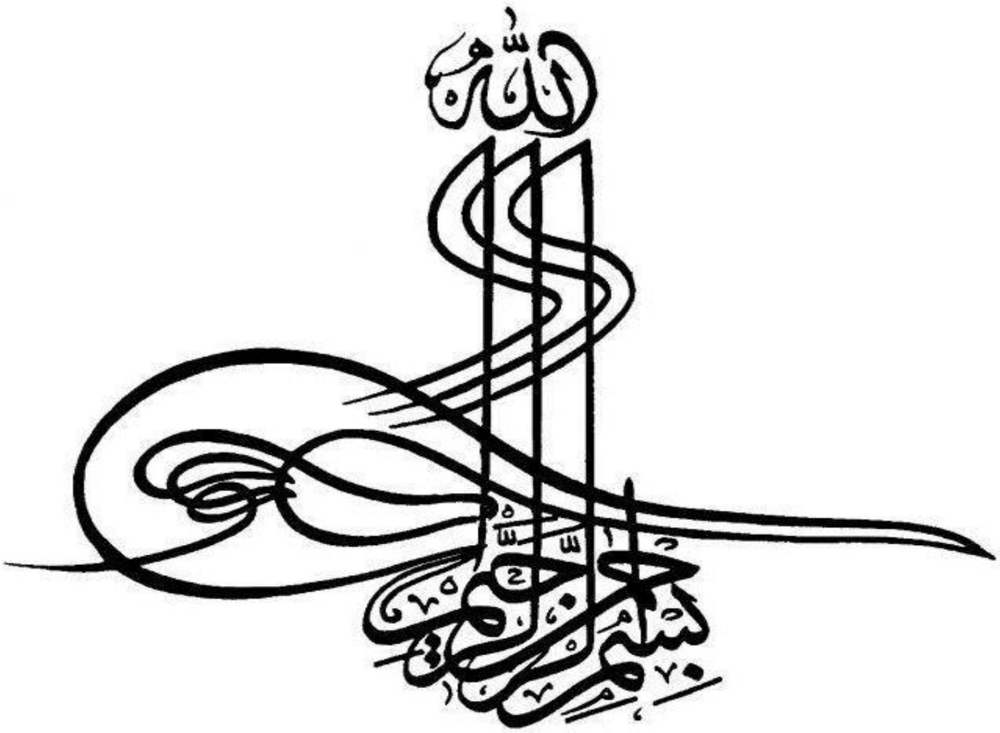


شمارش، بدون شمردن

(فصل ششم ریاضی کلاس دهم)

- 🕮 طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- 🕮 پاسخ کاملا تشریحی
- 🕮 تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل ششم کتاب درسی ریاضی پایه دهم ، مبحث « شمارش، بدون شمردن» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این جزوه با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این جزوه و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

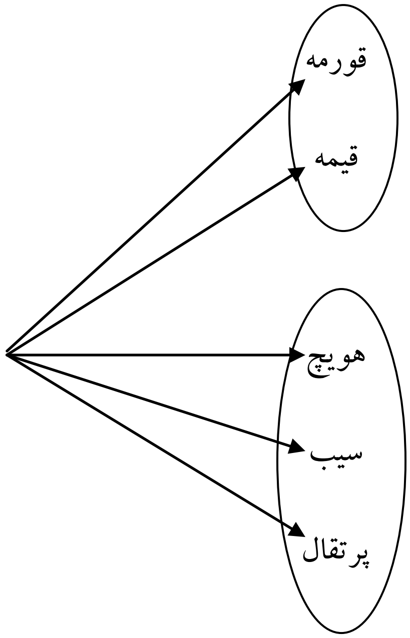
حبیب هاشمی

فهرست مطالب

۱-۶ اصل جمع و اصل ضرب

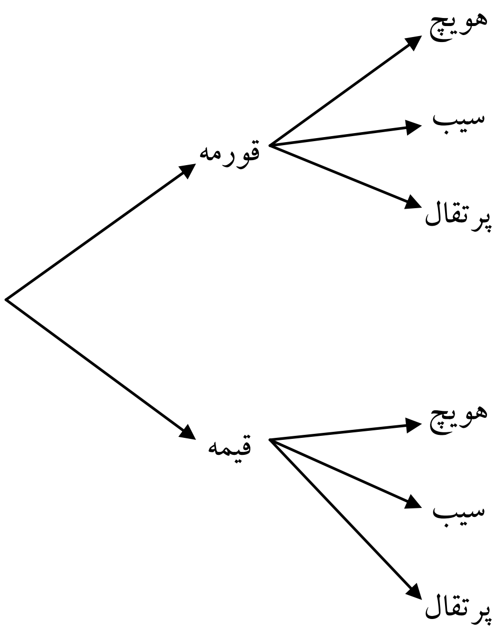
مثال: کیان قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش کمیل، شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که کمیل را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه هویج، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای کمیل وجود دارد؟

طبق نمودار زیر ۵ انتخاب وجود دارد.



مثال: هفته بعد کمیل قصد دارد به خاطر تولدش کیان را دعوت کند. اما او می خواهد کیان را هم به آن رستوران « و»هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. کیان چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

با توجه به نمودار زیر ۶ انتخاب خواهد داشت.



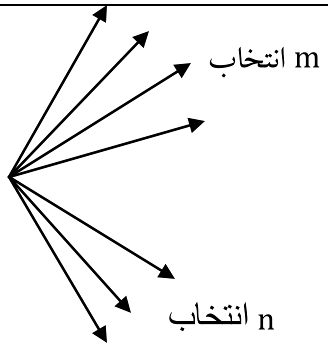
پرسش: چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول کیان فقط به یکی از دو روش کار را انجام می دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سؤال دوم کمیل هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد.

پرسش: در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه ای بین تعداد گزینه های فهرست های انتخابی رستوران و آب میوه فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سؤال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می کرد، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم وجود دارد.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام دارد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر m + n روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه ها انجام شود. مثلاً در مثال ۱، کیان فقط یکی از کارهای « دعوت به رستوران **یا** دعوت به آب میوه فروشی » را انجام می دهد»

نکته: اگر انجام کار C منوط به انجام کار A « **یا** » کار B باشد آن گاه کار C را به $(m+n)$ طریق می توان انجام داد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول $m_{۱}$ انتخاب، در روش دوم $m_{۲}$ انتخاب،...و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_{۱} + m_{۲} + \cdots m_k$ روش وجود دارد.

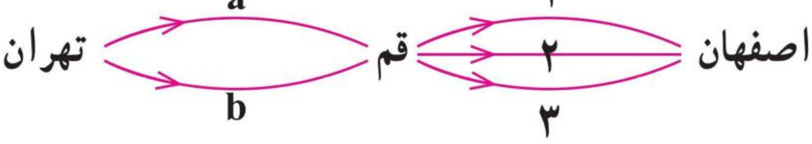
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

« توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می گیرد **و** هم دعوت با آب میوه فروشی که مرحله دوم است، صورت می پذیرد».

نکته: اگر انجام کار C منوط به انجام کار A « **و** » کار B باشد آن گاه کار C را به $(m \times n)$ طریق می توان انجام داد.

