ترکیبات

هنر شمارش

ترکیبات بخش مهمی از ریاضی است که بیش تر برای حل مسائل جالبی که همگی با شمارش سر و کار دارند به کار می رود.

این بخش پایه ای برای بخش های مهم دیگری از ریاضی مانند احتمال است که در سال های بعد با آن آشنا خواهید شد.

امروزه به افراد جهت شناسایی آن ها شناسه ها ی مختلفی نسبت می دهند، از جمله شماره ی شناسنامه، کد ملی و ...

به وسایلی مانند خانه، ماشین و ... نیز جهت تعیین مالکیت آن ها شماره و کدهایی نسبت داده می شود که گاهی از چند رقم یا حروف و یا ترکیبی از این دو تشکیل شده اند.

ممکن است پرسیده شود تعداد کد های ملی و یا شماره ی شناسنامه ای که می توانیم تولید کنیم تا به افراد نسبت دهیم چند تا است؟

و یا تعداد پلاک هایی که می توانیم تولید کنیم چند تا است؟ و یا تعداد کارت شارژ هایی که می توانیم تولید کنیم چند تا است؟ و ....

در این بخش با روش هایی که تعداد این حالت ها را بتوانیم با آن به دست آوریم، آشنا می شویم.

فعالیت

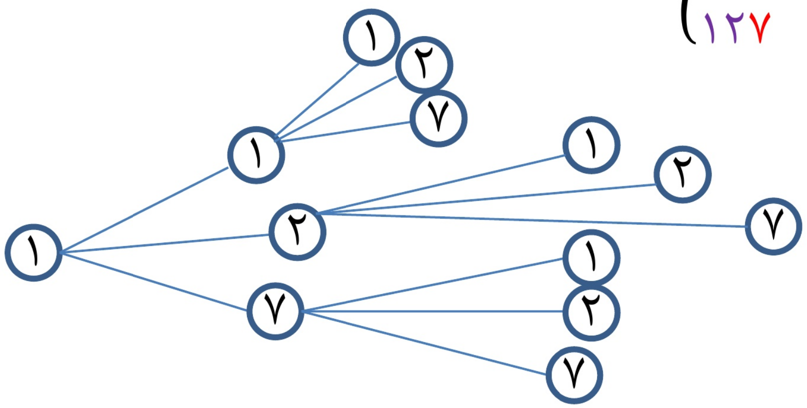
تمام اعداد سه رقمی را در نظر بگیرید که ارقام آن ها از مجموعه ی $A = \{۱,۲,۷\}$ انتخاب شده است. تعدادی از آن ها عبارتند از:

۱۱۱,۱۲۷,۷۲۱

الف) چند تا از این اعداد هستند که دو رقم سمت چپ آن ها برابر ۱۲ است؟

$$\begin{cases} ۱۲۱ \\ ۱۲۲ \\ ۱۲۷ \end{cases}$$

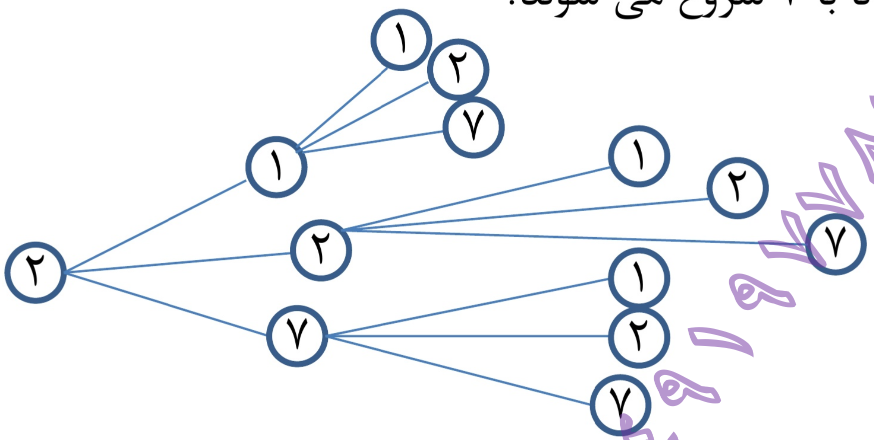
ب) تمام اعدادی که با رقم ۱ شروع می شوند را بنویسید.
تعدادشان چند تا است؟

