

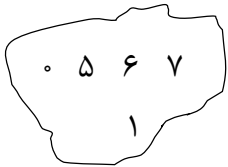
* مجموعه و بازه *

مجموعه: به دسته‌ای از اشیای متمایز (غیر تکراری) و معین، یک مجموعه می‌گویند که با حروف بزرگ لاتین نوشته می‌شوند.

* راه‌های نمایش مجموعه:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{x | x \in \mathbb{N}\}$$



• نمایش تفصیل (با اعضا) $\leftarrow$

• نمایش توصیفی (زبان ریاضی) $\leftarrow$

• نمایش هندسی (نمودار ون) $\leftarrow$

* برخی از مجموعه‌های معروف:

(Natural numbers set)

: مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(Whole numbers set)

: مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(Zahl numbers set)

: مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

(Quotient numbers set)

: مجموعه اعداد گویا

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

(Irrational numbers set)

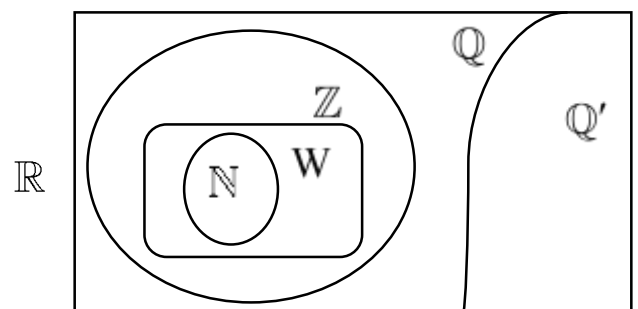
: مجموعه اعداد اصم یا گنگ

$$\mathbb{Q}^c \text{ یا } \mathbb{Q}'$$

(Real numbers set)

: مجموعه اعداد حقیقی

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$



مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را تهی گویند و با علامت $\{\}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهند.

دو مجموعه مساوی: اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه اگر هر عضو B در A و هر عضو A در B وجود داشته باشد، داریم:

$$A = B$$

نکته: ☒

۱. عضویت در یک مجموعه را با $\in$ و عدم عضویت آن را با $\notin$ نشان می‌دهند.

۲. لزومی ندارد که اعضای مجموعه با هم ارتباط داشته باشند و تکرار یک عضو در مجموعه اثری ندارد.

☞ **زیر مجموعه:** B را زیر مجموعه A گویند هرگاه هر عضو B، عضو A نیز باشد. آن گاه $B \subseteq A$.

☑ **نکته:**

۱. هر مجموعه، زیر مجموعه‌ی خودش است.

۲. تهی، زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

۳. تهی فقط یک زیر مجموعه دارد و آن هم خود $\emptyset$ است. $\emptyset \subseteq \emptyset$

۴. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آن گاه $A = B$.

۵. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آن گاه $A \subseteq C$.

۶. رابطه‌ی روبرو همواره برقرار است $\leftarrow N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$.

۷. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

۸. به تعداد اعضای یک مجموعه، عدد اصلی گفته می‌شود و با نماد n نشان می‌دهند.

۹. به تمامی زیر مجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خودش زیر مجموعه‌ی سره گویند و تعدادش برابر $(2^n - 1)$ می‌باشد.

۱۰. مجموعه تمامی زیر مجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه‌ی توانی گویند. تعداد اعضای $P(A)$ برابر 2^n خواهد بود.

*** در هر مجموعه‌ی n عضوی:**

• تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی:

$$\begin{matrix} n \\ \text{تا} \end{matrix} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

• تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

• تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی:

• تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

☞ **اجتماع دو مجموعه‌ی A و B:** $(A \cup B)$

$$(A \cup B) = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

مجموعه‌ای است که هر عضو آن، یا عضو A یا B یا هر دو باشد.

☞ **اشتراک دو مجموعه‌ی A و B:** $(A \cap B)$

$$(A \cap B) = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

مجموعه‌ای است که هر عضو آن، هم در A و هم در B باشد.

☑ نکته:

۱. اجتماع و اشتراک دو مجموعه خاصیت جابجایی دارند. $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

۲. تفاضل دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارند. $A - B \neq B - A$

☞ قوانین جبر مجموعه‌ها:

۱. اگر A و B و C مجموعه‌های دلخواه باشند، قوانین زیر همواره برقرارند:

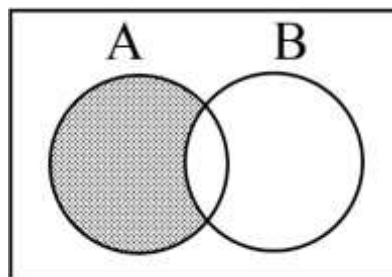
$\left\{ \begin{array}{l} * A \cup B = B \cup A \text{ خاصیت جابجایی} \\ * A \cup A = A \\ * A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} * A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B) \\ * \text{اگر } A \subset B \rightarrow A \cup B = B \\ * A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \end{array} \right.$	شرکت پذیری
---	--	------------

$\left\{ \begin{array}{l} * A \cap B = B \cap A \text{ خاصیت جابجایی} \\ * A \cap A = A \\ * A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} * (A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B \\ * \text{اگر } A \subset B \rightarrow A \cap B = A \\ * (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right.$	شرکت پذیری
---	--	------------

$\left. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right\}$	توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک $\leftarrow$ توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع $\leftarrow$	۲.
---	---	----

☞ تفاضل دو مجموعه $(A - B)$:

تفاضل B از A $(A - B)$ ، مجموعه‌ای است که اعضای آن در A هستند ولی در B نیستند.



☑ نکته:

اگر A و B دو مجموعه دلخواه و ناتهی باشند آن گاه داریم:

$\left\{ \begin{array}{l} * A - A = \emptyset \\ * A - \emptyset = A \\ * \emptyset - A = \emptyset \\ * (A - B) \subset A, (B - A) \subset B \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} * \text{اگر } A \subset B \rightarrow A - B = \emptyset \\ * A \cap B = \emptyset \rightarrow A - B = A, B - A = B \\ * A - B \rightarrow A - B = B - A \end{array} \right.$
--	--

🔑 مجموعه های متناهی و نامتناهی:

اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و پس از شمارش به انتها برسیم، آن مجموعه متناهی است و در غیر این صورت نامتناهی خواهد بود.

✍ مثال:

تعداد مورچه های روی کره زمین $\leftarrow$ متناهی و مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲ $\leftarrow$ نامتناهی

☑ نکته:

برخی از مجموعه های کوچک یا خاص را می توان با عضوهای شان معرفی کرد اما اگر مجموعه بزرگ یا نامتناهی باشد باید ویژگی های مشترک بین اعضا را پیدا کرد و سپس به زبان ریاضی نوشت.

✍ مثال:

مجموعه اعداد طبیعی $\leftarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ و مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲ $\leftarrow \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 2\}$

✍ مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را معین کنید.

