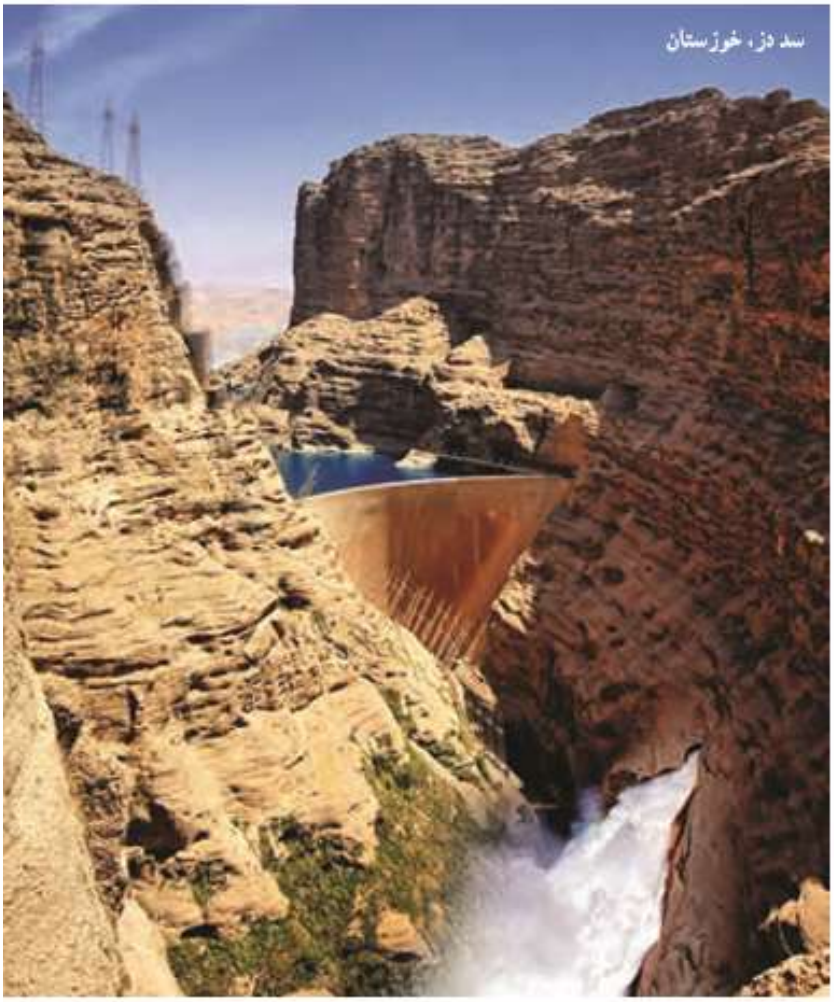
فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها



سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینهٔ ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

* درس اول : معادله درجه دوم *

فرم کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ می‌باشد.

مثال:

$$x^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases} \quad , \quad 2x^2+5x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-3 \end{cases}$$

$$-5x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

روش‌های حل معادلات درجه دوم

- روش تجزیه
- روش ریشه‌گیری
- روش مربع کامل
- استفاده از فرمول کلی (دلتا Δ)

۱. روش‌های تجزیه :

در این روش معادله را به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه می‌کنیم و با استفاده از خاصیت زیر، معادله حل خواهد شد :

☑ **نکته:**

$$\text{if} \quad AB=0 \Rightarrow A=0 \quad \text{یا} \quad B=0$$

یادآوری از روش‌های تجزیه :

❶ فاکتورگیری : $ax^2+bx=x(ax+b)$

❷ اتحاد مزدوج : $x^2-b^2=(x-b)(x+b)$

❸ اتحاد مربع دوجمله‌ای : $(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$

❹ اتحاد جمله مشترک : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

۲. روش ریشه‌گیری :

اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $c\leq 0$ و $b=0$ آنگاه با ریشه‌گیری جوای معادله بدست می‌آید.

$$x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

مثال:

الف) $۴x^{۲}-۱۶=۰$

$\rightarrow$ جواب : $۴x^{۲}=۱۶\rightarrow x^{۲}=۴\rightarrow \boxed{x=\pm ۲}$

ب) $(۲x-۱)^{۲}=۶۴$

$$\rightarrow \text{جواب}:\ ۲x-۱=\pm\sqrt{۶۴}\rightarrow ۲x-۱=\pm ۸\rightarrow\begin{cases}۲x-۱=۸\rightarrow ۲x=۹\rightarrow \boxed{x=\frac{۹}{۲}}\\ ۲x-۱=-۸\rightarrow ۲x=-۷\rightarrow \boxed{x=-\frac{۷}{۲}}\end{cases}$$

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $۹x^{۲}-۲۵=۰\rightarrow$ جواب : $(۳x-۵)(۳x+۵)=۰\rightarrow\begin{cases}۳x-۵=۰\rightarrow x=\frac{۵}{۳}\\ ۳x+۵=۰\rightarrow x=-\frac{۵}{۳}\end{cases}$

ب) $x^{۳}+x^{۲}=۵۶x\rightarrow$ جواب : $\overset{x}{\cancel{x^{۲}}}(x+۱)=۵۶\cancel{x}\rightarrow x=۷$

ج) $x^{۲}+۱۱x+۳۰=۰\rightarrow$ جواب : $(x+۶)(x+۵)=۰\rightarrow\begin{cases}x+۶=۰\rightarrow x=-۶\\ x+۵=۰\rightarrow x=-۵\end{cases}$

۰۳. روش مربع کامل :

مراحل این روش ⇦

- **گام اول :** مجهولات در یک طرف تساوی و معلومات در طرف دیگر
- **گام دوم :** اگر ضریب $x^{۲}$ عددی غیر یک باشد، باید طرفین تساوی را ضریب $x^{۲}$ تقسیم کرد.
- **گام سوم :** مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.
- **گام چهارم :** حال به روش ریشه‌گیری می‌توان جواب معادله را بدست آورد.

