) جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 2$ است.
بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

۲) جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن: $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۱. چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

بهرت است
شایدی از معادلاتی که یاد کرده
ریشه و یا Δ که جزو مباحث می باشد
حل شود.
همین مثال برای $\Delta = 0$ و
داشتن ریشه مضاعف حل شود.

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

معادله ۲ ریشه دارد.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$

معادله ۲ جواب دارد.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2(4)}$

$x_1 = -\frac{7}{4} \quad x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4} + 1 = -\frac{3}{4} = -\frac{b}{a}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

۳) جواب های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن $a=3 \quad b=1 \quad c=7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

کار در کلاس



معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه ها و ضرایب a, b, c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح / حل مسئله / کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می شوند:

تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$ هزینه - درآمد (فروش) = سود

فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده اید و پس از آزمایش ها و تأییدهای اولیه می خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه های شما شامل ۲ بخش اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه های کارخانه و تبلیغات.
۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.



دوگانه اولی برای سودی: ۷ میلیون تومان

هزینه تولید هر دوچرخه: ۱۱ میلیون تومان

استعمال باقی ۷۰,۰۰۰

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $70000 - 200v$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

■ حل:

$$R(x) = \text{درآمد} = (\text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه}) = (70,000 - 200v) \times v = 70,000v - 200v^2$$

$$C(x) = \text{هزینه} = \text{هزینه اولیه} + \text{هزینه تولید} = 110,000 + (70,000 - 200v)v = 110,000 + 70,000v - 200v^2$$

$$P(x) = \dots\dots\dots$$

مسئله دوم:

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -0.004x^2 + 11.15x - 100$ به دست می آید.

$$x=0 \Rightarrow P(0) = -7004.5x^2 + 11.15x - 100$$

$$P(0) = -100$$

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد.

چقدر از دست می دهد؟

ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک دستگاه

اقتصادی را نشان می دهد که در

آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها

برابر می شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.



در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

برای کارگاه سودآور است؟ کسب بشیر، یعنی ۲۰۰۱ آیین چتر

$$P(x) = 0 \text{ در نقطه سر به سر} \\ -7004.5x^2 + 11.15x - 100 = 0$$

$$\Delta = (11.15)^2 - 4(-7004.5)(-100) = 44,8025 < 0 \text{ معادله آرتیبه دارد}$$

$$x = \frac{-11.15 \pm \sqrt{44,8025}}{2(-7004.5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \approx 12, 242 \text{ غ} \\ x = 2000 \end{array} \right.$$

$$x = 2000$$

حل 1) $x^2 - x + 5 = 0$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$ معادله ریشه ندارد.

2) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
 $\Delta = (-3)^2 - 4(4)(1) = 9 - 16 = -7 < 0$ معادله ریشه مضامین ندارد.

3) $2x^2 - x + 2 = 0$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(2) = -15 < 0$ معادله ریشه ندارد.

4) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 7$

$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$

$x_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ و $x_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

2) $2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0$ معادله ریشه دارد.

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ و $x = -1$

4) $x^2 + 17x - 18 = 0$

$\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 341 > 0$ معادله ریشه دارد.

$x = \frac{-17 \pm \sqrt{341}}{2}$ $\Rightarrow x = 1$ و $x = -18$

تمرین



1) معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

2) $2x^2 + x - 1 = 0$

1) $x^2 - x + 5 = 0$

4) $x^2 + 17x - 18 = 0$

3) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

6) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

5) $2x^2 - x + 2 = 0$

2) معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ به دست آورید.

$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$ و $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} = \frac{c}{a}$

3) اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟ $a = -10$

$2x^2 + 15x + 28 = 0$

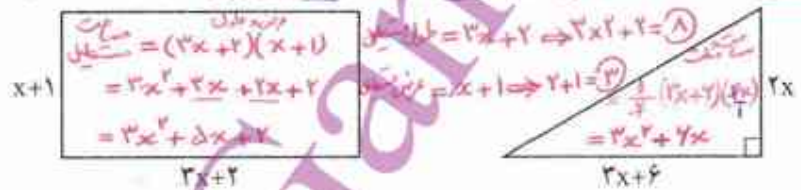
$\Delta = 1 > 0$ معادله ریشه دارد.

$x = \frac{-15 \pm 1}{4}$ ریشه‌ها معلوم.

$x_1 = -4$ و $x_2 = \frac{7}{2}$ ریشه‌ها دارد.

4) مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

$3x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x = 2$



5) کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$
 الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(-1) = a^2 + 4 > 0$
 ب) $x^2 - x + a = 0$ $\Delta = 1 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$

6) نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

7) با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

$x_1 \times x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\Delta)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

8) نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a-c)^2$
 $\Delta = (a-c)^2 \geq 0$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm (a-c)}{2a}$
 $x = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} \Rightarrow x = 1$ و $x = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} \Rightarrow x = \frac{c}{a}$

حل تمرین‌های ستاره دار اجباری نیست.

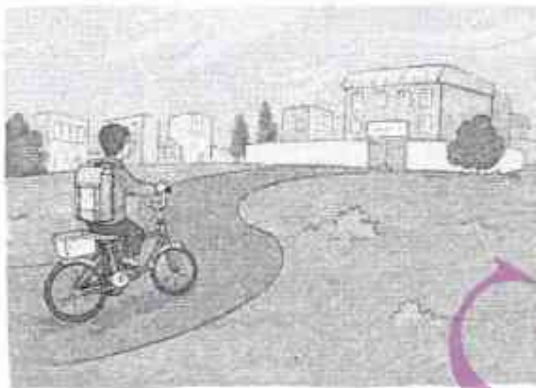
ترجمه در حل تمرین 8، می‌توان معادله را متن صدبار محمول a از مجموع ضرایب معادله ریشه‌ها، برای یافتن ریشه دوم استفاده کرد.

جواب 7) $\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $\Delta = (a-c)^2 \geq 0$ معادله ریشه دارد.
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm (a-c)}{2a}$
 $x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a}$ و $x = \frac{-a-c+a+c}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$

درس ۳

معادلات شامل عبارتهای گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۲ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۲۱۵
۱۵
۱۴

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

$$15 = \frac{25}{t}$$

۲. برای $15 = \frac{25}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{25}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معنایست. برای حل این معادله، دو طرف را با -15 جمع کنید.

$$\frac{25}{t} - 15 = 15 - 15 \Rightarrow \frac{25}{t} - 15 = 0$$

۳. با منفرجه مشترک‌گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{25}{t} - \frac{15t}{1t} = 0 \Rightarrow \frac{25 - 15t}{t} = 0$$

۴. کسری که منفرجه آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود. بنابراین

$$25 - 15t = 0$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

$$25 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 25 \Rightarrow t = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$t = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$



دستور: $4 + 10 \times 2 = 14 \times 2$
 زمان مربوط به رکاب زدن از در منزل تا سر خیابان اصلی
 از خیابان اصلی تا مدرسه

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟) چون تقسیم عدد بر صفر تعریف نشده است.

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن 2 به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8 + x^2-7x+5 + x^2+2x-8}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+2x-11}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow 3x^2+2x-11=0$$

مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

معادله درجه دوم: $x^2 - 2x + 8 = 0$
 $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(8) = 4 - 32 = -28 < 0$ معادله درجه دوم
 جواب (الف): $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

جواب (ب): $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$
 $\frac{x^2 + x - 6}{(x-4)(x+3)} - \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

جواب (ب): $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$
 $\frac{24(10-m) + 1(10-m)(10+m)}{(10+m)(10-m)} = \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)}$
 $240 - 24m + 100 - m^2 - 24m = 240 + 24m$
 $-m^2 - 48m + 100 = 0$
 $\Delta = (-48)^2 - 4(-1)(100) = 2304 + 400 = 2704$
 $\Delta = 52 > 0$ معادله درجه دوم دارد
 $m = \frac{+48 \pm \sqrt{2704}}{-2} = \frac{48 \pm 52}{-2}$
 $m = -50 \quad \vee \quad m = 2$

حل: $x=1$ را در معادله قرار می دهیم و سپس مقدار a را بدست می آوریم.

$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1) - 2}{(a+1)} = 0$

$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسرهای معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی کنند، پس هر دو قابل قبول اند.

کار در کلاس



الف) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

ب) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = \frac{y-1}{3-y}$

ت) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

جدید مسئله کاربرد در معادله عبارات دایره گویا دارند



۱) گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟
 حل: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با $9x$ است.
 اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x + 100$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جواب (ت): $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = \frac{y-1}{3-y}$
 $\frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y-1}{3-y}$
 $\frac{y^2 - y - 6}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y-1}{3-y}$
 $\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y+3)(y-3)} = \frac{y-1}{3-y}$
 $\frac{-y-6}{(y+3)(y-3)} = \frac{y-1}{3-y}$
 $\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-1)(y+3)}{(y-3)(y+3)}$
 $\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{(y-3)(y+3)}$
 $\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{(y-3)(y+3)}$
 $-y-6 = y^2 - 2y - 3$
 $\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(4) = 4 + 16 = 20$
 $\Delta = 20 > 0$ معادله درجه دوم دارد
 $y = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2}$
 $y = \frac{2 - \sqrt{20}}{-2} \quad \vee \quad y = \frac{2 + \sqrt{20}}{-2}$

جواب (ت): $x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$
 $\frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$
 $\frac{2}{a-2} - \frac{1 \cdot (a-2)}{1 \cdot (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{4-a}{(a-2)} = 0 \Rightarrow a=4$

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}} = \frac{4}{5}$ پس داریم:

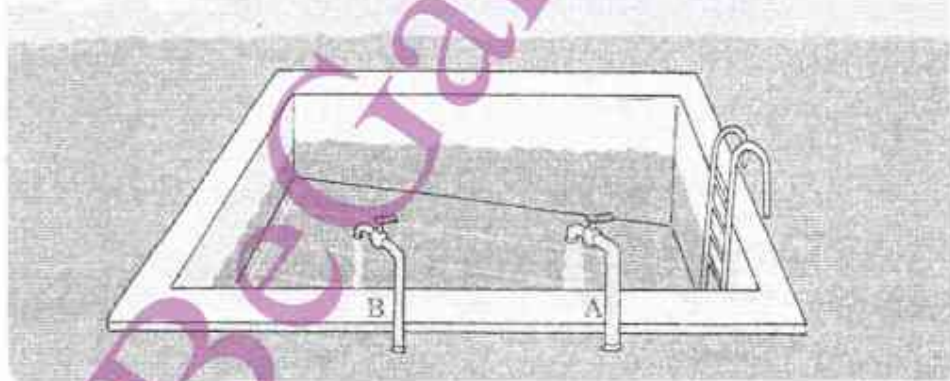
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (9x+100) \neq 0 \quad (\text{با شرط})$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است. در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 900 گرم است.

۲) دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را 10 ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در 12 ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم. پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پر می شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12(x-10) + 12x - x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 24x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 24x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x^2}{12x(x-10)} = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 24x + 120 &= 0 \\ (x-20)(x-6) &= 0 \\ x=20 \quad \& \quad x=6 \end{aligned}$$

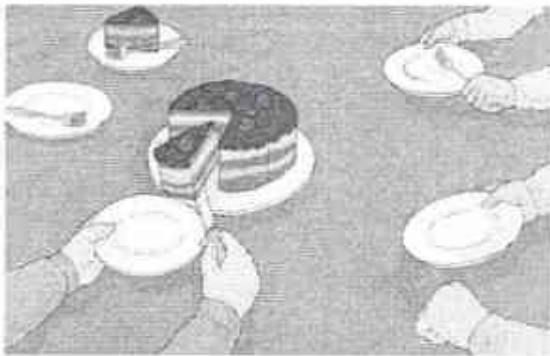
با بررسی Δ

$$\Delta = 24^2 - 4(-1)(-120) = 474$$

معادله 2 ریشه دارد.

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{474}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=6 \end{cases}$$

(یعنی شیر B استخر را در 20 ساعت پر می کند و شیر A در 10 ساعت و در صورتی که هر دو شیر را با هم باز کنیم، استخر در 12 ساعت پر می شود.)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

■ حل: فرض کنید در ابتدا n نفر بوده اند؛ بنابراین به هر یک $\frac{1}{n}$ کیک رسید. در مرحله بعد به هر یک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1 \cdot (n+1) - 1 \cdot n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ به دست می آید.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \rightarrow (n+3)(n-2) = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-6) = 25$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -3 \end{cases}$$



معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

۴) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

۵) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

۶) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۷) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{14}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸) هنگامی که دو جابگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت جاب می شود. اگر جابگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به جابگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از جابگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۹) به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{2t^2+k}{(t^2+1)^2-6t}$ دارای جواب $t=2$ است.

$$t=2 \Rightarrow \frac{4-2}{2-4} = \frac{2(2)^2+k}{(2^2+1)^2-6(2)}$$

۱. این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (یکبار)، کلمه درهم آمده است.

$$\frac{2}{-2} = \frac{2(4)+k}{(4+1)^2-12} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{2(4)+k}{25-12} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{8+k}{13} \Rightarrow 2(13) = -2(8+k) \Rightarrow 26 = -16-2k \Rightarrow 42 = -2k \Rightarrow k = -21$$

جواب ۷) $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+3} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{1 \cdot (k+3) + 1 \cdot k}{k(k+3)} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{k+3+k}{k(k+3)} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{2k+3}{k(k+3)} = \frac{5}{11} \rightarrow 11(2k+3) = 5k(k+3) \rightarrow 22k+33 = 5k^2+15k \rightarrow 5k^2-7k-33=0$

معادله ۲ درجه دارد $\Delta = 14^2 - 4(-5)(-33) = 272 > 0$

$k = \frac{-(-7) \pm \sqrt{272}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm \sqrt{272}}{10} \rightarrow k = \frac{7 + \sqrt{272}}{10}$ و $k = \frac{7 - \sqrt{272}}{10}$

جواب ۸) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1 \cdot (x+3) + 1 \cdot x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \rightarrow 4(2x+3) = x(x+3) \rightarrow 8x+12 = x^2+3x \rightarrow x^2-5x-12=0$

$-x^2 + 5x + 12 = 0$
 $\Delta = 25 + 48 = 73$
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-1}$

① $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

$\frac{(3x-5) \cdot 1}{(x+3) \cdot 1} - \frac{1 \cdot (x+3)}{1 \cdot (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x-5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

② $\frac{4x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

$\frac{(4x-2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3)} + \frac{(2x+5) \cdot x}{(x+3) \cdot x} - \frac{5 \cdot x \cdot (x+3)}{1 \cdot x \cdot (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2+12x-2x-6}{x(x+3)} + \frac{2x^2+5x}{x(x+3)} - \frac{5x^2+15x}{x(x+3)} = 0$

$\frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow x=-2$

③ $\frac{y}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

$\frac{y+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{(x+2) \cdot 1}{(x+2) \cdot 1} - \frac{(x+3) \cdot (x+2)}{1 \cdot (x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$

$-x^2-4x-4=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$ غلطی چون زوج کسرها همزن کند

$\frac{y+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow x=-2$ غلطی چون زوج کسرها همزن کند

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

④ $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

$\frac{(x^2-2x+2) \cdot 1}{x(x-2) \cdot 1} - \frac{(1+x) \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} - \frac{(x-1) \cdot x}{(x-2) \cdot x} = 0$

$\frac{x^3-2x^2+2x-x^2+2x^2-x^2+x-2x+2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x=-2 \Rightarrow x=2$ غلطی چون زوج کسرها همزن کند

⑤ $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x-2}$

$\frac{3 \cdot (x+2)(x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} - \frac{2 \cdot (x-1)(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-2)} - \frac{4 \cdot (x-1)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+2)} = 0$

$\frac{3x^2-6x-12-2x^2+4x-4-4x^2-8x-8}{(x+2)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2-2x-14}{(x+2)(x-1)(x-2)} = 0$

$-3x^2-2x-14=0 \Rightarrow 3x^2+2x+14=0 \quad \Delta = 2^2 - 4(3)(14) = 4 - 168 = -164$

$\Delta = -164 < 0$
معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{y} \frac{11}{x^2-3} + \frac{x+3}{\frac{3-x}{x-2}} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad \text{پس معادله جواب ندارد.}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBeGam - Darsi

سوالات تکمیلی ریاضی و آمار دهم انسانی
(فصل دوم : معادله ی درجه ی دوم)

۱- معادله های درجه ی دوم زیر را به روش خواسته شده حل کنید :

الف) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(روش تجزیه)

ب) $x^2 + 10x - 11 = 0$

(روش مربع کامل)

ج) $5x^2 - 3x + 7 = 0$

(روش کلی)

۲- اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله ی درجه ی دوم در ستون بعدی است ، با یک خط به یکدیگر وصل کنید . سپس معادله ها را در ستون آخر حل کنید .

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
عامل یابی (فاکتورگیری)	$9x^2 - 25 = 0$	
اتحاد مربع دو جمله ای	$3x^2 + 9x = 0$	
اتحاد مزدوج (روش ریشه گیری)	$x^2 - 10x + 16 = 0$	
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 8x + 16 = 0$	

۳- معادله ی $(x+4)^2 = a$ ، به ازاء چه مقادیری از a :

ج) ریشه ی حقیقی ندارد

ب) دو ریشه ی حقیقی دارد

الف) ریشه ی مضاعف دارد

۴- معادله ی درجه دومی بنویسید که $x = -3$ ریشه ی مضاعف آن باشد .

۵- اگر x_1, x_2 ریشه های معادله ی $\Delta x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند ، بدون حل معادله ، مجموع و حاصلضرب ریشه ها را به کمک فرمول به دست آورید .

۶- معادله ی درجه ی دومی بنویسید که :

الف) ریشه ی مضاعف دارد ب) دو ریشه ی حقیقی دارد ج) ریشه ی حقیقی ندارد

۷- به کمک اتحادها ، جاهای خالی را با جمله ی مناسب کامل کنید :

الف) $(2x + \dots)^2 = 25y^2 + 4x^2 + 20xy$

ب) $(xy - 3)(xy + 8) = x^2y^2 + \dots - 24$

ج) $\left(\Delta x - \frac{1}{4}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{16}$

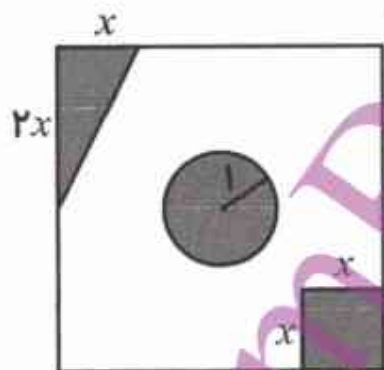
د) $(2x + y)(\dots - \dots) = 4x^2 - \dots$

هـ) $(3 - \dots)^2 = \dots - 12xy + \dots$

و) $(x + 4)(x - \dots) = x^2 + \dots - 12$

ز) 96×104

۸- در زمینی مربعی شکل به ضلع $10m$ سه باغچه ی کوچک به شکل زیر ساخته شده است . مساحت زمین باقیمانده $85m^2$ است . طول x را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۹- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $4\sqrt{2}$ است .

۱۰- مجموع معکوس دو عدد فرد طبیعی متوالی $\frac{12}{35}$ است . آن دو عدد را پیدا کنید .

۱۱- معادله های کسری زیر را حل کنید .

الف) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$

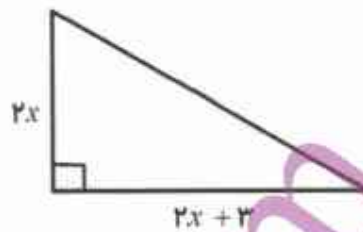
ب) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$

ج) $\frac{x^2+4}{x} = 5$

د) $2x-1 = \frac{3x}{1-x} + 2$

۱۲- به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{1}{x-2} + \frac{\lambda}{m} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱۳- مساحت دایره و مثلث با هم برابر است . قاعده و ارتفاع مثلث و شعاع دایره را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۱۴- تعداد جواب های معادله های زیر را فقط تعیین کنید .

الف) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

ب) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

ج) $x^2 + 1 = 0$

د) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

۱۵- نام اتحادهای زیر را نوشته و سمت راست آن ها را بنویسید .

الف) $(x-5)(x+5) = \dots$

ب) $(2x+x^2)^2 = \dots$

ج) $(3x-2)(3x+7) = \dots$

د) $(a-7)^2 = \dots$

۱۶- سود حاصل از فروش x پیراهن در یک تولیدی ، از رابطه ی $P(x) = x^2 + x - 12$ به دست می آید .