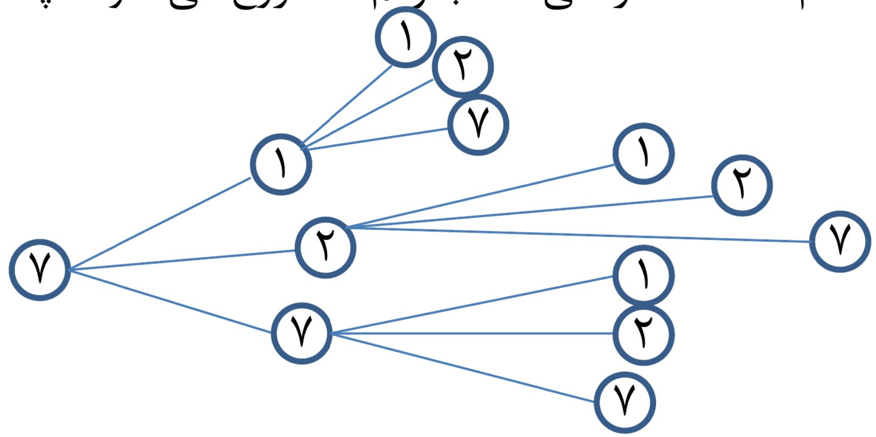


۱۱۱,۱۱۲,۱۱۷,۱۲۱,۱۲۲,۱۲۷,۱۷۱,۱۷۲,۱۷۷

تعداد ارقامی که با ۱ شروع می شوند ۹ تاست.

ج) تمام اعداد سه رقمی که با رقم ۲ شروع می شوند چند تا است؟ چند تا با ۷ شروع می شوند؟





۲۱۱,۲۱۲,۲۱۷,۲۲۱,۲۲۲,۲۲۷,۲۷۱,۲۷۲,۲۷۷

تعداد ارقامی که با ۲ شروع می شوند ۹ تاست.

۷۱۱,۷۱۲,۷۱۷,۷۲۱,۷۲۲,۷۲۷,۷۷۱,۷۷۲,۷۷۷

تعداد ارقامی که با ۷ شروع می شوند ۹ تاست.

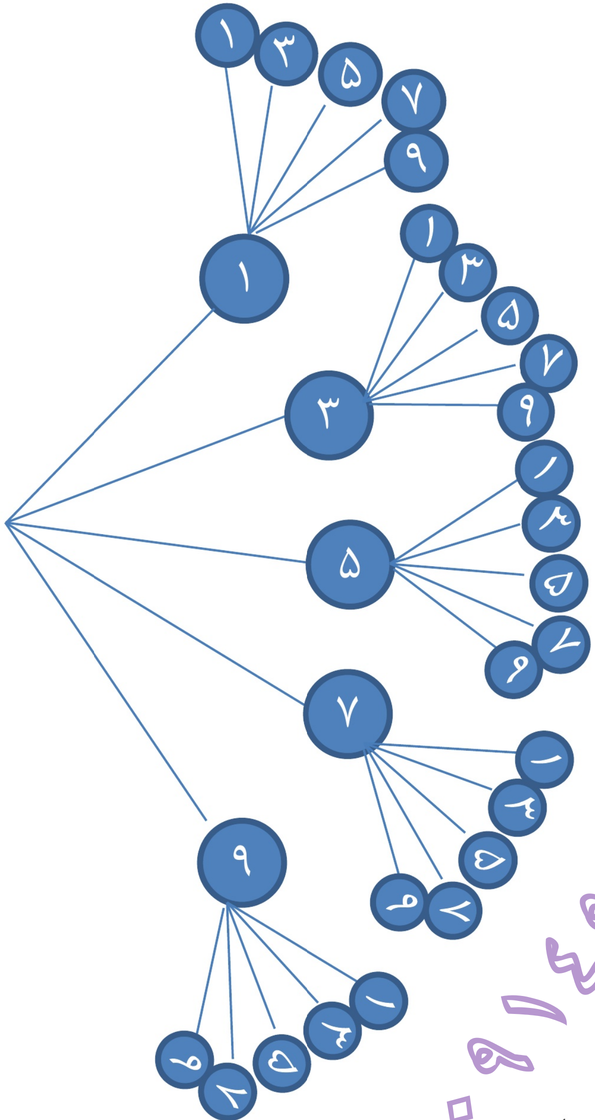
د) تعداد کل اعداد سه رقمی فوق چند تا است؟

