



توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری



* درس اول : ریشه و توان *

ریشه‌های دوم و سوم (یادآوری) :

اگر a عدد حقیقی باشد،

$$\left. \begin{array}{l} a^2 \text{ را توان دوم یا مجذور } a \text{ گویند} \xleftarrow{a=4} 16 \text{ مجذور عدد } 4 \text{ است.} \\ \sqrt{a} \text{ و } -\sqrt{a} \text{ را ریشه‌های دوم } a \text{ گویند} \xleftarrow{a=4} \sqrt{4} \text{ و } -\sqrt{4} \text{ ریشه‌های دوم } 4 \end{array} \right\}$$

هستند.

مثال:

$$25 = 5^2 = (-5)^2 \Leftrightarrow (-5), (5) \text{ ریشه‌های دوم عدد } 25 \text{ هستند.}$$

نکته:

ریشه مثبت را با علامت $(\sqrt{\quad})$ رادیکال نمایش می‌دهند $5 = \sqrt{25} \Leftrightarrow$
 بنابراین می‌توان گفت: $-5 \neq \sqrt{25}$

$$-5 = -\sqrt{25}$$

ریشه‌های دوم عدد 25 هستند. $\underbrace{-\sqrt{25}}_{-5}, \underbrace{\sqrt{25}}_5$

نکته:

اعداد منفی ریشه دوم ندارند، چون عددی وجود ندارد که به توان 2 برسد و منفی شود به همین دلیل، زیر رادیکال با فرجه 2 عدد منفی قرار نمی‌گیرد \leftarrow تعریف نشده $\rightarrow \sqrt{-25}$

نکته:

هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه‌ی دوم، قرینه هم است.

اگر a عدد حقیقی باشد

$$\left. \begin{array}{l} a^3 \text{ را توان سوم یا مکعب } a \text{ گویند} \xleftarrow{a=8} 512 \text{ مکعب } 8 \text{ است.} \\ \sqrt[3]{a} \text{ را ریشه سوم } a \text{ گویند} \xleftarrow{a=8} 2 \text{ ریشه سوم } 8 \text{ است.} \end{array} \right\}$$

مثال:

$$125 = 5^3 \Leftrightarrow 5 \text{ ریشه سوم } 125 \text{ است.}$$

$$-125 = (-5)^3 \Leftrightarrow -5 \text{ ریشه سوم } -125 \text{ است.}$$

نکته:

هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشه سوم، هم علامت با خودش دارد.

☑ نکته:

در ریشه‌گیری مرتبه سوم، اعداد زیر رادیکال می‌توانند منفی باشند.

✍ مثال:

$$(-3)^3 = -27 \rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

☑ نکته:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{a^2} = |a|, \sqrt[3]{a^3} = a \\ \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a} \end{array} \right\} \text{ اگر } a \text{ یک عدد حقیقی باشد آنگاه داریم}$$

✍ مثال:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{(-5)^2} = |-5| = 5 \\ \sqrt[3]{5^2} = |5| = 5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \\ \sqrt[3]{2^3} = 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{(-5)^3}} = \frac{-\sqrt[3]{125}}{-5}$$

☞ ریشه n ام:

هرگاه داشته باشیم $b^n = a$ ($n \geq 2$)، b را ریشه n ام a گویند و داریم:

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

ریشه یا فرجه

☑ نکته:

n فرد باشد \Leftarrow علامت a, b برابر هستند، اعداد منفی می‌توانند زیر رادیکال قرار بگیرند، عدد a در فرمول بالا اگر فقط یک ریشه حقیقی دارد.

n زوج باشد \Leftarrow فقط اعداد مثبت می‌توانند زیر رادیکال قرار بگیرند فقط ریشه مثبت را می‌توان به شکل رادیکال نوشت، علامت a همواره مثبت خواهد بود.

✍ مثال: n زوج:

$$\left. \begin{array}{l} 2 = \sqrt[4]{16} \\ -2 = -\sqrt[4]{16} \end{array} \right\} \leftarrow 2^4 = (-2)^4 = 16$$

ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ هستند. $(\sqrt[4]{16})$, $(-\sqrt[4]{16})$

n فرد :

$$2^5 = 32 \rightarrow 2 = \sqrt[5]{32} \leftarrow \text{ریشه پنجم عدد ۳۲}$$

$$(-2)^5 = -32 \rightarrow -2 = \sqrt[5]{-32} \leftarrow \text{ریشه پنجم عدد -۳۲}$$

مثال: ✍

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{و} \quad \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3 = \text{ریشه‌های چهارم عدد ۸۱}$$

نکته: ☑

اگر $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ آنگاه داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زوج باشد } n \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \\ \text{فرد باشد } n \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \end{array} \right.$$

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5 \quad \text{مثال: ✍}$$

$$\sqrt[5]{(-5)^5} = -5 \quad \text{مثال: ✍}$$

مثال: ✍

$$\sqrt[5]{1.024} =$$

$$\sqrt[4]{0.0625} =$$

$$\sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} =$$

$$\sqrt[4]{81} =$$

$$\sqrt[3]{(-81)} =$$

$$\sqrt[6]{.} =$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$$

نمایش ریشه‌ها بر روی محور اعداد :

برای این کار مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را روی محور اعداد نشان می‌دهیم.

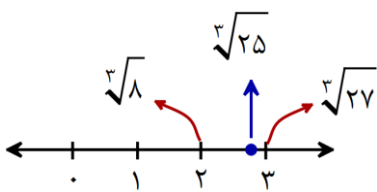
مثال:

$\sqrt[3]{25}$ را روی محور اعداد نشان دهید .

جواب \leftarrow ابتدا حدود $\sqrt[3]{25}$ را تعیین می‌کنیم \leftarrow

$$\sqrt[3]{25} \text{ به } 3 \text{ نزدیک‌تر است. } 2 < \sqrt[3]{25} < 3$$

اعداد $2/6$ و $2/7$ و $2/8$ و $2/9$ را به توان ۳ می‌رسانیم، هر کدام به ۲۵ نزدیک‌تر بود، جواب است.



