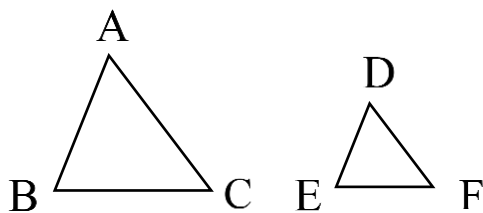


* مثلثات *

🔗 **تشابه دو مثلث:** دو مثلث را متشابه گوئیم اگر زاویه‌های نظیر آنها با هم مساوی و اضلاع نظیر آنها متناسب باشند.



$$۱) \hat{A} = \hat{D} \text{ و } \hat{B} = \hat{E} \text{ و } \hat{C} = \hat{F}$$

$$۲) \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

*** حالت‌های تشابه دو مثلث:**

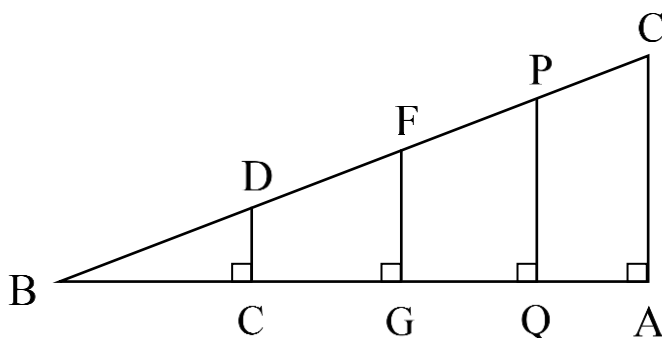
(۱) تساوی دو زاویه

(۲) متناسب بودن دو ضلع از مثلث‌ها و تساوی زاویه بین آنها

📌 **نکته:**

در دو مثلث قائم الزاویه اگر دو زاویه حاده با هم برابر باشند تشابه برقرار می‌شود.

🔗 **مثال:**



در مثلث روبرو، مثلث‌های قائم الزاویه ای که در رأس B مشترک اند، متشابه اند.

پس نسبت متشابه در این مثلث‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

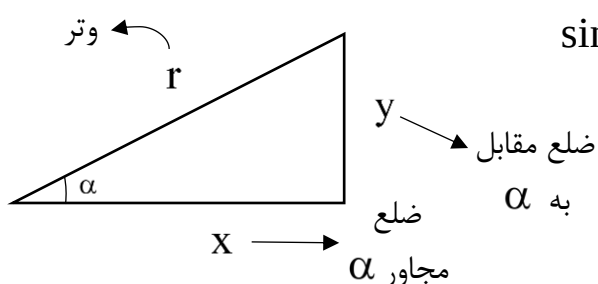
$$۱) \frac{DE}{BE} = \frac{FG}{BG} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{CA}{BA} \Rightarrow$$

$$۲) \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{BF} = \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$$

$$۳) \frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BF} = \frac{BQ}{BP} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow$$

📌 **نکته:** همه این نسبت‌ها را می‌توان نسبت به زاویه B نام گذاری کرد

🔗 **نسبت‌های مثلثاتی:** نسبت‌هایی هستند که در هر مثلث قائم الزاویه با توجه به زاویه حاده می‌توان به صورت زیر نشان داد.



$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} \text{ و } \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} \text{ و } \cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$$

☑ **نکته:** در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت‌های $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ را نسبت‌های مثلثاتی گویند. (α زاویه حاده)

در مثال صفحه ی قبل $\tan B =$ (۱) رابطه ی $\sin B =$ (۲) و $\cos B =$ (۳) رابطه ی

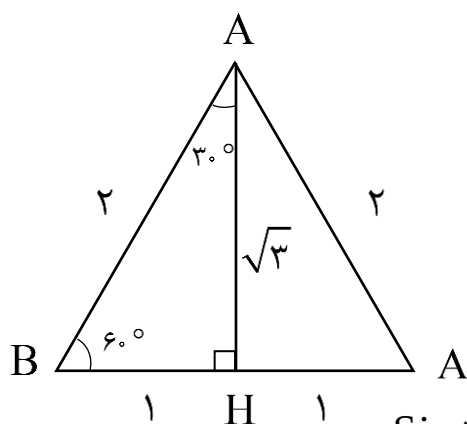
✍ **مثال:** در مثلث قائم الزاویه $\hat{A} = 90^\circ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم $AC = 2$ و $\sin B = \frac{1}{3}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی B را

یه دست آورید.

✍ **مثال:** در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر برابر ۱۰ واحد است و تانژانت یکی از زاویه‌های حاده $\frac{3}{4}$ است. سایر نسبت‌های

مثلثاتی را به دست آورید.

☑ **نکته:** به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60° با استفاده از مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد ۲:



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \cos 60^\circ = \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\tan 60^\circ = (\sqrt{3}) \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

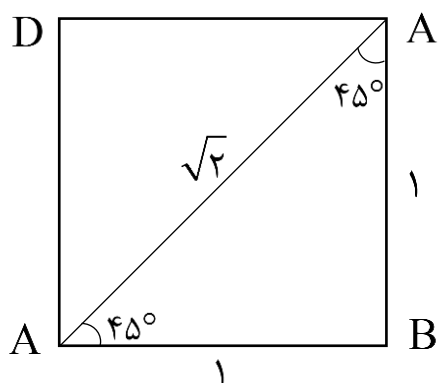
$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\cos 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = (\sqrt{3})$$

☑ **نکته:** به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی 45° با استفاده از مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع واحد ۱:

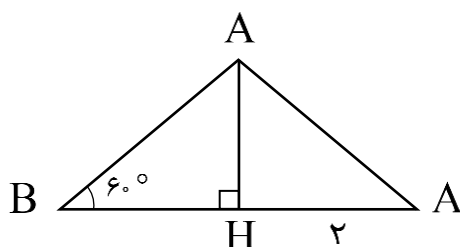


$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = (1)$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = (1)$$



✍ **مثال:** با توجه به شکل روبرو مقدار BH را محاسبه کنید.

✍ **مثال:** در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$\hat{A} = 90^\circ$ و $AC = 3$ و $BC = 5$. $\sin B - \cos B$ محاسبه است

۱. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

۲. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ ☒ **نکته:**

۳. $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$

۴. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۵. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

☒ **نکته:**

θ نسبت	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$A = \sqrt{3} \tan 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$$

$$B = 2 \tan 30^\circ \cot 30^\circ - 3 \cot 45^\circ \tan 45^\circ$$

$$C = 1 + \sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ + 4 \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$

✍ **مثال:**

✍ **مثال:**

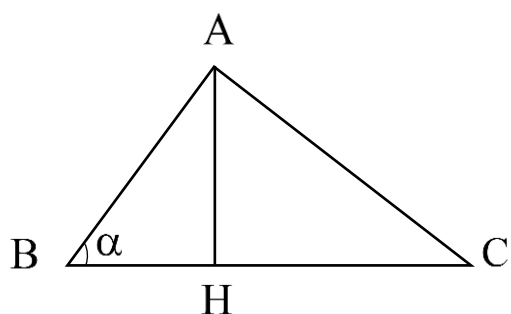
حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

☒ **نکته:** اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ و α و β متمم یکدیگرند (همواره داریم):

🔗 کاربردهای نسبت‌های مثلثاتی:

* مساحت مثلث با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی:

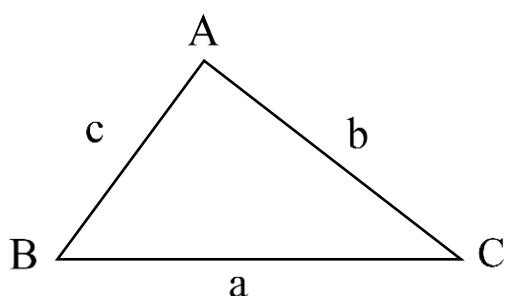


$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times \sin \alpha \times BC}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب دو ضلع مجاور در } \sin \text{ زاویه بین آنها}$$

☑ نکته:

اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم، آنگاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

☑ نکته: (قاعده سینوس‌ها)

با تقسیم طرفین تساوی نکته‌ی قبل بر $\frac{1}{2}abc$ و معکوس کردن آن داریم:

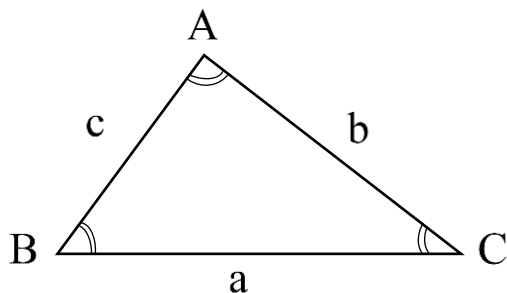
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{قاعده سینوس‌ها})$$

☑ نکته:

قانون سینوس‌ها برای حل مثلث‌هایی که در آن ضلع و زاویه‌ی روبرو آن را داریم کاربرد دارد.