مثال:

معادل $۴x^{۲}+۵x+۱=۰$ را به روش کامل حل کنید.

جواب $\Rightarrow ۴x^{۲}+۵x+۱=۰\xrightarrow{(I)}۴x^{۲}+۵x=-۱\xrightarrow[\div ۴]{(II)}x^{۲}+\frac{۵}{۴}x=-\frac{۱}{۴}$

$$(III)\ \underbrace{\frac{۵}{۴}\div ۲=\frac{۵}{۸}}_{\text{نصف ضریب } x}\Rightarrow \underbrace{(\frac{۵}{۸})^{۲}=\frac{۲۵}{۶۴}}_{\text{مربع نصف ضریب } x}\Rightarrow \underbrace{x^{۲}+\frac{۵}{۴}x+\frac{۲۵}{۶۴}}_{\text{مربع دوجمله‌ای}}=-\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۶۴}$$

$$(x+\frac{۵}{۸})^{۲}=\frac{۹}{۶۴}\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}x+\frac{۵}{۸}=\pm\frac{۳}{۸}\rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱}{۴}\\ x=-۱\end{cases}$$

☜ ۰۴.روش فرمول کلی (Δ) :

در این روش به‌جای اینکه روی هر مثال روش مربع کامل را اجرا کنیم، روش مربع کامل را یک‌بار روی فرم کلی معادله درجه دوم $(ax^۲+bx+c=۰)$ بکار می‌بریم و سپس با نتایج بدست آمده، معادلات درجه دوم را حل می‌کنیم.

☯ بدست آوردن روش Δ با استفاده از روش مربع کامل :

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{\div a} x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰ \rightarrow \text{مربع نصف ضریب } x=\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}$$

$$\rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲} \rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$

دلتا یا متبین $\boxed{\Delta=b^۲-۴ac}$

$$\rightarrow x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \rightarrow \boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Delta>۰ \rightarrow \begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta=۰ \rightarrow x_۱=x_۲=-\dfrac{b}{۲a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta<۰ \rightarrow & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

✐ مثال:

معادلات زیر را به روش کلی (Δ) حل کنید.

الف) $۷x^۲-۵x+۲=۰$

$$\rightarrow \text{جواب :} \begin{cases} a=۷ \\ b=-۵ \\ c=۲ \end{cases} \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} \Delta=(-۵)^۲-۴(۷)(۲)=۲۵-۵۶<۰ \quad \text{معادله جواب حقیقی ندارد}$$

ب) $۴x^۲-۴x+۱=۰$

$$\rightarrow \text{جواب } \Delta=(-۴)^۲-۴(۴)(۱)=۱۶-۱۶=۰ \quad \text{معادله ریشه مضاعف یا تکراری دارد} \rightarrow x_۱=x_۲=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ج) $۳x^{۲}-۸x+۲=۰$

$$\rightarrow \text{جواب } \Delta=۶۴-۲۴=۴۰>۰ \rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴+\sqrt{۱۰}}{۳} \\ x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴-\sqrt{۱۰}}{۳} \end{cases}$$

مثال:

اگر یکی از جواب‌های معادله $۴x^{۲}-ax+۲۰=۰$ برابر (-۴) باشد، جواب دیگر معادله را بدست آورید.

مثال:

مقدار m را طوری بیابید که معادله $x^{۲}-mx+m-۱=۰$ ریشه مضاعف داشته باشد.

مثال:

معادله درجه دومی بنویسید که $x=۵$ و $x=۳$ جواب‌های آن باشد.

مثال:

حدود m را طوری بیابید که معادلهٔ $mx^{۲}-(۲m-۱)x+m-۲=۰$ جواب حقیقی نداشته باشد.

☑ **نکته:** معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}=bx+c=۰$ $(a\neq۰)$ مفروض است آنگاه حالت‌های زیر همواره برقرارند.

الف) $a+b+c=۰ \rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۱ \\ x_{۲}=-\frac{c}{a} \end{cases}$

ب) $a+c=b \rightarrow \begin{cases} x_{۱}=-۱ \\ x_{۲}=-\frac{c}{a} \end{cases}$

مثال:

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۲ + ۳x - ۵ = ۰$

ب) $۲x^۲ + ۷x + ۵ = ۰$

مطالب تکمیلی :

روابط بین ریشه‌ها معادله درجه دوم :

اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $\Delta > ۰$ باشد آنگاه معادله دارای دو ریشه حقیقی است :

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

آنگاه مجموع و حاصلضرب و تفاضل این دو ریشه به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$۱)\ \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-\cancel{۲}b}{\cancel{۲}a} = -\frac{b}{a} \rightarrow \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$۲)\ \alpha \times \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{(-b)^۲ - (\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - \Delta}{۴a^۲} = \frac{\cancel{b^۲} - \cancel{b^۲} + ۴ac}{۴a^۲} = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

$$\rightarrow \quad \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$۳)\ |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \right| = \left| \frac{\cancel{۲}\sqrt{\Delta}}{\cancel{۲}a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

بنابراین :

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} \quad , \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad , \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

☑ **نکته:** با توجه به اتحادهای فرعی زیر داریم :

اتحاد فرعی : $\begin{cases} a^{2}+b^{2}=(a+b)^{2}-2ab \\ a^{3}+b^{3}=(a+b)^{3}-3ab(a+b) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = S \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها} = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع مربعات ریشه‌ها } \alpha^{2}+\beta^{2}=S^{2}-2P \\ \text{مجموع مکعبات ریشه‌ها } \alpha^{3}+\beta^{3}=S^{3}-3SP \end{cases}$

✐ مثال:

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^{2}-3x+1=0$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\alpha^{2}+\beta^{2}$

ب) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

ج) $\alpha^{4}+\beta^{4}$

☑ **نکته:** بعضی معادلات درجه دوم نیستند اما می‌توان با یک تغییر متغیر آنها را به معادلات درجه دوم تبدیل کرد.