به عنوان نمونه \leftarrow $(2/8)^3 = 21/95$, $(2/9)^3 = 24/3$

پس داریم : $\sqrt[3]{25} \approx 2/9$

مثال:

مقدار تقریبی اعداد زیر را بدست آورید و مکان تقریبی آنها را روی محور اعداد معین کنید.

الف) $\sqrt{18}$

ب) $\sqrt[5]{-72}$

تست:

عدد $\sqrt[3]{16}$ و $\sqrt[4]{250}$ بین کدام دو عدد متوالی است؟

د) ۴ و ۵

ج) ۳ و ۴

ب) ۲ و ۳

الف) بین ۱ و ۲

مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد حقیقی :

مثال:

$$\sqrt{5} = 2/23, \quad \sqrt[3]{5} = 1/7, \quad \sqrt[4]{5} = 1/49, \dots \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{5} > \dots$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0/7, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0/79, \quad \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 0/84, \dots \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \sqrt[4]{\frac{1}{2}} < \dots$$

در حالت کلی نکات زیر را خواهیم داشت :

الف) $a > 1 \Rightarrow a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$

ب) $0 < a < 1 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$

☑ نکته:

اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

$a < -1 \Rightarrow a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} > \dots$

$a = 0$ یا $a = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = \sqrt[4]{a} = \dots = a$

✍ مثال:

اعداد هر دسته را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt[6]{11}$, $\sqrt[4]{11}$, $\sqrt[3]{11}$

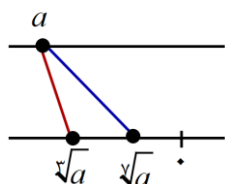
ب) $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

☑ تست:

با توجه به شکل مقابل، کدام عدد زیر نمی تواند باشد؟

الف) $-2/5$ ب) $-2/1$

ج) $-1/1$ د) $-0/9$



* مقایسه بین ریشه n ام دو یا چند عدد مختلف :

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند و ریشه n ام آنها قابل تعریف باشد، همواره داریم :

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

✍ مثال:

اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{2}$

که تمرینات درسی اول :

۱. حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}-1}$

ب) $\sqrt[3]{0./008}$

ج) $2\sqrt[3]{-343} + \sqrt[4]{(-2)^4}$

د) $\sqrt[3]{(2-\pi)^3} + \sqrt{(2-\pi)^2}$

۲- با فرض $0 < a < 1$ ، عبارت $|a-2| - |5-a|$ را ساده کنید.

۳- در صورتی که $a^2 + 4b^2 = 5ab$ باشد، حاصل $\left| \frac{a+2b}{a-2b} \right|$ را بدست آورید.

۴- در جاهای خالی یکی از علامتهای $<$ و $>$ یا $=$ را قرار دهید.

الف) $\sqrt[4]{(0./01)^4} \bigcirc \sqrt[5]{(0./01)^5}$

ب) $\sqrt[5]{-0./07} \bigcirc \sqrt[5]{-0./08}$

ج) $\sqrt[4]{(-0./02)^4} \bigcirc \sqrt[5]{(-0./02)^5}$

د) $(-0./1)^3 \bigcirc (-0./1)^7$

۵- اگر $0 < a < 1$ آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

۶- کدام گزینه نادرست است؟

الف) $(0./1)^2 > (0./1)^3$

ج) $\sqrt{0./1} > \sqrt[3]{0./1}$

د) $\pi^4 > \pi^5$

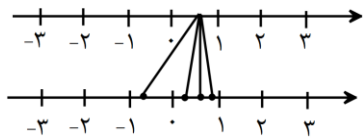
د) $\sqrt[4]{\pi} > \sqrt[5]{\pi}$

۷- حاصل $5\sqrt[5]{0./0032} - \sqrt[5]{3125}$ را بدست آورید.

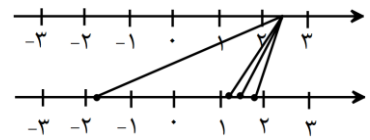
۸- اگر $3^x = 5$ باشد آنگاه حاصل $(\sqrt{3})^{x+1}$ را بیابید.

۹- حجم یک کره برابر 8π است. شعاع کره را با یک رقم اعشار بنویسید.

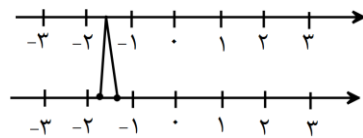
۱۰- در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است، آن‌ها را مشخص کنید.



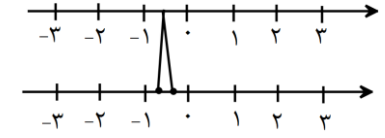
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

✓ سوالات چهار گزینه‌ای

۱. اگر $X < 0$ باشد، ساده شده عبارت $\sqrt[4]{(1-X)^4} - \sqrt[3]{X^3} + \sqrt{X^2}$ کدام است؟

(د) ۱

(ج) $1-3X$

(ب) $3X-1$

(الف) $-3X$

۲. اگر $X + \frac{1}{X} = 3$ ، حاصل $\left| \frac{X+1}{X-1} \right|$ برابر است با:

(د) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(ج) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(ب) $\sqrt{5}$

(الف) $\sqrt{3}$

۳. اگر $a^{\sqrt{3}} = 3$ ، انگاه مقدار مربع a کدام است؟

(د) $\sqrt{3}$

(ج) ۳

(ب) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

(الف) $\sqrt[3]{3^2\sqrt{3}}$

۴. اگر $X > 0$ و $\sqrt[3]{X\sqrt{X}\sqrt{X}} = 4$ باشد، مقدار X کدام است؟

(د) ۲۵۶

(ج) ۶۴

(ب) ۱۶

(الف) ۴

۵. اگر $X < 0$ باشد حاصل عبارت $\sqrt[3]{\frac{5X}{16}} \sqrt[4]{\frac{16}{625X^4}}$ کدام است؟

- (الف) $-\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) -1 (د) 1

* درس دوم : توان های گویا و قواعد رادیکال ها *

تعریف $a^{\frac{1}{n}}$: برای $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ توان رسانی عدد مثبت a ($a \geq 0$)

به توان $\frac{1}{n}$ به صورت روبرو تعریف می شود $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

مثال :

$$a = 5, n = 3 \rightarrow 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$a = 2, n = 2 \rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$a = \frac{1}{5}, n = 5 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5}}$$

نکته:

اگر a منفی باشد ($a < 0$) قاعده بالا قابل تعریف نمی باشد (قرار داد)

مثال :

$$a = -8, n = 3 \rightarrow (-8)^{\frac{1}{3}} \neq \sqrt[3]{-8}$$

دلیل قرار داد : زیرا نمایش یک عدد گویا به صورت تقسیم دو عدد صحیح، یکتا نیست و نوشتن به صورت های گوناگون باعث دریافت پاسخ های مختلف می شود.