☑ نکته: (قاعده کسینوس‌ها)

وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم دیگر قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زاویه‌ها قابل استفاده نیست. در این صورت از قاعده زیر استفاده می‌کنیم.

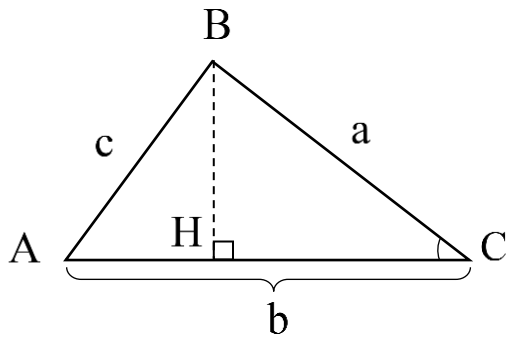


$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

☑ نکته:

وقتی سه ضلع مثلث را داشته باشیم از قانون کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم.

نتیجه: در مثلث ABC داریم:



$$AC = AH + HC$$

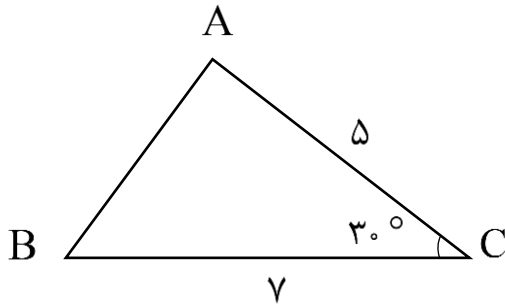
$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

$$a = b \cos C + c \cos B$$

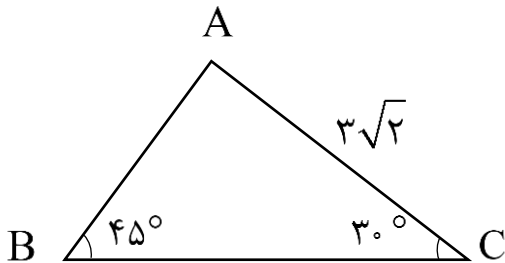
مثال:

۱. مساحت مثلث روبرو را حساب کنید.



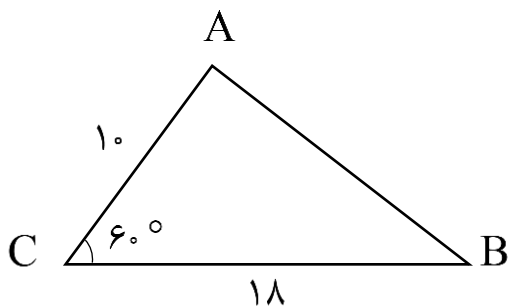
$$S = \frac{1}{2}(5)(7) \sin 30^\circ = \frac{35}{4}$$

۲. در مثلث روبرو، طول AB را بیابید.



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \rightarrow AB = \frac{1}{2}(6) = 3$$

۳. در شکل روبرو طول AB را به دست آورید.

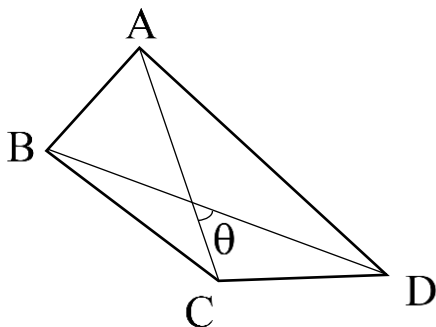


$$AB^2 = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18) \cos 60^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{244}$$

نکته:

۱. مساحت مثلث متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه ی بین آنها.

۲. مساحت هر چهار ضلعی محدب برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنها.



$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \theta$$

✍ مثال:

۱. مساحت ۶ ضلعی منتظم به ضلع a را به دست آورید.

۲. مساحت مثلثی با معلومات $a = 4$ و $b = 5$ و $b = 5$ و $\hat{A} + \hat{B} = 150^\circ$ کدام است؟

(د) $10\sqrt{3}$

(ج) ۱۰

(ب) $5\sqrt{3}$

(الف) ۵

🔗 واحد اندازه گیری کمان و زاویه:

درجه: اگر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به هر کدام از زاویه‌های مرکزی ایجاد شده ۱ درجه (D) گویند

بنابراین داریم $\leftarrow$ زاویه ای که $\frac{1}{360}$ محیط دایره را در بر بگیرد $D = 1^\circ$

رادیان: طول کمانی از دایره که به اندازه قطاع دایره باشد یک رادیان (R) گویند.

گزاره: (کار تحقیقی)

☑ نکته:

۱. هر نیم دور از یک دایره تقریباً $3/14$ رادیان است و به طور دقیق برابر π رادیان است.

۲. $180^\circ = \pi R \Rightarrow 360^\circ = 2\pi R$ محیط دایره

۳. هر رادیان تقریباً $57/3$ درجه است.

۴. تبدیل درجه به رادیان $\leftarrow$ زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم.

تبدیل رادیان به درجه $\leftarrow$ زاویه را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می‌کنیم.

فرمول کلی:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} D \quad \Leftarrow$$

رادیان $\frac{\pi}{180} = \frac{?}{160} \Rightarrow x = \frac{160}{180} \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$

✍ مثال: 160° چند رادیان است؟

$30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6} R$

$45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4} R$

$60^\circ \rightarrow \frac{\pi}{3} R$

$90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2} R$

✍ مثال:

$180^\circ \rightarrow \pi R$

$270^\circ \rightarrow 3\left(\frac{\pi}{2}\right)R = \frac{3\pi}{2} R$

$360^\circ \rightarrow 2\pi R$

نکته: ✓

رابطه بین زاویه و طول کمان روبرو آن:

تقسیم طول کمان بر شعاع
مقدار θ را بر حسب رادیان $\theta = \frac{L}{r}$ → بر حسب رادیان
نتیجه می‌دهد

نکته: ✓ $L = r\theta$

$$\frac{\overset{\text{محیط دایره}}{2\pi}}{\underset{\substack{\text{طول کمان دایره} \\ \text{روبروی } \theta}}{\theta}} = \frac{L}{r} \Rightarrow L = \frac{2\pi r \times \theta}{2\pi} = r\theta$$

تذکر: θ باید بر حسب رادیان باشد.

مثال: اگر طول کمان AB در شکل روبرو برابر 10° و زاویه θ برابر 100° باشد، اندازه شعاع دایره را به دست آورید.

$$L = 10 \quad \theta = 100^\circ = \frac{100}{90} \pi = \frac{5\pi}{9} \quad \left. \begin{array}{l} L = r\theta \Rightarrow r = 6 \end{array} \right\}$$

مثال: یک دوچرخه سوار در پیست دایره شکل به شعاع ۲ کیلومتر، مسافت $\frac{5\pi}{2}$ کیلومتر را طی کرده است. مقدار زاویه‌ای که دوچرخه سوار چرخیده بر حسب درجه چقدر می‌باشد؟

$$r = 2 \text{ km} \quad L = \frac{5\pi}{2} \text{ km} \quad \theta = \frac{L}{r} = \frac{5\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{4} \quad \theta = \frac{5 \times 180}{4} = 225^\circ$$

نکته: ✓

زاویه بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{|6h - 11m|}{2}$$

سوال: رابطه روبرو را اثبات کنید.

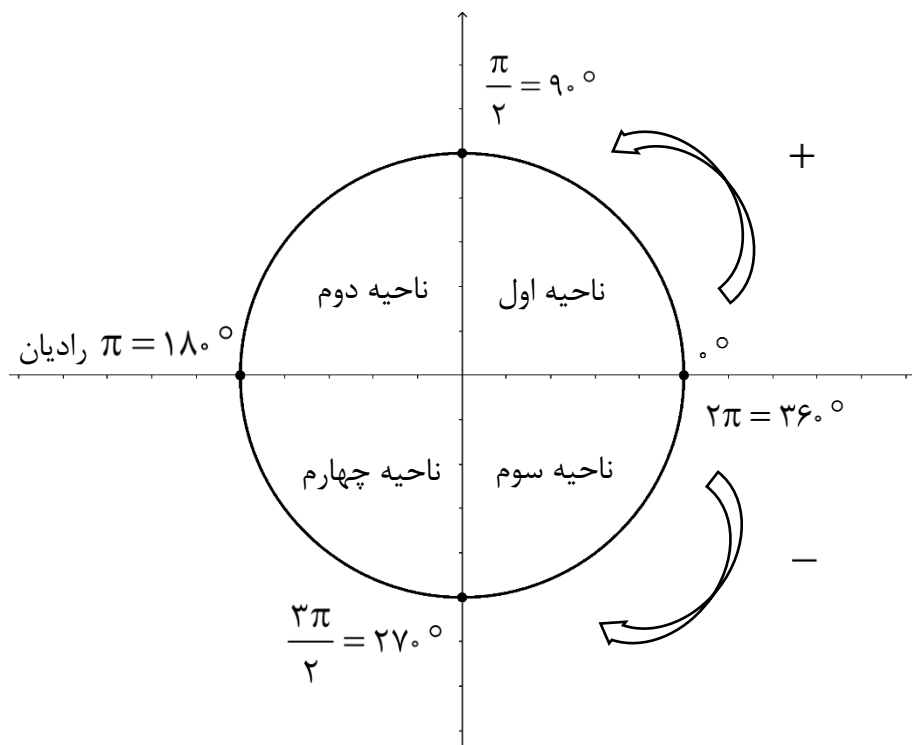
مثال: در چه لحظه‌هایی بین ساعت‌های ۱۰ و ۱۱ دو عقربه ی ساعت شمار و دقیقه شمار با هم زاویه 30° می‌سازند؟

$$\alpha_1 = \frac{|6 \times 2 - 11 \times 30|}{2} = 105^\circ$$

مثال: بین ساعت ۳ و ۴ چه موقع دو عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار بر هم منطبق می‌شوند؟