✐ مثال:

الف) $(x^{2}-5x)^{2}+10(x^{2}-5x)+24=0$

ب) $x^{4}-3x^{2}+2=0$

✍ تمرینات درس اول :

۱. معادلات درجه دوم زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید.

الف) $9x^{2}-6x+1=0$ (تجزیه)

ب) $2x^{2}-2=0$ (تجزیه)

ج) $2x^{2}+2x+1=0$ (مربع کامل)

د) $x^{2}+6x=-25$ (مربع کامل)

هـ) $2x - x^2 + 1 = 0$ (روش Δ)

و) $-2x^2 - 4x + 7 = 0$ (روش Δ)

ز) $x^2 + 4x = 5$ (روش Δ)

۲- مقدار a را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله زیر برابر ۲ باشد.

$$(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$$

۳- مقدار m را به گونه‌ای تعیین کنید که معادله $(m-2)x^2 - 2mx + (m+8) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد.

۴- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی و طبیعی ۳۹۴ است. این دو عدد را پیدا کنید.

۵- اختلاف سن پدر و فرزندی ۳۰ سال است. اگر ۶ سال قبل، سن پدر برابر مربع سن فرزند بوده باشد. سن فعلی هر کدام چقدر است؟

۶- اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر $2a$ و $2a+1$ و $2a+2$ شده باشد، کدام عدد طول وتر است؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.

❊ درس دوم : سهمی ❊

نمودار معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0 , b, c \in R)$ را یک « سهمی » گویند.

☑ **نکته:**
اگر در یک سهمی $a > 0$ ← سهمی دارای نقطه min است. $y_S = \min$
اگر در یک سهمی $a < 0$ ← سهمی دارای نقطه max است. $y_S = \max$

☑ **نکته:** اگر نقطه (x_S , y_S) مختصات رأس سهمی باشد، آنگاه x_S برابر محور تقارن است.

☜ انواع نمایش معادلات سهمی:

❶ $y = a(x-h)^2 + k \qquad (a \neq 0)$

❊ <u>رأس سهمی</u> : $S = (x_s , y_s) = (h, k)$

❊<u>محور تقارن</u> : $x_s = h$

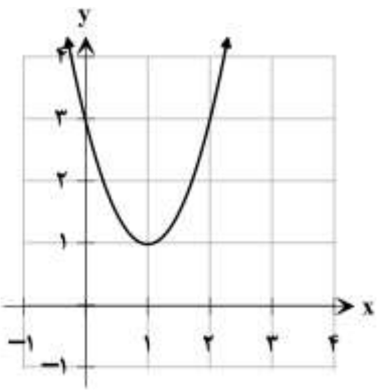
❊
اگر $a > 0$ ← $y_s = \min$ 
اگر $a < 0$ ← $y_s = \max$ 

➢ نحوه رسم سهمی به شکل $y = a(x-h)^2 + k$:

- ۱- با توجه به علامت a ، $\min$ یا $\max$ داشتن سهمی را معین می‌کنیم.
- ۲- مختصات رأس سهمی $(h, k) = (x_s , y_s)$ را معین می‌کنیم.
- ۳- دو یا چند نقطه در طرفین رأس سهمی معین می‌کنیم.
- ۴- نقاط معین شده را به هم وصل می‌کنیم.

مثال:

$y=۲(x-۱)^۲+۱$



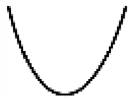
→ جواب : $\begin{cases} a=۲>۰ \rightarrow \text{دارد } min \\ S=(h,k)=(x_s,y_s)\rightarrow(x_s,y_s)=(۱,۱)\rightarrow \begin{cases} x_s=۱ \\ y_s=۱\rightarrow min \end{cases} \end{cases}$

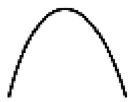
x	۰	۱	۲
y	۳	۱	۳

❷ $y=ax^۲+bx+c \qquad (a\neq ۰)$

❊ رأس سهمی : $S=(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$

❊محور تقارن : $x_s=-\frac{b}{۲a}$ معادله خط تقارن

❊ اگر $a>۰$ ← 

اگر $a<۰$ ← 

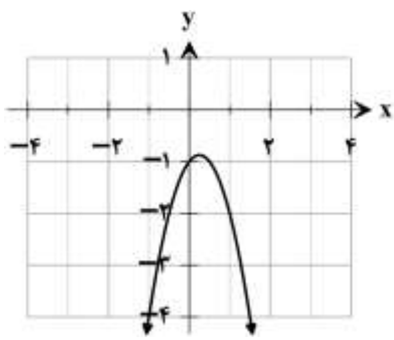
☑ **نکته:** در رسم معادلات سهمی به شکل بالا مانند $y=a(x-h)^۲+k$ عمل می‌کنیم :

مثال:

$y=-۲x^۲+x-۱$ → جواب : $a<۰ \rightarrow$ دارد max

$x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲(-۲)}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{y=-۲x^۲+x-۱}y_s=-۲(\frac{۱}{۴})^۲+\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۷}{۸}$

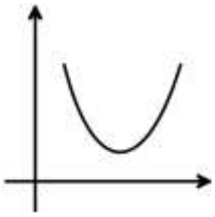
$\rightarrow S=(x_s,y_s)=(\frac{۱}{۴},-\frac{۷}{۸})$



x	۰	۱	۲
y	-۱	-۲	-۷

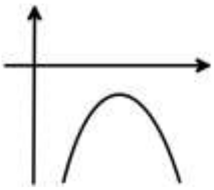
✍ **مثال:** نمودار سهمی روبرو را رسم کنید. $y = x^۲ - ۴x$