الف) اگر این تولیدی ، هیچ پیراهنی نفروشد ، چقدر از دست می دهد ؟

ب) به ازاء چه تعداد فروش پیراهن ، تولیدی به نقطه ی سر به سر خود می رسد ؟

ج) چندمین تولید پیراهن ، برای این تولیدی سودآور است ؟

۱۷- یک پیتزا را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر کدام مقداری مساوی رسید. سپس یک نفر به آنها اضافه شد و دوباره پیتزا را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر کدام $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

۱۸- تابع درآمد و تابع هزینه هفتگی یک کارخانه به صورت زیر است:

الف) معادله سود این کارخانه را بنویسید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند کالا حاصل می شود؟

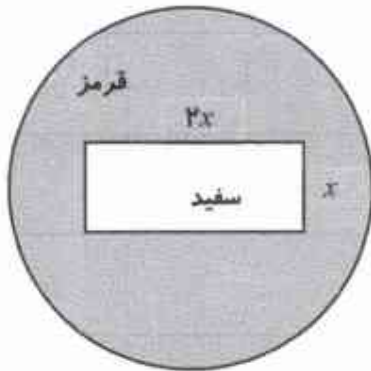
تابع درآمد $R(x) = 21x - x^2$

تابع هزینه $C(x) = 100 + x$

۱۹- برای ساخت یک تابلو مانند شکل زیر، از برجسب های قرمز و سفید استفاده می شود.

هزینه 1 cm^2 برجسب سفید ۲۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب قرمز ۱۰ تومان است. (مساحت دایره ۲۴۰ سانتی متر مربع است). مجموع هزینه های برجسب های سفید و قرمز ۳۴۴۰۰ تومان شده است.

اندازه x چقدر است؟



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

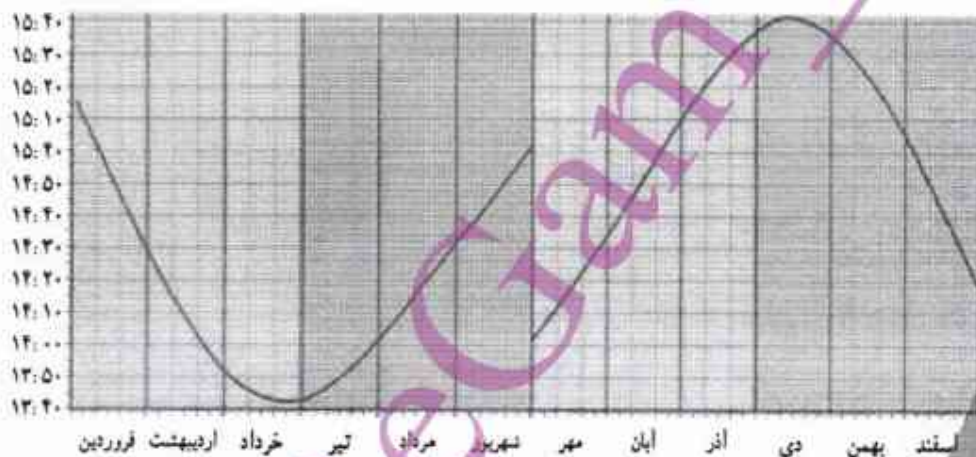


تابع

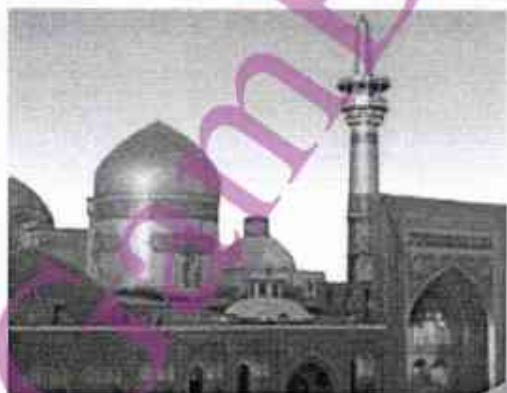


فصل سوم

- مفهوم تابع ۱ درس
- ضابطه جبری تابع ۲ درس
- نمودار تابع خطی ۳ درس
- نمودار تابع درجه ۲ ۴ درس



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.



یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایه‌ها مشخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه بنا تعیین ساعتهای دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

مسال گذشته در فصل خط و معادله های خطی با مثال دوچرخه سوار، رابطه ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۳	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	۴	۵	۸	۹	۱۰

همان طور که مشاهده می کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) بر اساس تغییرات t تغییر می کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه های خطی نامیده ایم.

این رابطه ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان طور که مشاهده می کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها بر اساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۲	۰	۱/۲	۰	۳/۲
y		-۷	-۳	۳	۲	۳	۰

$$y = -2x + 3$$

$$y = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$-2x + 3 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

۵۴

$$x = \frac{0}{-2} \Rightarrow x = 0$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

او که مینای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک تر شد از زورید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل های انسان ها، نهان
تابع منظور ما، «پیوسته» است
«خدا»، به امثال دل ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می کند
حذر تابع، «بی نهایت» می کند
هر کسی نایی نهایت را شناخت
چون «مجاناب» سوی آن بالا شناخت



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

طول قد و نامتوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۵۴-۲۵ قرار داشته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

نامتوب = ۲۵

$25 \times (1,189)^2 = 89,3025$

متغیر $189 \div 100 = 1,189$

تبدیل به متر شود



فعالیت

می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی ثابت است تقریباً $\pi = 3,14$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟ بله

۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ بله $P = 2\pi r$

۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟ شعاع (۲) متغیر مستقل

۴. جدول زیر را کامل کنید. محیط (P) و مساحت (S) متغیر وابسته

۲ بر حسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی متر مربع (مساحت)	π	$0,25\pi$	4π	9π	16π
P بر حسب سانتی متر (محیط)	2π	π	4π	6π	8π

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ نیز y تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (x, y) و (y, x) را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$

تبدیل از تساوی دو زوج مرتب زده شود

فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

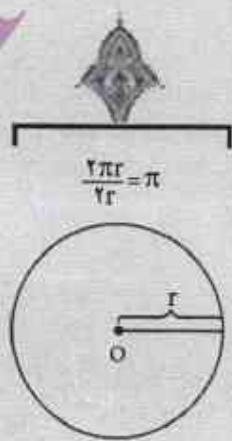
x	-۱	۵	$\frac{1}{3}$	۱	$\sqrt{2}$	۲	
y	-۲	۱۶	$\frac{2}{3}$	۴	$3\sqrt{2}+1$	۷	$y = 3x + 1$
(x, y)	$(-1, -2)$	$(5, 16)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(1, 4)$	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}+1)$	$(2, 7)$	

$3x + 1 = 1 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$

$3x + 1 = 3\sqrt{2} + 1 \Rightarrow 3x = 3\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$y = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

$y = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کلانانی در اوایل قرن هشتم هـ. ق توانست عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتاب رساله محیطیه خود را با این جمله شروع می‌کند: «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

$$y = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
y	2	5	$\frac{5}{4}$	2	2

$$y = x^2 + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز بدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده بدنی یا نمایه BMI است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{وزن بر حسب کیلوگرم} \\ \text{مجدور طول قد بر حسب متر} = \text{نمایه}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نمایه محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد \Rightarrow نمایه < 19

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است \Rightarrow نمایه $19 \leq$

شخص اضافه وزن دارد \Rightarrow نمایه $25 \leq$

شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد \Rightarrow نمایه ≥ 30

گروه سنی	نمایه
19-24	21
25-24	23
25-22	24
25-52	25
55-62	26
65-74	27

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نمایه افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نمایه مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

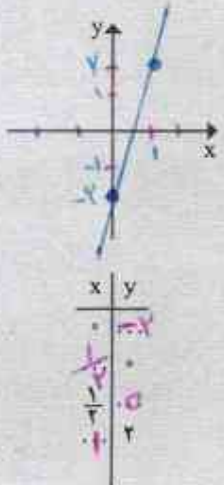
پس از یافتن نمایه متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{توان دوم یا مربع قد بر حسب متر} \times \text{نمایه} = \text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز درمی‌یابید که وزن مطلوب به نمایه نیز بستگی دارد. در فرمول فوق



نمودار خط $y = 2x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید:



$$y = f(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$f(x) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

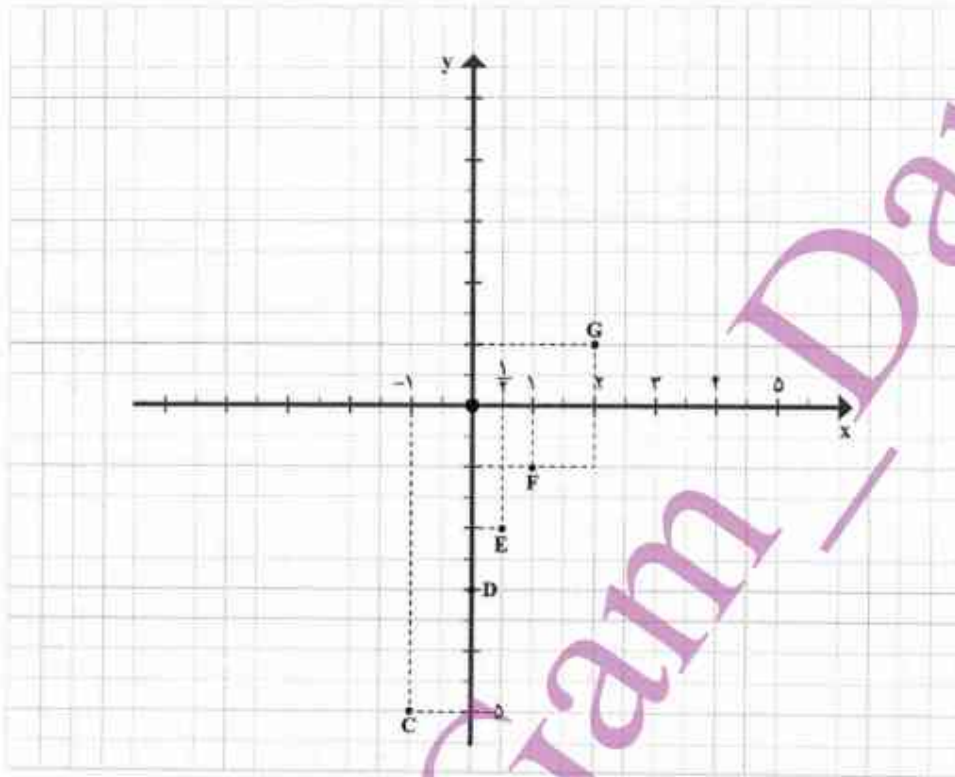
$$f(x) - 2 = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + 2 \Rightarrow$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر هر یک از «زوج مرتب» های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:



$$y = x^2$$

$$y = (-3)^2 = 9$$

$$y = (-2)^2 = 4$$

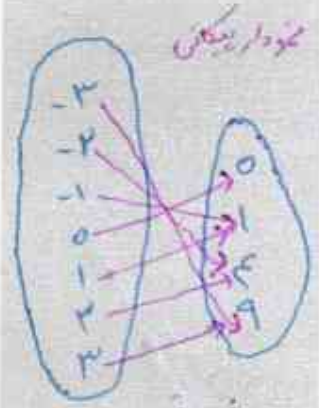
$$y = (-1)^2 = 1$$

$$y = (0)^2 = 0$$

$$y = (1)^2 = 1$$

$$y = (2)^2 = 4$$

$$y = (3)^2 = 9$$



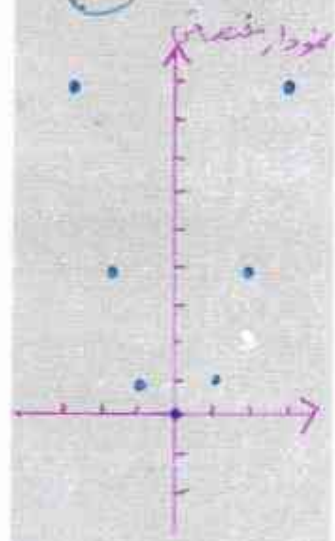
سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار، نمودار بیکنی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
(x, y)	(-3, 9)	(-2, 4)	(-1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 4)	(3, 9)

در تمام فعالیت ها، مثال ها و تمرین های قبل، رابطه ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می نامند. به عبارت دقیق تر:

یک رابطه بیسن دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.



x						
y						
(x, y)						

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.
 استفاده از نمودار و رسم بیگان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:

کار در کلاس



با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ باشند، ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار بیگانه آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
y	-5	-3	-2	-1	1	$y = 2x - 3$
(x, y)	$(-1, -5)$	$(0, -3)$	$(\frac{1}{2}, -2)$	$(1, -1)$	$(2, 1)$	
	C	D	E	F	G	



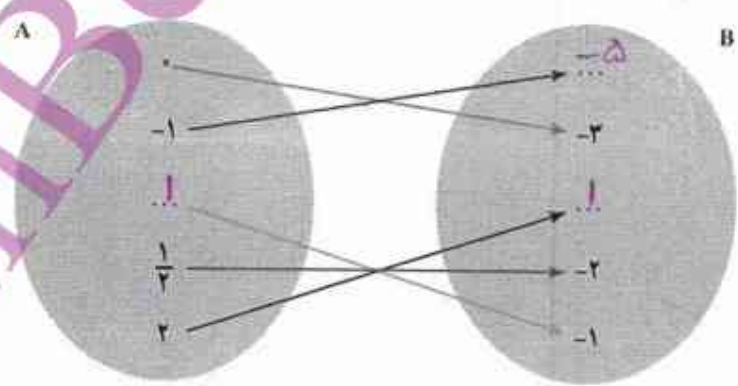
نمودار خط $y = 2x - 3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:

$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$(0, -3)$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$(1, -1)$



سوال خوب

$$D: y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

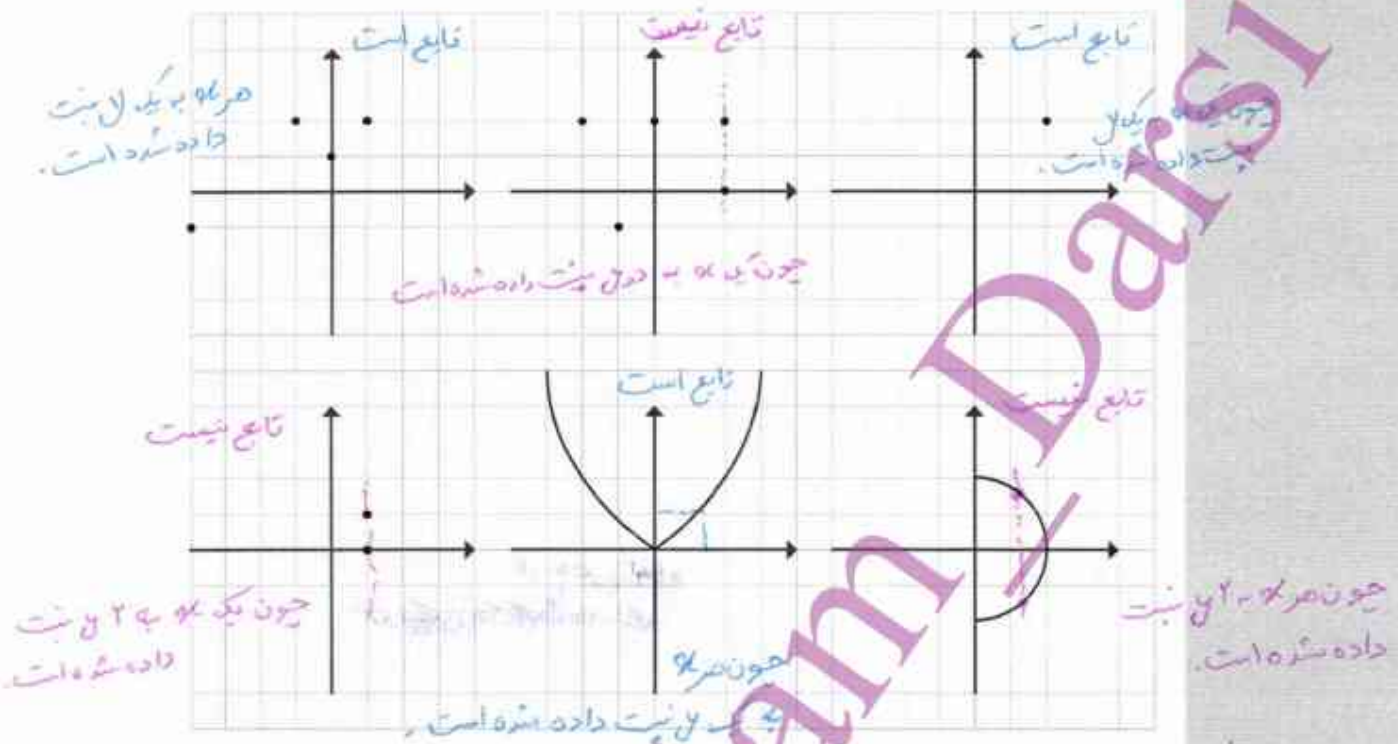
$$E: y = 2(\frac{1}{2}) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$F: y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$G: y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$



۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

- یک شهر ممکن است چند سوغاتی داشته باشد
- تابع است تابع نیست

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

- هر فرد یک روز تولد دارد
- تابع است تابع نیست

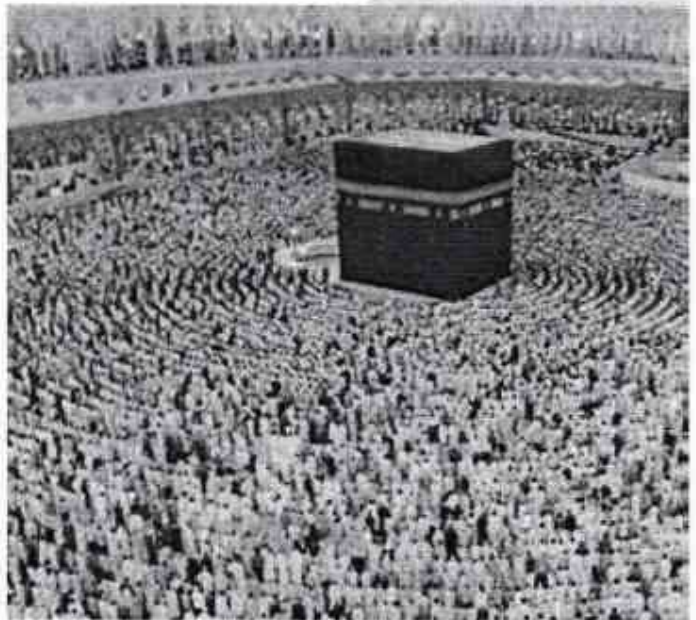
ب) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

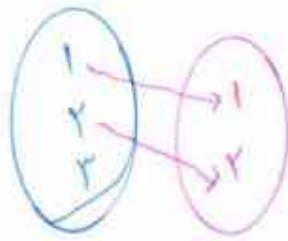
- چون ممکن است یک شهر چند نماینده داشته باشد
- تابع است تابع نیست

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

- تابع است تابع نیست

زیرا هر مسلمان یک قبله دارد





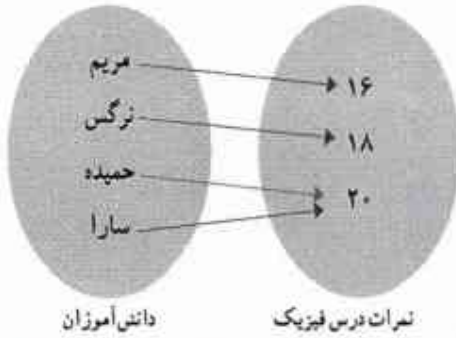
که تابع نیست



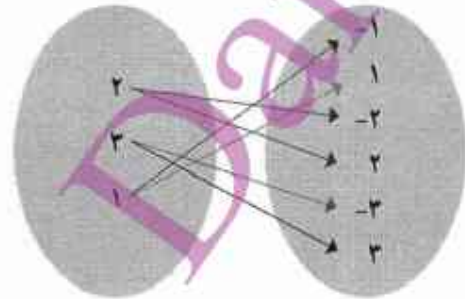
فعالیت



۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار بیکنانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟

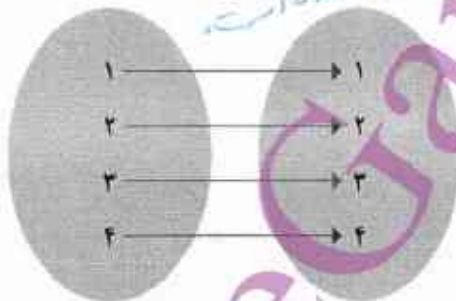


نمرات درس فیزیک دانش آموزان

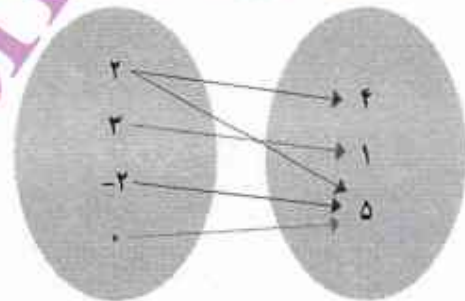


تابع نیست زیرا به هر فرد یک نمره نسبت داده شده.