مثال :فردی می خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱و ۲و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان صفر کند؟

a,۱ a,۲ a,۳
b,۱ b,۲ b,۳



مثال: پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا « یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از : مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

۷=۳+۴ بنابراین ۷ انتخاب دارد

مثال:هفته بعد پژمان می خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می خواهد « یک شاخه گل» و « یک نوع شیرینیی» بخرد و همان گزینه ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

۱۲=۳×۴ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد

{(مریم و گردویی) و (مریم و نارگیلی) و (مریم و کشمشی) و (گلایل و گردویی) و (گلایل و نارگیلی) و (گلایل و کشمشی) و (زنبق و گردویی) و (زنبق و نارگیلی) و (زنبق و کشمشی) و (رز و گردویی) و (رز و نارگیلی) و (رز و کشمشی)}

پرسش: در هر یک ازدو مثال قبل از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در مثال اول پژمان می تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع ۷=۳+۴ انتخاب دارد ولی درمثال دوم پژمان می خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ انتخاب دارد.

مثال: کتابخانه ی مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ی ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می تواند این کار را انجام دهد؟ ۴۰+۵۰=۹۰ بنابراین ۹۰راه وجود دارد

مثال: از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۴ ×۵=۲۰ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول $m_{۱}$ روش، برای انجام مرحله دوم $m_{۲}$ روش،...و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_{۱} \times m_{۲} \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.

مثال: می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن ها، یکی از حروف {ا،ب،ج،د} و در سمت چپ آن ها، عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود. چند کارت متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\ ۲\\ \vdots\\ ۹}}\ \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\ ۲\\ \vdots\\ ۹}}\ \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{ا\\ ب\\ ج\\ د}} = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$$

مثال: یک ساختمان با ۸ طبقه و ۵ رنگ مختلف داریم؛ به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؛ به طوری که هیچ دو طبقه ی مجاوری هم رنگ نباشند.

۱) $۵^{۸}$ ‌ ‌ ‌ √ ۲) ۵×۴^{۷} ‌ ‌ ‌ ۳) $۵\times۴\times۳^{۶}$ ‌ ‌ ‌ ۴) ۵×۳^{۷}

جواب:

$$\underset{\substack{(\text{سبز})\\ \text{آبی}\\ \text{قرمز}\\ \text{زرد}\\ \text{نارنجی}}}{\overset{\text{طبقه اول}}{\boxed{۵}}} \times \underset{\substack{(\text{آبی})\\ \text{قرمز}\\ \text{زرد}\\ \text{نارنجی}}}{\overset{\text{طبقه دوم}}{\boxed{۴}}} \times \underset{\substack{\text{سبز}\\ \text{قرمز}\\ \text{زرد}\\ \text{نارنجی}}}{\overset{\text{طبقه سوم}}{\boxed{۴}}} \times \dots \times \overset{\text{طبقه هشتم}}{\boxed{۴}} = ۵ \times ۴^{۷}$$

مثال : یک اتوبوس دارای ۸ مسافر است و در ۵ ایستگاه متوقف می‌شود. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۱) ۴۰　　۲) $۸^{۵}$　　√۳) $۵^{۸}$　　۴) $\frac{۸!}{۵!}$

جواب:

$$\underset{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots\\ \text{ایستگاه پنجم}}}{\overset{\text{مسافر اول}}{\boxed{۵}}} \times \underset{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots\\ \text{ایستگاه پنجم}}}{\overset{\text{مسافر دوم}}{\boxed{۵}}} \times \dots \times \underset{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots\\ \text{ایستگاه پنجم}}}{\overset{\text{مسافر هشتم}}{\boxed{۵}}} = \underbrace{۵ \times ۵ \times \dots \times ۵}_{\text{۸ تا}} = ۵^{۸}$$

مثال : در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سؤال متفاوت، اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخنامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟

جواب:

$$\underset{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}{\overset{\text{سوال اول}}{\boxed{۴}}} \times \underset{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}{\overset{\text{سوال دوم}}{\boxed{۴}}} \times \dots \underset{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}{\overset{\text{سوال دهم}}{\boxed{۴}}} = ۴^{۱۰} = (۲^{۲})^{۱۰} = ۲^{۲۰}$$

مثال: یک آزمون چند گزینه ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال ها جواب دهد؟

$$\underset{\text{سوالات چهار گزینه ای}}{\boxed{\overbrace{٤\times ٤ \times \ldots \times ٤}^{\text{۱۰ بار}}}} \quad \underset{\text{سوالات دو گزینه ای}}{\boxed{\overbrace{۲\times ۲ \times \ldots \times ۲}^{\text{۵ بار}}}} \longrightarrow = ۲^{۲۵}$$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underset{\text{سوالات چهار گزینه ای}}{\boxed{\overbrace{٥\times ٥ \times \ldots \times ٥}^{\text{۱۰ بار}}}} \quad \underset{\text{سوالات دو گزینه ای}}{\boxed{\overbrace{۳\times ۳ \times \ldots \times ۳}^{\text{۵ بار}}}} \longrightarrow = ٥^{۱۰} \times ۳^{٥}$$

مثال: تعداد ۲ نفر برای ریاست اداره‌ای نامزد شده‌اند؛ به چند طریق ۱۵ نفر از کارمندان می‌توانند به آن ها رأی دهند، به طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رأی داده باشد؟

۱) $۲^{۱۵}$ ۲) $۱۵^{۲}$ ۳)√ $۳^{۱۵}$ ۴) $۱۵^{۳}$

جواب:

$$\underset{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}{\overset{\text{نفر اول}}{\boxed{۳}}} \times \underset{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}{\overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{۳}}} \times \ldots \underset{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}{\overset{\text{نفر پانزدهم}}{\boxed{۳}}} = \underbrace{۳\times۳\times\ldots\times۳}_{\text{۱۵تا}} = ۳^{۱۵}$$

تمرین: سؤال قبل را در حالتی حل کنید،که هر فرد تنها به یک نفر رأی داده باشد.

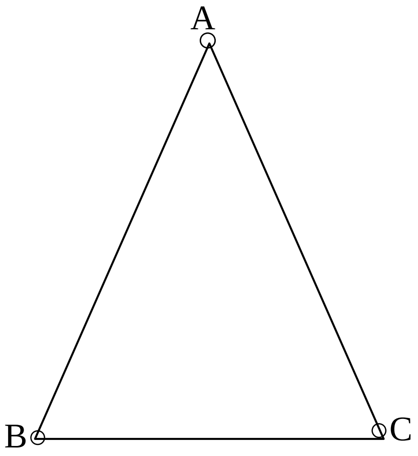
جواب: $۲^{۱۵}$

مثال: در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداکثر: ۵ × ۱۰ × ۱۲ × ۳۰ =۱۸۰۰۰

حداقل: ۵ × ۸ × ۱۰ × ۲۰ = ۸۰۰۰

مثال: می خواهیم راس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم .



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برای آنکه راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو راس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B وc نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل جمع ۶= ۲ + ۲+ ۲ طریق این کار امکان پذیر است.

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که راس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند. با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

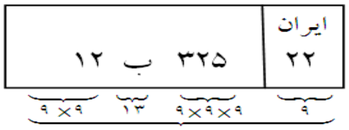
پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب ها برابر است با : ۶ = ۱ × ۲ × ۳

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می باشد زیرا با وجود سه راس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس هم رنگ نخواهند بود.