☞ دایره مثلثاتی:

دایره ای جهت دار به مبدأ مختصات و شعاع واحد است. در این دایره جهت مثبت، خلاف عقربه‌های ساعت و جهت منفی، در جهت عقربه‌های ساعت است.

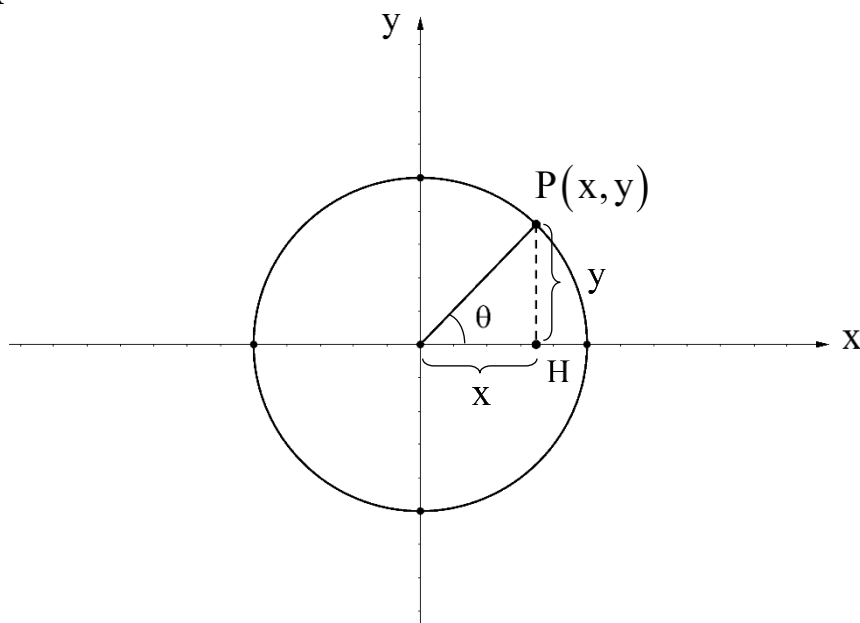


☞ نسبت‌های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی:

مطابق شکل نقطه $P(x, y)$ را روی دایره مثلثاتی و زاویه مرکزی θ را در دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم. آنگاه نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sin \theta = \frac{PH}{OP} = \frac{y}{1} = y \Rightarrow P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x}, \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{OH}{OP} = \frac{x}{1} = x$$



☑ نکته:

اگر P در ناحیه اول مثلثاتی باشد $\Leftarrow$ طول و عرض آن مثبت و بنابراین تمام نسبت‌های مثلثاتی θ مثبت هستند.

اگر $\cot$ در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی باشد $\Leftarrow$ نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

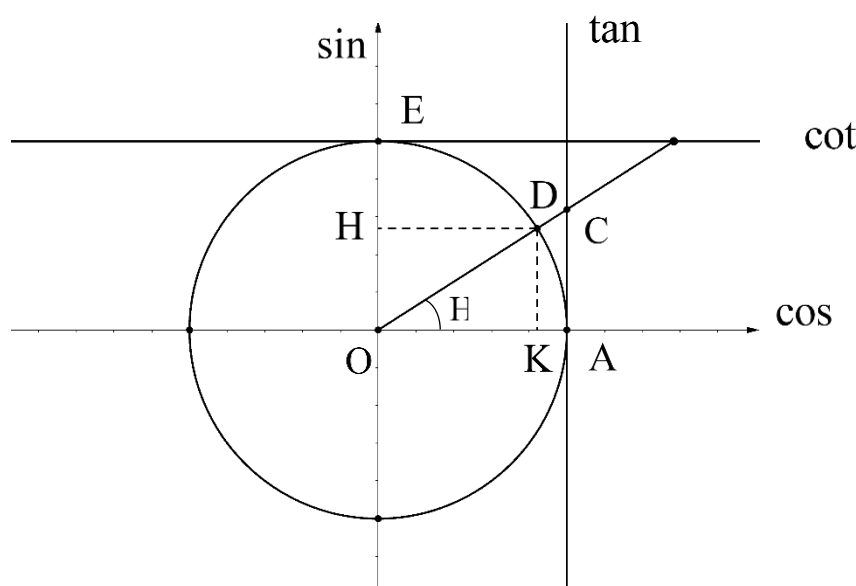
✍ مثال: نقطه P به طول $\frac{1}{3}$ روی دایره مثلثاتی و در ناحیه چهارم قرار دارد، اگر زاویه θ بین نیم خط $\overrightarrow{OP}$ و محور x باشد، نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

✍ مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ و P انتهای کمان روبرو به زاویه α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد. مختصات P کدام است؟

- الف) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ب) $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ ج) $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ د) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

☞ به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره مثلثاتی:

محورهای $\sin$ و $\cos$ و $\tan$ و $\cot$ در دایره مثلثاتی مطابق شکل زیر نمایش داده می‌شوند.



$$\sin \theta = OH$$

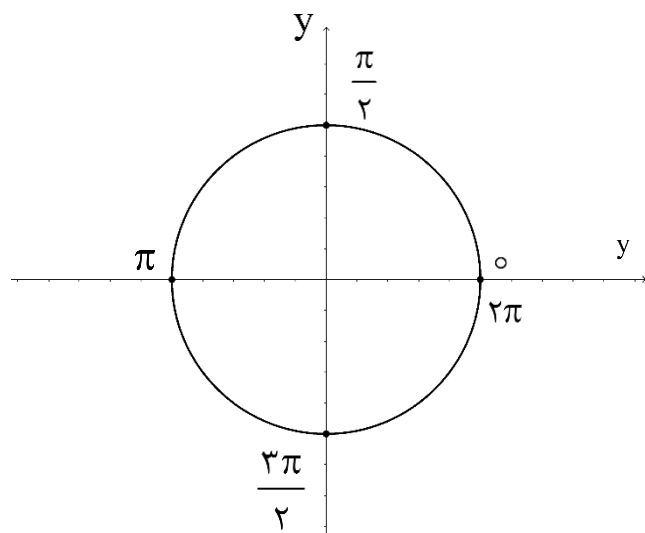
$$\cos \theta = OK$$

برای محاسبه $\sin \theta$ و $\cos \theta$ از نقطه D بر محورهای $\sin$ و $\cos$ عمود رسم می‌کنیم:

برای محاسبه $\tan \theta$ و $\cot \theta$ شعاع OD را امتداد می‌دهیم و محل برخورد با محورهای $\tan$ و $\cot$ مقدار $\tan \theta$ و $\cot \theta$ را معین می‌کند:

$$\tan \theta = \overline{AC} \quad , \quad \cot \theta = \overline{EB}$$

☞ مقدار نسبت‌های مثلثاتی در نقاط مرزی نواحی:



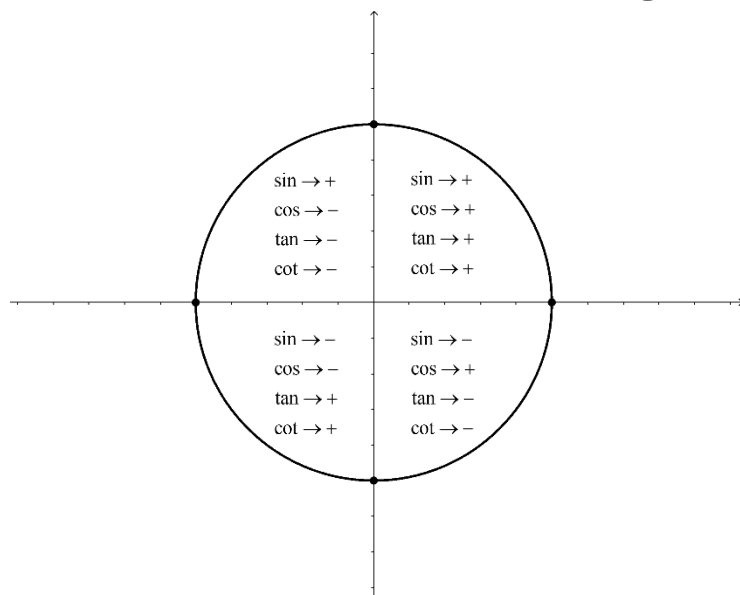
زاویه	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	ن. ن	۰	ن. ن	۰
$\cot \theta$	ن. ن	۰	ن. ن	۰	ن. ن

☑ نکته:

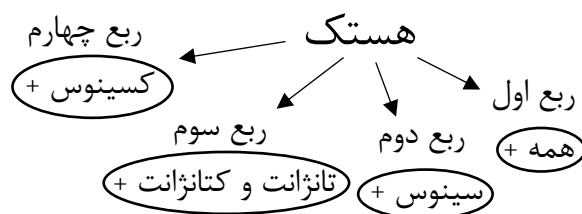
$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \theta \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \theta \leq 1 \\ \tan \theta &\in \mathbb{R} \\ \cot \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

حدود تغییرات $\sin$ و $\cos$ ، مقدارهای محصور بین ۱ و -۱ می‌باشند $\Leftarrow$
 $\tan$ و $\cot$ یک زاویه می‌تواند هر عدد حقیقی باشد و برعکس $\Leftarrow$

☞ علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی:



قاعده هستک:



☞ مثال: اگر $(\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0)$ ، انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی می‌تواند باشد؟

اول و دوم $\sin \alpha > 0$

دوم و سوم $\cos \alpha < 0$

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

سوم و چهارم $\sin \alpha < 0$

اول و چهارم $\cos \alpha > 0$

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

جواب:

انتهای کمان یا در ناحیه دوم یا در ناحیه چهارم قرار دارد.

مثال:

الف) اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ در ناحیه اول مثلثاتی واقع شده باشد، حاصل عبارت $|\sin \theta - \cos \theta|$ را تعیین کنید.

ب) $\max$ و $\min$ عبارت‌های زیر را بر حسب مقادیر مختلف زاویه X تعیین کنید. (نوبل-ص ۷۳)

$$1 - 2 \cos X \quad (۲)$$

$$2 + 3 \sin x \quad (۱)$$

(جواب) $\Leftarrow$ الف)

$$\text{if } \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \theta = \cos \theta$$

$$\text{if } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \sin \theta < \cos \theta \rightarrow \sin \theta - \cos \theta < 0 \Rightarrow |\sin \theta - \cos \theta| = \cos \theta - \sin \theta$$

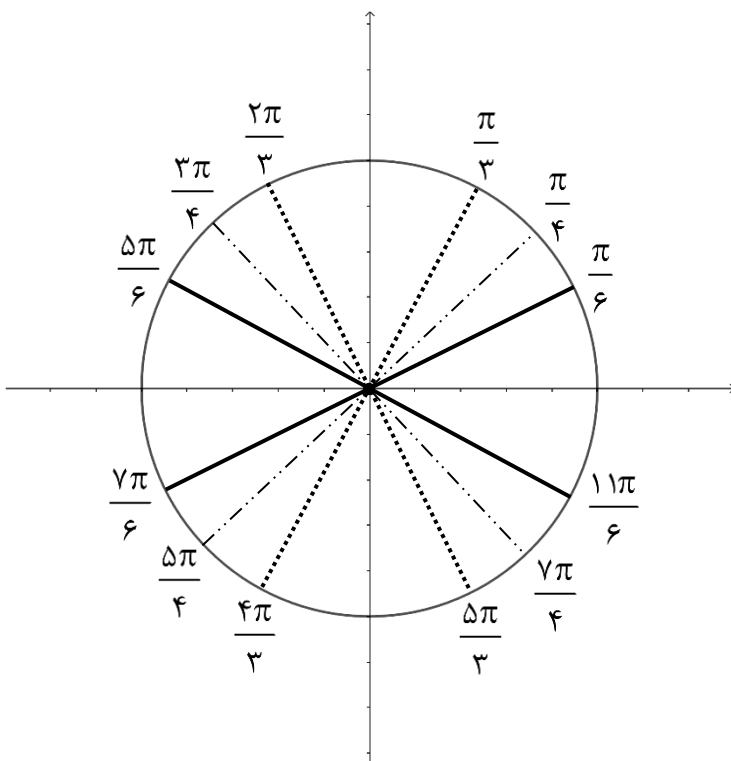
(جواب) $\Leftarrow$ ب) (۱)

$$A = 2 + 3 \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{A - 2}{3}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{A - 2}{3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq A \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} \max = 5 \\ \min = -1 \end{cases}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های معروف $\frac{k\pi}{6}$ و $\frac{k\pi}{3}$ و $\frac{k\pi}{4}$:

ابتدا علامت نسبت‌ها را با استفاده از اینکه در کدام ناحیه قرار دارند معلوم می‌کنیم و سپس بدون در نظر گرفتن k مقدار نسبت‌ها را به دست می‌آوریم.



مثال:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = +\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ناحیه دوم

$$\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

ناحیه چهارم

✍ **مثال:** اگر $0 < x < \pi$ و $A = \cos \frac{x}{4}$ آنگاه کدام نامساوی درست است؟

الف) $\frac{\sqrt{2}}{2} < A < 1$ ب) $0 < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $0 < A < \frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2} < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$

✍ **نسبت‌های دو زاویه متمم:**

اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ (زاویه بر حسب درجه) یا $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (زاویه بر حسب رادیان) آنگاه α و β متمم یکدیگرند مانند:

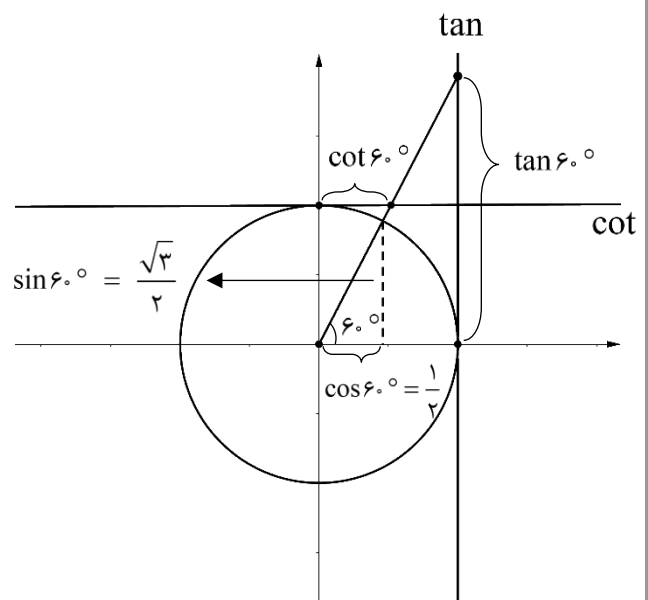
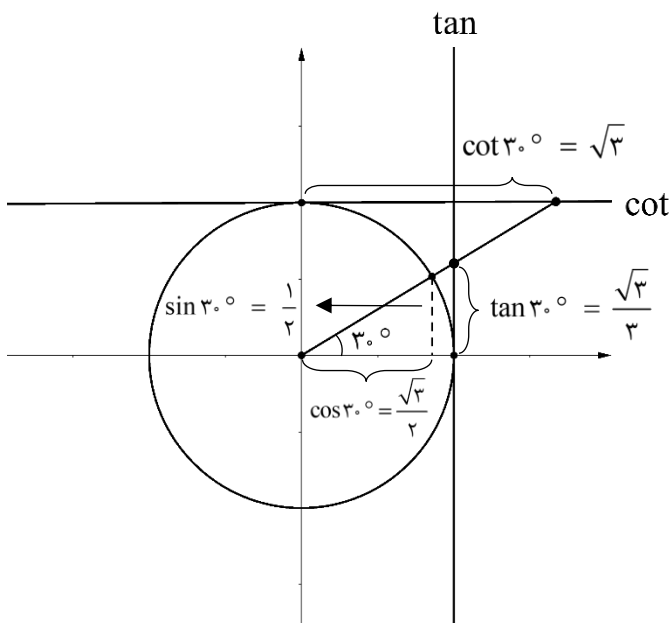
$$\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) + \left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \iff \frac{5\pi}{4} - \alpha, \alpha - \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$$

توجه: دو زاویه متمم در دایره مثلثاتی نسبت به نیم‌ساز ناحیه اول و سوم قرینه یکدیگرند.