تابع نیست زیرا



تابع است زیرا



تابع نیست زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$ تابع است

ب) $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$ تابع نیست

ج) $H = \{(2,3)\}$ تابع است

د) $I = \{(3,3)\}$ تابع است

ه) $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$ تابع نیست

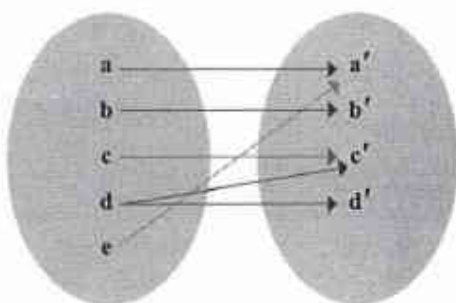
نهیہ کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



تمرین

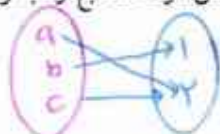
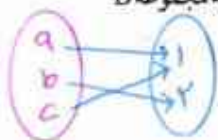
۱. نمودار بیکنی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



نکته: اگر c حذف شود
به هیچ عضوی وصل نمی شود
و باز هم نمودار یک تابع خواهد بود

باید که یک عضو از بیکنی
نمودار یک تابع شود

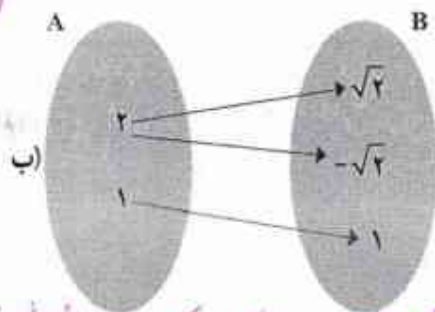
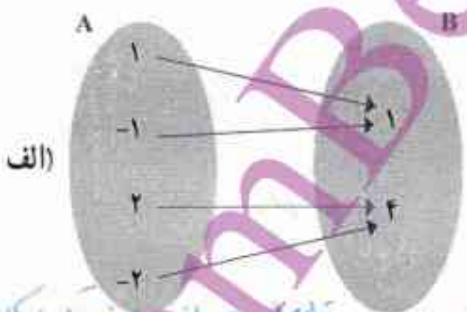
۲. اگر A مجموعه ای ۳ عضوی و B مجموعه ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



تابع است از آن عضو بیکن خارج شده است

تابع نیست از آن دو بیکن خارج شده است

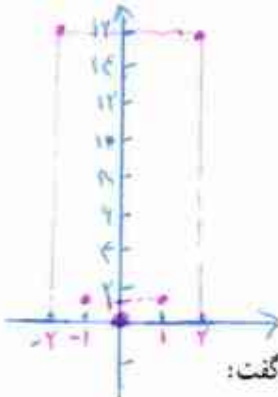
$$f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$$

ت) رابطه ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع است زیرا هر شخص یک شماره ملی

نسبت داده می شود





با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می توان گفت:

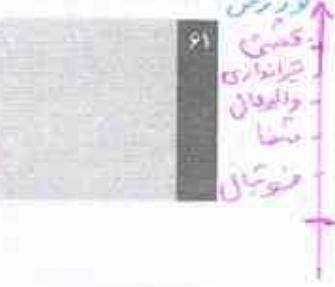
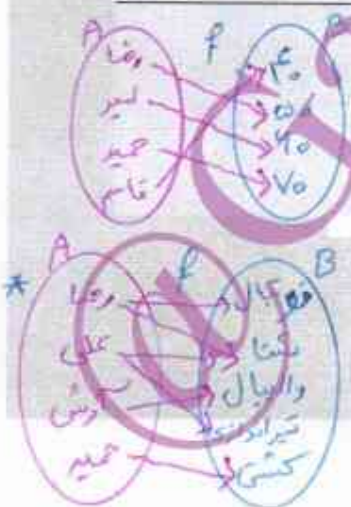
- اگر رابطه بین x و y را $(x$ متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.
- اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار بیگانه نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک بیگانه خارج شود.
- اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم نشود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.

کار در کلاس



در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش های رابطه ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

نمایش بیگانه	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
		$F = \{(2,2), (3,3), (4,5), (5,6)\}$	F رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A واحد و بیشتر از آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	x	y	2	3	3	4	4	5	5	6
x	y													
2	3													
3	4													
4	5													
5	6													
		$F = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,14)\}$	هر رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A توان دوم آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> </table>	x	y	1	1	2	4	3	9	4	16
x	y													
1	1													
2	4													
3	9													
4	16													
	نمودار مختصاتی مشخص	$F = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>16</td></tr> <tr><td>3</td><td>81</td></tr> <tr><td>4</td><td>256</td></tr> </table>	x	y	1	1	2	16	3	81	4	256
x	y													
1	1													
2	16													
3	81													
4	256													
		$F = \{(رضا, رضا), (علی, علی), (آرش, آرش), (حمید, حمید)\}$	هر رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A وزن آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>رضا</td><td>50</td></tr> <tr><td>علی</td><td>40</td></tr> <tr><td>حمید</td><td>70</td></tr> <tr><td>آرش</td><td>60</td></tr> </table>	x	y	رضا	50	علی	40	حمید	70	آرش	60
x	y													
رضا	50													
علی	40													
حمید	70													
آرش	60													

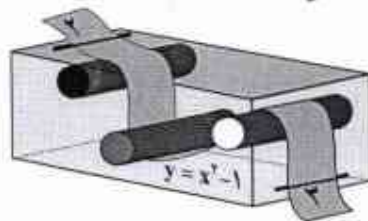
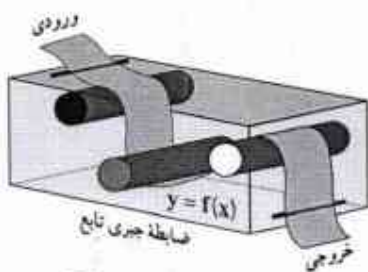


x	y
رضا	50
علی	40
آرش	60
حمید	70

درس ۲

ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



یک ضابطه (فانسون) بیان کنیم. به‌طور مثال تابع

$$f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) \right\}$$

در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول

مؤلفه دوم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$,

در این صورت $y = x + 3$ معادله $y = x + 3$ را ضابطه

تابع f می‌نامیم. (اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم

x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f

روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y

(متغیر وابسته) است: یعنی، $y = f(x)$)

دامنه و برد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های

اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم.

دامنه تابع f را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

یک تابع مانند f از مجموعه A به مجموعه B ، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.

Domain
Range

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵) الف

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2$$

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \Rightarrow y=2$$

$$x^2+y^2=(2)^2+(2)^2=4+4=8$$

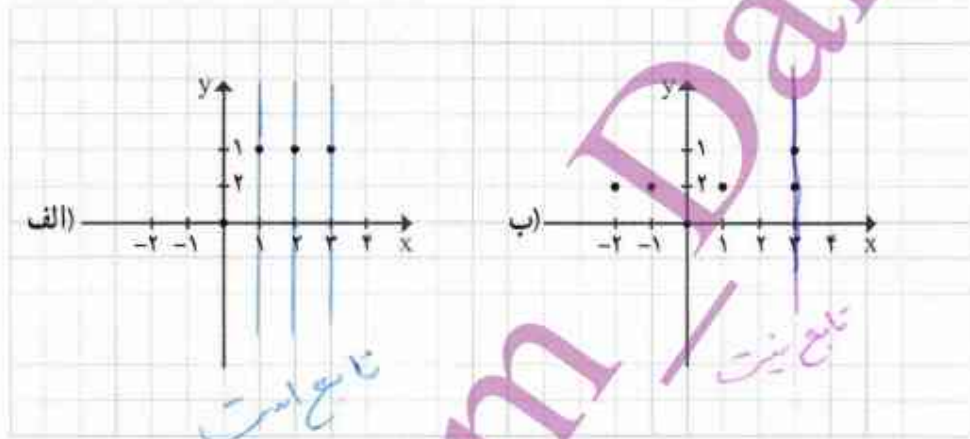
۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل x^2+y^2 را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$(2, x+y) = (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$(5, 2) = (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می کند؟



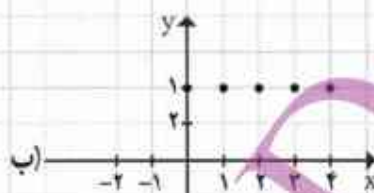
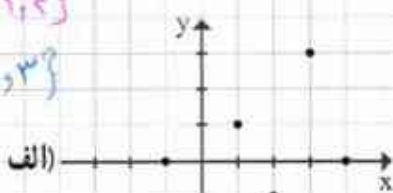
خوانندگی

توابع در شاخه های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم گیری های اقتصادی استفاده می شود و یا در فیزیک، هنگامی که می خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می شود. توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می شوند و کاری را بر روی ورودی های خود انجام می دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تأثیرات الگوریتم می بینیم.



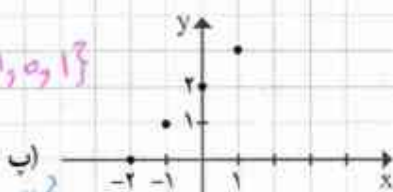
۱. برای هر یک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

$D_f = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = \{0, 1, 2, 3\}$



$D_f = A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = B = \{1, 2\}$

$A = D_f = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$
 $R_f = B = \{0, 1, 2, 3\}$



$B = R_f = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 \leq m \leq 1\}$

$A = D_f = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 \leq m \leq 1\}$

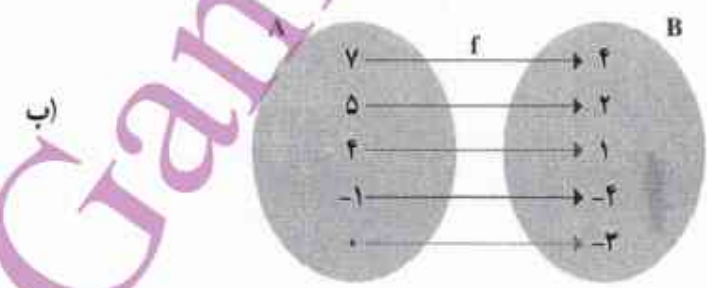
۲. دامنه و برد هر یک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$ $B = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$f(x) = x + 4$ $A = \{1, \dots, 0, 1, \dots\}$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

$= \{1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$
 $= \{-1, -2, -3, -4, -\sqrt{2}\}$
 $= \{4, 5, 4, -1, 0\}$
 $= \{4, 2, 1, -4, -3\}$



تهیه کننده:

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می گیریم.

فعالیت

با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 + 1$, $A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$

x	f(x) = 2x ² + 1
-1	f(-1) = 2(-1) ² + 1 = 3
$\sqrt{2}$	f($\sqrt{2}$) = 2($\sqrt{2}$) ² + 1 = 5
2	f(2) = 2(2) ² + 1 = 9
1	f(1) = 2(1) ² + 1 = 3
0	f(0) = 2(0) ² + 1 = 1
$\frac{1}{2}$	f($\frac{1}{2}$) = 2($\frac{1}{2}$) ² + 1 = $\frac{3}{2}$

$\rightarrow R_f = \{3, 5, 9, 1, \frac{3}{2}\}$

الف) $f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

ب) $f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(1) = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$f(2) = \sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1$

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 - 1$, $A = \{1, -1, 0, 2, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2\}$, $B = \{0, -2, -1, 4, 2, \frac{-22}{12}, 2, \frac{-22}{12}\}$

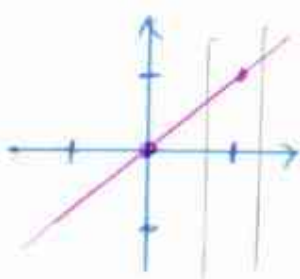
ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $A = \{0, -1, 1, 2, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3} - 1\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$, $B = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}, -1\}$

$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ و $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}$ و $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$

ج) تابع است
 $f(0) = 0$
 $f(1) = 1$

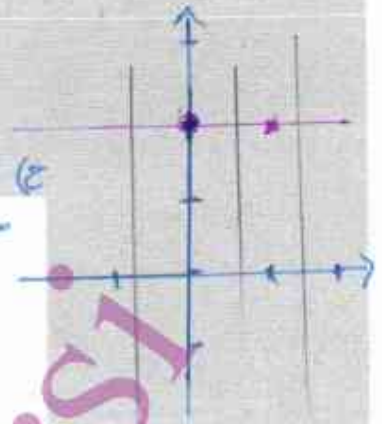


چون هر خط موازی محورهای مختصات را
 واحد اکثر در یک نقطه
 قطع می کند.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

ج) تابع است چون هر خط موازی محورهای مختصات را
 واحد اکثر در یک نقطه قطع می کند.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2$$

$$f(0) = 2, f(1) = 2$$



۲. بزرگ هر یک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$
 $B = \{1, 3, 7\}$

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = (2)^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$

$$B = \{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

$$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$$

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$B = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0$, $A = \mathbb{R}$

$$B = \{0\}$$

$$f(1) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(\infty) = 0$$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^3$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^3 - 4$

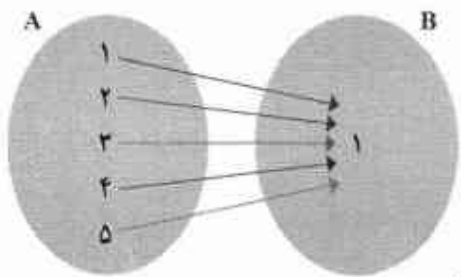
ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

$$f(3) = 2(3-4)^3 - 4 = 2(-1)^3 - 4 = -2 - 4 = -6$$

اشتباه چینی

ب) $f(1) = \frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{1} = 1$ $f(-1) = \frac{-1}{-1} + 1 = \frac{0}{-1} = 0$

پ) $f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ $f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$



ت)

ت) $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0,0)\}$

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

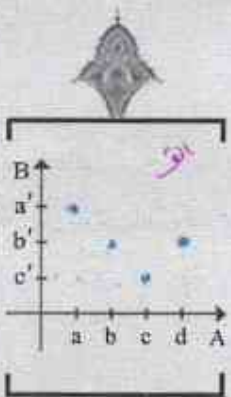
$= \{1\}$

$\{0, 1, 2, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, 0\}$
 $\{0, \sqrt{2}, \frac{1}{4}, 2, 0\}$

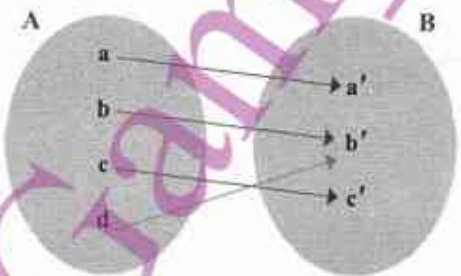
تمرین



۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.

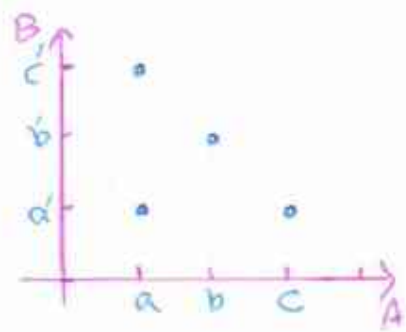
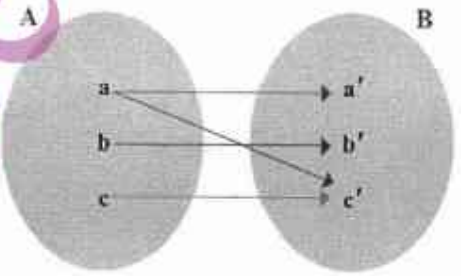


تابع است
 چون از هر عنصر
 عنصر A یکی بیکیان
 خارج شده است.



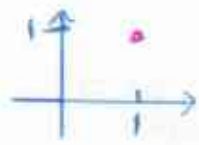
ب)

تابع نیست
 چون از هر عنصر
 دو بیکیان خارج شده است.



ب) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

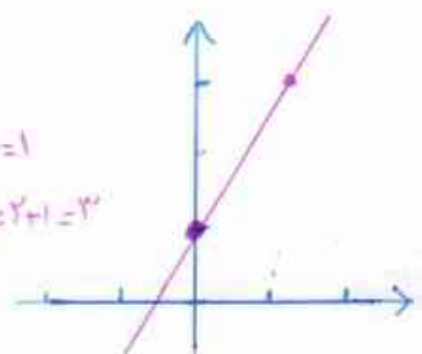


ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

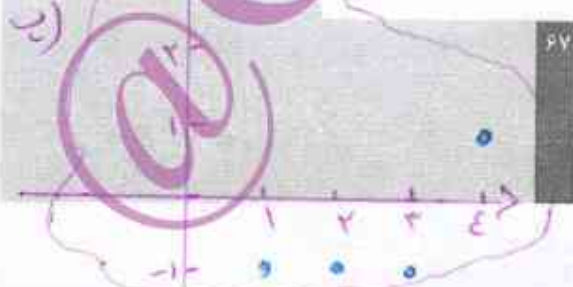
$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

$f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$



تابع نیست - زوج و فرد معکوز
 یا زوج و فرد برابرند -

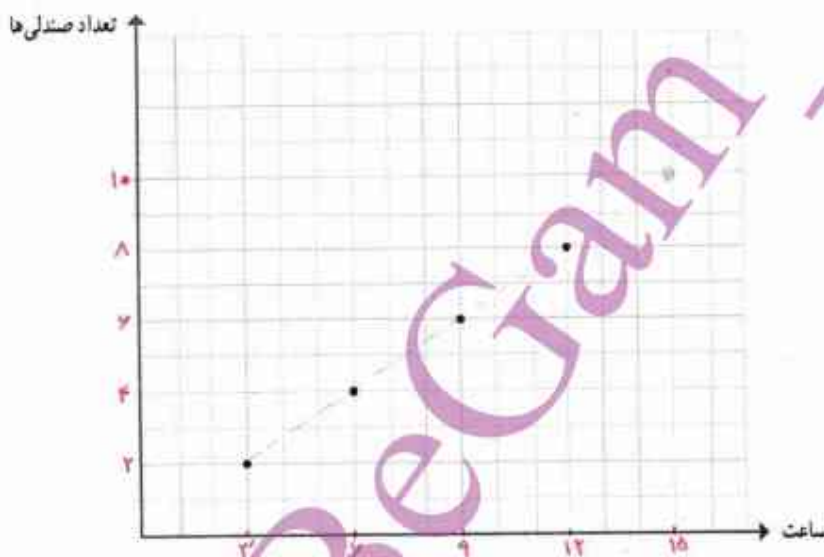
تابع است



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟ **بله**
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟ **خیر**

سرگرمی‌ها

فعالیت ۱

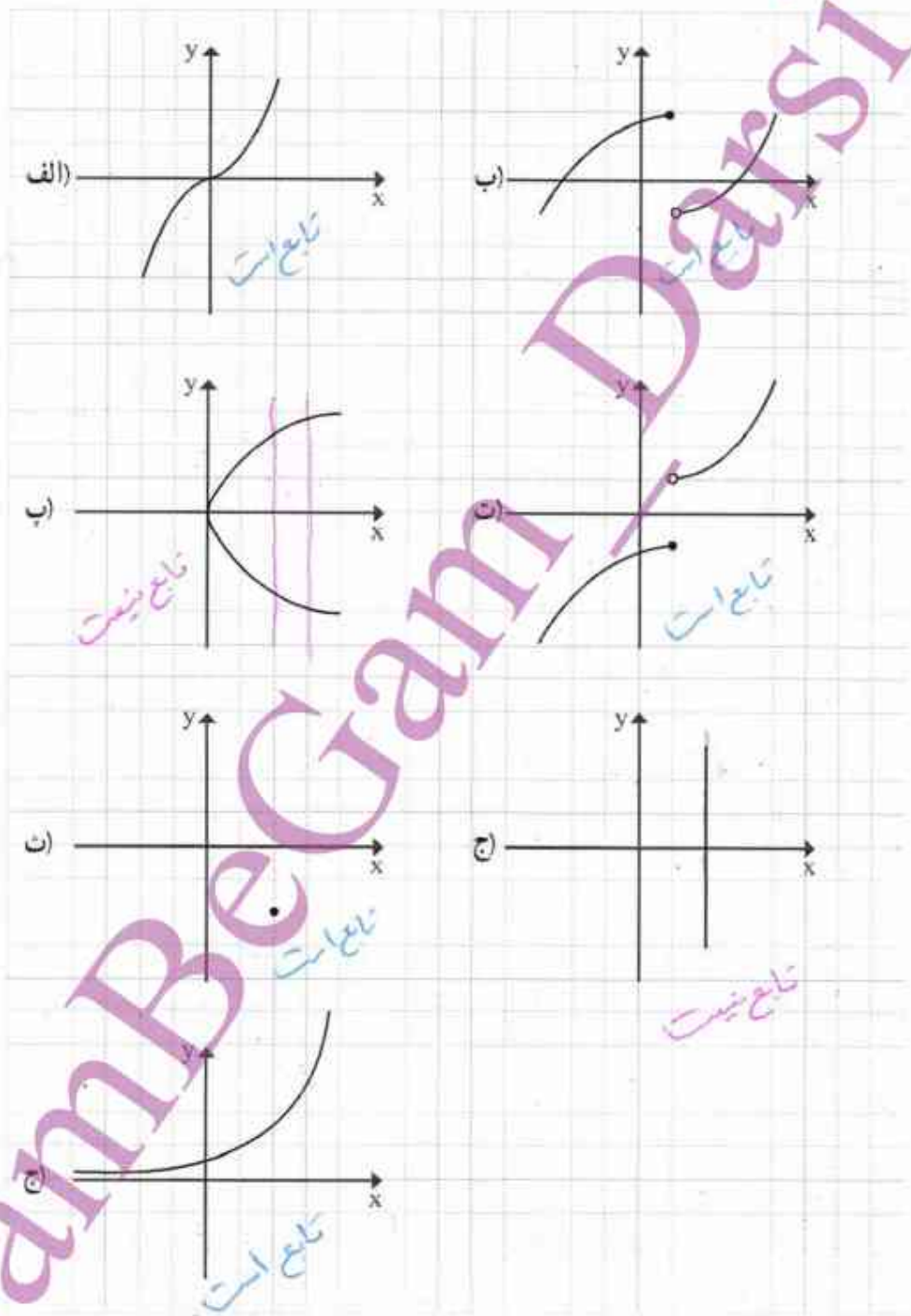


الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شماره‌ی فعالیت ۳

فعالیت ۲

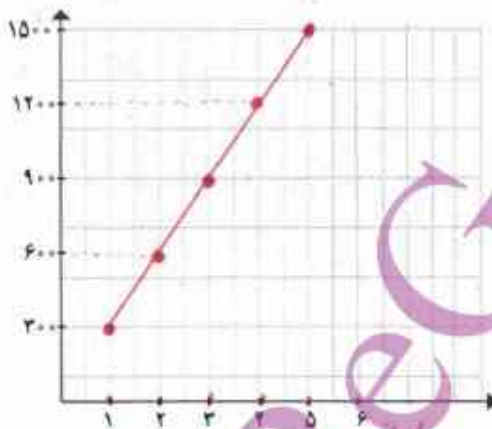


یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



تعداد ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

اگر متر از لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

می‌توانیم بهترین تابع خطی رسم کنیم.

هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$ یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در فعالیت ۲ و ۱ هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیر نفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب با استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان گشت‌آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به‌شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آبی‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زونگت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار امری ضروری است.



کتاب و آب هر دو در بحران‌اند؛ یکی از کم‌مصرفی، دیگری از بزمصرفی!



طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.



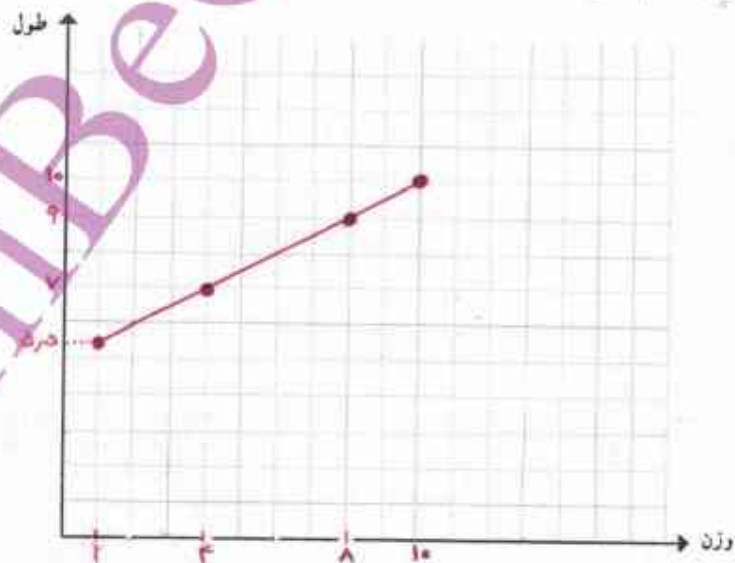
ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتیمتر)	5,2	5,4	5,8	6,4	10	5 + 1/5 a

ب) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(4)$ ، $f(7)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

$L = f(a) = 5 + \frac{1}{5}a \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 5 + \frac{1}{5} \times 1 = 5,2 \\ f(2) = 5 + \frac{1}{5} \times 2 = 5,4 \\ f(4) = 5 + \frac{1}{5} \times 4 = 5,8 \\ f(7) = 5 + \frac{1}{5} \times 7 = 6,4 \\ f(10) = 5 + \frac{1}{5} \times 10 = 7 \end{cases}$

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبیل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



استفاده از تعریف $f(x) = L$

Cambe

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$f(0) = 55x - 35$
 $55x = f(0) + 35$

$x = 1,24$
 دمای سنگ

شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	معادله خط یا ضابطه تابع: $y=f(x)=mx+h$	$f(1)$	$f(2)$
$m = \frac{185 - 75}{2 - 1} = 110 = 55$	$(2, 75) \rightarrow 75 = 55 \times 2 + h$ $h = 75 - 110 = -35$ $y = 55x - 35$	75	75

$x=2 \rightarrow y = 55 \times 2 - 35 = 75$

$x=1 \rightarrow y = 55 \times 1 - 35 = 20$

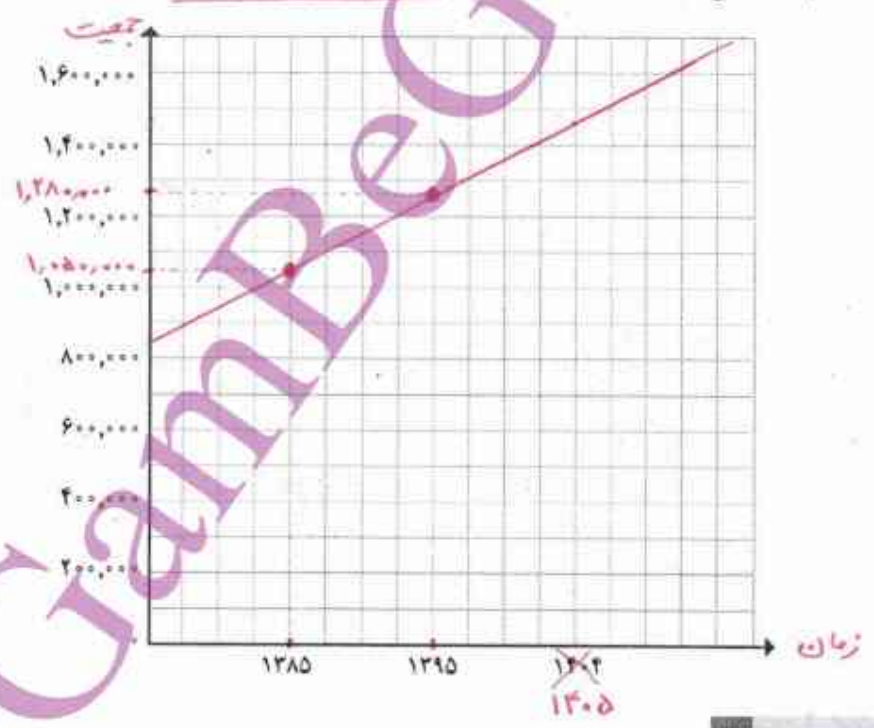
کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به‌طور تقریبی برآورد کنید.



نرخ رشد:
 به میزان افزایش
 یک کمیت
 (تظیر جمعیت)
 در واحد زمان،
 نرخ رشد گفته می‌شود.



رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y = mx + h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

کار در کلاس

در یک تابع خطی $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

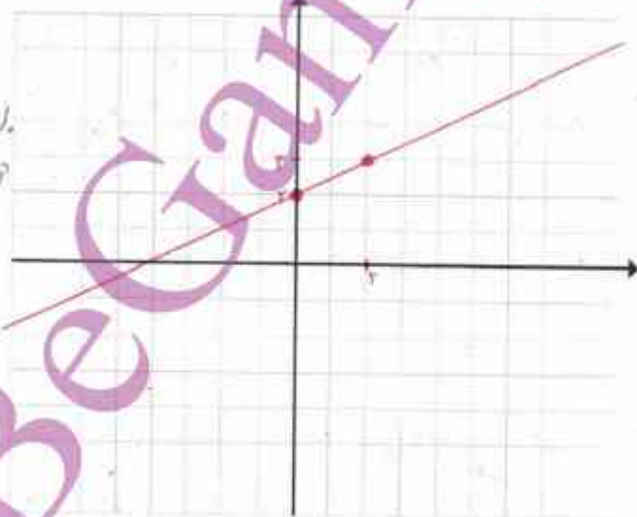
$$m = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + h \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = mx + h$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + h \Rightarrow h = 2$$

$$\text{بنابراین } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



برای رسم از شرط داده شده در مسئله استفاده می‌کنیم

کار در کلاس

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جواب (۳)

$m = \frac{y - 0}{x - 0} = \left(\frac{y}{x}\right) ; 0 = \frac{y}{x} x + b \Rightarrow b = 0$

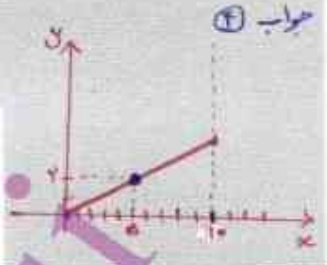
خط مستقیم $f(x) = \frac{y}{x} x + 0 \Rightarrow f(x) = \frac{y}{x} x$

* $f(71) = \frac{y}{x} \times 71 = 735$

** $f(-71) = \frac{y}{x} \times (-71) = -735$

*** $f(71) - f(-71) = 735 - (-735) = 1470$ تفاوت

۴ نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $A(0, 2)$ بگذرد.



۵ نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(-1)$ و $f(1)$ را به دست آورید.

۶ رابطه بین درجه دما برحسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم ۲۰ درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

جواب ۶
 $F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32$
 $F = 68$

۷ یک شرکت برای تولید x کالا $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد.

جواب ۷
الف) $R(x) = 70x$

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

$P(x) = R(x) - C(x)$
 $P(x) = 70x - (3000 + 50x)$
 $P(x) = 20x - 3000$
جدول سود:

x	150	200
P(x)	0	1000



ب) $P(x) = 0$
 $20x - 3000 = 0$
 $20x = 3000 \Rightarrow x = 150$
پس باید حداقل ۱۵۰ کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود.



کوه‌های مینیاتوری - جابهار



$$x = y + 4$$

$$P = 2(x+y) = 2(y+4+y) \Rightarrow P = 2(2y+4)$$

$$\Rightarrow P = 4y + 8$$

خطی تابع خطی است چون به شکل $mx + k$ درآمده است.

کار در کلاس



ضابطه تابع محیط مستطیل هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

$$x = y + 4$$

$$S = x \times y = (y+4) \times y$$

$$S = y^2 + 4y$$

مساحت یک تابع خطی است؟ خیر.
 مساحت $mx + k$ در نتیجه است (مقدیر y دارد)

کار در کلاس



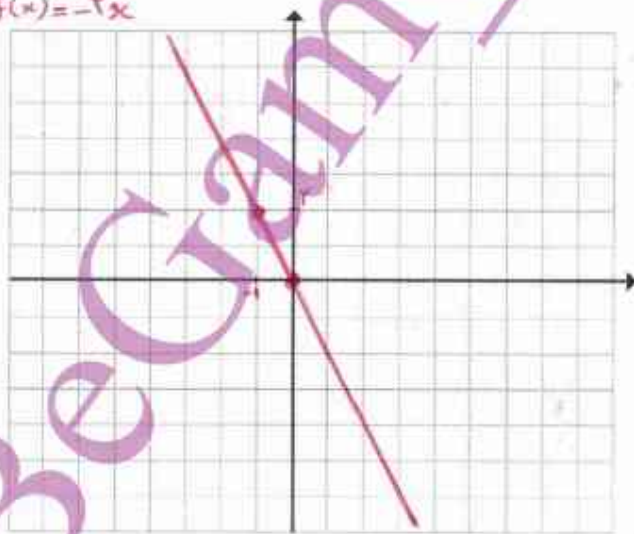
اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$f(0) = 0$$

$$m = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$0 = -2x + k \Rightarrow k = 0$$

معادله خطی تابع f : $y = f(x) = -2x$



$$m = \frac{f - 1}{k - 1} = 3$$

$$l = 3x + k \Rightarrow n = 1 - 3$$

$$n = -2$$

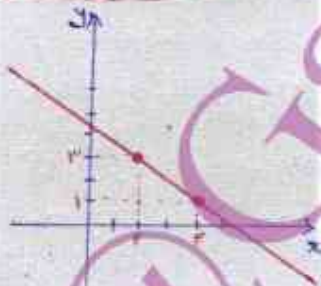
$$f(x) = 3x - 2$$

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$3 = -1 \times 2 + k \Rightarrow k = 3 + 2$$

$$k = 5$$

$$f(x) = -x + 5$$



تمرین



۱) مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(1) = 1$ و $f(2) = 4$

۲) ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳) در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$. مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{1 - 5}{2 - 1} = -4$$

$$5 = -4 \times 1 + k \Rightarrow k = 5 + 4 \Rightarrow k = 9$$

معادله خط: $y = f(x) = -4x + 9$

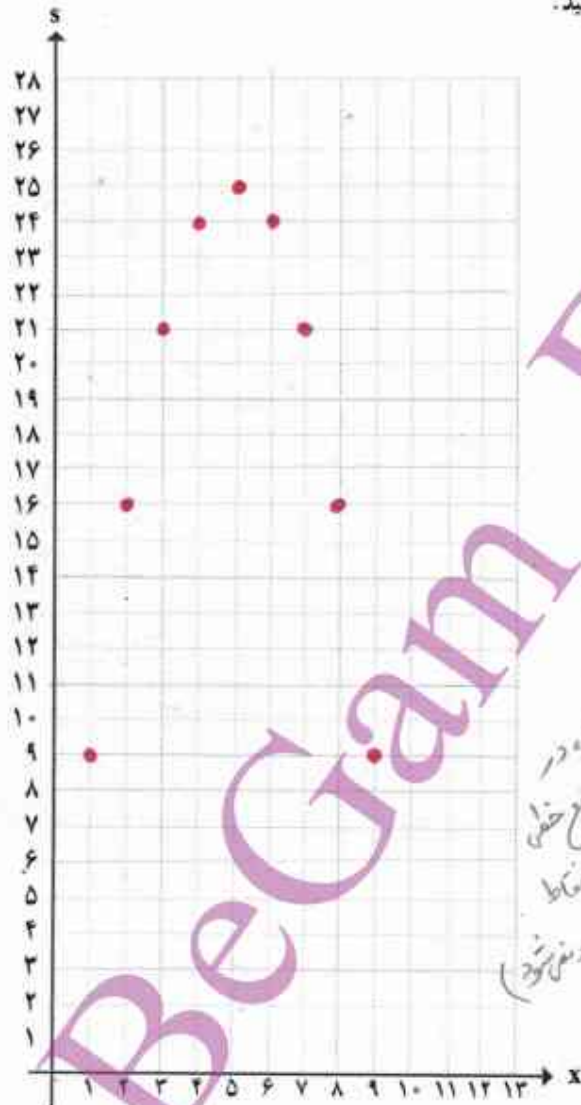
$$f(-3) = -4(-3) + 9 = 12 + 9 = 21$$

$$f(5) = -4(5) + 9 = -20 + 9 = -11$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



با دقت در نقاط مشخص شده در دستگاه مختصات، می بینیم که تابع خطی نسبت (یا وصل کردن نقاط) به هم، خط راست ایجاد نمی شود.

فعالیت

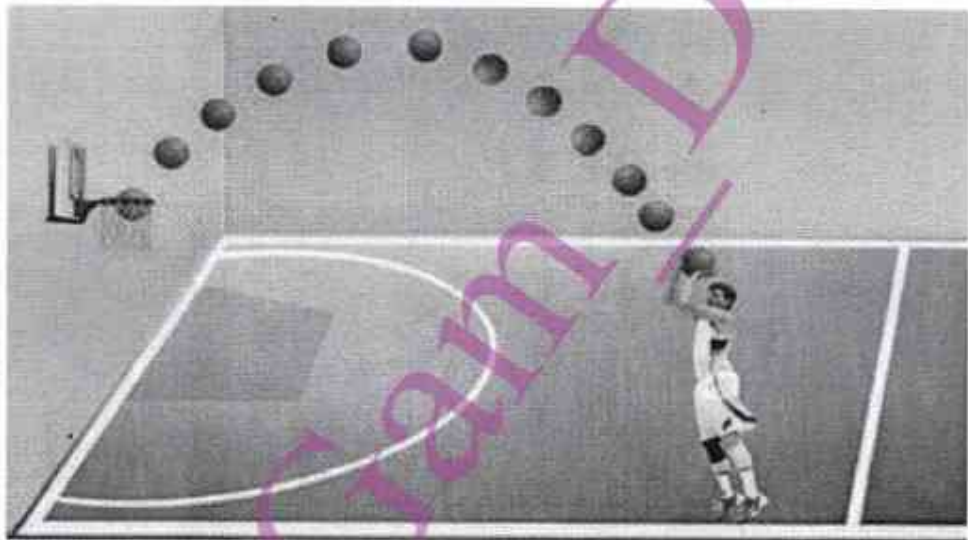


یک شرکت نفتی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $x - 1200$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

میزان درآمد هر روز $R(x) = (1200 - x) \times x$ (درآمد) - هزینه (بسته شده بسته) $C(x) = 30000 + 200x$

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲



فعالیت

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

$$x + y = 10$$

برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع های 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت 20 تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می دهیم. الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
s	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
(x, s)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)	(۳, ۲۱)	(۴, ۲۴)	(۵, ۲۵)	(۶, ۲۴)	(۷, ۲۱)	(۸, ۱۶)	(۹, ۹)

با توجه به میز باید جمع میز و صندلی عدد باشد





رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت \cup یا \cap است که به آن سهمی می گوئیم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است. *سهمی محور تقارن منحنی را عمود بر محور تقارن می نامند.*

- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cup خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

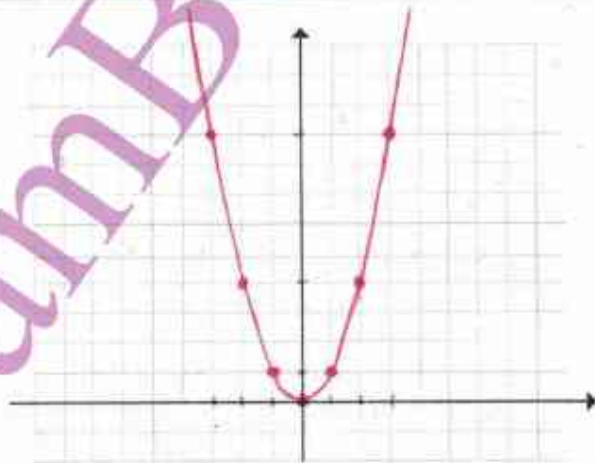
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cap خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.



فعالیت

ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...