مثال: با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟)

$$A = \{۱۱,۲۲,...,۹۹\}$$
$$B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$
$$c = \left\{\text{ب, ج, د, س, ص , ط, ق, ل , م, ن, و, ه, ی}\right\}$$



$$۱۳ \times ۹^{۶} = ۶۹۰۸۷۳۳$$

مثال: در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$$۵ \times ۱۰ \times ۳ \times ۲ = ۳۰۰$$

دنده   حجم موتور   رنگ   مدل

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

$$۵ \times ۱ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$$

دنده   حجم موتور   رنگ   مدل

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

۵× ۱ × ۳ × ۱ = ۱۵

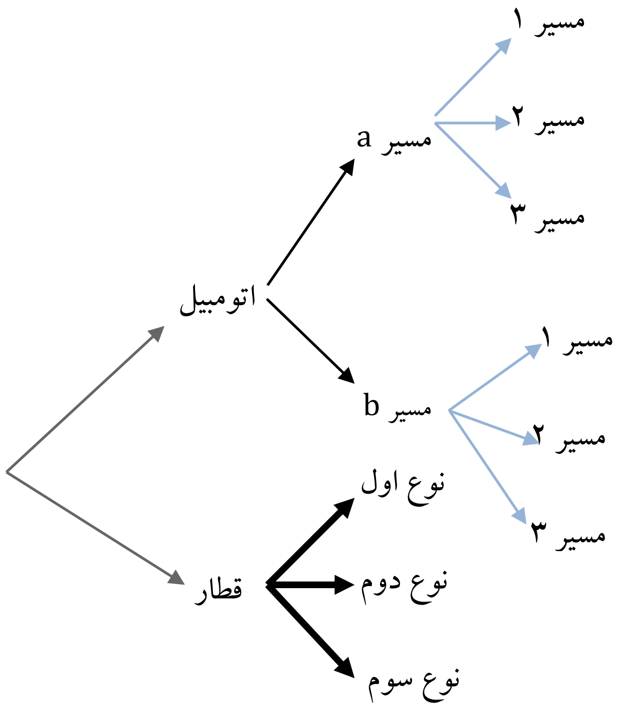
مدل رنگ حجم موتور دنده

مثال: ۵نفر به سینما می روند و در یک ردیف ۷ صندلی خالی پیدا می کنند. به چند طریق می توانند روی این ۷ صندلی بنشینند.

حل)نفر اول روی هر کدام از صندلی ها می تواند بنشیند (۷ صندلی). نفر دوم روی ۶ صندلی (۶ طریق) و به همین ترتیب نفر پنجم روی سه صندلی باقی مانده می تواند بنشیند. لذا جواب ۲۵۲۰= ۳× ۴× ۵× ۶× ۷ است.

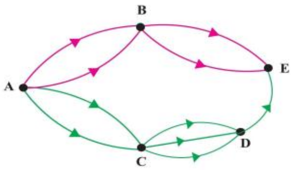
دقت کنیم :در برخی مسائل لازم است از هر دو نوع اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال:فردی می خواهد از تهران به اصفهان برود و قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. مسیرها و انتخاب های او در شکل زیر مشخص شده است .در کل چند انتخاب دارد؟



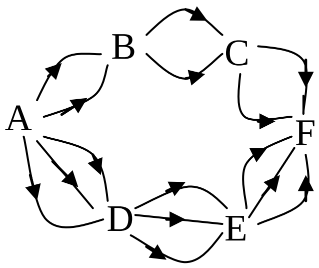
حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.

مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهری A و B و C و D و E باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟



$$\left.\begin{array}{l} ABE\ \text{مسیر}:۲\times۲=۴ \\ ACDE\ \text{مسیر}:۲\times۳\times۱=۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۱۰$$

مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده ی جاده های بین شهرهای F,E,D,C,B,A باشد و همه ی جاده ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟ ۳۵= ۳× ۳× ۳+ ۲×۲×۲



مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد: ۲۶۶۲۴=۳۲×۲۶×۳۲

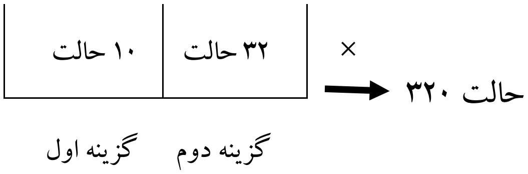
حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد: ۲۱۶۳۲=۲۶×۳۲×۲۶

تعداد حالات ممکن: ۴۸۲۵۶=۲۱۶۳۲+۲۶۶۲۴

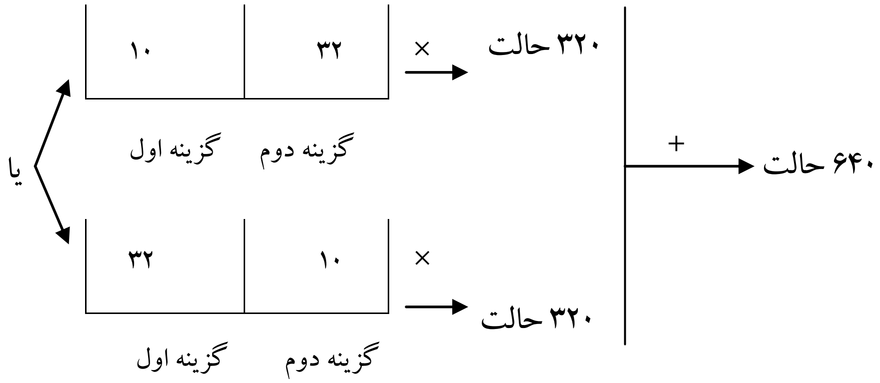
۱) تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید. مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است. رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و... و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود بنابراین ۴۲= ۳۲ + ۱۰ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.



پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

۱۰۰ = ۱۰ × ۱۰ : هر دو عدد باشند

یا

۶۷۶ = ۲۶ × ۲۶ : هر دو حرف باشند

$\xrightarrow{+}$ ۷۷۶

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

۲۵	۲۶	۹	۱۰
حروف		اعداد	

$\xrightarrow{\times}$ ۵۸۵۰۰ حالت

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود و تکرار مجاز نباشد حتما بایستی از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات کنیم که محدودیت در آنجاست.

تذکر: اگر تکرار مجاز باشد چه محدویت داشته باشیم چه محدودیت نداشته باشیم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

مثال: با حروف کلمه‌ی «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آن ها نقطه‌دار نباشد؟

شروع ←

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{(و)} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{(ه)} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{(م)} = ۴ \times ۵ \times ۴ = ۸۰$$

ه	و	ر
و	ر	ج
ر	ج	ی
	ی	

دقت کنیم چون تکرار مجاز نیست و خانه ی سمت راست دارای محدودیت است بایستی از خانه ی سمت راست شروع به شمارش حالات کنیم.

۲-۶پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی ؛ سه رقمی و ... ؛ زوج ؛ فرد ؛ مضرب ۵ و...

برای پیدا کردن تعداد اعداد، مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود و تکرار مجاز نباشد حتما بایستی از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات کنیم که محدودیت در آنجاست.

تذکر: اگر تکرار مجاز باشد چه محدویت داشته باشیم چه محدودیت نداشته باشیم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

چند محدودیت مهم:

۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد، نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر در بین اعداد داده شده صفر وجود داشته باشد، **به ناچار** باید از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت وترکیب استفاده کرد.)

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است، که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

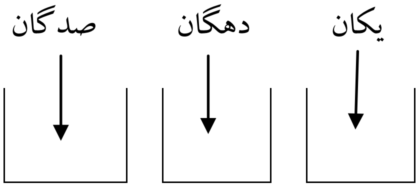
۴) عددی مضرب ۳ است، که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۵) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است، که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

۶)عددی مضرب ۶ است، که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳

نکته: قبل از انجام هر کاری مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام را مشخص می کنیم؛ سپس سوال را حل می کنیم.