الف) مجموعه اعداد گویای بزرگ تر از $0/0$ ب) مجموعه اعداد طبیعی که معکوس آن ها کوچک تر از $1/0$.

🔑 تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

اگر A یک مجموعه متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با $n(A)$ نمایش می دهیم، به عنوان مثال اگر $A = \{2, 5, -8, 12\}$ باشد در این صورت داریم: $n(A) = 4$.

(توجه: اگر $\emptyset$ نشان دهنده مجموعه تهی باشد، $n(\emptyset) = 0$)

☑ نکته: حال اگر A, B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

✍ مثال: اگر $A, B \subset U$ ، $n(A) = 14$ ، $n(A') = 10$ و $n(B') = 8$ باشد، آنگاه $n(B)$ کدام است؟

۷ (د)

۹ (ج)

۸ (ب)

۱۶ (الف)

🔑 دو مجموعه مجزا:

دو مجموعه که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند ($A \cap B = \emptyset$) را جدا از هم یا مجزا می نامیم.

☑ نکته:

فرمول فوق در دو مجموعه مجزای A, B ، به صورت مقابل می باشد:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

☞ مجموعه مرجع یا جهانی:

مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعه آن باشد، مجموعه مرجع می‌نامیم و با U (Universal set) نمایش می‌دهیم.

☞ متمم یک مجموعه:

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم و داریم:

☑ نکته:

به طور کلی روابط زیر در مجموعه‌ها برقرار است:

$$\begin{aligned} ۱. \emptyset = U & \quad ۲. U' = \emptyset & ۳. (A')' = A & ۴. A \cap A' = \emptyset \\ ۵. (A \cap B)' = A' \cup B' & ۶. (A \cup B)' = A' \cap B' & \text{(قوانین دمورگان)} \end{aligned}$$

۷. اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$ است.

۸. اگر مجموعه مرجع U متناهی باشد تمام زیر مجموعه‌ها و متمم‌های آن‌ها نیز متناهی‌اند.

۹. اگر مجموعه مرجع U نامتناهی باشد خواهیم داشت:

الف) A متناهی است $\Leftarrow A'$ نامتناهی است. ب) A نامتناهی است $\Leftarrow$ در مورد A' نمی‌توان نظری داد.

✍ مثال:

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 6\}$ و $C = \{1, 5, 6\}$ ، مجموعه‌های زیر را با اعضا معین کنید.

الف) $A' - B'$ ب) $A' \cup C'$

☑ نکته: روابط زیر همواره برقرارند:

$$۱. Q' \subseteq R \quad ۲. Q = R - Q', Q' = R - Q \quad ۳. Q \cap Q' = \emptyset \quad ۴. W - N = \{0\}$$

☑ نکته:

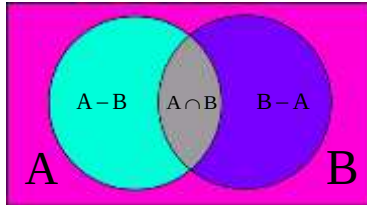
۱. اگر مجموعه مرجع U متناهی باشد و $A, B \subseteq U$ در این صورت داریم:

$$\bullet n(A) + n(A') = n(U) \text{ و یا } n(A') = n(U) - n(A)$$

$$\bullet n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$\bullet n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

۲. با توجه به شکل روبرو رابطه زیر همواره برقرار است:



$$n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) = n(A \cup B)$$

۳. برای سه مجموعه نیز داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

مثال: در یک کلاس ۳۵ نفری، ۱۸ نفر به والیبال، ۲۰ نفر به فوتبال علاقه دارند و ۲ نفر به هیچ کدام از این دو بازی علاقه ندارند. چند نفر فقط به والیبال علاقه دارند؟

مثال: در کلاس های هنری یک مدرسه، ۲۰ نفر شرکت کرده اند. ۶ نفر هم کلاس خطاطی و هم نقاشی شرکت کرده اند، ۲ نفر در هیچ یک از دو کلاس خطاطی و نقاشی شرکت نکرده اند. اگر تعداد افرادی که فقط کلاس نقاشی شرکت کرده اند، ۳ برابر تعداد افرادی باشد که در کلاس خطاطی شرکت کرده اند، تعداد افرادی که فقط در کلاس نقاشی شرکت کرده اند، چند نفر است؟

مثال: در یک کلاس ۳۱ نفری تعداد ۱۴ دانش آموز عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن ها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر آن ها عضو هر دو گروه باشند مطلوب است:

(الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرود هستند.

(ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از آن دو گروه نیستند.

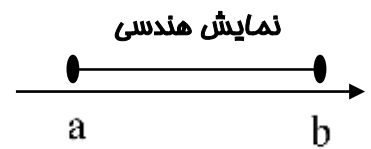
بازه ها:

هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی را بازه گویند، بازه ها شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند.

نمایش مجموعه ای

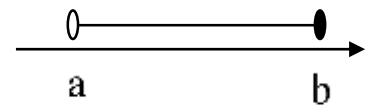
بازه بسته بین b, a

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



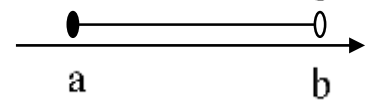
بازه نیم باز بین b, a

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



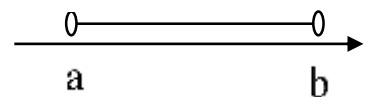
بازه نیم باز بین b, a

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



بازه باز بین b, a

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



اگر a یک عدد حقیقی دلخواه باشد داریم: $[a, a] = \{a\}$. ۱ $(a, a) = \emptyset$. ۲

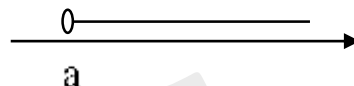
معرفی نوع دیگری از بازه‌ها:

نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی

بازه باز اعداد بیشتر از a

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



بازه باز اعداد بیشتر یا مساوی a

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



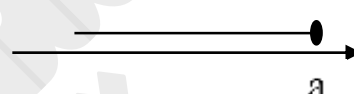
بازه باز اعداد کمتر از a

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



بازه باز اعداد کمتر یا مساوی a

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



(توجه: $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.)

مثال: اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد و $A = (-3, 3]$ باشد، A' را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ باشند، آنگاه $B - A$ ، $(A \cap B)'$ ، $A \cup B$ را به صورت بازه بنویسید.

مثال: اگر $A = [-1, 4]$ و $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+a}{2} \leq 3\right\}$ و $C = [0, 4]$ و $C = A \cap B$ باشند، مقدار a را بیابید.