مثال :

$$a = -1, n = 3$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = (-1)$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

تعریف $a^{\frac{m}{n}}$: اگر a عدد حقیقی مثبت باشد و $m, n \in \mathbb{N}$ باشند تعریف می کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad (n \geq 2)$$

مثال :

$$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$$

$$2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{2^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

مثال :

عبارتهای زیر را بر حسب توان گویا بنویسید و پس از ساده کردن دوباره بر حسب ریشه گیری بنویسید.

الف) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{14}} =$

ب) $\sqrt[5]{4} \div \sqrt[7]{8} =$

پ) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} =$

ت) $\sqrt{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}\dots}$

قواعد مربوط به رادیکال ها :

1 ضرب و تقسیم رادیکال ها :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0 \quad (\text{تقسیم}) \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (\text{ضرب})$$

* تذکر : بدیهی است که اگر n زوج باشد و a, b باید مثبت باشند.

مثال :

حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

الف) $\frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{2}} =$

ب) $\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[4]{3\sqrt{9}} + \sqrt[5]{2\sqrt{8}}\right) =$

2 توان رسانی رادیکال‌ها :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } a \text{ یک عدد حقیقی مثبت } (a \in \mathbb{R}^+) \\ m \text{ عدد صحیح } (m \in \mathbb{Z}) \\ n \text{ عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی } 2 \text{ } (n \geq 2, n \in \mathbb{N}) \end{array} \right.$$

اثبات :

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

3 رادیکال‌های تو در تو :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \leftarrow \quad \text{اگر } m, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$$

اثبات :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

4 ساده کردن فرج و توان در ریشه n ام :

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \leftarrow \quad \text{اگر } m, n, k \in \mathbb{N}, a \geq 0$$

اثبات :

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال :

$$\sqrt[45]{5^9} = \sqrt[9 \times 5]{5^{9 \times 1}} = \sqrt[5]{5}$$

5 بردن یک عدد داخل رادیکال و برعکس :

$$\sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b} \quad \leftarrow \text{اگر } n \text{ عدد طبیعی زوج و } a \text{ یک عدد حقیقی باشد :}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} \quad \leftarrow \text{اگر } n \text{ عدد طبیعی فرد و } a \text{ یک عدد حقیقی باشد :}$$

مثال :

عبارت $2\sqrt[3]{2}$ را با فرجه 6 بنویسید.

$$\Rightarrow \text{جواب} \quad 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3 \times 2]{(16)^2} = \sqrt[6]{256}$$

تست :

حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام گزینه است؟

الف) $6\sqrt[6]{2}$

ب) $3\sqrt[6]{32}$

ج) $2\sqrt[3]{9}$

د) 6

6 ساده کردن رادیکال‌ها :


برای اینکار عبارت زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم و سپس از نکات قبل بهره می‌گیریم.

7 جمع و تفریق رادیکال‌ها :

در جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، هر یک از آنها را ساده می‌کنیم و سپس می‌توان آنها را جمع یا تفریق کرد.

نکته:

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \quad \text{در حالت کلی :}$$

مثال: 

حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $3\sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{4} =$

ب) $\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}} \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

پ) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} \div \sqrt[3]{2x\sqrt{\sqrt{x}}} \quad (x > 0)$

فرمول رادیکال مرکب :

در رادیکال‌ها وقتی اعداد مثبت هستند، قواعد رادیکال‌ها برای آنها برقرار است :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

تست:

حاصل $\sqrt{4+\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}$ (د)

ب) $\sqrt{4-\sqrt{5}}$ (ج)

ج) $\sqrt{\sqrt{5}+1}$ (ب)

د) $\sqrt{5}-2$ (الف)

توان رسانی با توان گنگ :

مثال :

$$\text{الف) } \left((\sqrt{5})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{12}} =$$

$$\text{ب) } \left[\sqrt[3]{3^{(3-\sqrt{2})}} \right]^{3+\sqrt{2}} =$$

$$\text{ج) } 3^{(\sqrt{3}+1)} \times 3^{\left(\frac{-2}{\sqrt{3}-1}\right)} =$$

تمرینات درسی دوم :

۱. حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} =$$

$$\text{ب) } \sqrt{4+\sqrt{12}} + \sqrt{4-\sqrt{12}} =$$

$$\text{ج) } \left(\sqrt[5]{5^3 \sqrt{5} \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$\text{د) } \sqrt[4]{5^3} \times \sqrt[7]{5^2} \times \sqrt[9]{5^4} =$$

۲- در جاهای خالی علامت مقایسه مناسب بگذارید.

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{2}{7}} \bigcirc \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \bigcirc \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$\text{ج) } 0./01^{-\frac{1}{0.2}} \bigcirc 0./01^{-\frac{1}{0.3}}$$

$$\text{د) } \sqrt{3}^{\frac{2}{3}} \bigcirc \sqrt{3}^{\frac{2}{4}}$$

۳- اگر $0 < x < 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^3}$ را بیابید.

۴- عددهای زیر را به صورت نزولی مرتب کنید.

$$۱۲۸^{-۰/۰۱}, \sqrt[۶]{۳۲}, \frac{\sqrt[۳]{۸}}{\sqrt[۴]{۴}}$$

۵- عددهای $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ را مقایسه کنید.

۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۴]{x} \sqrt[۳]{x^2} \sqrt{x} \times \sqrt[۴]{\sqrt{x} \sqrt{x}}}{\sqrt[۵]{x \sqrt[۴]{x \sqrt[۳]{x} \sqrt{x}}}}$ را بدست آورید.

۷- X را طوری بدست آورید که معادله $(\frac{1}{5})^{2x-2} = 5(125)^x$ برقرار باشد.

۸- حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sqrt{۸۳} - \sqrt{۲})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{۸۳} + \sqrt{۲})^{\frac{1}{2}} =$

ب) $\frac{\sqrt[۵]{۸۱} \times \sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}}{\sqrt[۶]{۳۵}} =$

✓ تست درسی دوم :

۱. حاصل عبارت مقابل را به ازای $x = -\frac{1}{8}$ بدست آورید.

$$\sqrt[۵]{x^4 \sqrt[۴]{x^3 \sqrt[۳]{-x^2} \sqrt{x^2}}} =$$

د) $\frac{1}{8}$

ج) $-\frac{1}{8}$

ب) $-\frac{1}{4}$

الف) $\frac{1}{4}$

۲- حاصل عبارت $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \sqrt{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

- الف) $\sqrt[3]{x}$ (ب) \sqrt{x} (ج) $\sqrt[3]{|x|}$ (د) $\sqrt{|x|}$

۳- اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

- الف) ۶ (ب) ۸ (ج) $6\sqrt{2}$ (د) $7\sqrt{2}$

۴- حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2^4 \sqrt[4]{6}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

- الف) $6\sqrt{2}$ (ب) $3\sqrt[6]{32}$ (ج) $2\sqrt[3]{9}$ (د) ۶

۵- حاصل $(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3}) \times \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

- الف) $\sqrt{3}$ (ب) ۲ (ج) $1+\sqrt{3}$ (د) $2\sqrt{3}$

۶- اگر حاصل عبارت $(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \times (2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، کدام است؟

- الف) $\sqrt{3}-1$ (ب) ۲ (ج) ۱ (د) $\sqrt{3}+1$ (سراسری ریاضی ۹۳)

* درس سوم : اتحادهای جبری *

هر اتحاد یک تساوی جبری است که اگر به جای حروف هر عدد دلخواه جایگزین شود، تساوی درست باشد. به عبارت دیگر اتحاد تساوی جبری که به ازای تمام مقادیر عددی برقرار باشد. برای مثال تساوی زیر به ازای هر مقدار عددی درست است. پس یک اتحاد است.

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

(۱) اتحادهای مربع دو جمله‌ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

الف) مربع مجموع دو جمله :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ب) مربع تفاضل دو جمله :

مثال :

$$\text{الف) } (3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

$$\text{ب) } (m - 3n)^2 = (m)^2 - 2(m)(3n) + (3n)^2 = m^2 - 6mn + 9n^2$$

که تمرین :

اتحادهای بالا را ثابت کنید.

$$\text{الف) } (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{ب) } (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(۲) اتحاد مزدوج (حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله)

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

مثال :

$$(3m + 2n)(3m - 2n) = (3m)^2 - (2n)^2 = 9m^2 - 4n^2$$

که تمرین :

حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$\text{الف) } (3xy + 2k)(3xy - 2k) =$$

$$\text{ب) } (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) =$$

۳) اتحاد جمله‌ی مشترک :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال :

$$\text{الف) } (k + 5)(k + 3) = k^2 + (5 + 3)k + (5)(3) = k^2 + 8k + 15$$

$$\text{ب) } (m + 2)(m - 5) = m^2 + (2 - 5)m + (2)(-5) = m^2 - 3m - 10$$

تمرین :

حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$\text{الف) } (xy - 2)(xy - 7) =$$

$$\text{ب) } (7 - 5b)(7 - 2b) =$$

۴) اتحاد مربع سه جمله‌ای :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

مثال :

$$\begin{aligned} (x + 2y + 3z)^2 &= x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3z) + 2(2y)(3z) \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz \end{aligned}$$

تمرین :

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$\text{الف) } (2xy - 3x + z)^2 =$$

$$ب) (x^2 - y^2 - z^2) =$$

۵) اتحادهای مجموع یا تفاضل دو مکعب (چاق و لاغر) :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \leftarrow \text{اتحاد مجموع دو مکعب :}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \leftarrow \text{اتحاد تفاضل دو مکعب :}$$

✍ **مثال :**

$$الف) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = (x)^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3$$

$$ب) (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3$$

۶) اتحادهای مکعب دو جمله‌ای :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \leftarrow \text{اتحاد مکعب مجموع دو جمله :}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \leftarrow \text{اتحاد مکعب تفاضل دو جمله :}$$

✍ **مثال :**

$$الف) (x + 2y)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

$$ب) (2m - 3n)^3 = (2m)^3 + 3(2m)^2(-3n) + 3(2m)(-3n)^2 + (-3n)^3$$

$$= 8m^3 - 36m^2n + 54mn^2 - 27n^3$$

اتحادهای دیگری :

علاوه بر اتحادهای فوق اتحادهای دیگری نیز اهمیت بسیاری برخوردار دارند. مهمترین این اتحادها عبارتند از :

$$۱) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$۴) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$۲) a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$۵) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$۳) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$۶) a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

کچند تمرین در مورد اتحادها :

۱- در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

$$۱) (5 + \dots)^2 = 25 + \dots + 49x^2$$

$$۲) (3x + \dots)^2 = 9x^2 - 24x + \dots$$

$$۴) (۲a - \dots)^۳ = \dots - ۱۲a^۲b + \dots - \dots$$

$$۳) (۳x - \dots)^۲ = \dots - ۲۴x + \dots$$

$$۵) (\dots + \dots)(۱۶m^۲ + ۱۲mn + ۹n^۲) = \dots - \dots$$

۲- به کمک اتحادها هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(x - y)^۲ - (x + y)^۲ =$

ب) $(x + \frac{۳}{x})^۲ =$

پ) $(\frac{x}{۲} - y)(\frac{x}{۲} + y) =$

ت) $(x + ۷)(x - ۲)(x^۲ + ۵x + ۱۴) =$

ث) $(y - ۱)(y^۲ + y + ۲)(y + ۲) =$

ج) $(x^۳ - ۱)(x^۶ + ۱)(x^۳ + ۱) =$

۳- اگر $a + b = ۵$ و $a^۲ + b^۲ = ۲۰$ باشد. حاصل ab را بیابید.