مثال الف) با سه رقم ۵و۳و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۴ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه های پر کردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

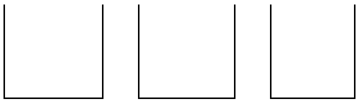
۵یا۳یا۲ ۵یا ۳یا۲ ۵یا۳یا۲

تعداد حالت ها ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷

ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

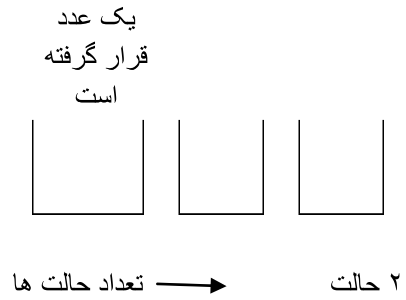
چون محدودیتی نداریم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



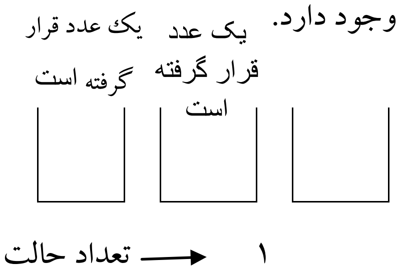
تعداد حالت ها ⟵ ۳ حالت

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا ۶= ۱ × ۲ × ۳ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

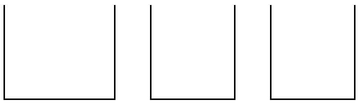


ب) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در این جایگاه فقط عدد ۲ می تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.



۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می توانند قرار گیرند، پس هر کدام دارای سه حالت است.

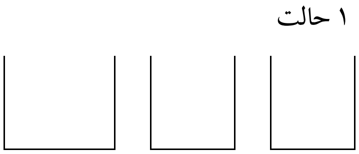
لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ۹ = ۱ × ۳ × ۳

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز نیست و محدودیت داریم(زوج بودن) بایستی از خانه ای شروع به شمارش کنیم که محدودیت درآنجاست یعنی بایستی از یکان شروع به شمارش حالات کنیم.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در جایگاه سمت راست فقط عدد۲ می تواند باشد پس ۱ حالت داریم



۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟

در جایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می تواند باشند پس ۲ حالت داریم

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟

با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می ماند، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم.

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ۲ = ۱ × ۱ × ۲

مثال: با اعداد ۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت بطوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد(ارقام تکراری مجاز باشد).

ب) تکرار ارقام جایز نباشد(ارقام تکراری مجاز نباشد).

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

د) عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.

حل:برای حل مسائلی از این قبیل، برای هر رقم یک مکان به صورت مربع در نظر می گیریم و تعداد انتخاب ها و یا تعداد طرقی که می توان در این مربع عدد قرار داد را در زیر آن می نویسیم. در این مثال چون می خواهیم عدد سه رقمی تشکیل دهیم لذا سه مربع در نظر می گیریم که به ترتیب از چپ به راست بیانگر مکان های صدگان، ده گان و یکان عدد سه رقمی است.

الف) ابتدا سه مربع بیانگر مکان های یکان، ده گان و صدگان در نظر می گیریم. چون تکرار ارقام جایز بوده و هیچ گونه محدودیتی روی مکان های یکان و صدگان نداریم (مثلاًدر اعداد داده شده صفر نداریم) لذا تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ(رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کنیم. مثلاً فرض کنید شمارش را از چپ (رقم صدگان) شروع کنیم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(کار A). واضح است که این کار را به ۵ طریق می توان انجام داد چون در این مکان می توان اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ را قرار داد. حال سراغ رقم ده گان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است (کار B). واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. حال سراغ رقم یکان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(کار C) . واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. اما در نهایت کاری که می خواهیم انجام دهیم تشکیل یک عدد سه رقمی است و انجام این کار منوط به انجام کار A و کارB و کارC است لذا این کار را به ۱۲۵=۵×۵×۵ طریق می توان انجام داد. یا تعداد ۱۲۵ عدد سه رقمی با ارقام تکراری می توان تشکیل داد.

□□□

۵ ۵ ۵ → ۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

ب) در این حالت نیز تفاوتی نمی کند که از سمت چپ (رقم صدگان) و یا سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. مثالاً فرض کنید از سمت چپ شروع کنیم. واضح است که کار اول (قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در مکان صدگان) را به ۵ طریق می توان انجام داد. اما چون تکرار ارقام جایز نیست، لذا عددی که در این مکان قرار می گیرد در مکان های ده گان و یکان نمی تواند قرار گیرد و بنابراین کار دوم (مکان ده گان) را به ۴ طریق و کار سوم (مکان یکان) را به ۳ طریق می توان انجام داد. لذا تعداد ۶۰= ۳× ۴ × ۵ عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

□□□

۵ ۴ ۳ → ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

ج) چون تکرار ارقام جایز است لذا تفاوتی نمی کند که از چپ (رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کرد. منتها باید توجه داشت که چون قرار است عدد زوج باشد لذا در مکان یکان فقط می توان اعداد ۲ یا ۴ را قرار داده و لذا این کار را به دو طریق می توان انجام داد.

□□□

۵ ۵ ۲ → ۵ × ۵ × ۲ = ۵۰

د) چون تکرار ارقام جایز نیست و باید عدد زوج باشد لذا حتماً باید از سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. در مکان یکان یا باید ۲ و یا ۴ قرار گیرد(۲ انتخاب) و در مکان ده گان هر کدام از آن ۵ عدد به جز عددی که در مکان یکان قرار گرفته (۴ انتخاب) و در مکان صدگان هر کدام از آن ۵ عدد به جز اعدادی که در مکان های یکان و ده گان قرار گرفته اند (۳ انتخاب).

←

□□□

۳ ۴ ۲ → ۳ × ۴ × ۲ = ۲۴

توجه

توجه کنید که در حل مسائلی از این قبیل، تا جایی که تکرار ارقام مجاز باشد تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ شروع کرد و یا از راست. اما اگر تکرار ارقام جایز نباشد در این صورت اگر بر روی مکان یکان محدودیت وجود داشته باشد (مانند زوج بودن یا فرد بودن) حتماً باید از سمت راست (مکان یکان) شروع کرد و اگر بر روی مکان صدگان محدودیت وجود داشته باشد (مانند وجود صفر در داده ها) باید از سمت چپ (مکان صدگان) شروع کرد و به طور کلی هنگامی که تکرار ارقام جایز نیست، بر روی هر مکانی که محدودیت وجود داشته باشد باید از همان طرف شروع کرد.

مثال :با اعداد ۰،۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد.

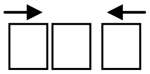
ب) تکرار ارقام جایز نباشد.

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

حل:

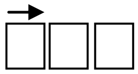
در این حالت چون در بین اعداد صفر داریم و صفر یک محدودیت روی مکان صدگان ایجاد می کند(عدد سه رقمی که رقم صدگان آن صفر باشد، عدد دو رقمی است) لذا در حالاتی که تکرار ارقام جایز نباشد حتماً باید از سمت چپ (از سمت رقم صدگان) شروع کرد. اما اگر تکرار ارقام جایز باشد تفاوتی نمی کند که از کدام طرف شروع کنیم. فلش های قرار داده شده بیانگر آن است که از کدام طرف باید شروع کرد. اگر هم از چپ و هم از راست فلش قرار داده شده باشد بیانگر آن است که تفاوتی نمی کند که از چپ شروع شود و یا از راست.