با توجه به قسمت های ب و ج تعداد کل اعداد سه رقمی که با ۱ و ۲ و ۷ ساخته می شوند، برابر است با: $\mathbf{۹ + ۹ + ۹ = ۲۷}$

مثال :

تعداد اعداد دو رقمی با ارقام فرد را بیابید.

حل: ارقام فرد عبارتند از: ۱،۳،۵،۷،۹ (۵ رقم). بنابراین با در نظر گرفتن نمودار حالت ها داریم:



۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹
۵۱	۵۳	۵۵	۵۷	۵۹
۷۱	۷۳	۷۵	۷۷	۷۹
۹۱	۹۳	۹۵	۹۷	۹۹

با توجه به نمودار و جدول، تعداد اعداد دو رقمی با ارقام فرد برابر ۲۵ تا است.

(دقت داشته باشید که برای رقم اول ۵ حالت و برای رقم دوم نیز ۵ انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت را از ضرب این دو عدد نیز می توانیم به دست آوریم.)

تذکر: نموداری که در مثال بالا و فعالیت قبل رسم شد تا تعداد حالت های ممکن، نمایش داده شود، **«نمودار درختی»** نامیده می شود.

شمارش ترکیباتی با استفاده از اصل ضرب:

در قسمت قبل توانستیم تعداد حالت های ممکن برای انجام ۲ یا ۳ عمل مختلف با هم را به کمک نمودار درختی به دست آوریم. اما این روش هنگامی که بخواهیم تعداد اعمال زیادی را که هر کدام دارای حالت های متعددی هستند به دست آوریم، وقت گیر و طولانی خواهد بود. هم چنین ممکن است مطمئن نباشیم که آیا تمام حالت های ممکن را به دست آورده ایم یا نه؟. برای محاسبه ی ساده و سریع و مطمئن این حالت ها از اصل زیر که اصل ضرب نام دارد، استفاده می کنیم.

اصل ضرب:

هرگاه عملی از **دو جز** مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد، آن گاه آن عمل که از این دو جزء تشکیل شده است را به $m \times n$ حالت مختلف می توانیم انجام دهیم.

یک تعمیم از اصل ضرب:

هرگاه عملی از **سه جز** مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و جزء دوم به n طریق مختلف و جزء سوم به P طریق مختلف قابل انجام باشد، آن گاه آن عمل که از این سه جزء تشکیل شده است را به $m \times n \times p$ حالت مختلف می توانیم انجام دهیم.

تذکر: با توجه به الگوی بالا، می توان اصل ضرب را به اعمالی با هر تعداد جزء مختلف تعمیم داد.

تمرین در کلاس

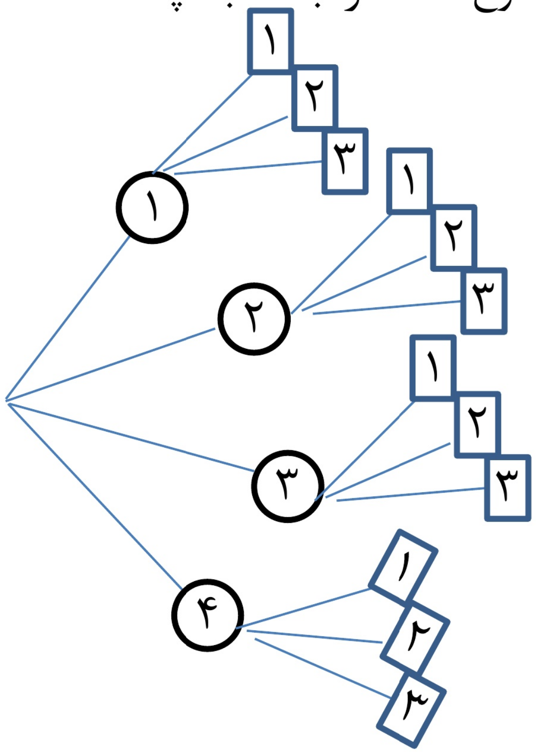
۱– بین دو شهر X و Y دو جاده و بین دو شهر Y و Z چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می توان از شهر X (از طریق Y) به شهر Z رفت؟