☑ **نکته:** اگر $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ ← معادله جواب ندارد. (تقعر به سمت بالا)



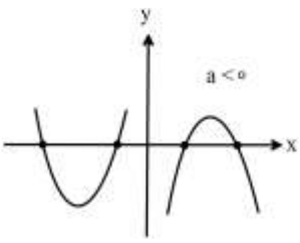
$a > ۰$ و $\Delta < ۰$

☑ **نکته:** اگر $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ ← معادله جواب ندارد. (تقعر به سمت پایین)

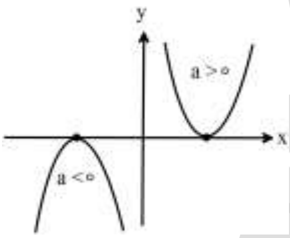


$a < ۰$ و $\Delta < ۰$

☑ **نکته:** اگر $\Delta > ۰$ ← معادله دارای دو جواب است.



☑ **نکته:** اگر $\Delta = ۰$ ← معادله دارای یک ریشه مضاعف است.



* درس سوم : تعیین علامت *

مسائل بسیاری هست که برای حل آن‌ها باید علامت عبارت‌های جبری را مشخص کنیم. یعنی بدانیم آن عبارت به‌ازای چه مقادیری مثبت یا منفی است. به این موضوع تعیین علامت می‌گوییم.

➢ تعیین علامت عبارات درجه اول :

می‌دانیم عبارت $P = ax + b$ $(a \neq ۰)$ به‌ازای برخی از مقادیر حقیقی x، مثبت و به‌ازای برخی دیگر منفی است. مثلاً برای $P = ۲x - ۱$ داریم :

$$p = ۲x - ۱ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \rightarrow P = -۱ < ۰ \\ x = ۱ \rightarrow P = ۱ > ۰ \\ x = \frac{۱}{۲} \rightarrow P = ۰ \end{cases}$$

اکنون می‌خواهیم همه‌ی مقادیری از x را بیابیم که P مثبت و نیز همه‌ی مقادیری از x را بیابیم که P منفی باشد. به همین جهت به شرح زیر عمل می‌کنیم :

۱) ریشه‌ی معادله‌ی $P=۰$ یعنی $ax+b=۰$ را بدست می‌آوریم :

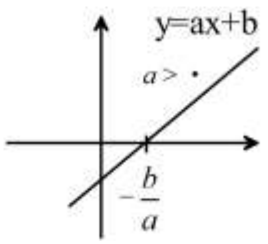
$$P(x)=ax+b \xrightarrow{P(x)=۰} ax+b=۰ \to x=-\frac{b}{a}$$

۲) سپس جدول زیر که موسوم به جدول تعیین علامت است را تشکیل می‌دهیم.

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$P=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

به طور خلاصه : علامت دوجمله‌ای درجه‌ی اول به‌ازای مقادیر کوچک‌تر از ریشه‌ی آن مخالف علامت ضریب x و به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی آن، موافق علامت ضریب x است.

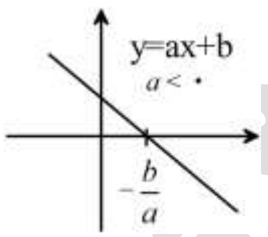
➢ تعبیر هندسی تعیین علامت عبارت $P=ax+b$:



الف) اگر $a>۰$ در این صورت :

برای $x>-\frac{b}{a}$ نمودار خط $y=ax+b$ بالای محور x واقع می‌شود.

و برای $x<-\frac{b}{a}$ نمودار خط $y=ax+b$ پایین محور x واقع می‌شود.



ب) اگر $a<۰$ در این صورت :

برای $x>-\frac{b}{a}$ نمودار خط $y=ax+b$ پایین محور x واقع می‌شود.

و برای $x<-\frac{b}{a}$ نمودار خط $y=ax+b$ بالای محور x واقع می‌شود.

مثال: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $y=۲x+۴$

← جواب : $۲x+۴=۰ \to x=-۲$

x	$x<-۲$	-۲	$x>-۲$
$P=۲x+۴$	$-$	۰	$+$

ب) $y=۳x-۵$

← جواب : $۳x-۵=۰ \to x=\frac{۵}{۳}$

x	$x<\frac{۵}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$x>\frac{۵}{۳}$
$P=۳x-۵$	$-$	۰	$+$

⮘ تعیین علامت عبارت $P=(ax+b)^n \ , (n\in N)$:

الف) اگر n زوج باشد، عبارت P همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و جدول تعیین علامت آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$P=(ax+b)^n$	+	0	+

مثال: عبارت‌های مقابل را تعیین علامت کنید.

الف) $P=(x-1)^4$

← جواب : عبارت $P=(x-1)^4$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

x	$x<1$	1	$x>1$
$P=(x-1)^4$	+	0	+

ب) $P=(-3x+6)^5$

x	$x<2$	2	$x>2$
$P=(-3x+6)^5$	+	0	−

⮘ تعیین علامت عبارت $P=\left|ax+b\right|$:

اگر عبارت درجه اول داخل قدرمطلق باشد، عبارت P همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود :

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$P=\left|ax+b\right|$	+	0	+

مثال: عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $P=\left|2x+6\right|$

→ جواب : $2x+6=0 \rightarrow x=-3$

x		3	
$P=\left|2x+6\right|$	+	0	+

ب) $P=\left|-3x-4\right|$

→ جواب : $-3x-4=0 \rightarrow x=-\frac{4}{3}$

x		$-\frac{4}{3}$	
$P=\left|-3x-4\right|$	+	0	+

➢ تعیین علامت عبارتی که از حاصل‌ضرب یا حاصل تقسیم چند عبارت درجه اول تشکیل شده است :

۱. تک تک ریشه‌ها را بدست می‌آوریم و آن‌ها را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول قرار می‌دهیم.
۲. عبارات را نیز در سمت چپ جدول قرار داده و هر سط را جداگانه تعیین علامت می‌کنیم.
۳. درهر ستون علامت‌ها را ضرب می‌کنیم.
۴. اگر عددی ریشه صورت بود P را صفر و اگر ریشه مخرج بود P را تعریف نشده (نامعین) و اگر ریشه صورت و مخرج بود P را مبهم می‌کند.