۴- اگر $x + \frac{۱}{x} = ۵$ حاصل $x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ را بیابید.

۵- اگر $x - \frac{۱}{x} = ۵$ حاصل عبارت $x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ را بدست آورید.

۶- اگر $a + b = ۹$ و $ab = ۵$ در این صورت مقدار $a^۲ + b^۲$ چقدر است؟

۷- اگر $x + y = ۵$ و $xy = ۶$ مقدار عددی $(x - y)^۲$ را بیابید.

🔍 تجزیه‌ی عبارتهای جبری :

تبدیل یک عبارت جبری به حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری ساده‌تر را « تجزیه » می‌نامند. مانند :

$$۱) x^2 + 3x = x(x + 3)$$

$$۲) a^2 + ab = a(a + b)$$

$$۳) k^2 + 5k - 14 = (k + 7)(k - 2)$$

$$۴) a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$$

$$۵) 4m^2 - 9n^2 = (2m - 3n)(2m + 3n)$$

📌 توجه :

۱) همه‌ی عبارتهای جبری را نمی‌توان تجزیه کرد. عبارتهایی را که نمی‌توان تجزیه کرد « تجزیه ناپذیر » گویند. مانند

$$x^2 + 1 \text{ و } 2x + 3$$

۲) یک عبارت جبری را باید تا آن اندازه تجزیه کرد که :

الف) هر یک از عامل‌های آن تجزیه پذیر نباشد.

ب) تمام ضریب‌ها عدد صحیح باشند.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) \quad \text{به صورت زیر کافی است :}$$

ولی عبارت $x^2 - 5$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح قابل تجزیه نیست، زیرا در صورت تبدیل به ضرب، برخی از ضریب‌ها عدد صحیح نخواهند بود.

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

🔍 روش‌های تجزیه‌ی :

در تجزیه‌ی عبارتهای جبری روش‌های مختلفی وجود دارد. در اینجا مهمترین این روش‌ها بیان می‌شود.

۱) روش فاکتورگیری :

هرگاه در یک عبارت جبری عامل مشترکی وجود داشته باشد، آن عامل مشترک با توان کمتر را « فاکتور » می‌نامیم. با

تقسیم تمام جملات بر فاکتور عبارت مورد نظر تجزیه می‌شود.

📌 مثال :

عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = 15a^2x^3 - 12a^3x^2 + 6a^2x^2$$

واضح است که در این عبارت $3a^2x^2$ عامل مشترک بین تمام جملات (فاکتور) است. حال تمام جملات را بر این عامل مشترک تقسیم می‌کنیم.

تمرین:

هر یک از عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $2ax + 3a^2 =$

ب) $12xyz + 28y^2z - 8yz^2 + 4x^2z =$

پ) $7a^3b^3c - 3ab^3c^3 - a^3bc^3 =$

۲) تجزیه به کمک اتحادها:

به کمک اتحادها نیز می‌توان یک عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر تجزیه نمود. در اینجا نحوه‌ی تجزیه به کمک اتحادها به ترتیب اهمیت همراه با مثال شرح می‌دهیم.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

۲-۱) اتحاد مزدوج:

توجه:

این اتحاد برای تجزیه‌ی یک دو جمله‌ای با شرایط زیر بکار می‌رود.

الف) هر دو جمله‌ی آن مربع کامل باشند.

ب) بین آنها منهای باشد.

با این شرایط از هر دو جمله جذر گرفته و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال:

الف) $\underbrace{25x^2}_{5x} - \underbrace{9y^2}_{3y} = (5x - 3y)(5x + 3y)$

ب) $16a^2 - b^2 = (4a - b)(4a + b)$

۲-۲) اتحاد جمله‌ی مشترک:

$$x^2 + \underbrace{S}_{a+b}x + \underbrace{P}_{a \times b} = (x + a)(x + b)$$

توجه :

این اتحاد برای تجزیه‌ی یک سه جمله‌ای با شرایط زیر بکار می‌رود :

الف) یک جمله از این سه جمله مربع کامل با ضریب یک باشد.

ب) ضریب جمله‌ی شامل متغیر (جذر جمله‌ی مربع) را S و جمله‌ی بدون متغیر را P فرض می‌کنیم و دو عدد صحیح

پیدا می‌کنیم که مجموع آنها S و حاصل‌ضرب آنها P باشد.

با این شرایط از جمله‌ای که مربع کامل است جذر گرفته و با توجه به علامت دو عدد بدست آمده در بالا از این اتحاد استفاده

کنید.

مثال :

$$\text{الف) } \underbrace{x^2}_x - \underbrace{7x}_{2+5} + \underbrace{10}_{2 \times 5} = (x+2)(x+5)$$

$$\text{ب) } \underbrace{m^2}_m - \underbrace{4x}_{-3+7} - \underbrace{21}_{-3 \times 7} = (m-3)(m+7)$$

$$\text{پ) } \underbrace{k^2}_k - \underbrace{5x}_{(-1)+(-4)} - \underbrace{4}_{(-1) \times (-4)} = (k-1)(k-4)$$

تمرین :

هر یک از عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 8x + 12 =$$

$$\text{ب) } t^2 + t - 20 =$$

$$\text{پ) } x^2 + 20x + 19 =$$

(۲-۳) اتحاد مربع مجموع دو جمله :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

(۲-۴) اتحاد مربع تفاضل دو جمله :

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

توجه :

این دو اتحاد برای تجزیه‌ی یک سه جمله‌ای با شرایط زیر بکار می‌روند.

الف) دو جمله از این سه جمله مربع کامل باشند.