تهیه کننده:

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ (متر کار در یک روز)

$$x=200 \rightarrow \text{قیمت} = 12000 - 200 = 11800 \text{ تومان}$$

$$x=300 \rightarrow \text{قیمت} = 12000 - 300 = 11700 \text{ تومان}$$

و $x=300$ چقدر است؟

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟

$$x=200 \rightarrow C(200) = 30000 + 200 \times 200 = 70000$$

$$x=300 \rightarrow C(300) = 30000 + 200 \times 300 = 90000$$

ب) اگر نابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200), P(100), P(200), P(300)$ را محاسبه کنید.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(200) = 200 \times (12000 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = -10400$$

$$P(100) = 100 \times (12000 - 100) - (30000 + 200 \times 100) = 70000$$

$$P(200) = 200 \times (12000 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 118000$$

$$P(300) = 300 \times (12000 - 300) - (30000 + 200 \times 300) = 117000$$

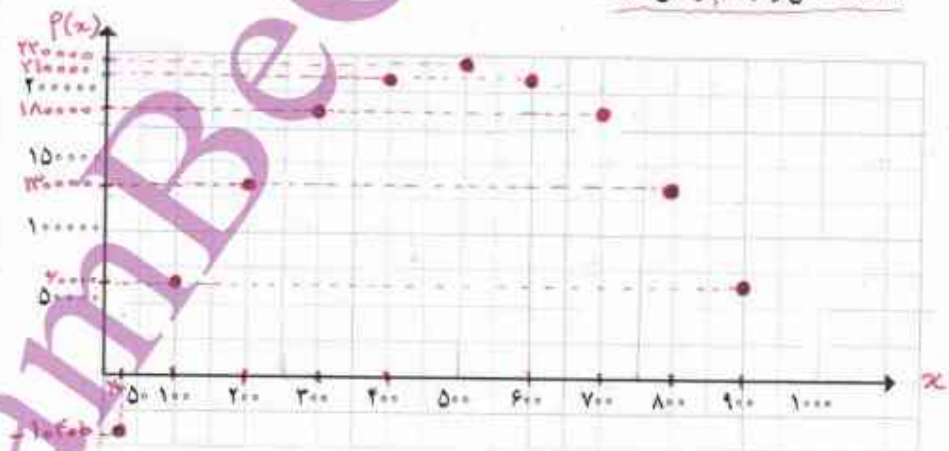
ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید: $P(x) = 10000x - x^2 - 30000$

ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$P(x)$	-10400	70000	118000	117000	114000	108000	99000	86000	69000	48000

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



ج) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هر چه متر از بیشتری رنگ آمیزی شود،

گروه سود بیشتری کسب می کند؟

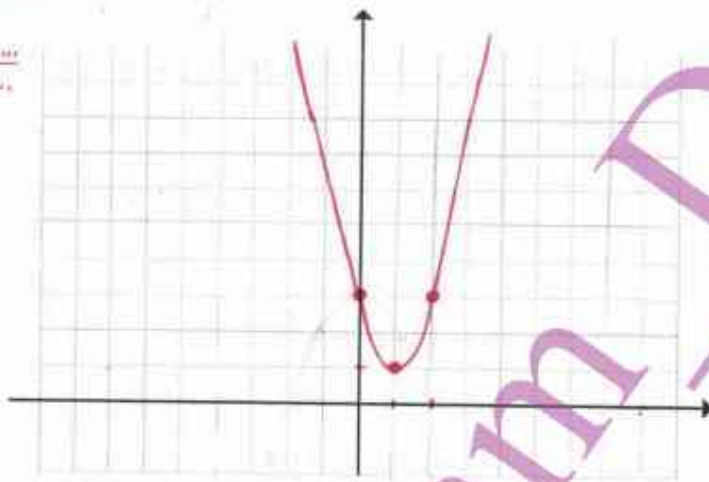
خیر - از $x=500$ برآورد سود کمتر شود.

کار در کلاس



الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
 به کمک صورت (ب) کار در کلاس معجزه قبل
 نمودار سهمی را رسم کنید
 رأس سهمی (1, 1)

x	...	1	2	...
y	...	-3	1	3



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.
 رأس سهمی (-2, 5)

x	...	-5	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	5	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



تهیه کننده:

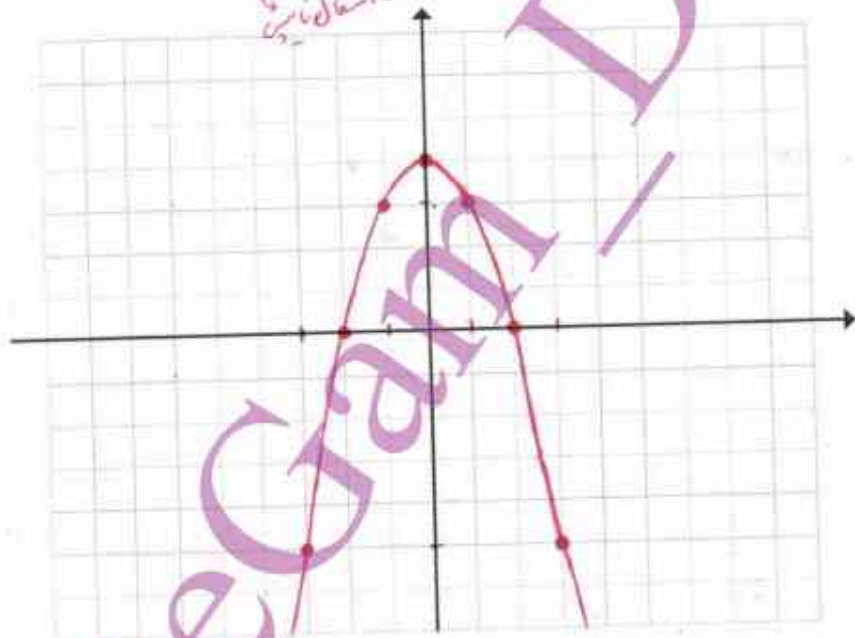
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...



کار در کلاس



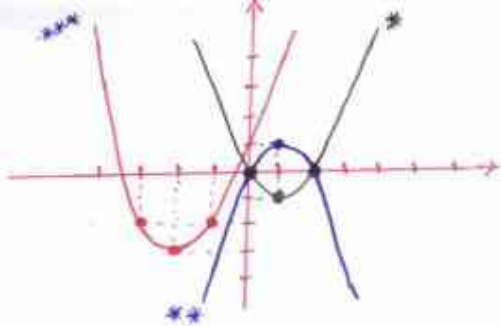
نقاط رأس سهمی هایی را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

الف) $y = x^2$ رأس (0, 0)
 ب) $y = 4 - x^2$ رأس (0, 4)
 پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$ رأس (1, -1)
 ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$ رأس (1, 1)

اول ساده کردن: $y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 \Rightarrow y = 1$
 رأس (1, 1)

نویسنده: همان مرتبه‌ی عدد داخل پرانتز دلائل توان 2 است. همان مرتبه‌ی عدد بیرون پرانتز دلائل توان 2 است.



$$y = x^2 + 4x + 1$$

$$y = -(x-1)^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2x$$

تمرین



- 1) نمودار سهمی‌های $y = x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 - 2x$ به معادله‌های $y = x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ را رسم کنید.
- 2) اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
- 3) محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود. $x = 2,5$ را از $s = x(x+y)$ محاسبه کنید.
- 4) اگر $2x + 3 = 100$ باشد x و y را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
- 5) در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پژوهشی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

حل ۱) $P(x) = R(x) - C(x)$
 $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x - (18x + 40)$
 $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$

حل ۲) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(-\frac{1}{4})} = 24$
 $P(24) = -\frac{1}{4}(24)^2 + 12(24) - 40 = 122$

حل ۳) $P = x(x+y) = 26$
 $x+y = 13 \Rightarrow y = 13-x$
 $S = x \cdot y = x(13-x)$
 $S = 13x - x^2$

$$R(x) = 200x$$

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید. $P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100)$

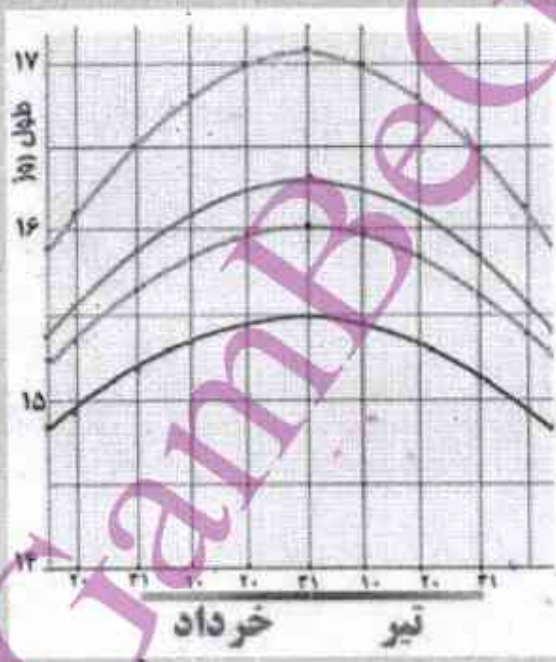
$$P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

ب) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟ $x = 80$ را در تابع سود جایگزین می‌کنیم

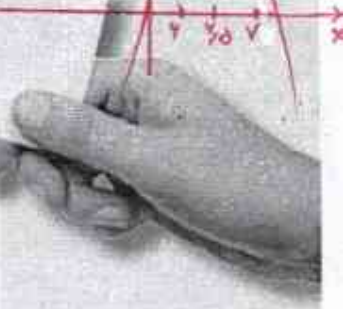
$$P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 = 6390$$

$$P(80) = 6390$$



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایسران در ایام خرداد مساه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.

خواندنی



$$2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$$

حل ۴

$$y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} \Rightarrow x = 25 \Rightarrow a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$$

$$y_{max} = x \cdot a = 25 \times 50 = 1250$$

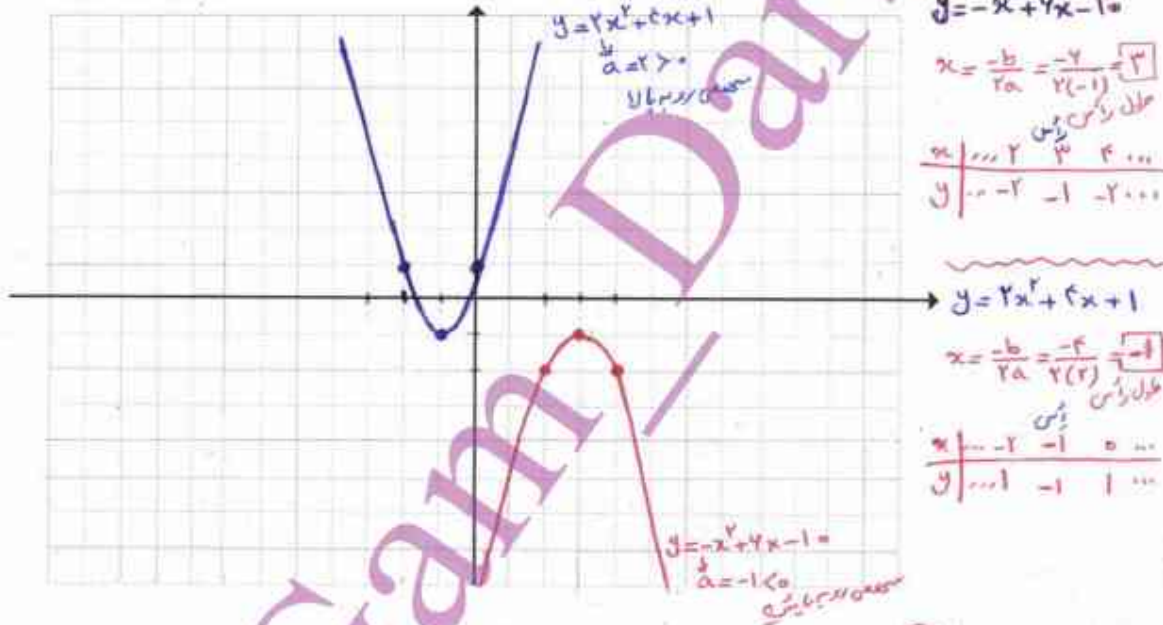
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

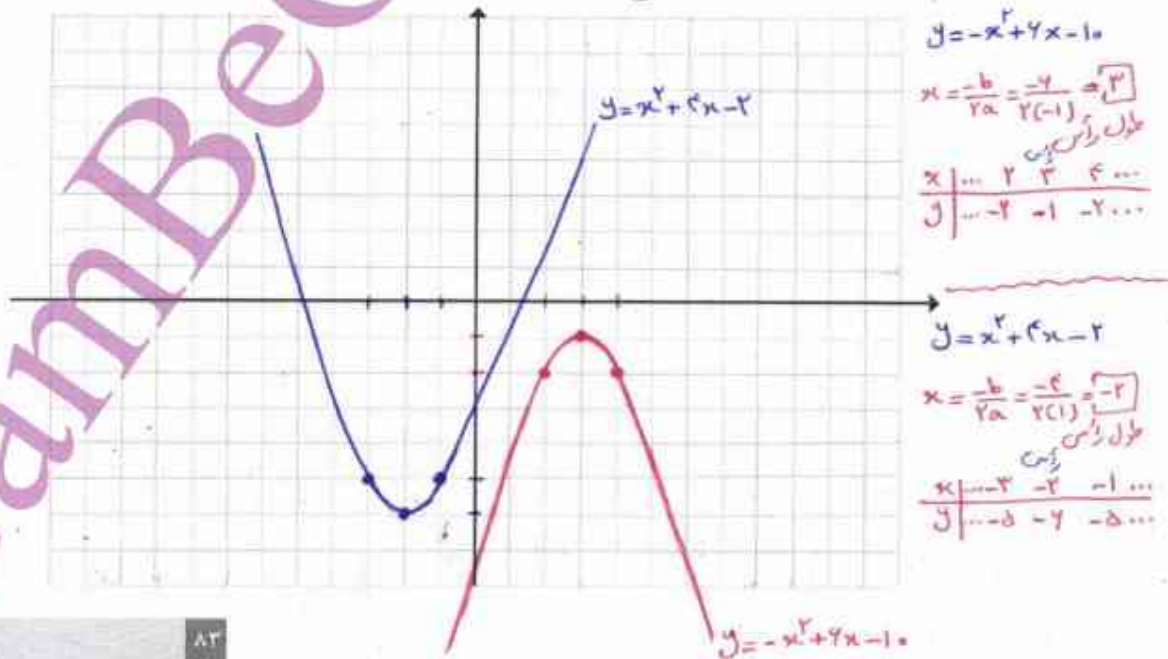
کار در کلاس



۱) نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



۲) نمودار توابع $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = -x^2 + 4x - 10$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید. مختصات نقاط تلاقی ندارند.



کار با داده‌های آماری

فصل
چهارم

گردآوری داده‌ها

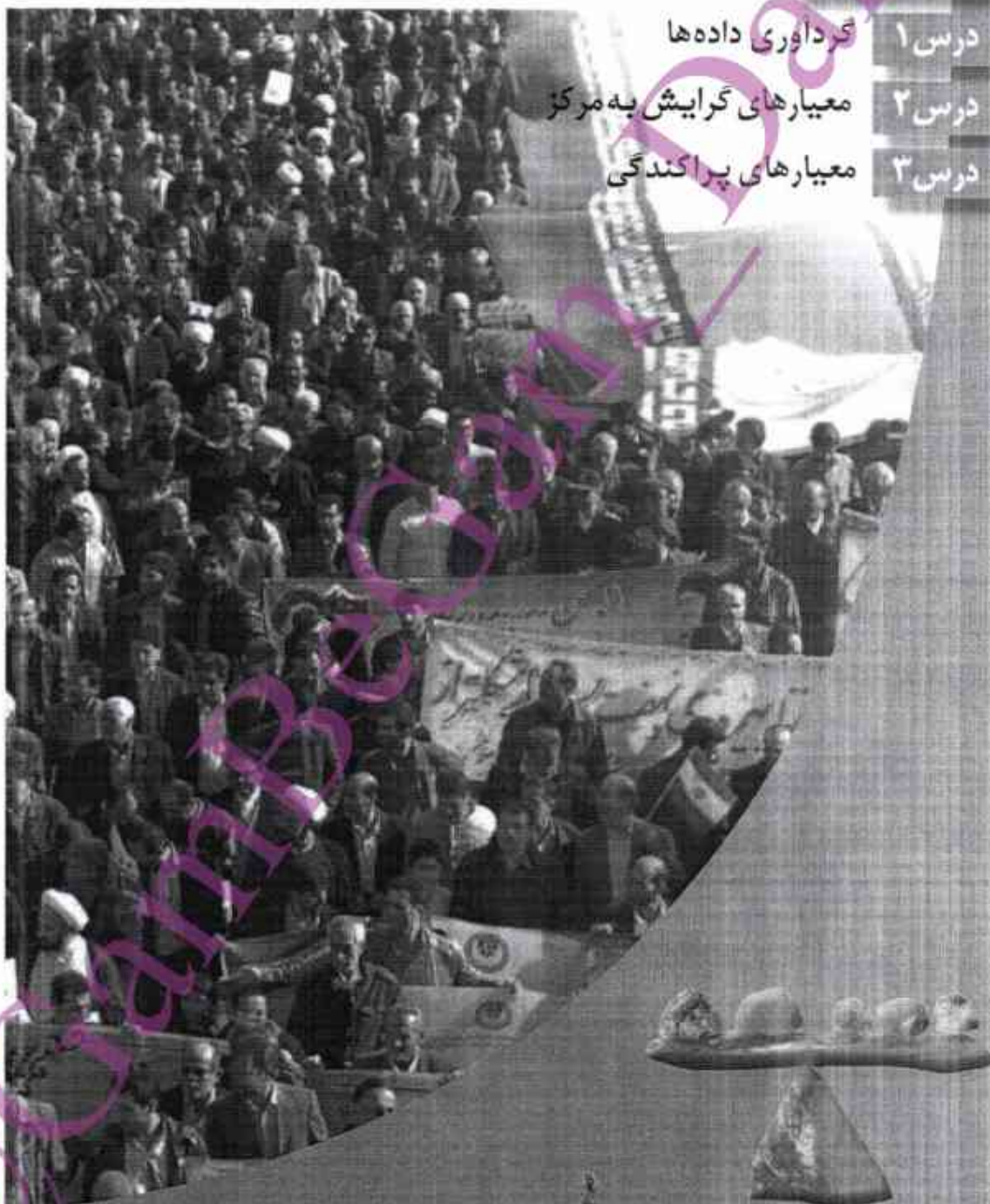
درس ۱

معیارهای گرایش به مرکز

درس ۲

معیارهای پراکنندگی

درس ۳



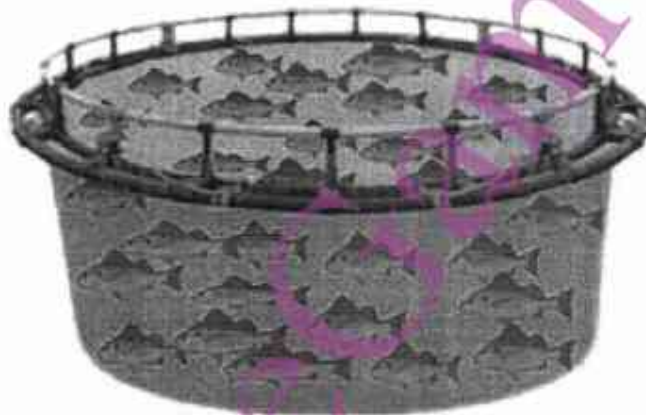
درس ۱

گردآوری داده‌ها

فعالیت



می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. ابتدا از قسمت عمیق و در مرحله بعد، از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق



انتخاب ۵ ماهی از قسمت کم عمق

۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌های حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟ **چرا**
۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

**تخمین از قسمت عمیق بیشتر - از قسمت کم عمق بیشتر
از مقدار واقعی است.**

از همین جا متخلف
مناسب گرامر

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، چگونه آنها را انتخاب می‌کردید تا تجربه تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ فرض کنید ماهی‌ها، همانند شکل در حوضچه بخش شده‌اند و تحرک زیادی ندارند.

۴. اگر از نحوه بخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ با انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (متلاً زمانی که آن را سطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟ **اینجا به تعادلی مناسب گرامر.**

داده‌ها واقعتاً برای درباره یک چیزاند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند. واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند.

هر زیرمجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشند، یک نمونه می‌نامند. نمونه‌ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند نمونه تصادفی می‌نامند.

در مثال حوضچه ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی‌های حوضچه که عبارت است از مجموعه همه واحدهای آماری جامعه گفته می‌شود. اگر وزن تک تک ماهی‌ها را در اختیار داشته باشیم داده‌های جامعه را داریم. وزن نمونه ۵ ماهی را قسمت کنیم عمق معرف داده‌های یک نمونه پنج‌تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونه تصادفی ۵ تایی از حوضچه در اختیار داریم.

تفاوت زیادی بین عدد در ریاضی و داده در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد «۵» یک مفهوم در ریاضی دارد و داده‌ای که مقدار آن «۵» است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به‌عنوان مثال این داده می‌تواند متوسط تلفات روزانه جاده‌های کشور در یکی از سال‌های اخیر باشد.



خواندنی

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

از قدیم گفته‌اند که
مشت نمونه خروار است.
ولی نه هر مشت، چرا!
اگر نمونه تصادفی
انتخاب شود
نگاه نمونه
معرف جامعه
خواهد بود.