☑ **نکته:** اگر α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \sin \beta = \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \alpha = \cot \beta \\ \tan \beta = \cot \alpha \end{cases}$$

✍ **مثال شهودی:**



★ **تست:** کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

ب) $\cos(-62^\circ) < \sin 50^\circ$

الف) $\sin 35^\circ > \cos 72^\circ$

د) $\sin 60^\circ > \cos 285^\circ$

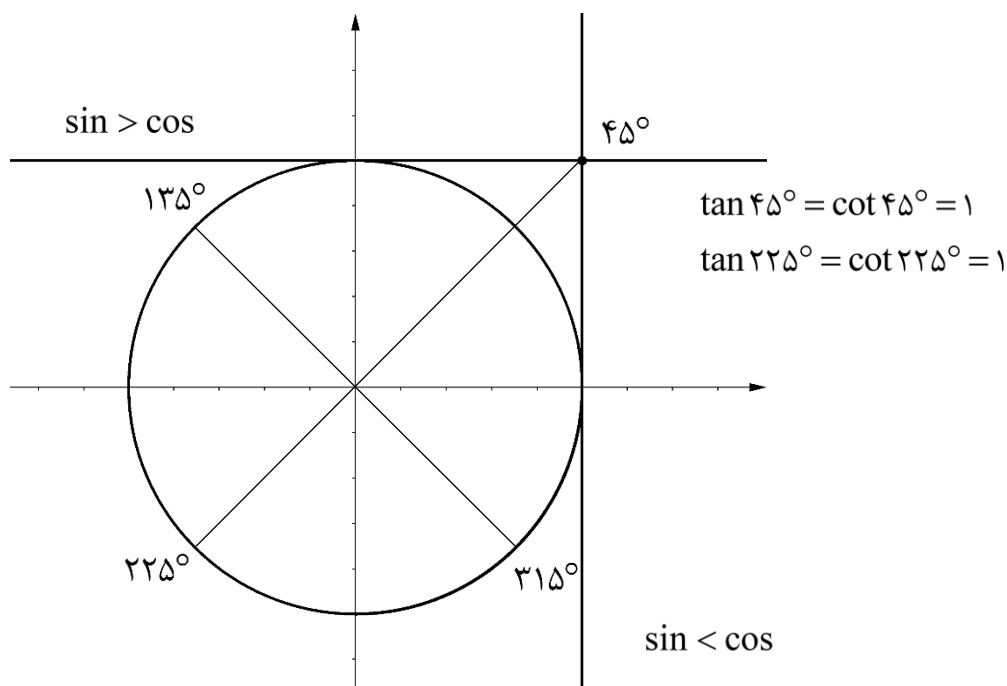
ج) $\tan 130^\circ > \cot 110^\circ$

$$\begin{cases} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \\ \sin 225^\circ = \cos 225^\circ \end{cases} \Rightarrow \tan 45^\circ = \tan 225^\circ = \cot 45^\circ = \cot 225^\circ$$

☑ نکته: همواره داریم:

$$\begin{cases} \sin 135^\circ = -\sin 315^\circ \\ \sin 135^\circ = -\cos 315^\circ \end{cases} \Rightarrow \tan 135^\circ = \tan 315^\circ = \cot 135^\circ = \cot 315^\circ$$

بنابراین مطابق شکل زیر داریم:



★ تست: کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

ب) $\tan 140^\circ > \cot 140^\circ$

الف) $\sin 88^\circ > \cos 88^\circ$

د) $\cot 265^\circ > \tan 265^\circ$

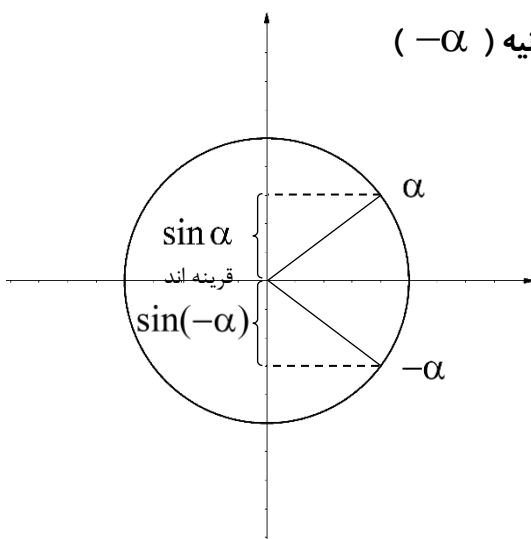
ج) $\cos 230^\circ > \sin 230^\circ$

☞ نسبت‌های مثلثاتی برخی از زاویه‌ها با استفاده از زوایای معروف:

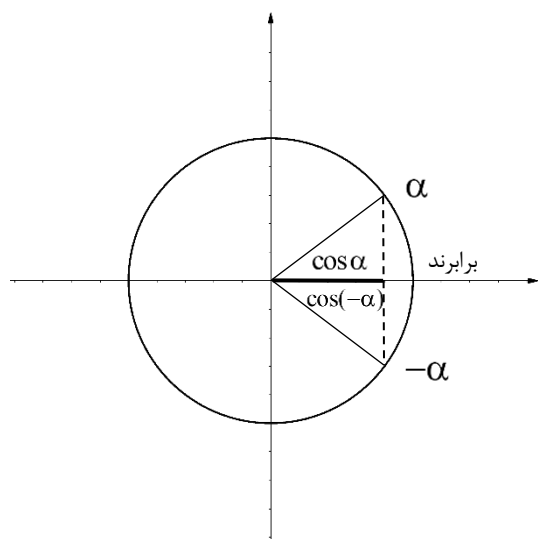
۱) نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه قرینه $(-\alpha)$

همواره داریم:

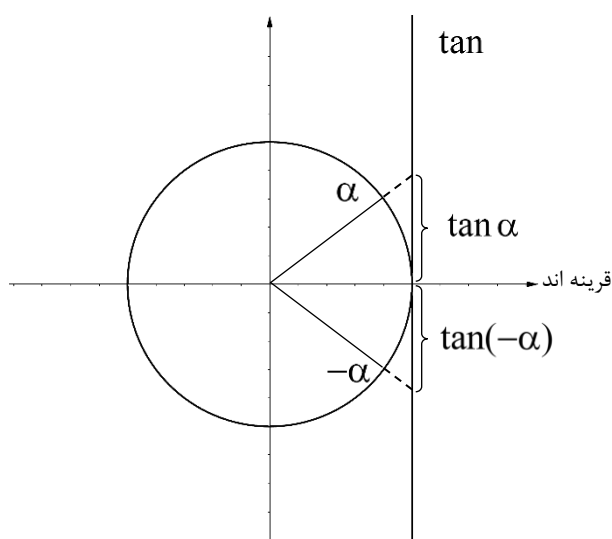
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \rightarrow$



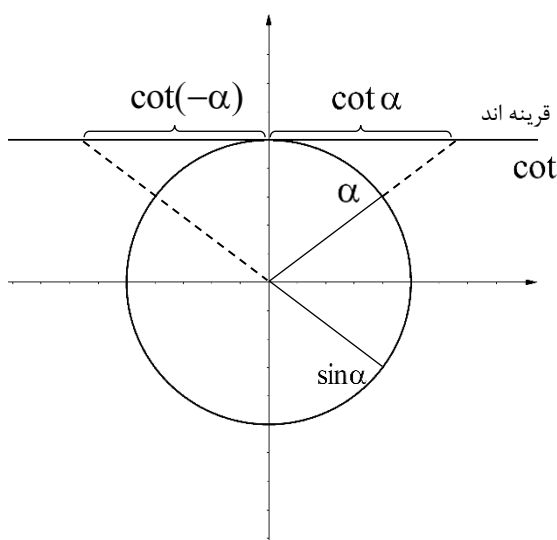
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$