ب) جمله سوم دو برابر حاصل ضرب جذر دو جمله‌ی مربع باشد.

با این شرایط از دو جمله‌ای که مربع کامل هستند جذر گرفته و با توجه به علامت جمله‌ی سوم از اتحاد مربوطه استفاده

کنید.

مثال :

$$\text{الف) } \underbrace{x^2}_x - \underbrace{6x}_{2(x)(3)} + \underbrace{9}_3 = (x+3)^2$$

$$\text{ب) } \underbrace{9x^2}_{3x} - \underbrace{30x}_{2(3x)(5)} + \underbrace{25}_5 = (x-5)^2$$

تمرین :

هر یک از عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 2xy + y^2 =$$

$$\text{ب) } 25a^2 + 30a + 9 =$$

$$\text{پ) } 9m^2 + 12mn + 4n^2 =$$

* تذکر : اتحادهای مربع مجموع دو جمله و مربع تفاضل دو جمله را می‌توان به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک نیز تجزیه

نمود.

مثال :

$$\underbrace{x^2}_x - \underbrace{6x}_{3+3} + \underbrace{9}_{3 \times 3} = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

۵-۲) اتحاد مجموع دو مکعب :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

توجه :

این اتحاد برای تجزیه‌ی یک دو جمله‌ای با شرایط زیر بکار می‌رود.

الف) هر دو جمله مکعب کامل باشند.

ب) بین آنها به اضافه (+) باشد.

با این شرایط از مکعب، هر دو جمله را تعیین کرده و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال :

$$\underbrace{8x^3}_{2x} - \underbrace{27y^3}_{3y} = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

۶-۲) اتحاد تفاضل دو مکعب :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

توجه :

این اتحاد برای تجزیه‌ی یک دو جمله‌ای با شرایط زیر بکار می‌رود :

الف) هر دو جمله مکعب کامل باشند.

ب) بین آنها منهای باشد.

با این شرایط از مکعب هر دو جمله را تعیین کرده و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال :

$$\underbrace{8x^3}_{2x} - \underbrace{125}_{5} = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$$

تمرین :

هر یک از عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $8x^3 - 27 =$

۳) $(x - y)^3 + 8x^3 =$

۲) $125k^3 + 64 =$

۴) $(a - 1)^3 + 8 =$

توجه :

عبارت $X^6 - Y^6$ زیر را می‌توان به دو شکل زیر تجزیه نمود.

روش اول :

$$x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

روش دوم :

$$x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^2 + x^2y^2 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + x^2y^2 + y^4)$$

بررسی کنید که آیا این دو جواب متفاوت هستند یا خیر؟

۷-۲) اتحاد مکعب مجموع دو جمله :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

مثال :

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

۸-۲) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله :

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

مثال :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

که تمرین :

هر یک از عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

$$۱) m^6 + 6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3 =$$

$$۲) k^3 - 3k + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^3} =$$

☑ چند نکته مهم در تجزیه‌ی عبارتهای جبری :

۱) برای تجزیه‌ی یک عبارت جبری ابتدا باید روش فاکتورگیری را بررسی کرد. سپس به روش‌های دیگر پرداخت.

مثال :

برای تجزیه‌ی عبارتهای زیر، قبل از اتحاد از فاکتورگیری استفاده شده است.

$$\text{الف) } 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

$$\text{ب) } 50x^3 + 60x^2 + 18x = 2x(25x^2 + 30x + 9) = 2x(5x + 3)^2$$

$$پ) ۱۶x^۴ - ۲x = ۲x(۸x^۳ - ۱) = ۲x(۲x - ۱)(۴x^۲ + ۲x + ۱)$$

۲) گاهی اوقات لازم است قبل از تجزیه‌ی یک عبارت، جملات آن را دسته‌بندی کرد.

مثال :

برای تجزیه‌ی عبارتهای زیر قبل از هر عملی جملات را دسته بندی می‌کنیم.

$$الف) ۲a^۲ + a + ۲ab + b = (۲a^۲ + a) + (۲ab + b) = a(۲a + ۱) + b(۲a + ۱) = (۲a + ۱)(a + b)$$

$$ب) ۱ - a^۲ + ۲ab - b^۲ = ۱ + (-a^۲ + ۲ab - b^۲) = ۱ - (a^۲ - ۲ab + b^۲) = ۱ - (a - b)^۲$$

$$= [۱ - (a - b)][۱ + (a - b)] = (۱ - a + b)(۱ + a - b)$$

۳) گاهی برای تجزیه‌ی یک عبارت جبری لازم است جمله یا جمله‌هایی از آن را تفکیک کرد.

مثال :

برای تجزیه‌ی عبارت $۳x^۲ + ۷x + ۲$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$۳x^۲ + ۷x + ۲ = ۳x^۲ + ۶x + x + ۲ = (۳x^۲ + ۶x) + (x + ۲)$$

$$= ۳x(x + ۲) + (x + ۲) = (x + ۲)(۳x + ۱)$$

مثال :

برای تجزیه‌ی عبارت $x^۳ + x - ۱۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$x^۳ + x - ۱۰ = x^۳ + x - ۲ - ۸ = (x^۳ - ۸) + (x - ۲) = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴) + (x - ۲)$$

$$= (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴ + ۱) = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۵)$$

۴) گاهی برای تجزیه‌ی یک عبارت جبری لازم است جمله یا جمله‌هایی را به آن عبارت افزود و کم کرد.

مثال :

برای تجزیه‌ی عبارت $x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴ = x^۴ + ۶x^۲y^۲ + ۹y^۴ - ۴x^۲y^۲ = (x^۴ + ۶x^۲y^۲ + ۹y^۴) - ۴x^۲y^۲$$

$$= (x^۲ + ۳y^۲)^۲ - ۴x^۲y^۲ = [(x^۲ + ۳y^۲) - ۲xy][(x^۲ + ۳y^۲) + ۲xy]$$

$$= (x^۲ + ۳y^۲ - ۲xy)(x^۲ + ۳y^۲ + ۲xy)$$

۵) برای تجزیه‌ی یک سه جمله‌ای درجه‌ی دوم که در آن ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم آن برابر یک نباشد، می‌توان به روش

زیر نیز عمل کرد. در ضمن مثال توضیح داده می‌شود.