الف)



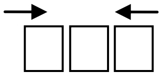
$۵ \quad ۶ \quad ۶ \longrightarrow ۵ \times ۶\times ۶ = ۱۸۰$

ب) در این حالت اولاً از سمت چپ شروع می کنیم و ثانیاً در مکان صدگان نمی تواند ۰ قرار گیرد لذا در این مکان ۵ انتخاب داریم.



$۵ \quad ۵ \quad ۴ \longrightarrow ۵ \times ۵ \times ۴ = ۱۰۰$

ج)



$۵ \quad ۶ \quad ۳ \longrightarrow ۵ \times ۶ \times ۳ = ۹۰$

مثال :با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

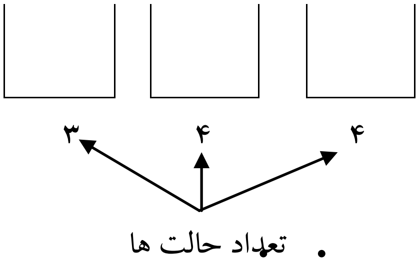
الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

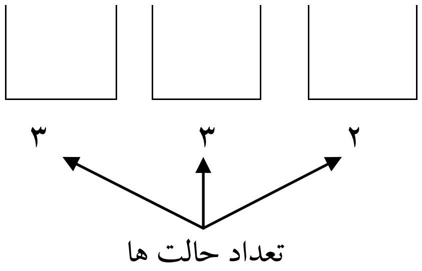
حل:

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد، بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

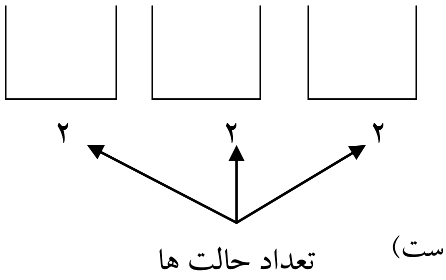


لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت. ۳×۴×۴=۴۸

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می توان نوشت. ۳× ۳ × ۲ = ۱۸



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۲× ۲ × ۲ = ۸



مثال : با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجازاست)

جواب: (اگر تکرار ارقام مجاز باشد، از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$$\begin{array}{ccccccc} \overrightarrow{\boxed{۳}} & \times & \boxed{۴} & \times & \overleftarrow{\boxed{۴}} & = & ۴۸ \\ ۱ & & ۰ & & ۰ & & \\ ۲ & & ۱ & & ۱ & & \\ ۳ & & ۲ & & ۲ & & \\ & & ۳ & & ۳ & & \end{array}$$

مثال: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۰، ۱ وجود دارد؟ (سراسری تجربی)

جواب:

$$\underset{\text{۱}}{\overrightarrow{\boxed{\text{۱}}}} \times \underset{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}}}{\boxed{\text{۲}}} \times \underset{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}}}{\boxed{\text{۲}}} \times \underset{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}}}{\boxed{\text{۲}}} \times \underset{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}}}{\boxed{\text{۲}}} \times \underset{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}}}{\overleftarrow{\boxed{\text{۲}}}} = \text{۲}^{\text{۵}} = \text{۳۲}$$

مثال: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟

جواب:

$$\underbrace{\overrightarrow{\boxed{\text{۸}}}}_{\substack{\text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۹}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۹}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\overleftarrow{\boxed{\text{۹}}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} = \text{۵۸۳۲}$$

مثال: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\overrightarrow{\boxed{\text{۹}}}}_{\substack{\text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۷}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۱۰}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۷}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۱۰}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۲}\\ \text{۳}\\ \text{۴}\\ \text{۵}\\ \text{۶}\\ \text{۷}\\ \text{۸}\\ \text{۹}}} \times \underbrace{\overleftarrow{\boxed{\text{۵}}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۲}\\ \text{۴}\\ \text{۶}\\ \text{۸}}} = \text{۴۵۰۰}$$

مثال: چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به طوری که رقم دهگان آن عددی اول باشد؟

حل: تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{\text{۳}}}_{\substack{\text{۱}\\ \text{۵}\\ \text{۷}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۴}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۱}\\ \text{۵}\\ \text{۷}}} \times \underbrace{\boxed{\text{۲}}}_{\substack{\text{۰}\\ \text{۵}}} = \text{۲۴}$$

مثال: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتراز ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب: $۴ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵۰۰ - ۱ = ۴۹۹$ (عدد ۲۰۰۰هم در بین این ۵۰۰ عدد قرار دارد که باید حذف شود.)

$$\overset{\longrightarrow}{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۲\\۳\\٤\\۷}}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\٤\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\۴\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\۴\\۷}} = ۵۰۰$$

> **نکته:** کد با عدد متفاوت است. رقم سمت چپ و حتی رقم‌های بعدی آن (کد) می‌تواند صفر باشد؛ در حالی که این ویژگی در مورد اعداد صدق نمی کند.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overset{\longrightarrow}{\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} \times \overset{\longleftarrow}{\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}}} = ۱۲۵$$

مثال: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overset{\longrightarrow}{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\۳\\٤\\٥}}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۳)\\۴\\٥\\۰}} \times \overset{\longleftarrow}{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۴\\۵\\۰}}} = ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

مثال: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۵)\\۷\\۹}}}^{\overset{\text{شروع}}{\longrightarrow}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۷)\\۹\\۱\\۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۹)\\۳\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۱\\۳}} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

مثال: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟

جواب:

$$\overset{\longrightarrow}{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\۵}}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۵)\\۷\\۹\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۷)\\۹\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۹\\۱}} = ۴۸$$

مثال: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹} به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته‌ایم، در چند حالت این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

$$\overrightarrow{\boxed{۱}\,\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}\,\boxed{۱}} = ۲۴$$

مثال: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، در چند حالت این عدد زوج است؟

۱) ۲۴   ۲) ۱۲   ۳) ۱۸ √   ۴) ۱۹۲

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \overset{\substack{\text{شروع}\\ \xleftarrow{\quad}}}{\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۴\\ ۶}}}}$$

مثال: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگتر از ۴۰۰۰ وجود دارد؟ (ارقام زوج‌اند نه خود عدد)

جواب:

$$\overset{\substack{\text{شروع}\\ \xrightarrow{\quad}}}{\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۴)\\ ۶\\ ۸}}}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۶\\ ۸\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۶)\\ ۸\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۸\\ ۰}} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

نکته: وقتی در طرح مسئله ای ارقام زوج مطرح می شود ، یعنی برای تمام خانه ها از اعداد زوج استفاده می کنیم. اما وقتی عدد زوج ذکر شود، فقط رقم یکان آن باید زوج باشد، و مابقی ارقام هم می توانند زوج باشند و هم فرد.

مثال: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲   ۲) ۸۴   ۳) ۹۶ √   ۴) ۱۰۸

جواب: گزینه ۳

برای نوشتن عدد چهار رقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام، از اصل ضرب کمک می گیریم. کافی است تک تک خانه های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را شمارش حالت کرده و در هم ضرب کنیم. دقت کنید شروع شمارش حالت ها از خانه ای انجام می شود که محدودیت رقم گذاری در آنجاست. پس شمارش حالت ها را از هزارگان انجام می دهیم. داریم:

$$\overrightarrow{۴} \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

مثال: با ارقام {۰،۱،۲،۵،۸} چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

جواب: $\boxed{۴} \times \overrightarrow{\boxed{۵} \times \boxed{۵}} \times \boxed{۱} = ۱۰۰$

برای رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم(صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد). برای رقم دهگان ۵ انتخاب داریم؛ چون قرار است رقم صدگان و یکان مثل هم باشند، آن ها را یکی در نظر می‌گیریم و ۵ انتخاب دارند. یا این که می گوییم رقم صدگان ۵ انتخاب دارد، چون می خواهیم رقم صدگان و یکان یکسان باشند، برای رقم یکان تنها یک انتخاب داریم(باید همان رقم قرار گرفته در صدگان را قرار دهیم).