۱. اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ و $B = \{x \mid x = 4n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ و $B \subseteq A$ باشد آنگاه B چند عضو دارد؟

۲. اگر ۳ عضو از اعضای مجموعه‌ای را حذف کنیم از تعداد زیر مجموعه‌های آن ۸۹۶ عضو کاسته می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟

۳. تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی مجموعه‌ای اعداد طبیعی یک رقمی که فاقد اعداد اول یک رقمی باشد. چند تا است؟

۴. اگر مجموعه‌ی $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ باشد، آنگاه $A - \{a, b\}$ چند زیر مجموعه‌ی محض غیر تهی دارد؟

۵. تمام زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ را بنویسید.

۶. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $3k + 3$ عضوی ۵۶ واحد بیشتر از مجموعه‌ی $3k$ عضوی است. مقدار k را بیابید.

۷. اگر تعداد اعضای مجموعه‌ی A ۳ تا کمتر از تعداد اعضای مجموعه‌ی B باشد و حاصل ضرب تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی B در A برابر ۳۲ باشد. تعداد اعضا و تعداد زیر مجموعه‌های هر کدام را بیابید.

۸. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ باشد. چند زیر مجموعه مانند X وجود دارد که در رابطه‌ی $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ صدق می‌کند؟

۹. اگر مجموعه‌ای ۴۵ زیر مجموعه‌ی ۲ عضوی داشته باشد. چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

۱۰. اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه $n + 1$ عضو برابر با تعداد زیر مجموعه‌های ۹ عضوی یک مجموعه $n + 1$ عضو باشد، n را بیابید.

۱۱. از یک گروه ۲۰ نفری دبیران یک دبیرستان ۱۰ نفر ریاضی ۹ نفر فیزیک و ۷ نفر شیمی درس می‌دهند. در صورتی که بدانیم ۴ نفر از دبیران هم ریاضی و هم فیزیک درس می‌دهند و هیچ کدام از دبیران ریاضی شیمی درس نمی‌دهند. در این دبیرستان چند نفر فقط فیزیک درس می‌دهند؟

۱۲. در یک نظر خواهی از یک کلاس ۷۸ نفر معلوم شد ۲۸ نفر به تیم الف و ۳۱ نفر به تیم ب و ۱۱ نفر به تیم الف و ب ۱۳ نفر به تیم ب و ج ۱۳ نفر به تیم الف و ج علاقه‌مندند. اگر ۱۲ نفر به هر ۳ تیم علاقه‌مند باشند، چند نفر به دو تیم علاقه‌مندند؟

۱۳. اگر $(B - A) \subseteq (B - A)'$ باشد، آنگاه $A' \cap B'$ را به دست آورید.

۱۴. متمم مجموعه $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ را به دست آورید.

۱۵. چند عدد دو رقمی طبیعی وجود دارد که هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵ نباشند؟

۱۶. چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $A = \{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ وجود دارد که فاقد $\{a, b\}$ باشد؟

۱۷. اشتراک $[-2, a), (b, 4]$ بازه‌های برابر $\left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ است. اجتماع بازه‌های $[-2a - 1, b), (b, a]$ به دست آورید.

۱۸. اگر n عدد طبیعی و $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ باشد، بازه‌ی مجموعه‌ی $A_n - (A_3 \cup A_6)$ را به دست آورید.

✓ سوالات چهار گزینه‌ای

۱. A, B, C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$A = B \cup C \text{ و } A = (B \cap C) \cup D$$

الف) $D = \emptyset$ (ب) $C = D$ (ج) $A \subseteq B$ (د) $A = B \cup D$ (ه) $D = A \cap B$

۲. اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ باشد، مجموعه $A - \{B\}$ چند زیر مجموعه‌ی غیر تهی دارد؟

(تجربی-۸۹)

الف) ۳ (ب) ۷ (ج) ۳۱ (د) ۱۵

۳. در یک گروه‌مایی، ۱۳۱ نفر زبان فرانسه، ۱۴۱ نفر انگلیسی، ۹۹ نفر ایتالیایی، ۳۱ نفر فقط انگلیسی و فرانسه، ۱۴ نفر فقط انگلیسی و ایتالیایی، ۱۷ نفر فقط فرانسه و ایتالیایی و ۲۶۷ نفر حداقل یکی از سه زبان را بلد هستند. چند نفر هر سه زبان را بلد هستند؟

الف) ۲۴ (ب) ۱۸ (ج) ۲۷ (د) ۲۱

۴. مجموعه‌ی A تعداد ۹۶ زیر مجموعه بیشتر از مجموعه‌ی $B = \{a, e, i, o, u\}$ زیر مجموعه دارد. مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟

الف) ۱۰ (ب) ۹ (ج) ۸ (د) ۷

۵. در یک کلاس، ۹ نفر به شنا علاقه دارند، ۱۴ نفر به تنیس و ۶ نفر به فوتبال و تنیس علاقه دارند. ۷ نفر به شنا علاقه دارند ولی به فوتبال علاقه ندارند و ۴ نفر فقط به فوتبال علاقه دارند. تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند، کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

الف) ۱۲ (ب) ۱۰ (ج) ۹ (د) ۱۱

۶. اگر $n(A - B) = ۴$ ، $n(B - C) = ۶$ ، $n(C - A) = ۲$ و $n(A \cup B \cup C) = ۱۵$ باشد، مجموعه‌ی $A \cap B \cap C$ چند عضو دارد؟

الف) حداقل ۳ عضو (ب) حداکثر ۴ عضو (ج) دقیقاً ۳ عضو (د) حداقل ۴ عضو

۷. اگر $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{120}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ و $B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{144}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ باشد، مجموعه‌ی $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(الف) ۳۳

(ب) ۲۳

(ج) ۲۷

(د) ۲۵

۸. مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ چند عضو دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر بوده ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد؟

(الف) ۱۰۰

(ب) ۱۰۶

(ج) ۱۰۸

(د) ۱۱۴

۹. اگر مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌ی B نامتناهی باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر لزوماً متناهی است؟

(الف) $B \cap A'$

(ب) $A \cup B'$

(ج) $A' \cap B'$

(د) $A \cap B'$

۱۰. تعداد اعضای کدام مجموعه کمتر است؟

(الف) $A = \left\{ (-1)^x \mid x \in \mathbb{N} \right\}$

(ب) $B = \left\{ (-1)^{\frac{x(x+1)}{2}} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$

(ج) $C = \left\{ 5^{(-1)^x} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$

(د) $D = \{a + b \mid ab = -1, a, b \in \mathbb{Z}\}$

۱۱. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

(الف) $A - B = C$

(ب) $B - C = \emptyset$

(د) $A - B = \{C\}$

(ج) $B - C = \{1, 2\}$

$B = \{x \mid x^2 < 1, x \in A\}$

۱۲. به ازای کدام مجموعه A ، مجموعه‌ی B هیچ عضوی ندارد؟

(الف) $W - \mathbb{N}$

(ب) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

(ج) $\mathbb{Z} - W$

(د) اعداد صحیح زوج

۱۳. اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $B = \{7, 8, 9, \dots, 14\}$ و $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ باشد، چند مجموعه می‌تواند به