مثال :

برای تجزیه عبارت $3x^2 + 7x + 2$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

← جواب : الف) عبارت داده شده را برابر یک حرف مانند P قرار می‌دهیم.

$$P = 3x^2 + 7x + 2$$

ب) دو طرف تساوی را در ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم یعنی x^2 ضرب می‌کنیم.

$$P = 3x^2 + 7x + 2 \xrightarrow{\times 3} 3P = 9x^2 + 21x + 6$$

ج) مشاهده می‌شود که یک جمله در تساوی جدید مربع است. جذر آن را محاسبه می‌کنیم و جمله‌ی درجه‌ی یک را نیز به صورت مضربی از آن می‌نویسیم.

$$3P = (3x)^2 + 7(3x) + 6$$

د) مشابه اتحاد جمله‌ی مشترک دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آنها ۷ و ضرب آنها ۶ باشد.

$$3P = (3x)^2 + \underbrace{7}_{6+1}(3x) + \underbrace{6}_{6 \times 1} \rightarrow 3P = (3x + 6)(3x + 1)$$

ه) در نهایت مضرب ۳ را از دو طرف تساوی حذف می‌کنیم.

$$3P = 3(x + 2)(3x + 1) \rightarrow P = (x + 2)(3x + 1)$$

تمرین :

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $k^2 - 10k + 24 =$

ب) $x^2 - 16 =$

پ) $a^2 - 13a + 36 =$

ت) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc =$

ث) $a^2x^2 - 81x^2 =$

ج) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y =$

چ) $a^2 - b^2 + x^2 - 2x + 2ax - 2x + 1 =$

ح) $4m^2 - 20m + 25 =$

خ) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$

د) $3x^2 - 5x + 2 =$

که تمرین:

۱- اگر $x + y + z = 0$ ثابت کنید که $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (اتحاد اولر)

۲- عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{8^{32} + 8^{34}}{8^{15} + 8^{13}}$$

* تذکر: اگر مجموع مربعات دو عدد برابر صفر باشد، باید هر یک از آن دو عدد برابر صفر باشند. به عبارت دیگر:

$$A^2 + B^2 = 0 \rightarrow A = 0, B = 0$$

که تمرین:

در هر مورد مقدار X و Y را به دست آورید.

الف) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

محاسبه‌ی بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای جبری:

برای تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو یا چند عبارت جبری، ابتدا هر یک از آنها را به

عوامل اول تجزیه می‌کنیم. سپس قاعده‌های زیر را بکار می‌گیریم.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر، برابر است.

کوچکترین مضرب مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر، برابر است.

مثال:

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $A = 12a^3b^2c$, $B = 18a^2b^3c^2$, $C = 3 \cdot a^2b^2$

جواب \Leftarrow ابتدا در صورت لزوم عبارتهای داده شده را تجزیه می‌کنیم.

$$A = 12a^3b^2c = 3 \times 2^2 \times a^3b^2c, \quad B = 18a^2b^3c^2 = 2 \times 3^2 \times a^2b^3c^2$$

$$C = 3 \cdot a^2b^2 = 2 \times 3 \times 5 \times a^2b^2$$

$$\text{م.م.ب.} = 2 \times 3 \times a^2b^2 = 6a^2b^2$$

$$\text{م.م.ک.} = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times a^3b^3c = 180a^3b^3c$$

$$\text{ب) } A = x^f y^r (x+1)^{\Delta} (y+3) , B = x^f y(x+1)^r (y+4)^2$$

جواب \Leftarrow عبارتهای داده شده تجزیه شده می‌باشند، پس :

$$\text{م.م.ب. } x^f y(x+1)^r$$

$$\text{م.م.ک. } x^f y^r (x+1)^{\Delta} (y+3)(y+4)^2$$

$$\text{ج) } A = x^f - 3x^f - 4x^r , B = x^f - 8x$$

جواب \Leftarrow ابتدا در صورت لزوم عبارتهای داده شده را تجزیه می‌کنیم.

$$A = x^f - 3x^f - 4x^r = x^r (x^f - 3x^r - 4) = x^r (x^r + 1)(x^r - 4) = x^r (x^r + 1)(x - 2)(x + 2)$$

$$B = x^f - 8x = x(x^r - 8) = x(x - 2)(x^r + 2x + 4)$$

$$\text{م.م.ب. } x(x - 2)$$

$$\text{م.م.ک. } x^r (x^r + 1)(x - 2)(x + 2)(x^r + 2x + 4)$$

تمرین:

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } A = 12m^2n , B = 18mn^2$$

$$\text{ب) } A = 4a^{\Delta} (x+1)^r (y+1) , B = 4b^{\Delta} (x+1)(y+1)^r$$

$$A = 30 \cdot x^r y^{\Delta} (x^r - y^r) , B = 72x^r y^f z(x+y)(x-y)^r$$

* درس چهارم : عبارتهای گویا *

تعریف عبارات گویا : کسرهایی که صورت و مخرج آنها پس از ساده شدن چندجمله‌ای باشند را

« عبارت گویا » گویند.

مثال :

$$\checkmark \text{ عبارت گویا } \frac{2x + \sqrt{5}}{x + y} , \frac{x + 1}{x^2 + 5} \quad (1)$$

$$\times \text{ عبارت گویا } \frac{\sqrt{x}}{x + 4} , \frac{|x| + 1}{2x - 3} \quad (2)$$

☞ **دامنه عبارت گویا** : یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج را صفر می کنند، تعریف نمی شود یا به عبارت دیگر به ازای همه اعداد به غیر از آن مقادیر، تعریف می شود.