مثال: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P=\dfrac{(x-۴)^{۳}(-x+۳)}{(x+۲)^{۲}(۳x-۱)^{۵}}$

$\rightarrow$ جواب : $x-۴=۰ \rightarrow x=۴ \quad , \quad x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$

$-x+۳=۰ \rightarrow x=۳ \ , \ ۳x-۱=۰ \rightarrow x=\dfrac{۱}{۳}$

x		-۲		$\frac{۱}{۳}$		۳		۴	
$(x-۴)^{۳}$	−		−		−		−	۰	+
$(-x+۳)$	+		+		+	۰	−		−
$(x+۲)^{۲}$	+	۰	+		+		+		+
$(۳x-۱)^{۵}$	−		−	۰	+		+		+
P	+		+		−	۰	+		−
		نامعین		نامعین					

الف) $P=\dfrac{(۴x-۶)^{۴}(-x-۵)^{۳}}{\lvert x-۲\rvert (x+۱)^{۷}}$

$\rightarrow$ جواب : $۴x-۶=۰ \rightarrow x=\dfrac{۳}{۲} \quad , \quad x-۲=۰ \rightarrow x=۲$

$-x-۵=۰ \rightarrow x=-۵ \ , \ x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$

x		-۵		-۱		$\frac{۳}{۲}$		۲	
$(۴x-۶)^{۴}$	+		+		+	۰	+		+
$(-x-۵)^{۳}$	+	۰	−		−		−		−
$\lvert x-۲\rvert$	+		+		+		+	۰	+
$(x+۱)^{۷}$	−		−	۰	+		+		+
P	−	۰	−		+	۰	−		−
				نامعین				نامعین	

➢ روش محور در تعیین علامت عبارت $P=(a_۱x+b_۱)^{n_۱}(a_۲x+b_۲)^{n_۲}\ldots(a_kx+b_k)^{n_k}$:

۱. ریشه‌های هر یک از عوامل زیر را تعیین می‌کنیم، سپس آن‌ها را روی یک محور یا نقاط توپر نمایش می‌دهیم.

۲. عوامل درجه‌ی زوج را در عبارت P حذف می‌کنیم. همچنین عوامل یا درجه‌ی فرد، علامت پایه‌ی خود را دارند. بنابراین توان‌های آن‌ها را حذف و فقط پایه را می‌نویسیم. عبارت جدید را $P_۱$ می‌نامیم. P و $P_۱$ هم‌علامت هستند.

۳. سپس یک عدد بین دو ریشه یا کم‌تر از کوچک‌ترین ریشه انتخاب می‌کنیم و به‌ازای آن علامت $P_۱$ را تعیین می‌کنیم. مثلاً فرض می‌کنیم $P_۱$ منفی شود. سپس از چپ به راست در عبور از ریشه‌های عوامل با توان فرد تغییر علامت دادیم و در عبور از ریشه‌های عوامل با توان زوج تغییر علامت نداریم.

مثال: عبارت $P=\dfrac{(x+۲)^{۳}(x-۴)^{۴}(۳x-۱)}{(x+۳)^{۵}(x-۱)^{۲}}$ را تعیین علامت کنید.

$\rightarrow$ جواب : $x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$, $x+۳=۰ \rightarrow x=-۳$, $۳x-۱=۰ \rightarrow x=\dfrac{۱}{۳}$

$x-۴=۰ \rightarrow x=۴$, $x-۱=۰ \rightarrow x=۱$

عامل‌های با توان زوج و توان عامل‌های با توان فرد را حذف می‌کنیم. عبارت حاصل را $P_۱$ می‌نامیم.

$$P_۱=\dfrac{(x+۲)(۳x-۱)}{(x+۳)}$$

عدد کمتر از کوچکترین ریشه : $x=-۴ \rightarrow P_۱=\dfrac{(-۲)(-۱۳)}{(-۱)}<۰$

x		-۳		-۲		$\frac{۱}{۳}$		۱		۴	
P	−	نامعین	+	۰	−	۰	+	نامعین	+	۰	+

تعیین علامت سه جمله‌ای درجه‌ی دوم :

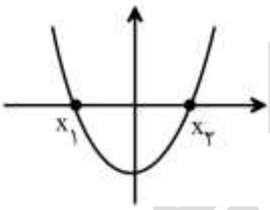
سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $P=ax^{۲}+bx+c$ $(a\neq ۰)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر معادله‌ی $P=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز باشد $\Delta>۰$ در این صورت P به صورت $P=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ تجزیه می‌شود و تعیین علامت آن به صورت زیر است.

x		$x_۱$		$x_۲$	
$P=ax^{۲}+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تعبیر هندسی حالت الف :

۱- اگر $a>۰$ باشد در این‌صورت نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ در فاصله‌ی بین محل تلاقی آن با محور x ها پایین محور x ها و در خارج از این فاصله بالای محور x ها واقع می‌شود.