مثال: تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که در آن ها رقم یکان و صدگان با هم برابر است چندتا می باشد؟

اگر این عدد سه رقمی را به صورت $\boxed{\text{یکان}}\boxed{\text{دهگان}}\overset{\longrightarrow}{\boxed{\text{صدگان}}}$ در نظر بگیریم برای رقم صدگان ۹ حالت داریم با معلوم بودن رقم صدگان، از انجا که باید رقم یکان با رقم صدگان برابر باشد، برای رقم یکان، یک حالت امکان پذیر است اما برای رقم دهگان ده حالت امکان پذیر است پس طبق اصل ضرب ۹۰ = ۱× ۱۰ × ۹

مثال : تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که در آن ها :

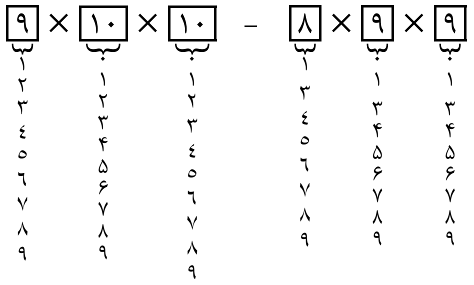
الف) رقم ۲ ظاهر نشده است چندتاست؟

جواب:

$$\overset{\longrightarrow}{\underbrace{\boxed{\text{۸}}}_{\substack{\text{١}\\\text{٣}\\\text{٤}\\\text{٥}\\\text{٦}\\\text{٧}\\\text{٨}\\\text{٩}}}}\times\underbrace{\boxed{\text{۹}}}_{\substack{\text{۰}\\\text{۱}\\\text{۳}\\\text{۴}\\\text{۵}\\\text{۶}\\\text{۷}\\\text{۸}\\\text{۹}}}\times\overset{\longleftarrow}{\underbrace{\boxed{\text{۹}}}_{\substack{\text{۰}\\\text{۱}\\\text{۳}\\\text{۴}\\\text{۵}\\\text{۶}\\\text{۷}\\\text{۸}\\\text{۹}}}}$$

ب) لااقل یک بار رقم ۲ ظاهر شده است چندتاست؟

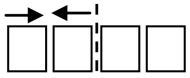
اعداد طبیعی سه رقمی که رقم ۲ در آن نباشد –کل اعداد سه رقمی طبیعی =جواب



$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}-\underbrace{\boxed{۸}}_{\substack{۱\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}$$

مثال : با اعداد ۴،۳،۲،۱ و۵ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر چهار می توان تشکیل داد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد.

حل)اعدادی بر چهار بخش پذیر هستند که دو رقم ده گان و یکان آن ها بر چهار بخش پذیر باشد لذا دو رقم آخر این عدد باید ۱۲ یا ۲۴ یا ۳۲ یا ۵۲ باشد. تعداد اعدادی که دو رقم آخر آن ها ۱۲ است برابر است با ۶.



۳ ۲ ۱ ۱ ⟶ ۳ × ۲ × ۱ × ۱ = ۶

به طور مشابه تعداد اعدادی که دو رقم آخر آن ها ۲۴ یا ۳۲ و یا ۵۲ است نیز ۶ می باشد لذا ۲۴ = ۶ × ۴ است.

نکته: هرگاه در طرح مسئله سه شرط زیر لحاظ شده باشد:

شرط۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

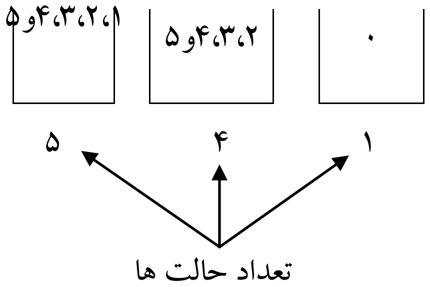
آن را در دو حالت زیر بررسی می کنیم.

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد.   حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

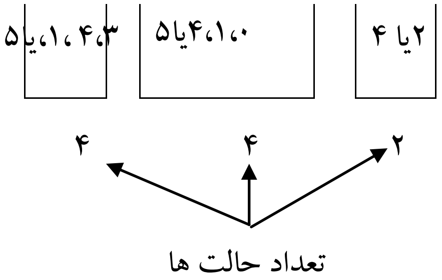
مثال :با اعداد ۰،۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.**حل)** در این حالت هم بر روی مکان یکان محدودیت داریم(عدد باید زوج باشد) و هم بر روی مکان صدگان محدودیت داریم (عدد صفر نباید در این مکان قرار گیرد). در چنین مواردی طبق نکته بالامسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم به طوری که در هر قسمت تنها یک محدودیت وجود داشته باشد و سپس تعداد شمارش های این دو قسمت را با هم جمع می کنیم.

حالت ۱) رقم یکان آن ها صفر باشد.

برای مکان یکان فقط یک انتخاب داریم (عدد صفر). حال برای دو مکان باقی مانده تفاوتی نمی کند که از چپ شروع کنیم یا از راست. حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۲۰ = ۱ × ۴ × ۵



حالت دوم: اگر رقم یکان ۲یا ۴ باشد؛ یعنی رقم سمت راست دو حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۳۲ = ۲ × ۴ ×۴

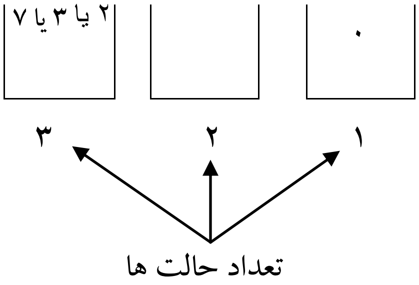


پس تعداد ۵۲ =۳۲+ ۲۰ عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

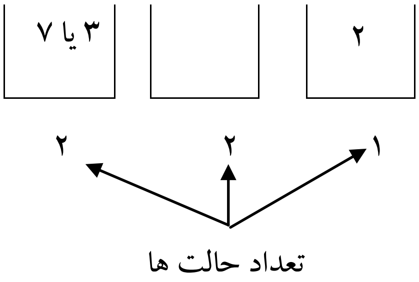
مثال: با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل) چون عدد مورد نظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۶ = ۱ × ۲ × ۳



حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۴ = ۱ × ۲ × ۲



لذا در کل ۱۰ حالت می توان نوشت.

مثال: با استفاده از ارقام ۰، ۲، ۴، ۷، ۳ عددی سه رقمی به تصادف می سازیم. در چند حالت عدد ساخته شده زوج است؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\overrightarrow{\boxed{٤}}\times\overleftarrow{\boxed{٣}}\;\vdots\;\boxed{١}\;=١٢$$

حالت دوم : رقم یکان صفر نباشد:

$$\overrightarrow{\boxed{٣}}\;\;\boxed{٣}\;\vdots\;\boxed{٢}\;=١٨$$

کل حالات : ۱۲ + ۱۸ = ۳۰

مثال : با اعداد ۰،۱،۳،۵،۶،۷و۸ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان تشکیل داد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد.