منالی از برسی نامه طراحی شده

سلام، می‌خواهیم طول قد دانش آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
طول قد شما چقدر است؟

- کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر
- ۱۴۰-۱۴۹ سانتی‌متر
- ۱۵۰-۱۵۹ سانتی‌متر
- ۱۶۰-۱۶۹ سانتی‌متر
- ۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر

خواندنی

برای به انجام رساندن یک آمارگیری
باید پاسخ سوال‌های زیر را بدهانید:

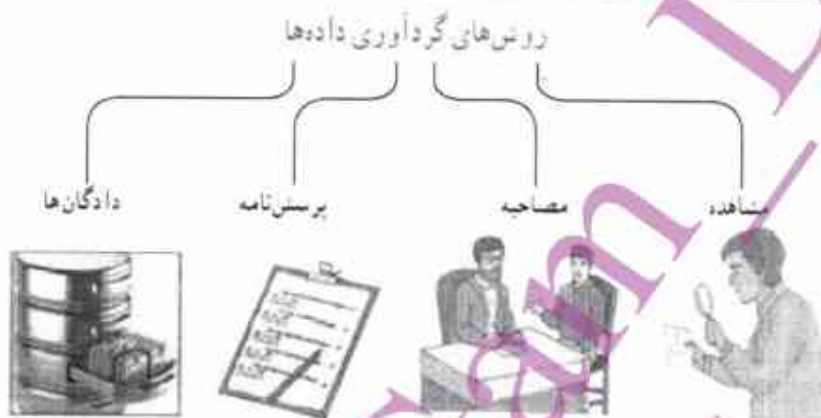
۱. می‌خواهید چه چیزی بپا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده‌هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده‌ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۵. داده‌های شما باید چقدر دقت داشته باشند؟ چرا؟
۶. داده‌هایتان را چگونه ثبت می‌کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده‌اید؟
۷. داده‌ها را چگونه ارائه می‌کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده‌ها از الگوی خاصی پیروی می‌کنند؟ داده‌ها بیانگر چه هستند؟
۹. چه نتیجه‌گیری یا پیشگویی خاصی می‌توانید از داده‌ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج، با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می‌کنید؟ برای چه کسانی ارائه می‌کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می‌توانید سؤالات دیگری را نیز بررسی کنید، به نظر شما در مرحله گردآوری داده، به کدام یک از سؤالات فوق باید پاسخ داده شود؟

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

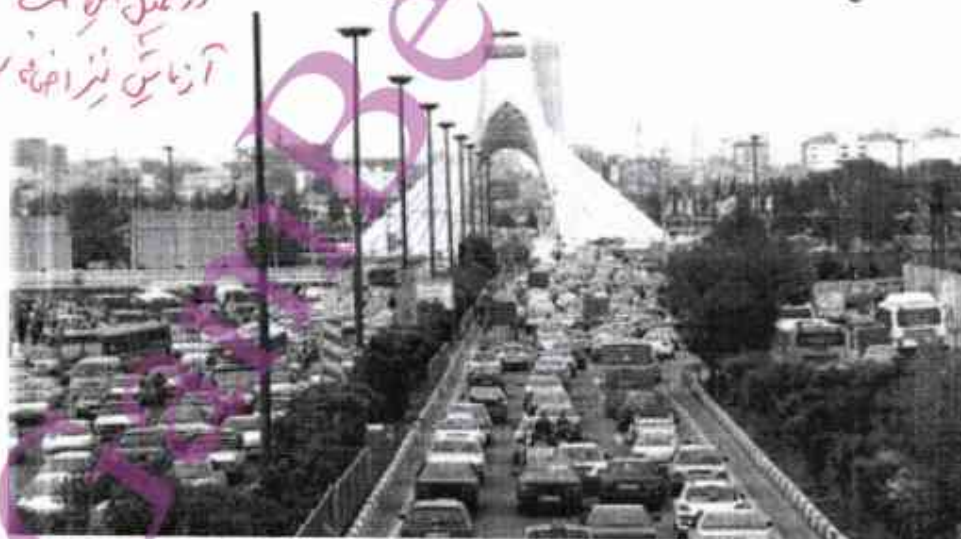


۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟ پرسش از تعدادی از دانش آموزان
۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری تمامی داده‌های دانش آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر خواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟ از هر کلاسی چند دانش آموز به طور تصادفی انتخاب می کنیم.



مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخ‌گو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک نقاط در هر ساعت با اندازه‌گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

درنگین این قسمت
آزمایش تراشه سوز



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۲. پرسشنامه: مجموعه سوالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر سال کشور را با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات تمامی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.



۳. مصاحبه: معمولاً پس دو نفر صورت می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (مسلماً آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخ‌گو است. مثلاً اگر بخواهیم درباره مسائل فرهنگی کاهن سدامند (تراقیک) پژوهش کنیم، مصاحبه‌گر صاحب نظران راه‌حل مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. این روش پیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن را ندارد.

۴. دادگان‌ها: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به دست آورد. اگر فرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام نشود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سازمان‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به سرعت رواج یافته است.



تمرین

کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.
۲. سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماده در پایه دهم.
۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

مشاهده

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار، تصویر دنیای امروز،
آینه‌ای از دنیای فردا

آمار، ستیج گذشتہ،
تسلط حال،
عزت آینده

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که فرار است بررسی شود.
متغیر کتی: متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.
متغیر کیفی: متغیرهایی هستند که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند.

در مثال کوهوردان، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد متغیرهای کتی هستند. متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشخصات غیر عددی اند و در مثال کوهنوردان دنا، جنسیت و ملیت را در بر می‌گیرند. به عنوان مثال جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعه کوهنوردان، معرف یک پارامتر است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردان کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابتند، چرا؟ **چون ما می‌توانیم آن‌ها را تغییر ندهیم.**
 در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ناشی است، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.
آمارگیری: مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

سؤال: اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کتی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، **بررسی از جامعه انجام داده‌ایم** (که امکان پذیر نیست). متوسط وزن تمامی هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مزه هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزه هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا متغیر «مزه» متغیری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، تنها بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های با مزه «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

محدودیت‌های برشماری

عبارت است از:

۱. هزینه زیاد
۲. زمان بودن
۳. خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها
۴. امکان استفاده در بررسی‌های مخرب (واحد‌های انتخاب شده را از بین می‌برند) ندارد.



کار در کلاس

یک شبکه تلویزیونی می خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یکبار در هفته تماشا می کنند، بداند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می کند.

الف) داده ها و متغیرهایی را که بررسی می شوند، مشخص کنید.

جواب: داده ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که باعث آن «تماشا می کند» یا «تماشا نمی کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده ها یک نمونه اند؟ جامعه آماری کدام است؟ **بله - جامعه کو ساکن شیراز هستند.**

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟ **کمی**

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، **وزن**

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می کنند، آماره است یا بارامتر؟ (اعداد اعضای مورد نظر

تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می گویم.) **آماره**

مقیاس های اندازه گیری

داده ها را به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می توان متغیرهای داده ها را در چهار مقیاس اندازه گیری دسته بندی کرد. اندازه گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. دو نوزاد دو قلو را نام گذاری می کنیم تا آنها را تفکیک کنیم. در واقع اندازه گیری کرده ایم. بسته به دقتی که این اندازه گیری صورت می گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله ای و نسبی تقسیم می کنیم. هدف بررسی این مقیاس ها بیانگر نوع محاسبه ای است که برای این داده ها مناسب است؛ نظیر: **رتب** محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

نسبیتی: این مقیاس برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده ها، و نسبت مقادیر داده ها نیز با معنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند **توده**، **وزن** و **قد** دانش آموزان و متغیرهایی که با **واژه تعداد** شروع می شوند در این مقیاس اندازه گیری می شوند. در این مقیاس **صفر** به معنی نبود ویژگی در فرد یا شیء است.

فاصله ای: این مقیاس به دلیل استفاده از **لوازم** یا قواعد دقیق اندازه گیری و ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه گیری می شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله ای برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین، اختلاف بین مقادیر داده ها با معناست. مانند **درجه حرارت** در شهرهای مختلف بر حسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یا دوشی داده می شود صرفاً بیانگر فاصله بین آنهاست. در نتیجه **صفر** در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر **دمای پوشش ۲۰** و **تهران ۱۰** درجه سلسیوس باشد نمی توان گفت دمای تهران دو برابر پوشش است ولی اختلاف دما ۱۰ می باشد.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، **ارجحیت** نیز فائل می شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند؛ در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده ها، یا امکان پذیر نیست و با بی معناست، مانند **رتبه دانش آموزان** در یک کلاس. اگر **رتبه های اول تا سوم** معادل ۱۹، ۱۸، ۱۶ کسب کرده باشند رتبه ۳، ۲، ۱ می دهیم و توجه نمی کنیم که اختلاف نمرات آنها **جقدر** است.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل **بدها**، **برجسبها** و **گروه ها** می شود. در اینجا هیچ معنایی که با آن بتوان داده ها را از کوچک به بزرگ مرتبه کرد وجود ندارد. مانند **گروه خوئی انسان ها** و **نمادهای دانش آموزی**. کدهای عددی در این مقیاس به واقع عدد نیستند بلکه صرفاً برای **گروه بندی** به کار می رود.



اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد، به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.



شعارهای برتر
سال جهانی آمار



بهترین برنامه‌ریزی
مستقیم بهترین آمار

با آمار بهتر فهمیدیم
بهتر تصمیم بگیریم

کار در کلاس



نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

- الف) محسن، محمود، محمد و میت همگی اسامی مذکر هستند. *اسمی (کیفی)*
- ب) در یک دبیرستان ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادی رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بالاترین است. *رتبه‌ای (کمی)*
- پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه جیران (بر حسب درجه سلسیوس). *فاصله‌ای (کمی)*
- ت) طول ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز. *فاصله‌ای (کمی)*

تصویرین



داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هر یک از سوالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

- الف) نام نماینده حسین ایرانی است. *اسمی (کیفی)*
- ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد. *فاصله‌ای (کمی)*
- پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۲ است.
- ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰،۰۰۰،۰۰۰ ریال بوده است.
- ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های مورد نظر: حمایت کامل، حمایت بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است.
- ج) وضعیت تأهل این نماینده: متأهل *اسمی (کیفی)*
- ح) می‌گویند این نماینده در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که رأی حمایت کرده است.

کیفی (کمی)

آمار چیست؟

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک پزشک معمولاً به‌صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم به بیماری می‌دهد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به‌صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شبهه‌ای به آن راه ندارد.

وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایق است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به‌صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.



فعالیت

به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.
تغذیه و سلامت
صحت آغاز تصمیم در زمینه‌ها مختلف است.

- بیشترین آسیب‌پذیری در مثال، افتادن ما زمین خوردن است.
- پنج درصد افراد به واکنش آنفولانزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های موردنیاز بدن را تأمین می‌کند.

حمل و نقل

- اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخلی خودرو است.
 - بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کنسور خارجی، در پشت چراغ قرمز به ترتیب یا بی‌نی خود کلنجار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
 - رانندگی بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش ۳۰ درصدی سدا شد می‌شود.
 - متوسط تعداد کشته‌های تصادفات حدود ۵ نفر در روز اعلام شده است. **به کمک روشی که در این اطلاعیه آورده شده، می‌توانید با جرمی که در این اطلاعیه آورده شده، آمار تصادفات را کاهش دهید.**
- چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند؟ آیا تعریف دقیق کلمات برنگ شده را جیس می‌زنید؟ جامعه و بارمتر یا نمونه و آماره را در هر یک از مثال‌ها مشخص کنید.
- تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هایمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. به‌علاوه، آمار در شرایطی که با عد

تهیه‌کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فقطت در تصمیم‌گیری روبرو رویم. همه به باری ما می‌آید. چگونه به اطلاعات گزارش‌شده در فعالیت قبل دست یافته‌اند؟ به عنوان مثال، اگر درصد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکنش آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند، بدون تریق بر روی همه افرادی که مایل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پیش رویمان می‌گذارد. روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعه کوچکی از افراد با سلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از این افراد با افلام تصمیم‌گیری کنیم. شیوه تحلیل داده‌ها، در کنار قواعد استنباطی، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکیل می‌دهند.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار، جهش‌های
توسعه پایدار
آمار، راه‌های ما
در تصمیم‌گیری
و برنامه‌ریزی صحیح

به مطالعه نحوه گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

گفتنی است که روش‌های آماری به تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ این روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصمیم‌هایی بگیریم، اما نه هر تصمیمی. به یاد داشته باشید که حتی یک روش آماری مناسب، نمی‌تواند دقیق‌تر یا صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.

تمرین

۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟
داده: واقعتی درباره یک چیز است که در حال حاضر، اسباب‌بازی یا یک بار بار در دسترس است. متغیر: هر چیزی از آن خطه من و او است؛ را متغیر می‌نامند.
۲. داده‌های در سطح اسمی، کفی هستند یا کیفی؟
هر شغلی که در مورد آن چیزی را می‌تواند در مورد نمونه با آماره‌ها نامند.
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟
هر شغلی که در مورد آن چیزی را می‌تواند در مورد نمونه با آماره‌ها نامند.
۴. در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
بزرگ‌ترین آماره‌ها هستند که از آن آماره‌ها تشکیل می‌دهند.
۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ منسری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟
 الف) متغیر را مشخص کنید.
 ب) این متغیر کفی است یا کیفی؟
 ج) جامعه آماری در اینجا چیست؟
بسیار نهار و شام. کل منسری‌های غذاخوری که نهار و شام سفارش می‌دهند.

تهیه‌کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کتاب کلاس

۶. موضوعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان **نسبی**

ب) زمان اولین کلاس **فاصله‌ای**

پ) رسته تحصیلی **اسمی**

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب **ترتیبی**

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز) **نسبی**

ج) سن دانش‌آموز **نسبی**

نسبی

لقمان و مرد پیاده

خواندنی

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای ننسسته بود. مردی که از آنجا می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید. لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان ننسسته است. دوباره سؤال کرد: مگر ننسیدی؟ پرسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید؟ لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند گفت: ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: جبرا اول نگفتی؟ لقمان گفت: چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آمار ری رعایت شده است. چرا؟ نکته ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید، راه برو و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی. زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد، مدت زمان دقیقی نباشد.



درس ۲

معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت



امسال خیرین مدرسه جعفر به مدرسه کمک می‌کنند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشته خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به‌طور متوسط، ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این مدرسه در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر باشد:

درآمد (میلیون ریال)	نجیبه	سیحان	رسول	حننا	جوانه	احمد	آرمان
	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

س برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کند. میانگین همان چیزی است که ما به آن معدل می‌گوییم. برای محاسبه آن تنها تمامی درآمدها را باهم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم می‌کنید. اگر تمامی درآمدها را باهم جمع کنید (۱۸۹) و بر تعداد افراد تقسیم کنید (۷)، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد درآمد سالانه برابر است با ۳۲/۴ است.

اگر n داده به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، میانگین آنها را با نماد \bar{x} نشان می‌دهیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



$$\bar{x} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = 30$$

میانگین
جمع داده‌ها
تعداد داده‌ها

۱. میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ جقدر است؟
۲. اگر میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ برابر ۳۰ شود مقدار x جقدر است؟
۳. میانگین اعداد ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ جقدر است؟
۴. میانگین اعداد ۲۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰، ۱۰۰ جقدر است؟
۵. میانگین اعداد ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ جقدر است؟
۶. میانگین اعداد ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ جقدر است؟
۷. آیا می‌توانید چند قاعده کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید.

حال اگر یک میلیارد در با درآمد ماهیانه یک میلیارد ریال به انجمن خیریه دبیرستان ما بیاید. میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او تروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دور افتاده می‌نامند.) درآمد او میانگین را تا حدود ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً ۱۴۸/۶۲۵) و بر اساس شیوه تخمین گذشته، خیرین معادل ۱۷۸ میلیون ریال (دقیقاً ۱۷۸/۳۵) را به دبیرستان کمک خواهند کرد؛ که غیر واقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

در یاد: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیه داده‌هاست.

میانگین

در مثال خیریه، داده دور افتاده باعث اشتباه مادر تخمین متوسط داده‌هاست. میانگین مرسوم‌ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است ما را به اشتباه بیندازد. ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور از میانگین که داده وسطی داده‌های مرتب شده است، می‌توان استفاده کرد. پس از مرتب کردن داده‌ها، داده‌ای که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است. میانگین است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین برابر میانگین دو داده وسطی مرتب شده است.

برای محاسبه میانگین داده‌ها، قبل از ورود میلیارد، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. وسط (ان) عدد چهارمین عدد است. پس میانگین داده‌ها عدد ۲۸ است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
درآمد مرتب شده	۱۲	۲۲	۲۵	۲۸	۳۰	۳۲	۴۰

حال فرض کنید میلیارد در خیریه حضور دارد. میانه برای ۸ عدد وجود ندارد یا به عبارتی ۸ عدد، عدد وسط ندارند. پس بین داده چهارم و پنجم میانگین می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد ۲۸ و جایگاه پنجم آن ۳۰ و در نتیجه میانگین جدید درآمد ۲۹ است.

مقدار داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. فروشنده‌گان پوشاک از معیار گرایش به مرکز مد بسیار استفاده می‌کنند. آنها با آمارگیری‌های خود درمی‌یابند که چه نوع پوشاکی مورد پسند مصرف کنندگان است. از همان پوشاک برای فروش سفارش می‌دهند. در رای گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است. چون موضوعی که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس جمهوری، شمارزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رای) را داشته باشد. برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم و داده با بیشترین فراوانی مد است. مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر ۵۳ میلیون ریال و میانگین آن برابر ۳۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایشان از همه مهم‌تر بود؟ عدد ۳۲/۵ میلیون نشان دهنده هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجه سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانگین، دلیل اینکه افراد از بیمه تأمین اجتماعی استفاده می‌کنند، روشن می‌شود: (میانگین هزینه‌های سالیانه درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمه پرداختی است، اما با نگاه به میانگین سالیانه هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معامله خوبی کرده‌ام) و من همیشه نگرش اصلی را می‌نموم، اگر چه میانگین تعداد زخمی‌ها در هر سفر با خودرو صفر باشد.

این نسخه را نیز به یاد داشته باشید: گاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه چیز به اینکه شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید، بستگی دارد.

کار در کلاس

- با سه واژه: داده، نقطه، میانگین و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.
- آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به **میانگین** معروف است. برای محاسبه **آن**... به داده‌های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.
- میانگین** در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بالاتر از **آن**... و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از **آن**... قرار دارند.
- زمانی با **مادری** مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان بی‌روی نکند.
- وقتی با **داده‌ها** مواجه هستید، **میانگین** معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا **میانگین**.
- به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، **میانگین** بهتر از **میانگین** است.

شخصی دست راست خود را در خجالت و دست چپ خود را در فکر کرده است. زمانی که از او درباره احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به‌طور متوسط خوب هستیم». نتیجه اخلاقی این لطیفه این است که یک عدد به تنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌خوبی توصیف نمی‌کند. بنابراین، اندیشه خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز معیاری را نیز گزارش دهیم که نوسان و تغییر داده‌ها را هم بیان کند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

میانگین موزون

شما قطعاً متوجه شده‌اید که برخی از نمرات شما ضریب دارند. مثلاً اگر چهار بار از شما آزمون گرفته باشند، نمره آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند، یعنی به آن ضریب ۳ بدهند. پس اگر نمرات شما به صورت زیر باشد:

نمره اول: ۱۰۰ نمره دوم: ۱۰۰ نمره سوم: ۱۰۰
۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۶

نمره‌ای که برای این درس در کارنامه شما خواهد آمد میانگین ۶ عدد است یعنی نمره درس مذکور عبارت است از:

$$\frac{100 + 100 + 100 + 17 + 18 + 15 + 16}{6}$$

میانگین نمره‌ها بدون احتساب ضریب ۱۶/۵ می‌شود.

از میانگین موزون برای معدل بررسی که با واحدهای مختلف (تعداد ساعات متفاوت) در طول سال تحصیلی ارائه می‌شود نیز استفاده می‌شود.

خواندنی



درس ۳

معیارهای پراکندگی

فعالیت



می‌خواهیم کلاس‌های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم‌زمان بین دانش‌آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه‌بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده‌اند. نمرات آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

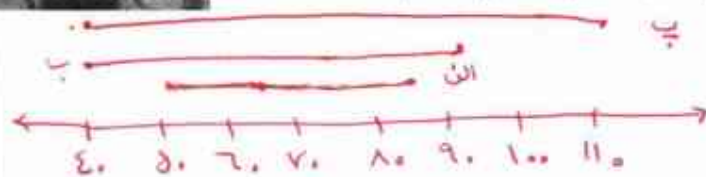
داده‌های مربوط به سه کلاس دهم:

الف	{ ۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵ }	$\bar{x} = 67$
ب	{ ۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹ }	$\bar{y} = 67$
پ	{ ۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱ }	$\bar{z} = 67$



میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر شما پراکندگی نمرات در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده‌ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟
 چرا؟ مثلاً اگر والدین برای ثبت‌نام فرزند بازگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج یکی از مدرسه‌ها را انتخاب کنند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن کمتر است در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می‌خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن بیشتر باشد. چرا؟ *بر کدام کلاس؟*

این کلاس را انتخاب کنید



بهتر است دانش‌آموزان کمتر است



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

یک معیار معمول سنجش میزان براکتدگی که نشان دهنده تغییرات داده‌های مورد مطالعه است. انحراف معیار است. انحراف معیار را با به کارگیری یک فرمول از داده‌ها به دست می‌آوریم (اختلاف هر عدد یا میانگین داده‌ها را حساب کنید؛ به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید؛ و سپس جذر بگیرید.) توان دوم انحراف معیار را واریانس می‌نامند. داده‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند. همچنین انحراف معیار نمرات هر سه کلاس محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر n را به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد σ (سیگما) نشان می‌دهند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

کلاس اول

$\sigma = 0 \rightarrow \sum (x - \bar{x})^2 = 0 \rightarrow \bar{x} = 75$
 مع فصلت همواره شود.