حل: با کمی دقت در می یابیم که عمل ما(رفتن از شهر X به شهر Z) از دو جز مختلف تشکیل شده است.

جزء اول رفتن از شهر X به شهر Y و جزء دوم رفتن از شهر Y به شهر Z .

جزء اول را به ۲ طریق و جزء دوم را به ۴ طریق می توانیم انجام دهیم. بنابراین طبق اصل ضرب کل این عمل را به ۸ = ۴ × ۲ طریق می توانیم انجام دهیم.

۲– محسن ... در نظر دارد یک غذا و یک سالاد درست کند. اگر او طرز تهیه ی ۴ نوع غذا و سه نوع سالاد را بداند به چند روش می تواند ناهار را آماده کند؟ با استفاده از نمودار درختی نیز به سوال جواب دهید.



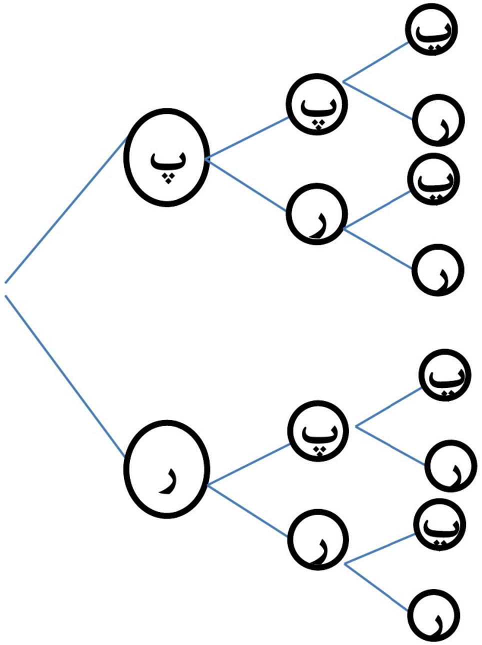
حل: عمل ما (درست کردن ناهار) از دو جزء مختلف تشکیل شده است.

جزء اول درست کردن غذا و جزء دوم درست کردن سالاد.

جزء اول را به ۴ طریق و جزء دوم را به ۳ طریق می توانیم انجام دهیم. بنابراین طبق اصل ضرب کل این عمل را به ۸ = ۳ × ۴ طریق می توانیم انجام دهیم.

تذکر: اگر جزء اول را درست کردن سالاد و جزء دوم را درست کردن غذا در نظر بگیریم نیز جواب یکسان است.

۳– سکه ای را سه مرتبه پرتاب می کنیم. ممکن است در هر مرتبه به رو یا پشت به زمین بیفتد. چند حالت مختلف ممکن است رخ دهد؟ اگر رو آمدن را با **ر** و پشت آمدن را با **پ** نشان دهیم، تمامی حالت ها را با استفاده از نمودار درختی نشان دهید.