حل) عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

$$\underset{۶}{\overrightarrow{\boxed{}}}\,\underset{۵}{\boxed{}}\,\underset{۴}{\overleftarrow{\boxed{}}}\;\vdots\;\underset{۱}{\boxed{٠}}\longrightarrow ۶\times۵\times۴\times۱=۱۲۰$$

$$\underset{۵}{\overrightarrow{\boxed{}}}\,\underset{۵}{\boxed{}}\,\underset{۴}{\boxed{}}\;\vdots\;\underset{۱}{\boxed{٥}}\longrightarrow ۵\times۵\times۴\times۱=۱۰۰$$

جواب ۲۲۰ = ۱۰۰ + ۱۲۰

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشند؟

جواب:۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰

حالت۱:

$$\overset{\rightarrow}{\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۱)\\۲\\۳\\٤\\۷}}}\times\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\۳\\٤\\۷}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۳\\۴\\۷}}\times\;\vdots\;\overbrace{\underbrace{\boxed{۱}}_{(۰)}}^{}$$

حالت۲:

$$\underbrace{\overrightarrow{\overbrace{\boxed{۴}}}}_{\substack{(۴)\\ ۱\\ ۳\\ ۷}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۱)\\ ۳\\ ۷\\ ۰}} \times \underbrace{\overleftarrow{\boxed{۳}}}_{\substack{۳\\ ۷\\ ۰}} \times \vdots\ \underbrace{\overbrace{\boxed{۲}}}_{\substack{(۲)\\ ۴}} = ۹۶$$

مثال: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

حالت۱:

$$\underbrace{\overrightarrow{\boxed{۳}}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}} \times \underbrace{\overleftarrow{\boxed{۱}}}_{۵} \times \vdots\ \underbrace{\boxed{۱}}_{۰} = ۶$$

حالت۲:

$$\underbrace{\overrightarrow{\overbrace{\boxed{۲}}}}_{\substack{(۲)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۳} \times \vdots\ \underbrace{\overbrace{\boxed{۱}}}_{۵} = ۴$$

جواب: $۶ + ۴ = ۱۰$

مثال: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید در چند حالت این عدد زوج است؟

جواب:

$$\left\{ \underbrace{\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \right\} = ۳۰$$

تمرین: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم درچند حالت یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب ۱۰

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟

جواب: ۱۰

تمرین: چهار رقم ۹، ۷، ۵،۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: ۱۰

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: ۱۰

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود، به سراغ مضرب۵ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

٣ـ٦فاکتوریل

فاکتوریل: برای عدد صحیح و مثبت n , n فاکتوریل که آن را به صورت n! نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$n! = n(n-١)(n-٢)\ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

مثال:

$$٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$
$$٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$
$$٣! = ٣ \times ٢ \times ١$$
$$٢! = ٢ \times ١$$
$$١! = ١$$

قرار داد $٠! = ١$

$$٦! = ٦ \times \underbrace{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}_{٥!} = ٦ \times ٥!$$

$$٦! = ٦ \times ٥ \times \underbrace{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}_{٤!} = ٦ \times ٥ \times ٤!$$

$٧! = ٧ \times ٦!$ $\qquad$ $٧! = ٧ \times ٦ \times ٥!$

$$٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!$$

$$١٠! = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧!$$

$$(n-١)! = (n-١)(n-٢)(n-٣) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$n! = n\underbrace{(n-١)(n-٢)\ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}_{(n-١)!} = n(n-١)!$$

$$n! = n(n-١)(n-٢)!$$

$$n! = n(n-١)(n-٢)(n-٣)!$$

$$(n+۱)! = (n+۱)(n)(n-۱)(n-۲)\ldots\times ۳\times ۲\times ۱$$

$$(n+۱)! = (n+۱)n!$$

$$(n+٥)! = (n+٥)(n+٤)!$$

$$(n-٤)! = (n-٤)(n-٥)!$$

$$(n-٥)! = (n-٥)(n-۶)(n-۷)!$$

مثال: عبارات زیر را ساده کنید:

$$\frac{٦!}{٣!} = \frac{٦\times٥\times٤\times\cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ٦\times٥\times٤ = ١٢٠$$

$$\frac{١٢!}{١٠!} = \frac{١٢\times١١\times\cancel{١٠!}}{\cancel{١٠}!} = ١٢\times١٨ = ١٣٢$$

$$\frac{٥!}{٢!\times٣!} = \frac{٥\times٤\times\cancel{٣!}}{٢\times١\times\cancel{٣!}} = ١٠$$

$$\frac{٧!}{٢!\times٥!} = \frac{٧\times٦\times\cancel{٥!}}{٢\times١\times\cancel{٥!}} = ٢١$$

$$\frac{(n+٢)!}{n!} = \frac{(n+٢)(n+١)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+٢)(n+١)!$$

$$\frac{(n-٤)!}{(n-٥)!} = \frac{(n-٤)\cancel{(n-٥)!}}{\cancel{(n-٥)!}} = n-٤$$

$$\frac{(n-٢)!}{(n-١)!} = \frac{\cancel{(n-٢)!}}{(n-١)\cancel{(n-٢)!}} = \frac{١}{n-١}$$

دقت کنیم عبارت بزرگتر را تجزیه می کنیم تا جایی که عبارت کوچکتر ظاهر شود در اینجا (n-۱)! بزرگتر است پس آن را تجزیه می کنیم.

مثال: مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $۶! = ۶\times\overbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۵!} = ۶\times۵!$

ب) $۸! = ۸\times۷!$

ت) $n! = n \times (n-۱)!$

پ) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{۵!}{۴!} = \frac{۵ \times \overbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}^{۴!}}{\underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!}} = ۵$

ب) $\frac{۱۰!}{۹!} = \frac{۱۰ \times ۹!}{۹!} = ۱۰$

پ) $\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

ت) $\frac{۸!}{۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۶!} = ۵۶$

ث) $\frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸!} = ۹۰$

ج) $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$

چ) $\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۳۳۶$

ح) $\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$

خ) $\frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = n(n-۱)(n-۲)$

د) $\frac{n!}{(n-۴)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$

ذ) $\frac{n!}{(n-۵)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-k+۱)$

مثال: حاصل ضرب های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹ \times ۸ = \frac{۹!}{۷!}$

ب) $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱ \times ۱۰ \times ۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$

ت) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$

ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

درست $٦! = ٦ \times ٥!$

نادرست $٦! = ٣! + ٣!$

نادرست $٢ \times ٣! = ٦!$

نادرست $٨! = ٤! \times ٢!$

نادرست $٤! = \frac{٨!}{٢!}$

نادرست $(٣!)^{٢} = ٩!$

٤-٦ جایگشت

جایگشت : نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{n!}{\text{حاصلضرب جایگشت‌های تکراری}}$$

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به کل حالات داریم، از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال: با حروف کلمه ی *STATISTICS* چند کلمه ی ۱۰ حرفی می توان نوشت؟

حل: تعداد n=۱۰ حرف داریم که $n_1 = ۳$ حرف شبیه به هم (حرف S) ، $n_2 = ۳$ حرف شبیه هم (حرف T)، $n_3 = ۲$ حرف شبیه هم (حرف I) است لذا

$$\frac{۱۰!}{۳! \times ۳! \times ۲!} = ۵۰٤۰۰$$

مثال: با حروف کلمه‌ی آبدانان چند کلمه‌ی ۷حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{\underset{\text{۲ تا ن داریم.}}{۲!} \times \underset{\text{۳ تا آ داریم.}}{۳!}}$

مثال۳۷: با حروف کلمه‌ی ATAXIAچند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۶!}{۳!}$

تمرین۵: با حروف کلمه‌ی شمشیر چند کلمه‌ی۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $۶۰ = \frac{۵!}{۲!}$

مثال۳۸: با حروف کلمه‌ی شاهزاده چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $۱۲۶۰ = \frac{۷!}{۲! \times ۲!}$

مثال۳۹: با حروف کلمه‌ی *APADANA* چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

√۱) ۲۱۰   ۲) ۳۰   ۳) ۴۰   ۴) ۱۰

جواب: $۲۱۰ = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = \frac{۷!}{۴!}$

مثال: با حروف کلمه‌ی ستایش چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: تکراری نداریم که بر تکرار تقسیم کنیم پس برابر است با !۵

مثال: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴)√ ۷۲۰

جواب: ۷۲۰=۶!