جای X قرار گیرد؟

(الف) ۱۰۲۴

(ب) ۵۱۲

(ج) ۴۰۹۶

(د) ۲۰۴۸

۱۴. اگر $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد، مجموعه‌ی $P(P(A) - A)$ کدام است؟

(الف) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(ب) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$

(د) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

(ج) $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

۱۵. ساده شده‌ی عبارت زیر کدام گزینه است؟

$$\left((A - B) \cup (A' - B) \cup (B - A) \cup (B - A') \right) \cup (A \Delta B)$$

الف) $A - B$ ب) $(A \cup B) - (A \cap B)$

ج) $A \cup B$ د) $A \cap B$

۱۶. متمم مجموعه‌ی $A - (B - A)'$ نسبت به مجموعه‌ی مرجع کدام است؟ (کنکور سراسری-۸۸)

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) A د) B

۱۷. اگر $T \subseteq (A \cap B)$ و $T \subseteq (A' \cup B')$ باشد، الزاماً داریم:

الف) $T = \emptyset$ ب) $T \subseteq A \subseteq B$ ج) $T \subseteq A, B$ د) $A = B = \emptyset$

۱۸. اگر $B_n = A_{n+1} \cup A_n \cdot A_n = \left(\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{n} \right)$ و $C_n = B_{n+1} - B_n$ باشد، حاصل

$\dots \cup C_3 \cup C_2 \cup C_1$ کدام است؟

الف) $(0, 1)$ ب) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right)$ ج) $\left(0, \frac{1}{4} \right]$ د) $\left(0, \frac{1}{2} \right]$

۱۹. اگر $R = \left[-\infty, \frac{3m+5}{7} \right] \cup \left(\frac{m-1}{2}, +\infty \right)$ باشد، مجموعه‌ی m کدام است؟

الف) $m = 18$ ب) $m \geq 17$ ج) $m > 17$ د) $m \leq 17$

۲۰. اگر $\left(-\infty, 2 - \frac{m-1}{3} \right] \cap [m-2, +\infty)$ مجموعه‌ی تک عضوی باشد، مقدار m کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) $\frac{7}{2}$ د) -۱

۲۱. اگر $A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{3n+1}{n}\right)$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، حاصل $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

- الف) $(0, 3)$ ب) $(1, 3)$ ج) $[1, 3)$ د) $(1, 3]$

۲۲. اگر $\bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1$ و $\bigcup_{i=1}^4 A_i = A_4$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- الف) $A_1 = A_4$ ب) $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$
ج) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4$ د) $A_2 \subseteq A_1$

۲۳. اگر n عدد طبیعی و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد. مجموعه $(A_8 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟ (ریاضی-۹۶)

- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸

۲۴. اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ باشد، آنگاه بازه‌ی مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

- الف) $-2, -1$ ب) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ ج) $[-1, 1]$ د) $\emptyset$

۲۵. اگر $(4 - a^2, 5) \cap (1, 2 + a^2) = \emptyset$ آنگاه a متعلق به کدام بازه است؟

- الف) $(-\infty, 1]$ ب) $(-1, 1)$ ج) $[-1, 1]$ د) $[1, +\infty)$

* الگو و دنباله *

الگو: یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کنند و یا ترکیبی از این دو باشد.

الگوی خطی: اگر جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = an + b$ آن الگو را خطی می‌نامیم.

نکته:

در الگوهای خطی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی ثابت و برابر با a است.

مثال:

$$t_n = 3n + 2$$

$$n = 1 \rightarrow t_1 = 3(1) + 2 = 5$$

$$n = 2 \rightarrow t_2 = 3(2) + 2 = 8$$

$$n = 3 \rightarrow t_3 = 3(3) + 2 = 11$$

$$n = 4 \rightarrow t_4 = 3(4) + 2 = 14$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n = 50 \rightarrow t_{50} = 3(50) + 2 = 152$$

$$t_4 \quad \quad \quad t_{50}$$

$$\rightarrow 5, 8, 11, 14, \dots, 152$$

$$a=3 \quad 3 \quad 3$$

مثال:

در شکل مقابل تعداد نقطه‌ها در طرح هفتم کدام است؟



(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۳۷ (د)

۳۴ (ج) ✓

۳۶ (ب)

۲۵ (الف)

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه	۴	۹	۱۴	۱۹

$$t_n = an + b \rightarrow t_n = 5n + b \xrightarrow[n=4]{n=1} 4 = 5(1) + b \rightarrow t_n = 5n - 1$$

جواب $\Rightarrow$

$$\rightarrow t_7 = 5(7) - 1 = 34 \rightarrow \boxed{t_7 = 34}$$

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

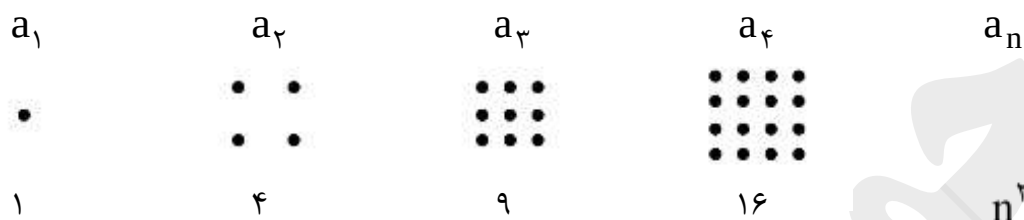
جواب $\Leftarrow$ فرض کنیم جمله‌ی عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} C_4 = 17 \Rightarrow 4a + b = 17 \\ C_{10} = 41 \Rightarrow 10a + b = 41 \end{array} \right\} \rightarrow 6a = 24 \rightarrow \boxed{a = 4, b = 1}$$

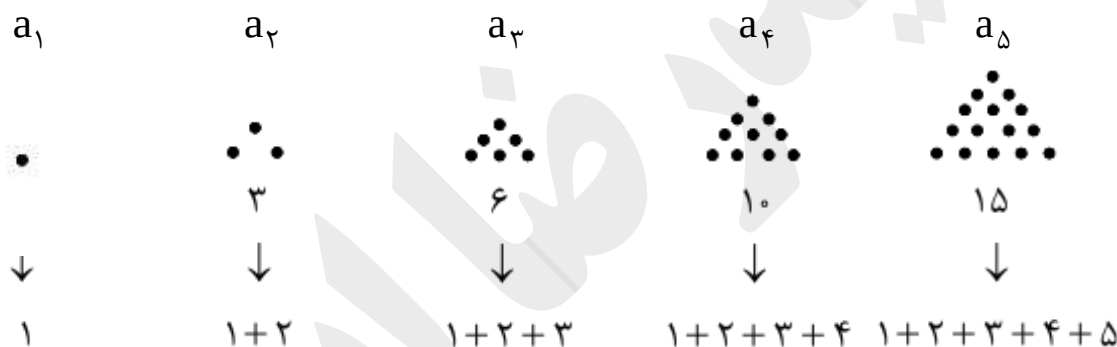
$$C_n = 4n + 1$$

☞ **الگوهای غیر خطی:** الگوهایی وجود دارند که خطی نیستند، یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی در آن مقدار ثابتی نیست. معروف ترین این الگوها الگوهای مربعی، مثلثی و الگوهای درجه‌ی دوم هستند.