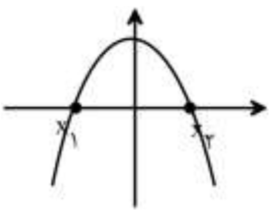


$y=ax^{۲}+bx+c$

$a>۰$

x		$x_۱$		$x_۲$	
$P=ax^{۲}+bx+c$	+	۰	−	۰	+

۲- اگر $a<۰$ باشد در این‌صورت نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ در فاصله‌ی بین محل تلاقی آن با محور x ها بالای محور x ها و در خارج از این فاصله پایین محور x ها واقع می‌شود.



$y=ax^{۲}+bx+c$

$a>۰$

x		$x_۱$		$x_۲$	
$P=ax^{۲}+bx+c$	−	۰	+	۰	−

در هر حالت مختصات رأس سهمی به صورت $S(-\dfrac{b}{۲a},-\dfrac{\Delta}{۴a})$ که $\Delta=b^{۲}-۴ac$.

مثال: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P(x)=-x^{2}-x+2$

$\rightarrow$ جواب : $-x^{2}-x+2=0\rightarrow-(x-1)(x+2)=0$

$$\rightarrow\begin{cases}x-1=0\rightarrow x=1\\ x+2=0\rightarrow x=-2\end{cases}$$

x		-2		1	
P	$-$	0	$+$	0	$-$

ب) $P(x)=(x^{2}+2x-3)(x-2)^{2}$

$\rightarrow$ جواب : $(x^{2}+2x-3)(x-2)^{2}=0\rightarrow\begin{cases}x^{2}+2x-3=0\rightarrow(x+3)(x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x+3=0\rightarrow x=-3\\ x-1=0\rightarrow x=1\end{cases}\\ x-2=0\rightarrow x=2\end{cases}$

x		-3		1		2	
$x^{2}+2x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^{2}$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

ج) $P(x)=\dfrac{x^{2}-6x+8}{|x-1|(x+3)^{5}}$

$\rightarrow$ جواب : $x^{2}-6x+8=0\rightarrow(x-4)(x-2)=0\rightarrow\begin{cases}x-4=0\rightarrow x=4\\ x-2=0\rightarrow x=2\end{cases}$

$x-1=0\rightarrow x=1$

$x+3=0\rightarrow x=-3$

x		-3		1		2		4	
$x^{2}-6x+8$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\|x-1\|$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$(x+3)^{5}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
P	$-$	نامعین	$+$	نامعین	$+$	0	$-$	0	$+$

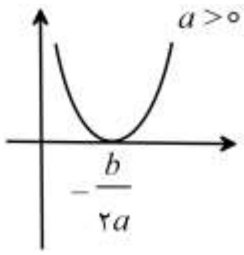
ب) اگر معادله‌ی $P=ax^{2}+bx+c=0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی $\Delta=b^{2}-4ac=0$ در این صورت $x_{1}=x_{2}=-\dfrac{b}{2a}$ و P به صورت $P=a(x+\dfrac{b}{2a})^{2}$ می‌باشد که جدول تعیین علامت آن به شرح زیر است :

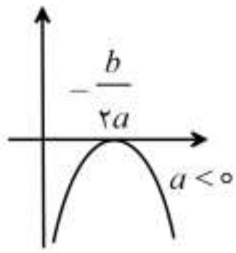
x		$-\dfrac{b}{2a}$	
$P=ax^{2}+bx+c$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

تعبیر هندسی حالت ب :

در این حالت نمودار $P=ax^{۲}+bx+c$ یک سهمی است که رأس آن بر محور x ها واقع است. (سهمی برمحور x ها مماس است).

بنابراین اگر $\begin{cases}\Delta=۰\\ a>۰\end{cases}$ نمودار P بالای محور x ها و اگر $\begin{cases}\Delta=۰\\ a<۰\end{cases}$ نمودار P پایین محور x ها قرار می‌گیرد.





مثال: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P(x)=\dfrac{۴x^{۲}-۱۲x+۹}{(-x-۲)^{۳}(x+۳)}$

$\rightarrow$ جواب : $۲x-۳=۰ \rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

$-x-۲=۰ \rightarrow x=-۲$

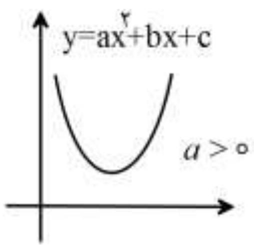
$x+۳=۰ \rightarrow x=-۳$

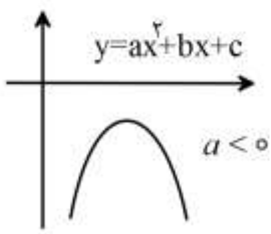
x		-۳		-۲		$\frac{۳}{۲}$	
$۴x^{۲}-۱۲x+۹$	+		+		+	۰	+
$(-x-۲)^{۳}$	+		+	۰	−		−
$x+۳$	−	۰	+		+		+
P	−	نامعین	+	نامعین	−	۰	−

ب) $P(x)=\dfrac{(۲x-۵)^{۲}(۳x-۴)^{۵}}{(x^{۲}-۴x+۴)^{۳}}$

ج) اگر معادله‌ی $P(x)=ax^{۲}+bx+c=۰$ ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta=b^{۲}-۴ac<۰$ در این صورت علامت $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ همواره موافق علامت a است.

	x	x
	$P=ax^{۲}+bx+c$	موا فق علامت a





به طور خلاصه :

➢ سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $P=ax^{۲}+bx+c$ به‌ازای هر x حقیقی مثبت است، هرگاه : $\left.\begin{matrix}\Delta<۰\\ a>۰\end{matrix}\right\}$.

➢ سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $P=ax^{۲}+bx+c$ به‌ازای هر x حقیقی منفی است، هرگاه : $\left.\begin{matrix}\Delta<۰\\ a<۰\end{matrix}\right\}$.

➢ **تعبیر هندسی :** در این حالت نمودار سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند بلکه بالای محور x ها و یا پایین آن قرار دارد.