مثال: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: ۱۰!

مثال: با ارقام شماره تلفن «۲۲۵۷۵۵» چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

جواب: $\frac{۶!}{۲!\times۳!}$

مثال: تعداد روش های چیدن پنج حرف یونانی αوβوγوδوθ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت های پنج شی ء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×۳×۴×۵= ۵!

مثال :تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»،«ش»، «و»، «ا»، «ن»،«پ»و«ه» می توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف) ۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷= ۷!

مثال: با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت؟

۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷×۸×۹= ۹!

مثال: تعداد جایگشت های ۱۰ شی ء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×...×۹×۱۰=۱۰!

مثال : ۵نفر وارد یک اتاق می شوند. اگر یک نفر از آن ها بنشیند، بقیه به چند طریق می توانند در کنار او و در یک ردیف بنشینند.

حل) توجه کنید که تعیین نکرده اند که سایرین در سمت چپ و یا سمت راست و یا .... بنشینند. لذا چهار نفر باقی مانده می توانند همگی در سمت چپ او بنشینند (!۴) یا سه نفر در سمت چپ و یک نفر در سمت راست او بنشیند(!۴) یا دو نفر در سمت چپ و دو نفر در سمت راست (!۴) یا یک نفر در سمت چپ و سه نفر در سمت راست (!۴) و یا همگی در سمت راست بنشینند (!۴) لذا جواب ۱۲۰ = !۵= !۴ ×۵= !۴+!۴+!۴+ !۴+ !۴

یعنی نشستن یک نفر از آن ها هیچ تفاوتی نکرده و جواب همچنان !۵ است. البته این نتیجه علی رغم این که ممکن است غیر منتظره باشد اما با کمی دقت ملاحظه می شود که کاملاً درست است. چون مکان شخصی که نشسته است ثابت نبوده و دائماً تغییر می کند. یک بار نفر اول صف است، یک بار نفر دوم صف و به همین ترتیب تا نفر آخر صف.

مخصوص صددرصدی ها

***مثال:** با ارقام ۲، ۰، ۰، ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱   ۲) ۴   √ ۳) ۸   ۴) ۱۰

جواب: $\frac{۲\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳!}$

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\ \vdots \\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۰)\\ \vdots \\ ۲}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۲}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۲}$$

نکته: اگر در بین اعداد صفر داشته باشیم، ابتدا فرض می‌کنیم رقم‌های داده شده متمایز هستند وبا استفاده از اصل ضرب جواب را به‌دست می‌آوریم و در آخر جواب به‌دست آمده را بر جایگشت تکرارها تقسیم می‌کنیم.

***مثال:** با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) !۸   ۲) $\frac{۸!}{۲!\times۳!}$ √ ۳) $\frac{۷!}{۲!}$ ۴) $\frac{۷!}{۲!\times۳!}$

جواب: $\frac{۷!}{۲!} = \frac{۶\times۷!}{۲!\times۳!}$

$$\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{(۲)\\ ۲\\ ۲\\ ۱\\ ٤\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۷}}_{\substack{(۲)\\ ۲\\ ۱\\ ٤\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{(۲)\\ ۱\\ ٤\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۴)\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۳)\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۰}$$

***مثال**: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{۸!}{۲! \times ۴!}$ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ √

جواب: ۲۰ $= \frac{۴ \times ۶! \times ۴}{۴! \times ۴!}$

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۳)\\ ۳\\ ۳\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{(۳)\\ ۳\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۳)\\ ۳\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۳)\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۰)\\ ۰\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۰} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\ ۰\\ ۰\\ ۰}}$$

۵-۶جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...)

۱-۵-۶ قرار گرفتن چند شیءِ در کنار هم

نکته: اگر در جایگشت چند شیء قرار شد تعدادی از اشیاء کنار هم باشند، آن ها را با طناب به هم بسته و یک شی در نظر می گیریم.

تذکر: اگر در جا دادن این اشیاء ترتیبی ذکر نشود، جایگشت خود این اشیاء را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می کنیم.

مثال:۵ دانشجوی رشته ریاضی و ۳ دانشجوی رشته آمار به چند طریق می توانند در یک ردیف بنشینند هرگاه:

الف) رشته دانشجو مهم نباشد.

ب) دانشجویان ریاضی کنار هم باشند.

ج) دانشجویان هم رشته کنار هم باشند

حل

الف) چون رشته مهم نیست لذا تعداد صف های ۸ تایی این ۸ نفر برابر است با ۴۰۳۲۰ = !۸

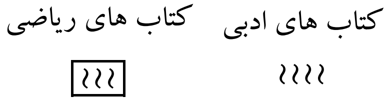
ب) چون قرار است دانشجویان ریاضی کنار هم باشند، لذا ۵ دانشجوی ریاضی را یک نفر فرض می کنیم در نتیجه این ۸ نفر به ۴ نفر تبدیل شده که به تعداد !۴ می توانند در یک ردیف قرار گیرند از طرفی ۵ نفر دانشجوی ریاضی نیز به !۵ می توانند در کنار هم قرار گیرند(کنار هم جایشان را عوض کنند) لذا جواب ۲۸۸۰ = !۵ × !۴ است.

ج) مشابه بند (ب) دانشجویان ریاضی را یک نفر و دانشجویان آمار را یک نفر فرض می کنیم در نتیجه این ۸ نفر به ۲ نفر تبدیل شده که به تعداد !۲ می توانند در یک ردیف قرار گیرند. از طرفی دانشجویان ریاضی به !۵ و دانشجویان آمار به !۳ می توانند در کنار هم قرار گیرند لذا جواب ۱۴۴۰ = !۳ × !۵ × !۲ است.

مثال: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق ممکن می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد، به طوری که:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند. (سراسری تجربی و ریاضی)

جواب: کتاب‌های ریاضی را به هم می‌بندیم و یک کتاب در نظر می‌گیریم !۳ × !۵



ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند.

جواب: !۴ × !۴

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟

جواب: !۴ × !۳ × !۲

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ √ ۴) ۴۸

جواب: !۳ × !۳

۲,۴ , $\boxed{۱,۳,۵}$

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد، تعداد ۵ رقمی-های حاصل کدام است؟

جواب: ۶= !۳

$\boxed{۱۲۵},۳,۴$

مثال: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف c, m, o به صورت com قرار گرفته باشند چندتاست؟

۱) ۵۰۴۰   ۲) ۷۲۰ √   ۳) ۴۸۰   ۴) ۳۶۰