☞ **الگوهای مربعی:** الگویی است که جملات آن توان دوم اعداد طبیعی هستند و جمله‌ی عمومی آن‌ها به صورت $a_n = n^2$ می‌باشد.



☞ **الگوهای مثلثی:** جمله‌ی عمومی این الگو به شکل $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.



☑ **نکته:**

۱. جمله‌ی عمومی الگوی مثلثی برابر با مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n است.
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

جواب $\Rightarrow a_{17} = \frac{17 \times 18}{2} = 153$

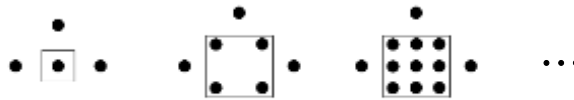
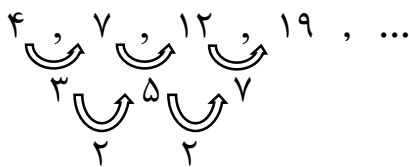
☞ **مثال:** جمله‌ی هفدهم یک دنباله‌ی مثلثی چند نقطه دارد؟

۲. در الگوی مثلثی همواره داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_1 = 1 \\ b_n = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{array} \right\} \quad \text{اگر الگوی مثلثی را با } \{a_n\} \text{ و الگوی مربعی را با } \{b_n\} \text{ نمایش دهیم، داریم:}$$

یا به عبارتی داریم: $a_n + a_{n-1} = n^2$

☞ **الگو درجه‌ی دوم:** الگوهایی که جمله‌ی عمومی آن به شکل $t_n = an^2 + bn + c$ باشد را الگوی درجه‌ی دوم می‌نامند. در هر الگو درجه دوم اختلاف جملات متوالی تشکیل یک الگوی خطی با ضریب ثابت $2a$ می‌دهند. ($A \neq 0$)



مثال: ✎

الگوی درجه دوم $\rightarrow$ الگوی خطی $\rightarrow$ ثابت

مثال: ✎

با توجه به الگوی زیر، شکل ششم از چند نقطه تشکیل شده است.



(۱)



(۲)



(۳)

۶۳ (د) ✓

۵۳ (ج)

۴۳ (ب)

۳۲ (الف)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ جواب

$$a_n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_6 = 3 \times \frac{6 \times 7}{2} = 63$$

نکته: ✓

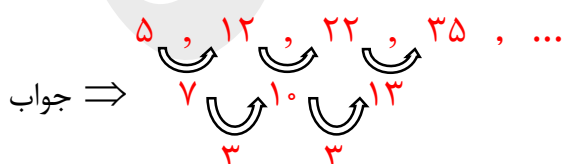
به دست آوردن جمله‌ی عمومی الگوهای درجه‌ی دوم:

الگوی مربعی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه جمله‌ی عمومی این الگو $a_n = an^2 + bn + c$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = a_1 \\ 4a + 2b + c = a_2 \\ 9a + 3b + c = a_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \rightarrow 3a + b \\ - \rightarrow 5a + b \\ - \rightarrow 2a \end{array}$$

می‌باشد پس داریم:

مثال: ✎ جمله‌ی عمومی الگوی $5, 12, 22, 35, 51, \dots$ را به صورت جبری به دست آورید.



$\Rightarrow$ جواب

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ 3a + b = 7 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \\ a + b + c = 5 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

❖ **دنباله:** هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می گیرند را یک دنباله می نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شود. دنباله ها را به شکل $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ نمایش می دهند که در آن a_1 جمله ی اول، a_2 جمله ی دوم و به همین ترتیب a_n جمله ی n ام یا جمله ی عمومی می شود.

✍ **مثال:**

۱. جمله عمومی دنباله ای به صورت $a_n = bn^2 + cn$ است. اگر جملات اول و دوم این دنباله به ترتیب برابر ۳ و ۸ باشند، جمله ی دهم آن کدام است؟

(د) ۱۶۰

✓ (ج) ۱۲۰

(ب) ۸۰

(الف) ۴۰

$$\Rightarrow \text{جواب} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \Rightarrow b(1)^2 + c(1) = 3 \Rightarrow b + c = 3 \\ a_2 = 8 \Rightarrow b(2)^2 + c(2) = 8 \Rightarrow 4b + 2c = 8 \end{cases}$$

$$-2 \times \begin{cases} b + c = 3 \\ 4b + 2c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b - 2c = -6 \\ 4b + 2c = 8 \end{cases} \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} b + c = 3 \\ 1 + c = 3 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a_n = n^2 + 2n \Rightarrow a_{10} = 10^2 + 2(10) = 120$$

۲. اگر جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2(-2)^{n+1}$ باشد، جمله ی چندم این دنباله برابر ۱۲۸ است؟

(د) هشتم

(ج) چهارم

✓ (ب) پنجم

(الف) هفتم

$$\Rightarrow \text{جواب} \Rightarrow 2(-2)^{n+1} = 128 \Rightarrow (-2)^{n+1} = \frac{128}{2} = 64 \Rightarrow (-2)^{n+1} = (-2)^6 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

✍ **نکته:** دنباله های بازگشتی:

دنباله هایی که هر جمله با جمله یا جملات قبلی رابطه ی معینی داشته باشند، دنباله های بازگشتی گویند. معروف ترین دنباله ی بازگشتی دنباله ی فیبوناتچی می باشد که جملات آن عبارتند از:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

و جمله ی عمومی آن به صورت روبرو می باشد:

❖ **دنباله ی حسابی:** دنباله ی حسابی، دنباله ای است که به جز جمله ی اول، هر جمله از اضافه شدن مقداری ثابت به

جمله ی قبل به دست می آید که به آن مقدار ثابت قدر نسبت می گوئیم.

در نکات گفته شده، d قدرنسبت دنباله ی حسابی و a_n جمله ی n ام دنباله می باشد.

✍ **نکته:**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

۱. جمله ی عمومی دنباله ی حسابی ←

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

۲. a_m و a_n دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله حسابی می‌باشند. ←

۳. اگر a و b و c سه جمله‌ی متوال دنباله‌ی حسابی باشند ← $2b = a + c$ یا $b = \frac{a+c}{2}$ واسطه‌ی حسابی b میانگین حسابی) دو عدد a و c می‌باشد.