☑ **نکته:** دو جمله‌ای $ax^{۲}+c$ که در آن a و c هم‌علامت هستند همواره علامت a را دارد. مثلاً علامت $x^{۲}+۴$ همواره مثبت و $-۲x^{۲}-۳$ همواره منفی است.

☑ **نکته:** اگر در معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی $a+b+c=۰$ آنگاه ریشه‌های معادله اعداد ۱ و $\frac{c}{a}$ می‌باشند.

✎ **مثال:** عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P(x)=\dfrac{(۲x-۱)^{۲}(x+۳)^{۳}}{-x^{۲}+۲x-۵}$

جواب : $۲x-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ →

$x+۳=۰ \rightarrow x=-۳$

$-x^{۲}+۲x-۵=۰ \rightarrow \Delta=۴-۴(-۱)(-۵)=-۱۶<۰ \rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد

x		-۳		$\frac{۱}{۲}$	
$(۲x-۱)^{۲}$	+		+	۰	+
$(x+۳)^{۳}$	−	۰	+		+
$-x^{۲}+۲x-۵$	−		−		−
P	+	۰	−	۰	−

ب) $P(x)=\dfrac{(-x^{۲}+۲x-۳)^{۵}(x-۴)}{|x-۳|}$

✎ **مثال:** a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $ax^{۲}+۳x+۲=۰$، همیشه دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد.

مثال: a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $ax^{۲}+۳x+۲=۰$، دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

مثال: حدود a را چنان تعیین کنید که $۲ax^{۲}+x+۳$ به‌ازای جمیع مقادیر x، مثبت باشد.

نامعادله :

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، آنگاه هر یک از نامساوی‌های زیر را یک « نامعادله » می‌نامیم. منظور از حل یک نامعادله، یعنی یافتن کلیه‌ی مقادیری از متغیر است که به‌ازای آن نامساوی داده شده برقرار باشد.

$$A \leq B \quad , \quad A \geq B \quad , \quad A < B \quad , \quad A > B$$

نامعادله‌های درجه اول :

برای حل یک نامعادله‌ی درجه‌ی اول، متغیر (متغیرها) را به یک طرف و اعداد ثابت را به طرف دیگر انتقال داده و با استفاده از خواص نامساوی‌ها، مجموعه جواب نامعادله را می‌یابیم.

مثال: نامعادله‌ی $۳x < ۹x + ۴$ را حل کنید و مجموعه جواب را به‌صورت بازه نمایش دهید.

تذکر : برای حل یک دستگاه نامعادله‌ی درجه‌ی اول یا یک نامعادله‌ی دوگانه، کافی است هر یک از نامعادلات را حل کرده و سپس بین مجموعه جواب‌ها، اشتراک بگیریم.

مثال: نامعادله‌ی دوگانه‌ی $x-۲ \leq ۲x-۵ \leq x+۳$ را حل کنید.

نامعادله‌های درجه‌ی دوم :

برای حل یک نامعادله‌ی درجه‌ی دوم، ابتدا همه‌ی عبارت‌ها را به یک طرف انتقال داده و نامعادله را به یکی از شکل‌های $p \leq ۰$، $P \geq ۰$، $P < ۰$ و $P > ۰$ تبدیل می‌کنیم که در ان $(a \neq ۰) \quad P(x)=ax^{۲}+bx+c$ است. با توجه به شرایط Δ، جدول تعیین علامت عبارت را تشکیل داده و سپس مجموعه جواب را می‌یابیم.

مثال: نامعادله‌ی $4x^2 < 4x + 3$ را حل کنید.

☑ **نکته:** در حل نامعادلات درجه‌ی دوم استفاده از دو نامساوی زیر کارساز است :

$$(1)\ u^2 \le a^2 \xleftrightarrow{a>0} -a \le u \le a \qquad (2)\ u^2 \ge a^2 \xleftrightarrow{a>0} u \ge a \text{ یا } u \le -a$$

مثال: نامعادله‌ی $(x+2)^2 \le 9$ را حل کنید.

← جواب : با استفاده از نکته خواهیم داشت :

$$(x+2)^2 \le 9 \rightarrow (x+2)^2 \le 3^2$$

$$\rightarrow -3 \le x+2 \le 3 \rightarrow -3-2 \le x \le 3-2 \rightarrow -5 \le x \le 1$$

✵ **تذکر** : با استفاده از نامعادله‌ی درجه‌ی دوم می‌توان وضعیت یک سهمی را با محور x ها یا خط $y_1 = ax + b$ بررسی نمود.

مثال: به‌ازای چه حدودی از m، سهمی $y = mx^2 + 2x + m$ همواره پایین محور x هاست؟

مثال: به‌ازای چه حدودی از m، سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 + x$ بالای خط $y = mx - 2$ است؟

⮘ نامعادلات شامل عامل‌های ضربی درجه‌ی اول و دوم :

اگر P یک عبارت جبری به صورت ضرب یا تقسیم چند جمله‌ای‌ها باشد، برای حل نامعادله‌هایی به صورت کلی $P \ge 0$، $P > 0$، $P \le 0$ و $P < 0$، کافی است ابتدا ریشه‌های هر یک از عامل‌ها را یافته و سپس با استفاده از جدول تعیین علامت سطری، مجموعه جواب را بیابیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2(x-1)(x-3) \le 0$

ب) $\dfrac{x^3(x+1)}{(x^2-x+1)(4-x)} \ge 0$

مثال: نامعادله‌ی $\frac{1}{x-1} > 3$ را حل کنید.

$$\rightarrow \text{جواب}: \frac{1}{x-1} > 3 \rightarrow \frac{1}{x-1} - 3 > 0 \rightarrow \frac{1-3(x-1)}{x-1} > 0 \rightarrow A = \frac{4-3x}{x-1} > 0$$

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
A		$-$	ت.ن	$+$		$-$	

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی $(1, \frac{4}{3})$ است.