۱. اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار برابر با صفر خواهد شد؛ چرا؟

۲. انحراف معیار نمرات آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
75	75 - 75	$(0)^2$
75		
73		
80		
70		
76		
79		
42		
77		

جدول ۴۷
 در صفر
 داشته باشد
 که ایراد دارد.

مشاهده می‌شود که انحراف معیار نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین براکتدگی نمرات را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کفی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

۸.۵

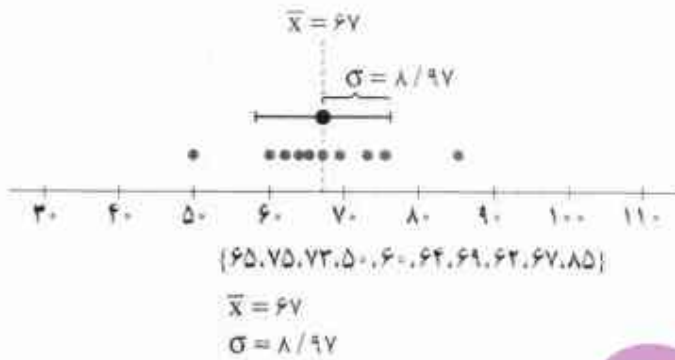
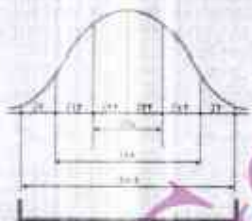
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

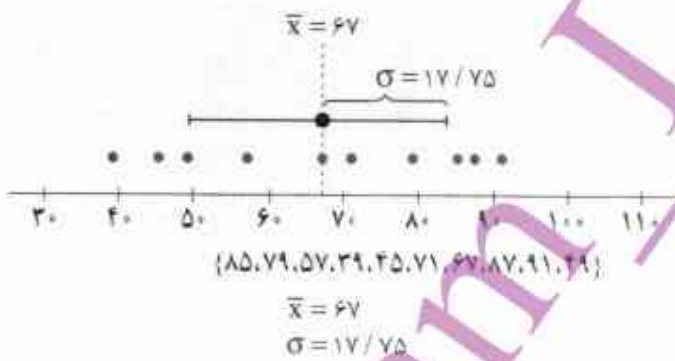


برآیندگی در خم پنجهار (مختصر زمان)

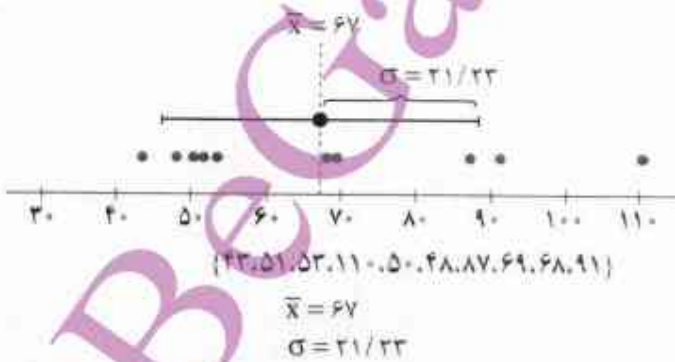
اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت‌نگاشت (هستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم پنجهار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را پنجهار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان پنجهارند. یعنی بافت‌نگاشتی زنگی شکل دارند. حواص این خم کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد چند درصد داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانگ، یا مرکز ثقل بافت‌نگاشت است و ضرایبی از انحراف معیار قرار دارند. این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



کلاس (ب)



کلاس (ب)



کلاس (ب)

فعالیت



حتماً بر روی قوطی‌ها یا پاکت‌های مواد غذایی با بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند.
 $10 = 250$ گرم

عدد ۲۵۰ وزن خالص ماده غذایی است که فرار است به دست مصرف کننده برسد. ولی معمولاً این چنین نیست. کمی خطا اجتناب ناپذیر است. این خطا چقدر است و چگونه آن را محاسبه کنیم؟ اگر تعداد زیادی از مختصای پاکت‌ها یا فوطی‌های یک تولیدی را وزن و انحراف معیار آنها را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است. یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دیگر اگر ما ۱۰۰ فوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل ۹۶ تا از آنها وزنی بین ۲۴۰ تا ۲۶۰ گرم داشته باشند. درح‌حین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟

بروز مغز به متن حاشیه صفحه ۱۰۵

مغز

برای بی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم. تقریباً ۹۶ درصد از داده‌ها بین «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر بازه‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن $\bar{x} - 2\sigma$ و انتهای آن $\bar{x} + 2\sigma$ باشد، تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند. این مانند آن است که بگوییم، ۴ درصد نمونه‌ها پیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارد. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت قانون قبل به «تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین یک انحراف معیار از میانگین هستند». تعبیر می‌کند دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

باز به همین چه؟

کار در کلاس

جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات بین سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند

فعالیت

می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است؛ اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به این صورت محاسبه می‌شود:

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک جدول زیر این کار را انجام دهید.

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

شماره‌های برتر
سال جهانی آمار



آمارهای دقیق
پشنوائت توسعه پایدار
آمار، ابزاری علمی
در توسعه مبتنی بر
دانشی

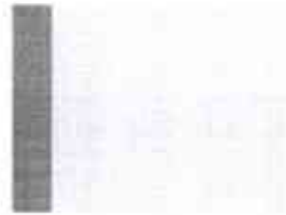
زمانی که میلیارد در وارد انجمن خیره می‌شود، انحراف معیار داده‌ها برابر است با 10.18 ... این دو مقدار باهم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که ما معیار گرایش به مرکز را برای این داده‌ها محاسبه کردیم. ما برای رفع آن مشکل به جای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می‌توانیم انجام دهیم. معیار براکت‌نگی که تعریف می‌شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنه میان جارکی، که با IQR نشان می‌دهیم، می‌نامیم. «میانه» جایی در وسط داده‌هاست؛ به‌طور مشابه، جارک‌ها هم یک چهارم و سه چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده‌تر اگر برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان جارک اول است و به همین صورت میانه داده‌های بعد از میانه، جارک سوم خواهد بود. برای سادگی از نمادهای Q_1 و Q_3 به ترتیب برای جارک اول، میانه (جارک سوم)، و جارک سوم استفاده می‌شود.

جدول زیر را برای سال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

σ	$IQR = Q_3 - Q_1$	Q_3	Q_1	Q_1
انحراف معیار	دامنه میان جارکی	جارک سوم	میانه	جارک اول
	۴			
	۱۲,۵			

درآمد ماهیانه
اعضای خیره
درآمد بعد از
ورود میلیارد

این اعداد امکان مشاهده چند چیز را به شما می‌دهند: میلیارد در مسب در هم‌ریختگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است. اما میانه و دامنه میان جارکی همچنان ثابت ماندند. این یکی از دلایلی است که ما می‌گوییم، اگر داده دور افتاده داشته باشیم، از میانه (و در نتیجه دامنه میان جارکی) به جای میانگین استفاده کنید، در این صورت نتیجه بهتری از داده‌ها به دست می‌آورد. زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد، به نحو دیگری می‌توان از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و براکت‌نگی نتیجه بگیرد که داده دور افتاده وجود داشته است.



دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنه میان چارگی تفسیر ساده آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سرطان را مطالعه کنیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، مشخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیمارشان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیمارشان عود کرده است؟ اگر در گزارشی، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خواننده‌ای می‌تواند از روی اطلاعات داده نشده، بوجه به دو قانون ذکر شده نحوه توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجا است که، آنها این کار را خواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پزشک متخصص سرطان بسیار پرمتغله را در حال فکر کردن به این مسئله ببینید که: «خوب میانگین $64/3$ و انحراف معیار $9/8$ است؛ 68 درصد از بیماران در فاصله یک برای انحراف معیار از میانگین هستند؛ این یعنی $9/8 \pm 64/3$ ، که می‌شود، یک لحظه صبر کنید، ماسین حسابی کجاست؟» شما تنها می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنه میان چارگی تصور خوبی نسبت به توزیع داده‌های پیش رویمان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنه میان چارگی در توصیف مجموعه داده‌ها بسیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند:

تمام اطلاعاتی که در اینجا ذکر شد (میانگین‌ها، میانه‌ها، انحرافات معیار، دامنه‌های میان چارگی) تحت عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.



کار در کلاس



جملات زیر را کامل کنید:

۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفیدند. ... میانگین ... و ... میانه ... انواعی از معیارهای گرایش به مرکزی هستند.
۲. شما معمولاً نه تنها معین یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار **میزان تغییرات** است. **انحراف از میانگین**
۳. معیار براکت‌نگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، ... **انحراف معیار** است.
۴. معیار براکت‌نگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود **دامنه میان چارگی** دارد. **IQR**
۵. **میانه**، ... و **دامنه میان چارگی** اطلاعات سریعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
۶. آماری که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارگی به کار می‌رود، **آمار توصیفی** دارد.
۷. 50 درصد داده‌ها قبل از ... **میانه** ... و 50 درصد داده‌ها بعد از ... **میانه** ... قرار دارند.
۸. 75 درصد داده‌ها قبل از **چارک سوم**، یا بعد از **چارک اول** ... قرار دارند.
۹. 25 درصد داده‌ها قبل از **چارک اول** یا بعد از **چارک سوم** قرار دارند.
۱۰. 50 درصد داده‌ها بین **چارک اول** و **چارک سوم** قرار دارند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شاید مهمت‌ترین اجناب بشود که در این لازم است رانند
 میان چاکری نیز محاسبه بشود.

دو اجزای مهم

۱۱. تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

۱۲. تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

تمرین

۱. یک نمونه ۲۰ خانگی در بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می‌کنید؟ اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟ **پرتاب مجدد در صورت تکرار**

۲. سوال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید) **دو تاس همزمان به پرتاب می‌کنیم.**

۳. مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید. موضوع‌های زیر را در نظر بگیرید. درباره بهترین روش جمع‌آوری داده برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:

الف) بیشتر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت موتور اتومبیل‌ها باید تعیین شود».

ب) آبی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.

پ) در زمان مطالعه، گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می‌کند.

ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.

ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می‌شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش‌های جمع‌آوری داده بیان کنید.

الف) از طریق مصاحبه (ب) از طریق مشاهده (پ) از طریق آزمایش (ت) از طریق پرسش‌نامه

کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

الف) با نام پلیس‌های یک پاسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر آنها راجع به تخلفات مصاحبه شد.

ب) با جده‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند، بیخ در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان بررسی شود.

پ) برای بررسی ۱۲۱۱ نامبوهایی تولیدی یک کارخانه، نامبوه‌ها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادند.

۵. برای تحقیقات و بررسی‌های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران. (ب) مردان کدام نامبوه را بیشتر ترجیح می‌دهند.

۶. می‌خواهید مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیر درسی می‌کنند، آمارگیری کنید.

الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید.

این تمرین به
 دو تمرین جداگانه
 تبدیل بشود.

شعارهای برتر
 سال جهانی آمار



آمار دقیق،
 برنامه‌ریزی بهتر،
 آینده روشن
 آمار سخاوتمندانه و شفیع،
 ابزار مدیریت

حل تمرین ۲ به بعد پشت برگه



اسامی آنها را روی کاغذهای یکسان می نویسیم و سپس به قید قرینه ۳ نفر آنها را انتخاب می کنیم .
باید روشن نیز استفاده از اعداد تصادفی است .

بقیه تمرین ۳ که به نظری رسیدیم این تمرین مرتبط است .
الف) پرسش نامه (ب) پرسش نامه (پ) مشاهده (آزمایش)
ت) دادگان (ث) آزمایش (مشاهده)

الف) بررسی عمل موفقیت مردی در بسکت - بررسی عوامل موفقیت یک فرد در کنگو سراسری
ب) بررسی میزان استفاده از کمر بند ایمنی در جاده ها توسط رانندگان
ج) بررسی رفتار دانش آموزان در هنگام وقت استراحت آنها

پ) بررسی میزان تصادف در یک نقطه ی خاصی در شهر - بررسی عزت درین امور از رسته ی با دردهم ۷۰

ث) نظر خواهی در مورد (برای) آموزشگاه توسط مدیر - نظر خواهی در مورد رضایت مشتریان از برخورد کارکنان
فردستگاه

نمونه	جامعه	واحد آماری	روش آماری
—	مجموعی کل پلیس ها پاسگاه	هر یک از پلیس ها پاسگاه	این عمل سرشماری است و نمی تواند عنوان گیری باشد.
بچه ها که با آنها مواجهه کنند.	کل بچه ها وارد شده به پارک	هر یک از بچه ها وارد شده به پارک	عنوان گیری تصادفی (منظم، سیستماتیک)
شامپوها بر سرشده	کل شامپوها تولیدی	هر یک از شامپوها	عنوان گیری تصادفی (منظم)

الف) مجموعی کل ساکنین استان مازندران مستقدار - بقیه ی پرسش نامه و توزیع آن بین تعداد معینی از
خانوارها این شهردار انتخاب تصادفی (که بزرگتر از آنها
مستقدار است) باشد .

ب) مجموعی کل مردان کشور که شامپو مصرف می کنند .
بقیه ی پرسش نامه و توزیع آن به مشتریان شامپو جهت تکمیل



الف) مجموعی کل دانش آموزان کلاس
ب) انتخاب تعدادی از دانش آموزان به طور تصادفی (مثلاً دانش آموزان که شماره ردیفی آنها در قسمت اول رس
عدد فرد باشند)

ساعت ۱

ساعت ۲

ساعت ۳

⋮

پ) پریشانی نام شامل تعداد ساعت معین قید نشده

ت) تعداد دانش آموزان کلاس

ث) تعداد دانش آموزان انتخاب شده، هر چه جامعه کوچک باشد بهتر است شماره را جایگزین
عنوان نری کنیم.

ج) میزان ساعت مطالعه کتب غیر درسی

چ) کمی، با مقیاس نسبی

ج) کیفی نسبی

چ) کیفی نسبی

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف) کیفی نسبی

ب) کیفی فاصله ای

پ) کیفی نسبی

ت) کیفی نسبی

ث) کیفی نسبی

نمایش داده‌ها

فصل پنجم

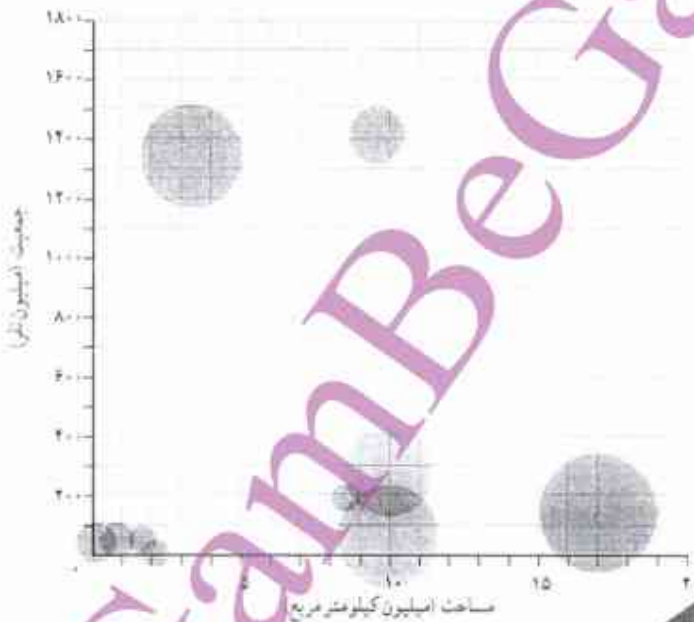
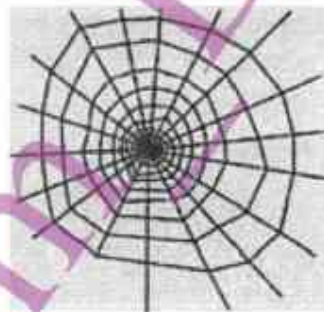


نمودارهای یک متغیره

درس ۱

نمودارهای چندمتغیره

درس ۲



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

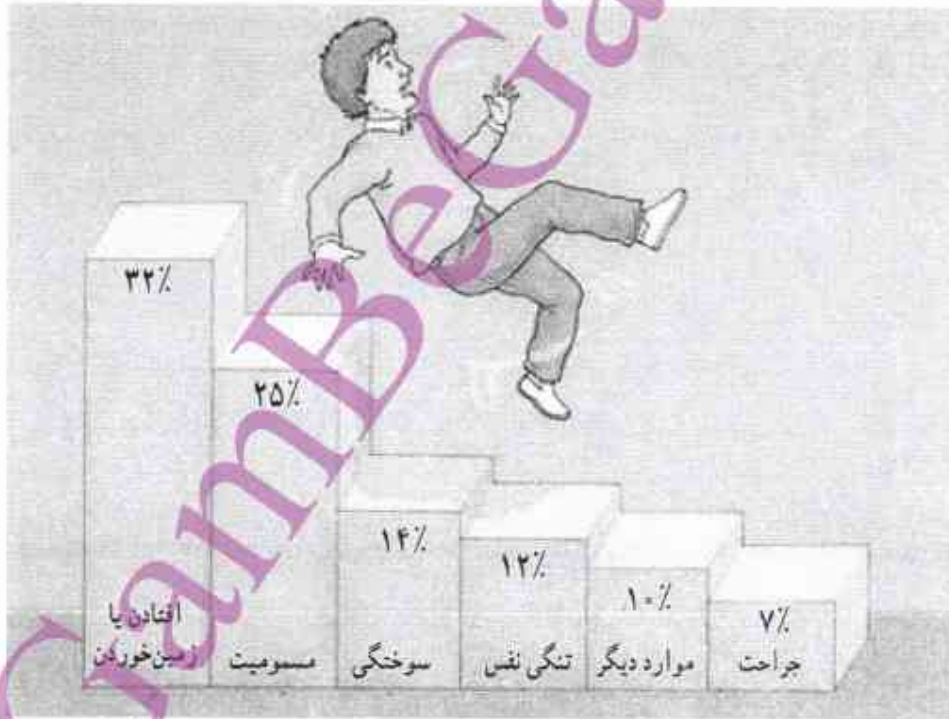
درس ۱

نمودارهای یک متغیره

فعالیت



در کلاس قرار شد هر دانش آموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، اینکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



$7 \times 2 = 14$ $10 \times 2 = 20$ $12 \times 2 = 24$ $14 \times 2 = 28$ $25 \times 2 = 50$ $32 \times 2 = 64$

۶۴

۵۰

۲۸

۲۴

۲۰

۱۴



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

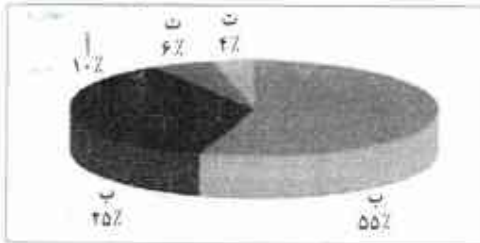
نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها، روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها یا حس بینایی است.

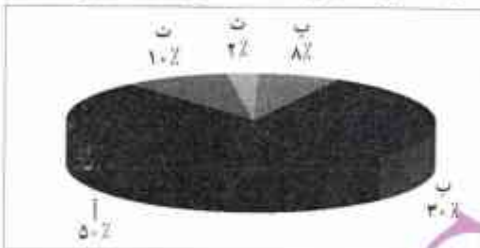
فعالیت



درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور



از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سؤال قبل کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت روبه‌رو نشان داد.

آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی؟ مانند دو نمودار قبلی.

انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند. می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است.

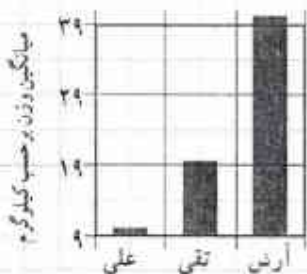
خواندنی





بازی با نمودارها

۲. اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدو تنبل‌های ما بچه‌ها وزن بسیار ناچیزی دارند.