$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha \rightarrow$$



★ تست: حاصل $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

(د) بستگی به α دارد

(ج) ۱-

(ب) ۱

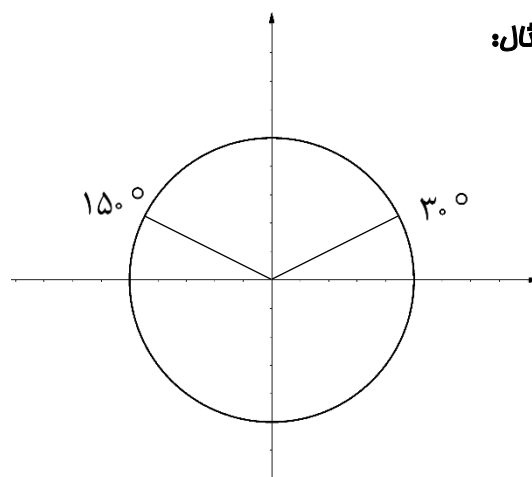
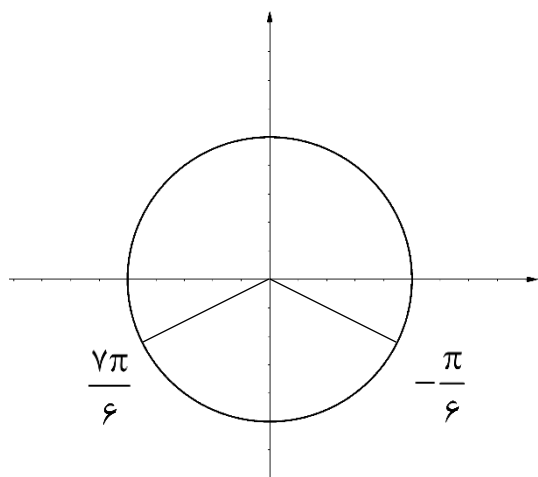
(الف) ۰

(۲) نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه مکمل: $(\pi \pm \alpha)$

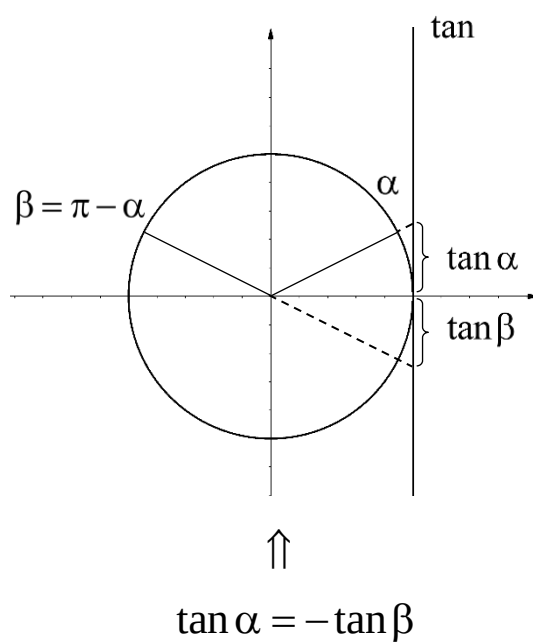
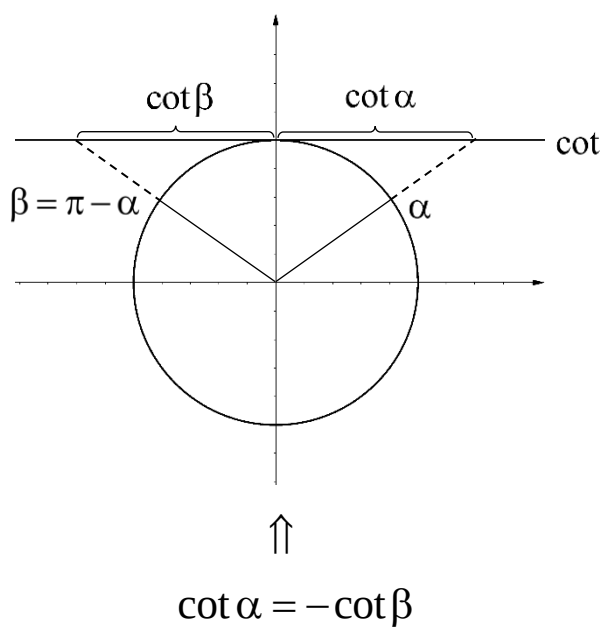
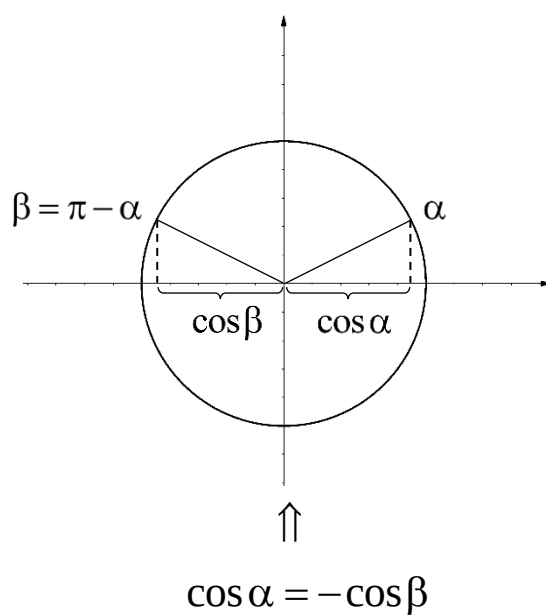
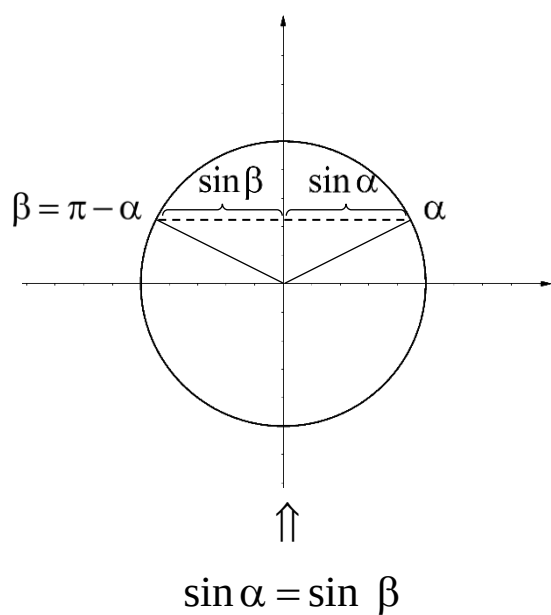
اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ (زاویه بر حسب درجه) یا $\alpha + \beta = \pi$ (زاویه بر حسب رادیان) آنگاه α و β مکمل یکدیگرند.

✍ مثال: $\frac{7\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ مکمل اند یا مکمل $\alpha - \frac{3\pi}{4}$ برابر $\alpha - \frac{7\pi}{4}$ است.

☑ نکته: دو زاویه مکمل در دایره مثلثاتی نسبت به محور عرض‌ها (سینوس‌ها) قرینه اند.



اگر α و β دو زاویه مکمل باشند (β در ربع دوم) داریم:



اگر α و β دو زاویه مکمل باشند (β در ربع سوم) داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned} \right\} \text{ ربع سوم}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned} \right\}$$

✍ مثال:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta\pi}{6}\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\Delta\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

★ تست: حاصل $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{\Delta\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14}$ کدام است؟

- الف) ۱- ب) ۰ ج) $\frac{1}{2}$ د) ۱

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ (زاویه‌های متمم):

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \end{aligned} \right\} \text{ ربع اول}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= +\cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \end{aligned} \right\} \text{ ربع دوم}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha \end{aligned} \right\}$$

✍ مثال:

$$\tan\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

۵) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$:

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\cos \alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= +\tan \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \end{aligned} \right\}$$

* کمان یابی به طور کامل *

با توجه به ناحیه (دوم یا سوم)

الف) نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ (زاویه حاده و $k \in \mathbb{Z}$):

$$\sin(k\pi \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \sin \alpha$$

$$\cos(k\pi \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \cos \alpha$$

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \tan \alpha$$

$$\cot(k\pi \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \cot \alpha$$

توجه: منظور از $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) یعنی زاویه‌هایی که مضرب صحیحی از π باشند. مثل 2π ، 5π و ...

ب) نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $(\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha)$ (مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$):

با توجه به ناحیه

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha\right) = \boxed{- \text{ یا } +} \cos \alpha$$

با توجه به ناحیه

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha\right) = \boxed{- \text{ یا } +} \sin \alpha$$

$$\tan(\beta \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \cot \alpha$$

$$\cot(\beta \pm \alpha) = \boxed{- \text{ یا } +} \tan \alpha$$

توجه: منظور از کمان‌های $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ، زاویه‌هایی هستند که مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ می‌باشند مثل $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{5\pi}{2}$...

در این حالت سینوس به کسینوس و تانژانت به کتانژانت و برعکس تبدیل می‌شوند.

☑ **نکته:** کمان‌های $(2k\pi \pm \alpha)$ همان α و $-\alpha$ می‌باشند.

✍ **مثال:** حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{3} \sin\left(21\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(22\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

★ **تست:** حاصل $\sin 2^\circ + \sin 20^\circ + \sin 34^\circ + \sin 16^\circ$ کدام است؟

الف) $\sin 2^\circ$

ب) $2 \sin 2^\circ$

ج) $\sin 4^\circ$

د) $\sin 2^\circ$

★ تست: اگر $\tan \theta = \frac{2}{10}$ آنگاه مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

(د) ۳

(ج) ۲

(ب) ۱/۲

(الف) -۲

☑ نکته: برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی مضارب زاویه‌های $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ می‌توان زاویه مورد نظر را بر حسب $k\pi$ نوشت و سپس با استفاده از کمان‌یابی پاسخ را به دست آورد.