☞ **مثال :**

دامنه تعریف عبارت های گویای زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$

جواب \Leftarrow چون $x^4 \geq 0$ است، به ازای تمامی مقادیر تعریف شده است $D_f = \mathbb{R}$

$$\text{ب) } g(x) = \frac{3y}{y^2 - 4}$$

$$\text{جواب} \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{ج) } h(x) = \frac{2x}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+2}$$

$$\text{جواب} \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$$

☞ **ساده کردن عبارت های گویا** : برای این کار ابتدا صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه کرده و عوامل مشابه

در صورت و مخرج را حذف می کنیم.

☞ **مثال :**

هر یک از عبارت های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-4)} = \frac{x+1}{x-4}$$

$$\text{ب) } \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 6x + 5} = \frac{x \cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{ج) } \frac{x^3 - 1}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-1)}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

$$\text{د) } \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+3)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{2x+3}{x-2}$$

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا :

برای ضرب و تقسیم از قاعده‌های زیر استفاده می‌کنیم :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال :

$$\text{الف) } \frac{x+1}{x-2} \times \frac{x-1}{x^2+4+2x} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x^2+4+2x)} = \frac{x^2-1}{x^3-8}$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-2x}{x^2+2x} \times \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}(x+2)} \times \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \frac{2x^3-8x^2}{x^3} \div \frac{x^2-3x-4}{x^3+1} &= \frac{2x^2(x-4)}{x^3} \times \frac{x^3+1}{x^2-3x-4} \\ &= \frac{\cancel{2}(x-4)}{x} \times \frac{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-4)} = \frac{2(x^2-x+1)}{x} \end{aligned}$$

جمع و تفریق عبارتهای گویا :

برای جمع و تفریق از قاعده زیر استفاده می‌شود :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

مثال :

$$\text{الف) } \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x-3}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + (2x-3)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{ب) } \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+2+3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3}{x^2 + 3x - 10} = \frac{\overbrace{x + 5 + 3x - 3}^{4x+2}}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

☞ گویا کردن مخرج کسرهایی رادیکالی :

الف) کسرهایی که مخرج آنها به صورت $\sqrt[n]{x}$ باشد، برای گویا کردن مخرج این کسرها صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{x}$ ضرب می‌کنیم.

✍ مثال :

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

ب) کسرهایی که مخرج آنها به صورت $\sqrt[n]{x^m}$ باشد، در این حالت صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم :

✍ مثال :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^{3-2}}}{\sqrt[3]{x^{3-2}}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$$

ج) کسرهایی که مخرج آنها به صورت $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ باشد، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

✍ مثال :

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x}}{\sqrt{3} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x}}{3 - x}$$

$$\text{ب) } \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}} \times \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})}{4x - 9y}$$

د) کسرهایی که مخرج آنها به صورت $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$ باشد، صورت و مخرج را در قسمت دوم اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم

که تمرینات درسی چهارم :

۱- عبارت گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف می‌شود؟

$$\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{x^2}{x+3} - \frac{1}{x^2+1}$$

۲- حاصل عبارت‌های گویای زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$

ب) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$

ج) $\frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{x^4-1}{x^3+x}$

۳- حاصل ضرب و تقسیم‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{ax^2}{y^2} \times \frac{xy}{a(x+y)} \times \frac{x^2-y^2}{axy}$

ب) $\frac{x^2-4}{x^2-2x} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2+x}$

ج) $\frac{2x^3-8x^2}{x^3} \div \frac{x^2-3x-4}{x^3+1}$

۴- عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^3+8}{(x+2)(x^3-2x^2+4x)}$

$$\text{ب) } \frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y}$$

$$\text{ج) } \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x^3 - 1)(x^2 - x)}$$

۵- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$\text{د) } \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}$$

$$\text{ه) } \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$$

$$\text{ز) } \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9}}$$

$$\text{و) } \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

✓ تست‌های درسی چهارم :

۱- ساده شده عبارت $\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)}$ کدام است؟

- الف) ۱ (ب) $2x$ (ج) $\frac{2}{x}$ (د) $\frac{x}{2}$

۲- اگر بدانیم $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$ آنگاه $A - B$ ؟

- الف) ۱ (ب) -۱ (ج) صفر (د) ۲

۳- در رابطه روبرو A را بیابید.

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+A}{x+2} = \frac{3(2x+1)}{x^2+x-2}$$

- الف) -۲ (ب) -۱ (ج) ۱ (د) ۲

۴- حاصل عبارت $\frac{a^2-1}{a^2-2a+1} \div \frac{2a+2}{ax-x}$ کدام است؟

- الف) $\frac{2}{x}$ (ب) $\frac{x}{2}$ (ج) $\frac{x-1}{2}$ (د) $\frac{2}{x-1}$

۵- اگر $A = x - \frac{5x-6}{x}$ و $B = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$ ، آنگاه $\frac{A}{B} + 1$ برابر کدام گزینه است؟

- الف) x^2 (ب) $(x+1)^2$ (ج) $(x-1)^2$ (د) $(2x-1)^2$

۶- عبارت $A = \frac{a^2-1}{1-\frac{1}{a}}$ به ازای چه مقادیری تعریف می شود؟

- الف) \mathbb{R} (ب) $\mathbb{R} - \{0\}$ (ج) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (د) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

۷- حاصل عبارت $\frac{1}{2\sqrt{5}} \times (3\sqrt{2}-4)^{\sqrt{5}-1} \times (4+\sqrt{18})^{\frac{4}{1+\sqrt{5}}}$ کدام است؟

- ۱ (الف) ۲ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\sqrt{2}$ (د)

۸- گویا شده کسر $\frac{1}{\sqrt[5]{x}\sqrt{x}}$ کدام است؟

- الف) $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x^3}$ (ب) $\sqrt[5]{x}$ (ج) $\frac{\sqrt[5]{x^9}}{x^3}$ (د) $\frac{\sqrt[5]{x^7}}{x}$

۹- حاصل $\sqrt[4]{2}-1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}$ کدام است؟

- الف) ۱ (ب) -۱ (ج) $\sqrt{2}$ (د) $-\sqrt{2}$

۱۰- مقدار $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

(د) $\frac{1}{16}$

(ج) $\frac{1}{8}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(الف) $\frac{1}{2}$