۴. قاعده‌ی اندیس‌ها (در دنباله‌های حسابی غیر ثابت) ← $m \pm n = p \pm q \Leftrightarrow a_m \pm a_n = a_p \pm a_q$

مثال:

اگر $a_1 + a_{20} = 180$ آنگاه مقدار $a_{13} + a_{17}$ را به دست آورید.

$$\Rightarrow 10 + 20 = 13 + 17 \rightarrow a_{13} + a_{17} = a_1 + a_{20} = 180$$

۵. اگر $m + n$ زوج باشد، داریم ← $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$

(نکته‌ی فوق در واقع حالت خاصی از قاعده‌ی اندیس‌ها است که بیان می‌کند، مجموع دو جمله برابر است با دو برابر جمله‌ی وسط (به شرط آنکه جمله‌ی وسط داشته باشند.))

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

۶. اگر بین دو عدد a و b و m واسطه‌ی حسابی درج کنیم ←

$$۷. \begin{cases} a_n = m \\ a_m = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ a_{m+n} = 0 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

۸. مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی ←

$$۹. S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$۱۰. S_m = S_n \ (m \neq n) \Rightarrow S_{m+n} = 0$$

$$۱۱. \begin{cases} S_m = n \\ S_n = m \end{cases} \Rightarrow S_{m+n} = -(m+n)$$

$$۱۲. S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \rightarrow \text{ضریب } n^2 = \frac{d}{2}$$

$$۱۳. S_n = n \times m \quad \boxed{\text{جمله‌ی وسط}}$$

$$a_n = a_{n-x} + x(d)$$

۱۴. در یک دنباله‌ی حسابی همواره داریم ←

$$\Rightarrow d = \frac{a_n - a_{n-x}}{n - (n-x)} \rightarrow xd = a_n + a_{n-x} \rightarrow \boxed{a_n = a_{n-x} + xd}$$

$$a_{n-k} \xleftarrow[k \text{ تا قبل}]{} a_n \xrightarrow[k \text{ تا بعد}]{} a_{n+k}$$

۱۵. در دنباله‌ی حسابی داریم:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

۱۶. در دنباله‌ی حسابی داریم:

۱۷. اگر a و b و c و d و e و f و g و h تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند آنگاه

$$\boxed{c = \frac{b+d}{2} = \frac{a+e}{2}}$$

و

$$\boxed{d = \frac{c+e}{2} = \frac{b+f}{2} = \frac{a+g}{2}}$$

۱۸. اگر تمام جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی مانند $k \neq 0$ ضرب کنیم، آنگاه قدر نسبت دنباله‌ی k برابر خواهد شد. $d' = dk$

$$\boxed{d=2} \quad \boxed{d'=2 \times 4 = 8}$$

$$3, 5, 7, 9, \dots \xrightarrow{\times 4} 12, 20, 28, 36, \dots$$

مثال: ✍

۱۹. اگر در یک دنباله‌ی حسابی تمام جملات را با یک عدد جمع یا یک عدد را از تمام جملات کم کنیم، قدر نسبت تغییری نخواهد کرد.

$$\boxed{d=2} \quad 2, 4, 6, 8, \dots \xrightarrow[-2]{+4} \begin{matrix} 6, 8, 10, 12, \dots \\ 0, 2, 4, 6, \dots \end{matrix} \quad \begin{matrix} d' = d = 2 \\ d' = d = 2 \end{matrix}$$

مثال: ✍

۲۰. روش پیدا کردن مجموع چند واسطه‌ی حسابی (با مثال)

مثال: ✍

بین -12 و 52 ، هفت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. مجموع آن‌ها را بیابید.

$$\Rightarrow d = \frac{52 + (-12)}{7 + 1} = 8 \rightarrow -12, \underbrace{-4, 4, 12, 20, 28, 36, 44}_{\text{واسطه}}, 52$$

$$\text{مجموع } 7 \text{ واسطه} = -4 + 4 + 12 + 20 + 28 + 36 + 44 = 140$$

$$140 = 7 \times 20 \Rightarrow 7 \times 20 = 140 \quad (\text{تنها واسطه}) \Rightarrow \text{روش بهتر}$$

$$\rightarrow d = \frac{52 + (-12)}{1 + 1} = 20 \rightarrow -12, \textcircled{20}, 52$$

تنها واسطه

۲۱. جملات مشترک دنباله‌های a_n و b_n یک دنباله‌ی حسابی جدیدی به نام C_n ایجاد می‌کنند که قدر نسبت آن، ک.م.م. قدر نسبت‌های a_n و b_n هستند.

مثال: جملات مشترک دنباله‌های حسابی $\begin{cases} 1, 3, 5, 7, 9, \dots \\ 4, 9, 14, 19, \dots \end{cases}$ یک دنباله‌ی حسابی جدید ایجاد کرده‌اند. جمله‌ی ۲۱ ام

دنباله‌ی جدید کدام است؟

$$\Rightarrow \begin{cases} 1, 3, 5, 7, 9, \dots \Rightarrow d_1 = 2 \\ 4, 9, 14, 19, \dots \Rightarrow d_2 = 5 \end{cases} \longrightarrow d = 10 \Rightarrow C_n = 9, 19, 29, \dots \Rightarrow a_{21} = 209$$

دنباله‌ی هندسی: دنباله‌ی هندسی به دنباله‌ای گفته می‌شود که به جز جمله‌ی اول، هر جمله‌ی آن از ضرب کردن مقداری ثابت و مخالف صفر در عدد قبلی به دست می‌آید که با آن مقدار ثابت، قدر نسبت می‌گوییم. در نکات گفته شده، q قدرنسبت دنباله‌ی هندسی و t_n جمله‌ی n ام دنباله می‌باشد.

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1} \quad \leftarrow \text{۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی}$$

$$۲. q^{m-n} = \frac{t_m}{t_n} \Rightarrow \begin{cases} \text{فرد} & m-n \Rightarrow q = \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \\ \text{زوج} & m-n \Rightarrow q = \pm \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \end{cases}$$

مثال: در دنباله‌ی هندسی صعودی مقابل، جمله‌ی نهم را به دست آورید.

$$x, 5, y, z, 2, 4, 5, \dots$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ a_2 & & a_6 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow q^{(6-2)} = \frac{405}{5} = 81 \Rightarrow q^4 = 3^4 \Rightarrow q = \pm 3 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow q^{(9-6)} = \frac{a_9}{a_6} \Rightarrow 3^3 = \frac{a_9}{405}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{1} = \frac{a_9}{405} \Rightarrow a_9 = 27 \times 405 = 10935$$

۳. اگر x, y, z سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی باشند $\Leftarrow y^2 = xz \Leftarrow$ به y واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی) دو عدد x و z می‌گوییم.