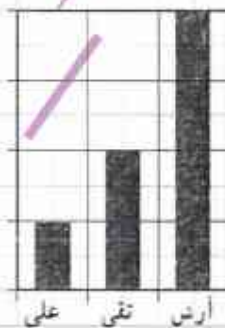
۴. اینک اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه کدو تنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، از چه کاری می‌تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید:



اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

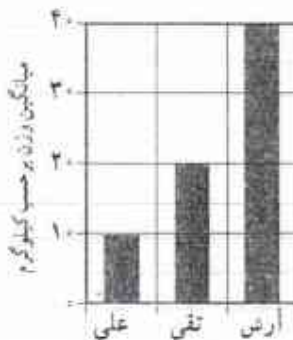
به کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما اغلب با نسیدها که فریب نخورید.

۱. بیایید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به صورت زیر است:



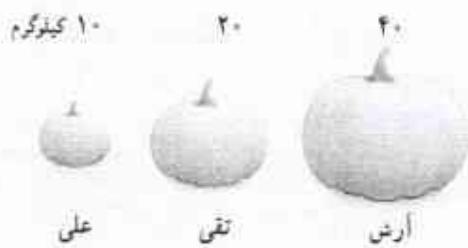
این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، بهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

معنی می‌کند که وزن کدو تنبل‌ها باغ‌ها میانگین آرش بیشتر از تقی و علی است.



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را، برای نشان دادن وزنی، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدو تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ اگر نه، فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض و مساحت دایره = πr^2

نما چگونه این شکل را رسم می‌کند تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
 به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟

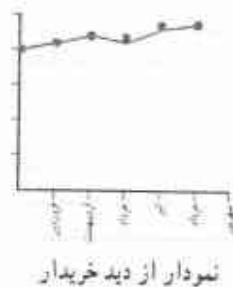
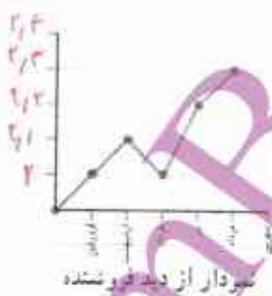
تمرین



۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

شهریور	مرداد	مهر	خرداد	اردیبهشت	فروردین
۲/۴	۲/۳	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۰

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟ **فهر**

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کفی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟ **کفی**

فعالیت

مری گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب‌شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازی بازیکن الف:

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی‌ها
۳	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب شده

۱۰ بازی بازیکن ب:

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده

می‌توان داده‌های مرتب شده را به صورت زیر نشان داد:

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	بازیکن الف
۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۳	۱۳	بازیکن ب

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

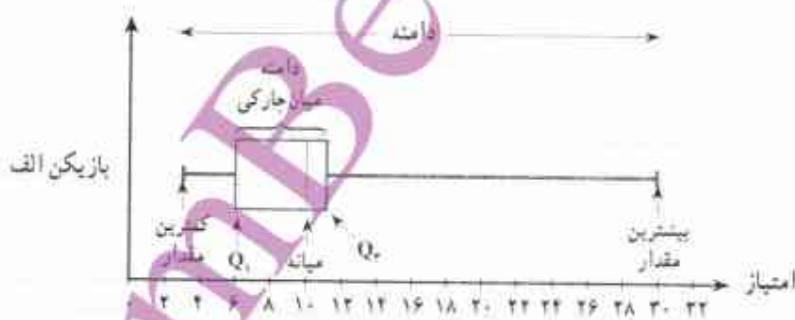
اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگویم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. برای مشخص کردن حدود دامنه میان‌چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



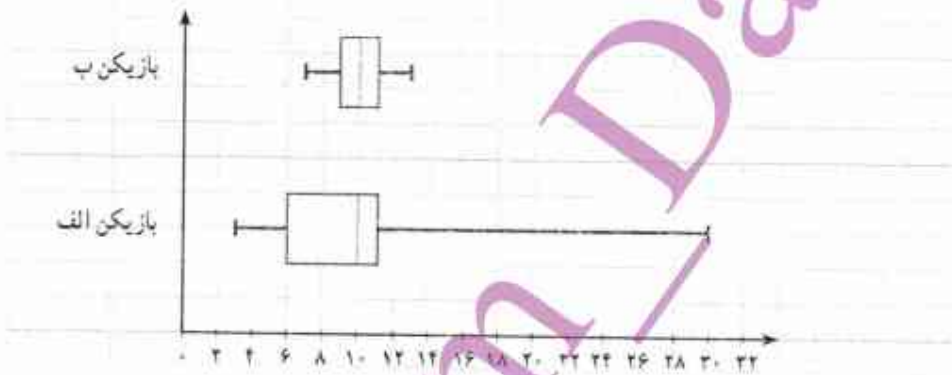
این نمودار دامنه، دامنه میان‌چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر داده‌ها دربرگیرنده داده دور افتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش \times می‌یابد. با نگاه کردن به سیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتوازن بودن داده‌ها پی ببرید.

نمودار جعبه‌ای دو بسکبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل با حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



بازیکن ب دامنه نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانه هر دو برابر است. بازیکن الف دامنه امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد، و گاهی هم بسیار کمتر. بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است. میانه‌ها و دامنه میان‌چارکی را با هم مقایسه کنید، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

نمودار جعبه‌ای، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سیل‌ها کمترین و بیشترین داده را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنه میان‌چارکی به نظر مفید می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاه‌گاهی امتیازات بسیار کمی کسب می‌کنند چگونه در روز مسابقه، بد بازی کند، برای ما به قیمت از دست دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. مطمئن نیستیم که دامنه یا دامنه میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد.

از آنجا که دو خط
دو طرف جعبه شبیه سیل
گرفته است. بعضی مواقع
به آن نمودار جعبه و سیل
گفته می‌شود.

مرسی نباید فقط دامنه امتیازات بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند، امتیازاتش کمترین تغییرات را داشته باشد.



مسئله دامنه و دامنه میان‌جاری این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به نسبی می‌گویند؛ اما نمی‌گویند که چند وقت به چند وقت بازیکنان این امتیازات کم و زیاد را در مقابل امتیازات نزدیک به میانه کسب می‌کنند. این برای مرسی مهم است.

کار در کلاس

برای مجموعه داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای بکشید.

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.
 از آنجا که اعداد به ترتیب چیده شده‌اند، اولین عدد کمترین مقدار است و آخرین عدد بیشترین مقدار.
 گام دوم: چارک‌ها را مشخص کنید.
 در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می‌توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک‌ها استفاده کنیم.

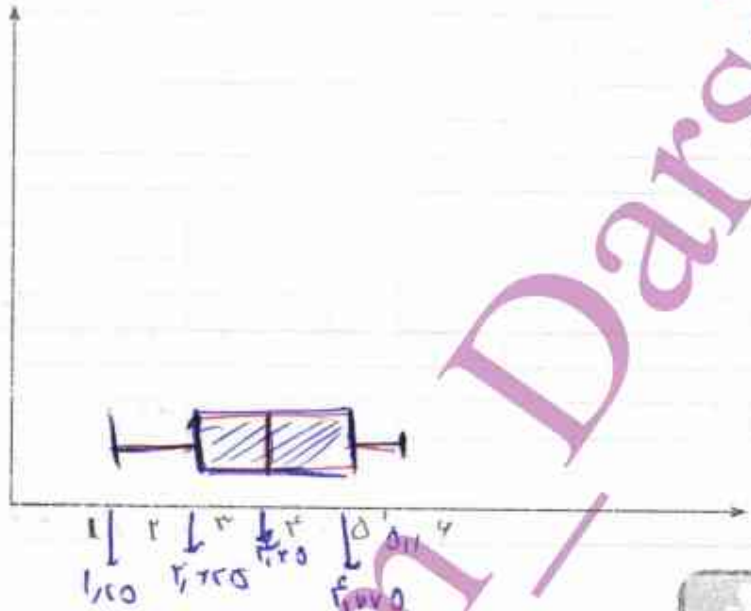


با نگاه به شکل بالا درمی‌یابیم که میانه بین مقادیر ۲۰ و ۳۰ است. بنابراین، مقدار میانه می‌شود: ۲۵.
 چارک اول، بین مقادیر ۲۵ و ۲۷ قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می‌شود: ۲۶.
 چارک سوم بین مقادیر ۴۸ و ۴۹ قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می‌شود: ۴۸.۵.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گام سوم: نمودار جعبه‌ای رسم کنید.



تمرین



۱. نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟ **« قی فاصه فراوانی در این مورد کم باشد - فراوانی »**
۲. نمودارهای میله‌ای افقی درست‌ترین شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند. برای فراوانی کلاً محورها جرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟ **« وقتی که اسم رده‌ها طولانی باشد »**
۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷ | ۲۴ | ۲۶ | ۲۶ | ۲۹ | ۱۹ | ۳۱ | ۱۸ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۳ | ۲۹ | ۲۵ | ۲۵ | ۳۳ | ۳۱ | ۲۱ | ۲۶ | ۲۵

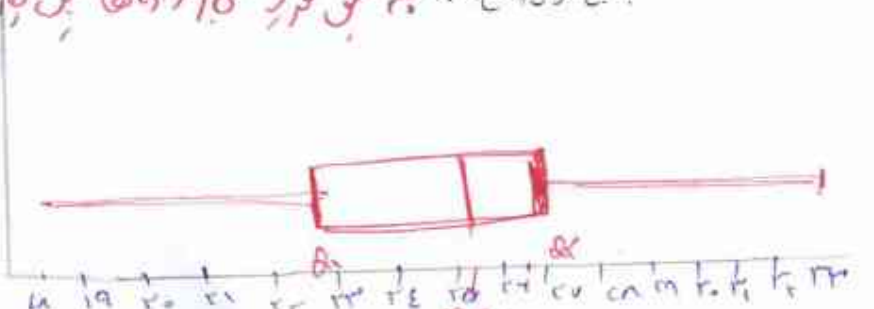
الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **« بیشتر میانگین (۱۱) کمتر میانگین (۱۱) »**

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **« میانه (۲۶) کمتر از میانگین (۲۵) »**

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟ **« بله طبق فرمول ۱۵ داده‌ها بین چارک اول و سوم هستند »**



نمودارهای میله‌ای افقی درست‌ترین شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند. با این فرق که محورها جرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده می‌شود.

نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشد، مفید واقع می‌شوند. آنها برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشتن، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

$\bar{x} = 25,15$
 میان = ۲۵,۱۵
 مد = ۲۵,۲۶
 $Q_1 = 22$
 $Q_2 = 25,15$
 $Q_3 = 26$



درس ۲

نمودارهای چندمتغیره

فعالیت



بوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

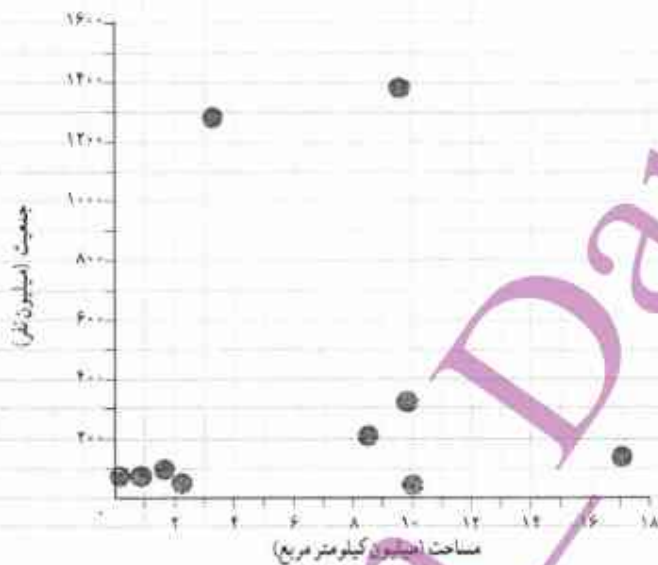
نام کشور	جمعیت (انفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آبها (درصد)
۱ ایران	۷۹.۲۰۰.۰۰۰	۱.۶۴۸.۱۹۵	۰/۷۰
۲ آمریکا	۳۲۲.۳۶۹.۳۱۹	۹.۸۵۷.۳۰۶	۷/۱۰
۳ انگلستان	۶۴.۷۱۶.۰۰۰	۲۴۲.۴۹۵	۱/۳۴
۴ برزیل	۲۰۵.۳۳۸.۰۰۰	۸.۵۱۵.۷۶۷	۰/۶۵
۵ ترکیه	۷۹.۴۶۳.۶۶۳	۸۱۴.۵۷۸	۱/۳۰
۶ چین	۱.۳۷۶.۰۴۹.۰۰۰	۹.۵۹۶.۹۶۱	۲/۸۰
۷ روسیه	۱۴۴.۱۹۲.۴۵۰	۱۷.۰۹۸.۲۴۲	۱۳/۰۰
۸ عمان	۳۰.۷۷۰.۳۷۵	۲.۱۴۹.۶۹۰	۰/۷۰
۹ کانادا	۳۶.۰۴۸.۵۲۱	۹.۹۸۲.۶۷۰	۸/۹۲
۱۰ هند	۱.۲۷۶.۲۶۷.۰۰۰	۳.۲۸۷.۲۶۳	۹/۶۰

بوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آبها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند براکت‌نکاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به‌طور هم‌زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

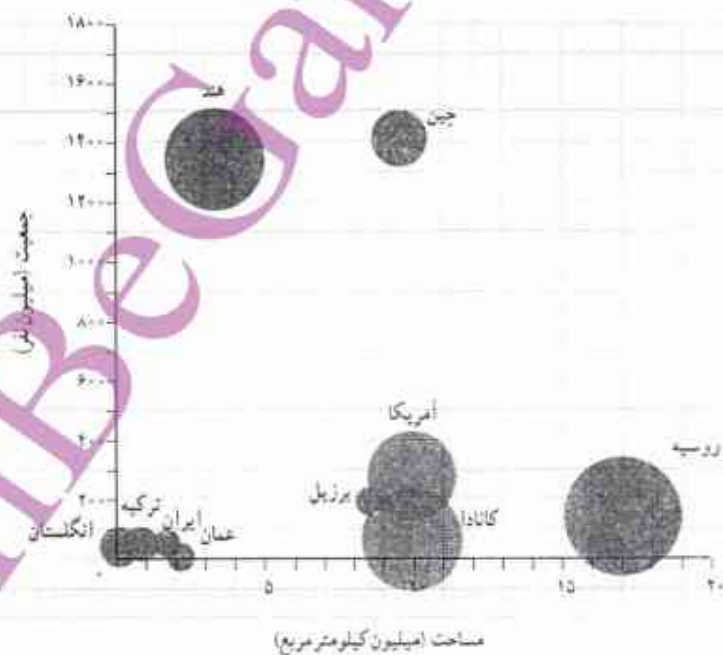
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

برآینش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



بویا همین طور که به برآینش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می‌کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه‌های نمودار را متناسب با درصد آب‌های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که بویا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.

هر نقطه با دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

- V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی.
- V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی.
- V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونه خاصی از براکتش نگاشت دانست که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

سیستم بینایی انسان به‌طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت. توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.

اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورهای می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

کار در کلاس

قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

- الف) قد، وزن، نمره ریاضی
- ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی
- ب) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سیس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید که دایره‌ها هم‌بزرگ باشند. نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند.

تمرین

۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب یا کدام یک از موارد زیر است؟
 - الف) شعاع دایره‌ها
 - ب) محیط دایره‌ها
 - ب) قطر دایره‌ها
 - ت) مساحت دایره‌ها ✓
۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند.
 - الف) یک متغیر
 - ب) دو متغیر
 - ب) سه متغیر ✓
 - ت) محدودیتی ندارد

تهیه کننده:

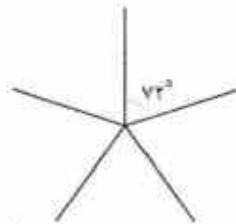
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

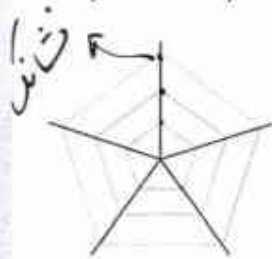


نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دایره‌ای است، که در آن سه متغیر گننی با بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به‌شکل بزده‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهنده یک متغیر است؛ پس می‌توانند درجه‌بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



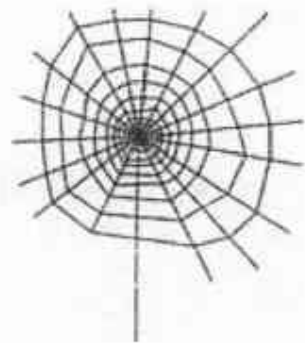
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متوالی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.



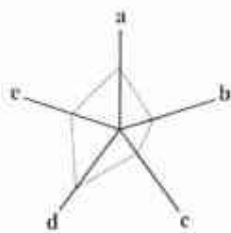
گاهی این خطوط راهنما را به‌جای راست‌خط به‌صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.



از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.



خواندنی



نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر به ازای همه مشاهدات، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع ها انجام می دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می توانیم مشاهده ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می گوید:

- کدام مشاهده ها نسبه به یکدیگرند؟
 - یا داده دور افتاده ای وجود دارد؟
 - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
 - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده های دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

یادآوری: منظور از مشاهده یا نقطه داده ای در آمار، مجموعه ای است شامل یک یا چند

مقدار اندازه گیری شده برای یک عضو جامعه آماری (= واحد آماری).

مثلاً اگر واحدهای آماری، دانش آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان

را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش آموزان، یک «مشاهده» است.

مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توب طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در

نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول

فصل ۲۰۱۳ - ۲۰۱۲ را بررسی می کنیم. (همه داده ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه گیری

شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده اند.)

متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (تغیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۲۲	۰/۲۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۲۷/۷	۷۵
ضربه های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۲۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توبرایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



توب طلایی فدراسیون بین المللی فوتبال (فیفا)، جایزه ای است که هر سال توسط فیفا و مجله فرانس فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد داده می شود. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی گیری از نمایندگان رسانه های بین المللی و سرمربیان و کاپیتان های تیم های ملی فوتبال صورت می گیرد.

مشاهده = (تعداد بازی)

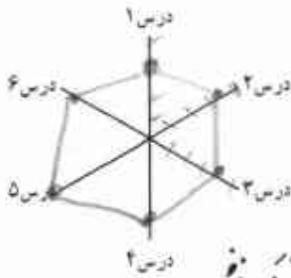
کار در کلاس



آموزگارتان تنش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می کند:

- ۱..... ریاضی و آمار..... ۱۰.....
- ۲..... مفروضه..... ۴.....
- ۳..... جبرکلی..... ۱۴.....
- ۴..... حسابان..... ۱۷.....
- ۵..... فرمول سز..... ۲۰.....
- ۶..... اولاد برهان..... ۲۸.....

الف) نمودار زاداری نمره های خود را به صورت مقابل رسم کنید:



ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره های کدامتان بهتر است؟ **حرمواد اردی به شتر**

تمرین



۱. نمودار زاداری برای نمایش داده های چند متغیر کنی به طور هم زمان به کار می رود؟ **۳ یا بیشتر است**
۲. زاویه بین شعاع های مجاور در نمودار زاداری، چه چیزی را نشان می دهد؟ **واسه به بعد از متغیرها در مورد خاص راست زنی دهه**
۳. نمودار زاداری چه چیزی به ما می گوید؟
۴. کاربرد نمودار زاداری در ورزش چیست؟ **در کلاس هدف به یک است**
۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار زاداری، ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟ **۹ تغییر**
۶. داده های زیر را که مربوط به شاخص های سلامت است، در قالب یک نمودار زاداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	پیشینه
x_1 عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
x_2 نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۲/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
x_3 نسبت ولادت ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
x_4 نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۱	۹۵	۱۰۰
x_5 شاخص آمادگی اجرای مقررات بین المللی سلامت	۸۵	۲۳	۷۸	۱۰۰

(داده ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)



یوم منابع
 ۱. آنتون (۱۳۹۵)، ترجمه و
 سرد آمار، خانه آمار اصفهان
 ۲. ج. بیرویان (۱۳۹۳)، آمار و
 احصال مقدماتی، انتشارات
 آستان قدس
 ۳. گریو مولتان (۱۳۹۵)، آمار و
 مانیساری، وزارت آموزش و
 پرورش

۴. C. H. Brase and C. P. Brase (2012), Under-standable Statistics, Brooks/Cole
 ۵. D. Griffiths (2009), Head First Statistics, O'Reilly Media.
 ۶. S. McKillop (2004), Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press
 ۷. A. J. Vickers (2009) What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Under-stand Statistics, Pearson
 ۸. Written by Volunteers (2014), Everything Maths, Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Stryva

حرفه

جواب ۳: کدام متغیرها شبیه یکدیگرند - آیا رابطه دو متغیر را در نمودار زاداری - مقدار کدام متغیر را بیشتر از دیگری می بینیم
 نسبت به متغیرها که آری بیشتر یا کمتر است - مقدار کدام متغیر نسبت به دیگری بیشتر است