➢ قدرمطلق :

۱. قدرمطلق x به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۲. چند ویژگی مهم قدرمطلق عبارت است از : $(0 < a < b \,,\, c > 0)$

$a)\ |x.y| = |x|.|y|$

$b)\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$c)\ |x|^2 = x^2$

$d)\ \sqrt{x^2} = |x|$

$e)\ |x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

$f)\ |x| \geq c \Leftrightarrow x \geq c$ یا $x \leq -c$

$g)\ a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ یا $-b \leq x \leq -a$

۳. **نامساوی مثلثی :** به‌ازای هر a و b حقیقی، نامساوی روبه‌رو برقرار است : $|a| + |b| \geq |a+b|$

و دو نکته‌ی روبه‌رو از آن به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} |a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \geq 0 \\ |a| + |b| > |a+b| \Leftrightarrow ab < 0 \end{cases}$$

۴. برای حل نامعادله‌ی $|f(x)| \leq c$، اگر c مثبت باشد، کافی است نامعادله‌ی توأم $-c \leq f(x) \leq c$ را حل کنیم.

۵. برای حل نامعادله‌ی $|f(x)| \geq c$، اگر c مثبت باشد، کافی است نامعادلات زیر را حل کنیم و بین جواب‌های آن‌ها اجتماع بگیریم :

$f(x) \geq c$ یا $f(x) \leq -c$

۶. برای تبدیل نامعادله‌ی $a < x < b$ به نامعادله‌ی $|x - \alpha| < \beta$ کافی است از سه طرف نامعادله، میانگین a و b را کم کنیم.

✍ تمرینات درس سوم:

۱- به‌ازای چه مقادیری از m :

الف) معادله $(m+1)x^2+x-2=0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است؟

ب) معادله $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

ج) خط به معادله $y=mx+4$ منحنی به معادله $y=-x^2+2x$ را در دو نقطه قطع می‌کند؟

هـ) سهمی $y=mx^2+(m+1)x+m$ همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد؟

و) سهمی $y=x^2-mx+m+\frac{5}{4}$ همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد؟

۲- به‌ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=2x^2-3x+k+1$ همواره مثبت است؟

۳- حدود m را طوری بیابید که نمودار سهمی $y=(m-1)x^2+2\sqrt{2}x+m$ همواره پایین محور xها باشد.

۴- عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P(x)=\frac{-x^2(2x^2+5x+2)}{(3-x)|2x-6|}$$

۵- نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

$$\frac{|x-1|(1-2x)}{x^2-4x-12}\le 0$$

۶- نامعادله‌ی زیر را حل و تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^2-4x+3}{-x^2(3x^2-x+7)}\ge 0$$

۷- اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)|x+1|}}$ باشد، دامنه‌ی تابع مزبور را به صورت بازه بنویسید.

۸- حدود m چنان تعیین کنید که رابطه‌ی $\dfrac{3x^2+4x+m-1}{x^2+x+2}>2$ برابر باشد.

۹- عبارت مقابل را تعیین علامت کنید. $P=\dfrac{x^2(x-4)^7(2x-5)^{38}}{x^2+4x+5}$

۱۰- نامعادله‌ی $\big||x-3|+1\big|>2$ را حل کنید.

۱۱- نامعادله‌ی قدرمطلقی روبه‌رو را حل نمایید و مجموعه جواب را به صورت فاصله بنویسید. $|2x+3|\ge|3x-2|$

✓ سؤالات چهار گزینه‌ای :

۱- به‌ازای کدام مقدار a منحنی به معادلهٔ $ay = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۲- معادلهٔ $\frac{1}{2}x^2 + (m+1)x + m = 0$ همواره :

۱) دو ریشهٔ متمایز دارد. ۲) ریشهٔ مضاعف دارد.

۳) ریشهٔ حقیقی مثبت دارد. ۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۳- در معادلهٔ $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۴- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۵- به‌ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$، معکوس یکدیگرند؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۶- به‌ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$، برابر ۶ می‌باشد؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{9}{5}, 1$ ۴) $-1, \frac{9}{5}$

۷- سهمی به معادلهٔ $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۸- معادلهٔ سهمی که $S(-1,3)$ رأس آن است و از نقطهٔ $(-2,4)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = -x^2 - 2x - 3$ ۲) $y = -x^2 + 2x + 3$

۳) $y = x^2 - 2x + 4$ ۴) $y = x^2 + 2x + 4$

۹- اگر می‌نیمم سهمی با ضابطهٔ $y=(m-۱)x^{۲}+x$ برابر ۲- باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

۱۰- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $۲x^{۲}+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$، فاقد ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-۳<m<۵$ ۲) $-۳<m<۴$ ۳) $-۲<m<۴$ ۴) $-۱<m<۵$

۱۱- اگر عبارت $(a-۱)x^{۲}+(a-۱)x+۱$ به‌ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{a \mid a<۱\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{a \mid ۱<a<۵\}$

۱۲- به‌ازای کدام مقدار m، نمودار منحنی $y=(m-۱)x^{۲}+\sqrt{۳}x+m$، همواره در زیر محور xها است؟

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

۱۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x^{۲}-۳x}{x^{۳}-۱}<۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\{x:x>۱\}$ ۴) $\{x:x<۱\}$

۱۴- مجموعه جوای نامعادلهٔ $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|<۱$ به‌صورت کدام بازه‌ها است؟

۱) $(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},۱)$

۳) $(-۳,-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$

۱۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱<\frac{۳x+۱}{x-۳}<۳$ به کدام صورت است؟

۱) $x<\frac{۱}{۲}$ ۲) $x<۳$ ۳) $-\frac{۱}{۲}<x<۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}<x<۳$