مثال: بین ۷ و ۲۲۴ چهار واسطه‌ی هندسی قرار دهید.

$$\Rightarrow q^{(6-1)} = \frac{a_6}{a_1} \Rightarrow q^5 = \frac{224}{7} = q^5 = 32 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow (7, 14, 28, 56, 112, 224)$$

$$m + n = p + q \Rightarrow t_m \cdot t_n = t_p \cdot t_q$$

$$m - n = p - q \Rightarrow \frac{t_m}{t_n} = \frac{t_p}{t_q}$$

۴. قاعده اندیس‌ها ←

۵. ضرب جملات متساوی الفاصله در طرفین با هم برابر است

مثال:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10} \rightarrow \underbrace{a_1 a_{10}}_{1+10} = \underbrace{a_2 a_9}_{2+9} = \dots = \underbrace{a_5 a_6}_{5+6}$$

$$t_m \cdot t_n = t_{\frac{m+n}{2}}$$

۶. اگر $m + n$ زوج باشد ←

نکته‌ی فوق در واقع حالت خاصی از قاعده‌ی اندیس‌ها است که بیان می‌کند، حاصل ضرب هر دو جمله برابر است با مربع جمله‌ی وسط (به شرط آنکه جمله‌ی وسط داشته باشند).

$$a_{n-k} \xleftarrow{k \text{ تا قبل}} a_n \xrightarrow{k \text{ تا بعد}} a_{n+k}$$

$$a_n^2 = a_{n-k} \times a_{n+k}$$

۷. در دنباله‌ی هندسی داریم:

$$a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2} = \dots$$

۸. در دنباله‌ی هندسی داریم:

۹. در دنباله‌ی هندسی اگر $a_1 \neq 0$ و $q \neq 0$ آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < q < 1 \rightarrow \text{نزولی} \\ q > 1 \rightarrow \text{(غیر نزولی) صعودی} \\ q < 0, q \neq -1 \rightarrow \text{(غیر نزولی) غیر یکنوا} \\ q = -1 \rightarrow \text{(غیر نزولی) نوسانی} \\ q = 1 \rightarrow \text{(غیر نزولی) ثابت} \end{array} \right\} \text{غیر نزولی}$$

$$P_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

۱۰. فرمول حاصل ضرب تمام جملات دنباله‌ی هندسی:

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

$$\Rightarrow P_n = (a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times ()$$

$$P_n = \underbrace{(a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times (a_1 a_n)}_{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

حاصل ضرب 2^0 جمله‌ی اول دنباله‌ی $2, 4, 8, \dots$ را بیابید.

$$\Rightarrow P_r = (a_1 a_n)^{\frac{n}{r}} = (2^1 \times 2^{20})^{\frac{2}{2}} = (2^{21})^{10} = 2^{210}$$

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

۱۱. اگر بین دو عدد a و b و m واسطه‌ی هندسی درج کنیم ←

$$\Rightarrow a, \dots, b \rightarrow a_{m+2} = aq^{m+2-1} \rightarrow q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

m تا

$$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

۱۲. مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی با شرط $q \neq 1$ ←

$$S_n = nt_1$$

۱۳. اگر $q = 1$ باشد ←

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

۱۴. در دنباله‌ی هندسی داریم ←

۱. در دنباله‌ی حسابی روبرو جمله‌ی چندم برابر ۲۳۵ است؟ و همچنین جمله‌ی ۴۰ام را بیابید. $-۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \dots$

۲. اگر $۵p - ۱$, $۳p + ۴$ و $۲p + ۳$ ، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، قدر نسبت را بیابید.

۳. اگر $۳ + c$ و $۲b$ و $a + ۱$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، b را بیابید.

۴. اگر در یک دنباله‌ی حسابی $t_۶ = ۲۰$ و $t_{۱۱} = ۳۰$ باشد، آنگاه $t_{۱۷}$ را بیابید.

۵. مجموع پنج جمله‌ی پیاپی از یک دنباله‌ی حسابی برابر ۷۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۱۶۵ می‌باشد. $a_۱$ و d را بیابید.

۶. مجموع چند جمله از دنباله‌ی عددی $۱۲, ۱۰, ۸, \dots$ برابر با ۰ است؟

۷. در یک دنباله‌ی حسابی روابط
$$\begin{cases} a_۱ + a_۴ + a_۷ = ۸ \\ a_۴ + a_۷ + a_{۱۰} = ۲ \end{cases}$$
 برقرارند، قدر نسبت دنباله را بیابید.

۸. بین ۱۰ و ۵ و ۴۹۹ واسطه‌ای عددی درج کرده‌ایم. جمله‌ی ۳۹۹ را بیابید.

۹. اگر در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = ۴n(n + ۲)$ باشد، آنگاه $a_{۱۰}$ را بیابید.

۱۰. مجموع n جمله‌ی اول از تصاعد عددی $S_n = \frac{n(۹n - ۵)}{۱۲}$ است. قدر نسبت را بیابید.

۱۱. جملات چهارم و شانزدهم از یک دنباله‌ی عددی به ترتیب ۱ و ۲۵ است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱۲. در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر اضافه خواهد شد؟

۱۳. در یک دنباله‌ی عددی $S_n = ۲n(۳n - ۱)$ است. آنگاه مقدار $a_{n+۷} - a_{n-۳}$ را بیابید.

۱۴. در یک دنباله‌ی حسابی مجموع ۵۰ جمله‌ی اول برابر ۲۰۰ و مجموع ۵۰ جمله‌ی بعدی ۲۷۰۰ است. نخستین جمله‌ی این دنباله کدام است؟

۱۵. در رابطه‌ی بازگشتی $a_1 = \frac{3}{2}$ و $a_n = 1$ و $a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n = 1$ می‌باشد. مقدار a_8 را بیابید.

۱۶. در یک تصاعد حسابی، مجموع ۲۰ جمله‌ی اول ۳ برابر مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟

۱۷. جمله‌ی بیستم یک دنباله‌ی حسابی برابر با ۱۰۰ است. S_{39} را بیابید.

۱۸. اگر در یک دنباله‌ی حسابی $t_{28} = 60$ و $t_{26}^2 - t_{30}^2 = 240$ باشد، جمله‌ی ۳۵ ام کدام است؟

۱۹. در یک دنباله‌ی حسابی صعودی با جملات صحیح، حاصل پنج جمله‌ی متوالی برابر ۵۶۰- و حاصل جمع همان پنج جمله برابر ۲۰ است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

۲۰. در یک دنباله‌ی حسابی صعودی با جملات صحیح، حاصل پنج جمله‌ی متوالی برابر ۵۶۰- و حاصل جمع همان پنج جمله برابر ۲۰ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

۲۱. زاویه‌های داخلی یک ۹ ضلعی محدب، تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند. زاویه‌ی وسطی چند درجه است؟

۲۲. اگر دو عدد مثبت مفروض بین ۳ و ۹ قرار بگیرند، سه عدد نخست تشکیل یک دنباله‌ی هندسی و سه عدد آخر تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع آن دو عدد مثبت چقدر است؟

۲۳. بین اعداد ۸ و $\frac{81}{2}$ سه واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. جمله‌ی دوم کدام است؟

۲۴. اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، به ترتیب سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

۲۵. در یک تصاعد هندسی مجموع ۸ جمله ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله ی اول آن است. جمله ی هفتم چند برابر جمله ی اول است؟

۲۶. در یک تصاعد هندسی $1, \frac{1}{2}, X, 2$ که غیر نزولی می باشد، مجموع ده جمله ی اول را بیابید. (سراسری ۸۶)

۲۷. در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع ۴ جمله ی اول آن برابر ۳ می باشد. مجموع ۶ جمله ی اول را بیابید.