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = +\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{13\pi}{6} = \tan\left(\frac{13\pi}{6} + \pi\right) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = +\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

✍ مثال:

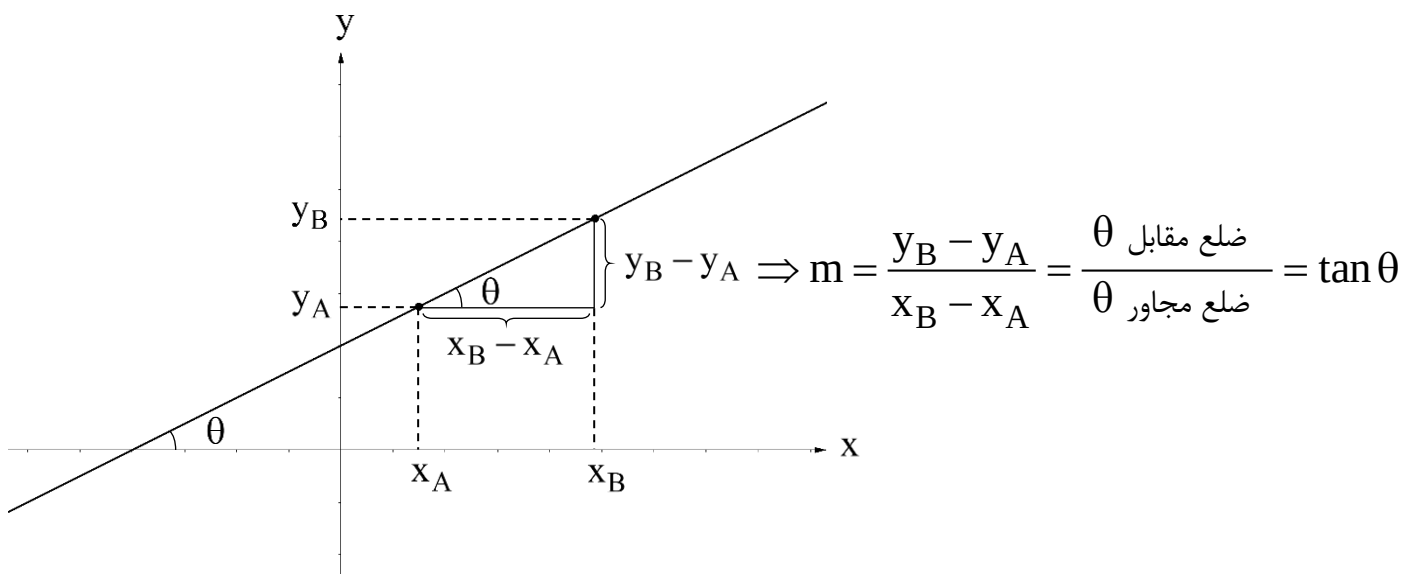
$$\cot \frac{7\pi}{3} = \cot\left(\frac{7\pi}{3} - \pi\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

☞ شیب معادله خط به کمک تانژانت زاویه:

برای نوشتن معادله یک خط گذرنده از نقطه (x_0, y_0) و شیب m از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

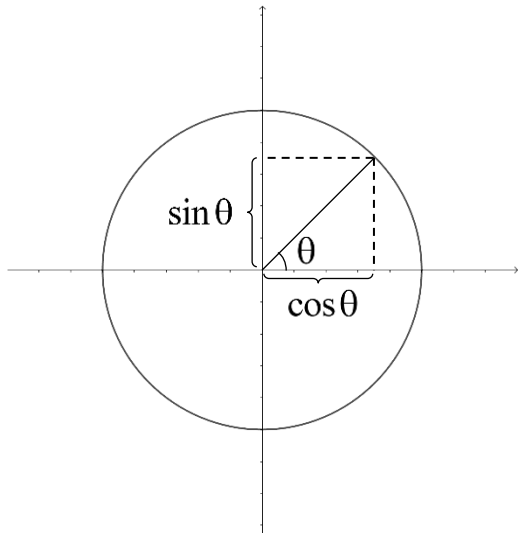
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

☑ نکته: مطابق شکل زیر، شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه بین خط و جهت + (مثبت) محور افقی



☞ مثال: عرض از مبدأ خطی که با جهت مثبت محور x زاویه 60° بسازد و محور طول‌ها را در نقطه ۲ قطع کند را به دست آورید.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:



$$۱) \begin{cases} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{cases}$$

$$۲) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$۳) ۱ + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{رابطه کتان!}$$

$$۴) ۱ + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \quad \text{رابطه اسکات!}$$

$$۵) \tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}, \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

$$۶) (\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm 2\sin \theta \cos \theta$$

مثال: تساوی‌های زیر را اثبات کنید.

$$\text{الف) } (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = \cos^2 \theta$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$\text{ج) } 1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \sin \theta, \quad 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} = \cos \theta$$

$$\text{د) } \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, \quad 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} = \cos \theta$$

★ تست: اگر $\sin A = \frac{4}{5}$ و A زاویه حاده باشد، $\tan A + \frac{1}{\cos A}$ برابر است با

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

★ تست: حاصل $\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}$ برابر است با

- الف) $\frac{2}{\cos x}$ ب) $2(1 + \tan^2 x)$ ج) $2(1 + \cot^2 x)$ د) ۱

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \sin(-585^\circ) \quad \text{ب) } \cot \frac{5\pi}{12}$$

۲. اگر $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$P = \frac{3 \sin\left(-\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) + 2 \cos(17\pi - \alpha)}{3 \tan\left(\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - 2 \cot(\alpha - 15\pi)}$$

۳. مقدار A را حساب کنید.

$$A = \frac{\sin 225^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \times \sin 60^\circ}{\tan 210^\circ \times \cot 60^\circ + \cot 240^\circ \times \tan 330^\circ}$$

۴. حاصل عبارت روبرو را به دست آورید.

$$\tan(\alpha - \pi) \cot(\alpha + \pi) - \cos(\alpha - 2\pi) \cos(2\pi - \alpha)$$

۵. درستی تساوی روبرو را اثبات کنید.

$$\sin 20^\circ + 2 \sin 16^\circ - \cos 70^\circ + 3 \sin 34^\circ - 4 \cos 110^\circ = \sin 20^\circ$$

۶. در صورتی که $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد مطلوب است محاسبه:

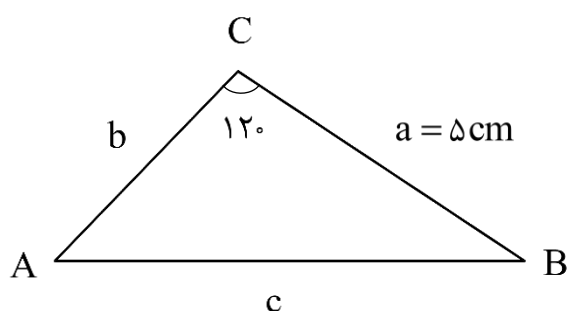
$$\text{الف) } \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \quad \text{ب) } \cos(2\pi - \alpha)$$

۷. قطرهای یک متوازی الاضلاع ۱۲ و ۲۲ سانتی متر است و تقاطع این دو یک زاویه ۱۲۵° می‌سازد. طول اضلاع بزرگ‌تر متوازی الاضلاع را بیابید.

۸. سرسره‌های یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول $۵/۲$ متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سرسره $۵/۴$ متر باشد و نردبان، زاویه ۷۵° با زمین بسازد، سینوس زاویه ای که سرسره با زمین می‌سازد را بیابید.

۹. الف) مثلث زیر را در نظر بگیرید. اگر $B = ۲۰^\circ$ و $C = ۱۲۰^\circ$ و $a = ۵\text{cm}$ و مقادیر b و c را به دست آورید.

ب) در مثلث ABC ، $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۲\sqrt{۲}$ شعاع دایره ی محیطی این مثلث چقدر است؟



۱۰. فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده اید که ۴۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده است. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شما در کابین شماره ۳ نشسته باشید بعد از $\frac{۴۷}{۱۰}\pi$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟ (نوبل - ص ۱۸۷)

۱۱. الف) اگر $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > ۰$ و $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < ۰$ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

ب) در صورتی $\cos \alpha (1 + \tan^2 \alpha) > ۰$ انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

ج) اگر $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{۳\pi}{۴}$ باشد حدود $\sin x$ را بیابید.

۱۲. الف) حاصل عبارت $\sqrt{3} \tan(-240^\circ) + \cot(-330^\circ)$ را به دست آورید.

ب) حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) - 2\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{10}\right) \cdot \tan\left(\frac{21\pi}{10}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ را به دست آورید.