۲۸. در یک دنباله ی هندسی مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ می باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟

۲۹. بین اعداد ۲ و ۵۰ حداقل چند واسطه ی هندسی قرار دهیم تا حاصل ضرب تمام جملات دنباله تشکیل شده، بیشتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد؟

۳۰. در یک دنباله ی هندسی $a_1 + a_2 + a_3 = -18$ و $a_2 + a_3 + a_4 = 36$ می باشد. حاصل $a_3 - a_4 + a_5$ را به دست آورید.

۳۱. حاصل ضرب پنج جمله متوالی یک دنباله هندسی $128\sqrt{2}$ و بزرگترین جمله آن $4\sqrt{2}$ است. این دنباله را مشخص کنید.

۳۲. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ و جمله وسطی $3\sqrt{2}$ است. قدر نسبت را بیابید.

۳۳. در یک دنباله ی هندسی $a_1 + a_2 = 10$ و $a_2 + a_5 = \frac{10}{27}$ می باشد. جمله هشتم این دنباله را بیابید.

۳۴. در یک دنباله ی هندسی $5, X, Y, 40, Z$ حاصل $Z - (X + Y)$ را به دست آورید.

✓ سوالات چهار گزینه‌ای

۱. اگر $a, b, a - 4, 2a - 4, 2b, a$ جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

- الف) $\frac{-13}{2}$ (ب) -6 (ج) 3 (د) $\frac{-21}{6}$

۲. اعداد 2^b و $4\sqrt{2}$ و 2^a سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی هستند، واسطه‌ی حسابی بین a و b کدام است؟ (سراسری)

- الف) $2/5$ (ب) 2 (ج) $1/5$ (د) $\sqrt{2}$

۳. اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟ (سراسری)

- الف) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 2 (د) 3

۴. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول -14 ، جمله‌ی آخر 40 و تعداد جمله‌ها 91 است. این دنباله چند جمله‌ی مثبت دارد؟

- الف) 24 (ب) 33 (ج) 45 (د) 67

۵. اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، یک زاویه‌ی این مثلث همواره برابر است با:

- الف) 30° (ب) 90° (ج) 60° (د) 75°

۶. در یک دنباله‌ی حسابی جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله‌ی عددی، صفر است؟

- الف) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

۷. جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = \frac{2^{2-n}}{3}$ است. مجموع جمله‌ی اول با قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- الف) $\frac{7}{9}$ (ب) $\frac{7}{6}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

۸. جمله‌ی بیستم از دنباله‌ی حسابی $3, 0, -3, \dots$ با جمله‌ی چندم از دنباله‌ی هندسی $2, 6, 18, \dots$ برابر است؟

- الف) چهارم (ب) پنجم (ج) هفتم (د) هشتم

۹. در الگوی زیر، تعداد چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟

الف) ۵۰ امین

ب) ۱۵۱ امین

ج) ۱۰۰ امین

د) ۱۰۱ امین



۱۰. اگر $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ باشد، آنگاه جمله‌ی صدم دنباله با جمله عمومی S_n چند است؟

الف) ۰/۰۰۲

ب) ۰/۰۵

ج) ۰/۵۰۵

د) ۰/۵

۱۱. بر طبق الگوی مقابل، حاصل سطر چهارم کدام است؟ (کنکور تجربی - ۸۴)

$$\begin{array}{r} 1^2 - 2^2 + 3^2 \\ 2^2 - 3^2 + 4^2 \\ \vdots \end{array}$$

الف) ۲۷

ب) ۲۸

ج) ۲۹

د) ۳۰

۱۲. در یک دنباله‌ی حسابی اگر $a_1 = 5$ و $a_3 = 9$ آنگاه $a_7 + a_8 + a_9$ چقدر است؟ (تجربی خارج از کشور - ۸۶)

الف) ۱۹

ب) ۳۸

ج) ۵۷

د) ۷۵

۱۳. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟ (تجربی خارج از کشور - ۸۵)

الف) ۷/۵

ب) ۸

ج) ۸/۵

د) ۹

۱۴. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (تجربی - ۹۰)

الف) ۴

ب) ۵

ج) ۶

د) ۷

۱۵. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟ (تجربی - ۹۲)

الف) $\frac{5}{3}$

ب) $\sqrt[3]{\frac{7}{3}}$

ج) $\frac{9}{4}$

د) $\frac{7}{3}$

۱۶. اگر جمله $(3n-2)$ اُم یک دنباله به صورت $\frac{2\sqrt{n+5}}{n^2+3}$ باشد، جمله‌ی هفتم دنباله کدام است؟

- الف) $\frac{\sqrt{8}}{12}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{13}$

۱۷. با فرض $a_n = \frac{4n+7}{2n-5}$ و $b_n = \frac{2n+5}{n-2}$ به ازای کدام k تساوی $a_k = b_k$ برقرار است؟

- الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱

۱۸. اگر در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی t_n داشته باشیم $t_3 = 166$ و $t_5 = 150$ باشد، آنگاه اولین جمله‌ی منفی این دنباله کدام است؟

- الف) -۸ (ب) -۶ (ج) -۴ (د) -۲

۱۹. حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی $4, 12, 36, \dots$ کدام است؟

- الف) $4^{20} \times 3^{19}$ (ب) $912^{40} \times 3^{190}$ (ج) $2^{20} \times 3^{190}$ (د) $4^{20} \times 3^{190}$

۲۰. اگر $2b, a, 2a-4, b-a, \dots$ جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

- الف) $-\frac{13}{2}$ (ب) -۶ (ج) ۳ (د) $-\frac{21}{6}$

۲۱. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (تجربی - ۹۰)

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷

۲۲. تویی از ارتفاع صد متری یک ساختمان رها می‌شود، این توپ هر بار که به زمین برخورد می‌کند به اندازه‌ی $\frac{6}{10}$ ارتفاع قبلی بالا می‌رود، این توپ پس از برخورد سوم با زمین به چه ارتفاعی می‌رسد؟

- الف) $67/1$ (ب) $72/9$ (ج) $71/6$ (د) ۸۱