۱۳. تساوی‌های زیر را اثبات کنید.

الف) $\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} - 2 = 2 \cot^2 \theta$

ب) $\frac{(1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta}{\cot \theta} = \tan \theta$

ج) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$

۱۴. اثبات کنید.

الف) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

ب) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} = \tan x$

ج) $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$

د) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

ج) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

۱۵. عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right) \times \cos x$

ب) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$

ج) $\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} - \sin x \cos x$

۱۶. ثابت کنید رابطه زیر همواره برقرار است.

$$\cos^2 x (1 + x \tan^2 x) + (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 1$$

۱۷. درستی رابطه زیر را ثابت کنید. (مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا ۲۰۰۲)

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

۱۸. ثابت کنید رابطه‌ی زیر همواره درست است.

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

۱۹. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} - 2 \tan^2 \alpha = 2$$

۲۰. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin x (1 - \cos x)}$$

✓ سوالات چهار گزینه‌ای

۱. با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- (الف) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{4}{9}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

۲. اگر $\frac{-\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ باشد، گزاره‌ی $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ به ازای چه مقادیری از m برقرار است؟

- (الف) $2 < m \leq 3$ (ب) $-1 < m \leq +1$ (ج) $0 < m \leq 2$ (د) $0 < m < 1$

۳. اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta \cot \theta > 0$ باشد انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (الف) اول (ب) دوم (ج) سوم (د) چهارم

۴. حاصل عبارت $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ کدام است؟

- (الف) -1 (ب) صفر (ج) 1 (د) 2

۵. اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- (الف) صفر (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (د) $-\sqrt{2}$

۶. اگر $\sin^2 x \cdot \cot x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی واقع نیست؟

- (الف) دوم یا چهارم (ب) اول یا چهارم (ج) اول یا دوم (د) اول یا سوم

۷. در کدام ناحیه از دایره مثلثاتی، $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} < 0$ و $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$ است؟

- (الف) اول (ب) دوم (ج) سوم (د) چهارم

۸. حاصل عبارت $\tan \frac{\pi}{13} + \tan \frac{2\pi}{13} + \tan \frac{3\pi}{13} + \dots + \tan \frac{12\pi}{13}$ کدام است؟

- الف) ۱ (ب) صفر (ج) $2 \tan \frac{\pi}{13}$ (د) ۲

۹. کدام گزینه صحیح می باشد؟

- الف) $\cos 5^\circ < \cos 10^\circ$ (ب) $\cos 5^\circ > \sin 84^\circ$ (ج) $\sin 5^\circ > \sin 10^\circ$ (د) $\cot 5^\circ < \tan 84^\circ$

۱۰. اگر $\pi < \theta < \frac{7\pi}{6}$ حاصل $A = \sqrt{\sin^2 \theta (1 + \cot \theta) + \cos^2 \theta (1 + \tan \theta)}$ کدام است؟

- الف) $-(\sin \theta + \cos \theta)$ (ب) $\sin \theta + \cos \theta$ (ج) $\sin \theta - \cos \theta$ (د) $-\sin \theta + \cos \theta$

۱۱. اگر $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} - \frac{\cos x + \sin x}{2}$ کدام است؟

- الف) $-\sin x$ (ب) $\cos x$ (ج) $\sin x - \cos x$ (د) صفر

۱۲. اگر $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$ باشد، حاصل $\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{8} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{11\pi}{8} - \alpha\right) + \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$ کدام است؟

- الف) a (ب) صفر (ج) $2a$ (د) $-a$

۱۳. اگر انتهای کمان روبرو به زاویه α در ناحیه دوم باشد، حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}}$ کدام است؟

- الف) $-\cot \alpha$ (ب) $-\cos \alpha$ (ج) $\cot \alpha$ (د) $\cos \alpha$

۱۴. اگر $\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = 4$ باشد مقدار $\tan^2 x$ چه قدر است؟

- الف) ۲ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) ۱

۱۵. اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

الف) ۵ (ب) ۱ (ج) -۳ (د) -۴

۱۶. اگر $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، مقدار $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ کدام است؟

الف) $-\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (د) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۷. اگر $\frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{4}$ و $\tan 2x = \frac{-1}{\sqrt{3}(m+1)}$ باشد، حدود m کدام است؟

الف) $m \leq -\sqrt{3}$ (ب) $-\frac{4}{3} \leq m < -1$ (ج) $m \geq \sqrt{3}$ (د) $m < -1$

۱۸. مقدار سینوس زاویه‌ی 75° کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (ج) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (د) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

۱۹. اگر $\tan(a-b) = \frac{3}{7}$ و $\tan(a+b) = \frac{2}{5}$ باشد، مقدار $\tan 2a$ کدام است؟

الف) -۲ (ب) -۱ (ج) ۱ (د) ۲

۲۰. اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{2 + m}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

الف) $1 \leq m < 2$ (ب) $-2 < m < 1$ (ج) $m < -2$ (د) $1 < m$

۲۱. اگر بدانیم $\tan \alpha = 2$ و $1 + \tan \alpha \tan \beta = 3 \cot(\alpha - \beta)$ می‌باشد، حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

الف) -۲ (ب) -۱ (ج) ۱ (د) ۲

۲۲. اگر $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$ باشد، $\cot 2x$ کدام است؟

- (الف) $\frac{4}{3}$ (ب) $-\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $-\frac{4}{3}$

۲۳. اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

- (الف) $\frac{65}{8}$ (ب) $-\frac{65}{8}$ (ج) $\frac{17}{4}$ (د) $-\frac{17}{4}$

۲۴. حاصل عبارت $\left(12 \cos^3 \frac{\pi}{12} - 9 \cos \frac{\pi}{12}\right)^2$ کدام است؟

- (الف) $\frac{27}{4}$ (ب) $\frac{9}{2}$ (ج) $\frac{9}{4}$ (د) $\frac{27}{2}$

۲۵. ساده شده‌ی عبارت $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۵)

- (الف) $\sin 20^\circ$ (ب) $\cos 20^\circ$ (ج) $2 \sin 20^\circ$ (د) $2 \cos 20^\circ$

۲۶. خلاصه شده کسر $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{54}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)

- (الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) ۱ (د) $\sqrt{3}$

۲۷. عبارت $(\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ - \cot 10^\circ)$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

- (الف) ۱ (ب) $-\sqrt{3}$ (ج) $2 \cos 20^\circ$ (د) $\sin 80^\circ$

۲۸. حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

- (الف) $\cos 10^\circ$ (ب) $\sin 70^\circ$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$

۲۹. حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\cos 40^\circ}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

- الف) $\frac{1}{2}$ (ب) ۱ (ج) $\sqrt{3}$ (د) ۲

۳۰. مساحت مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۹ و ۷ واحد، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

- الف) $15\sqrt{2}$ (ب) $14\sqrt{3}$ (ج) $12\sqrt{5}$ (د) $14\sqrt{5}$

۳۱. مساحت مثلث ABC در شکل روبرو، کدام است؟ ($AD = 4\sqrt{3}$)

- الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۲ (د) ۱۵

۳۲. اگر $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

- الف) $\frac{9}{4}$ (ب) $\frac{15}{8}$ (ج) $\frac{17}{8}$ (د) $\frac{31}{16}$

۳۳. حاصل عبارت $\frac{\sin 125^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

- الف) $-\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{7}{3}$ (د) $\frac{5}{8}$

۳۴. اگر $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار عبارت $\sin^4 x + \cos^4 x$ چه قدر است؟ (آزاد غیر پزشکی - ۷۵)

- الف) ۲ (ب) ۱ (ج) $2 - \sqrt{2}$ (د) $\sqrt{2} - 1$

۳۵. اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $8 \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۳)

- الف) $\sin 4a$ (ب) $\cos 4a$ (ج) $\cos^2 2a$ (د) $\cos^2 2a$

۳۶. اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

- الف) $-\frac{2}{9}$ ب) $-\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{2}{9}$

۳۷. اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چه قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

- الف) $1/5$ ب) $1/8$ ج) $2/4$ د) $2/5$

۳۸. اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

- الف) $-\frac{3}{2}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

۳۹. اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

- الف) $0/45$ ب) $0/6$ ج) $0/75$ د) $0/8$

۴۰. مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

- الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴

مثال 2α

اگر $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$ مطلوب است. $\tan 2\alpha$ و $\sin 2\alpha$

مثال $(\alpha + \beta)$ و $(\alpha - \beta)$

اگر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α حاده باشد، حاصل $\cos(\alpha + 30^\circ)$ و $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

مثال 3α

اگر $\tan \alpha = \sqrt{2}$ و α حاده باشد، $\sin 3\alpha$ و $\tan 3\alpha$ را به دست آورید.

مثال $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

ثابت کنید. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$