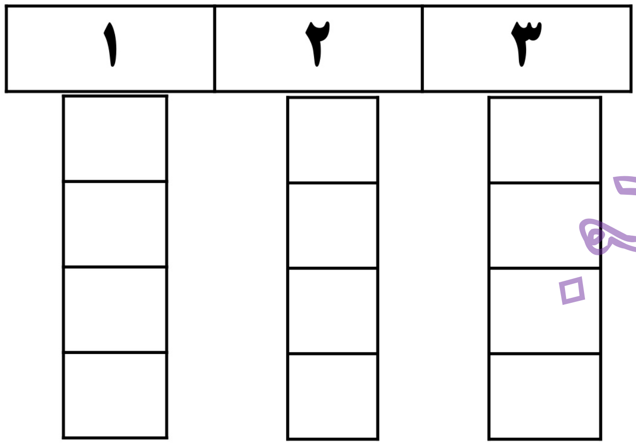
حل: عمل ما از ۳ قسمت تشکیل شده است. پرتاب در مرتبه ی اول، پرتاب در مرتبه ی دوم، و پرتاب در مرتبه ی سوم.

در مرتبه ی اول ۲ حالت ممکن، مرتبه ی دوم ۲ حالت ممکن و مرتبه ی سوم نیز ۲ حالت ممکن دارد.

بنابراین کل عمل دارای $۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۳} = ۸$ حالت ممکن است.

{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)}

۴– قرار است یک آزمون ۳ سوالی برگزار شود. هر سوال یک تست چهار گزینه ای است با گزینه های الف، ب، ج، د. اگر قرار باشد در هر سوال یک و تنها یک گزینه علامت زده شود، به چند طریق مختلف ممکن است پاسخ نامه پر شود؟



حل: عمل ما (پاسخ دادن به سوالات) از سه جزء (سه سوال) تشکیل شده است.

هر سه جزء نیز دارای ۴ حالت مختلف (الف، ب، ج، د) است.

بنابراین کل عمل ما دارای ۶۴ $۴ \times ۴ \times ۴$ حالت مختلف است.

مثال

۱– چند **کلمه ی دو حرفی** با استفاده از حروف d, c, b, a می توان ساخت؟

حل: عمل ما (ساختن کلمه) از دو جزء (دو حرف) تشکیل شده است. از این به بعد به جای نمودار درختی از روش زیر برای درک بهتر موضوع استفاده می کنیم. اگر شکل زیر را برای دو حرف در نظر بگیریم:

خانه ی اول (حرف اول یا جزء اول) ۴ حالت و خانه ی دوم (حرف دوم یا جزء دوم) نیز ۴ حالت مختلف دارند.

بنابراین تمام حالت ها طبق اصل ضرب $۱۶ = ۴^۲ = ۴ \times ۴$ می باشد.

تذکر: از اصل ضرب می توان برای یافتن تعداد اعداد n رقمی استفاده کرد. فقط باید در نوشتن اعداد دقت کرد که رقم اول از سمت چپ صفر نباشد. (مثلا عدد سه رقمی فرد ۰۲۳ وجود ندارد.)

۲– چند **عدد چهار رقمی** با استفاده از ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ می توان ساخت طوری که بر ۵ بخش پذیر باشد؟

اگر چهار جایگاه برای ارقام در نظر بگیریم در این صورت:

چون رقم اول از سمت چپ نمی تواند صفر باشد بنابراین برای این جایگاه ۵ انتخاب داریم.

هم چنین چون عدد باید بر ۵ بخش پذیر باشد، بنابراین برای رقم سمت چپ ۲ انتخاب بیش تر نمی توانیم داشته باشیم(یا صفر یا پنج). برای جایگاه های دوم و سوم نیز ۶ انتخاب می توانیم داشته باشیم. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارتند از: $۵ \times ۶ \times ۶ \times ۲ = ۳۶۰$

۳– با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می توان خانه های جدول زیر را رنگ کرد؟

حل: عمل ما(رنگ کردن) از چهار جزء(چهار خانه) تشکیل شده است.

هر خانه را نیز به ۳ حالت می توانیم رنگ کنیم. بنابراین تعداد کل حالت های رنگ کردن این ۴ خانه طبق اصل ضرب برابر است با: $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۴ = ۸۱$

مثال: دانش آموزی ۳ پیراهن، ۲ شلوار، ۴ کت و ۳ جفت جوراب دارد. او به چند حالت مختلف می تواند این لباس ها را پوشیده و به مدرسه برود؟

جوراب	کت	شلوار	پیراهن

پیراهن را به ۳ طریق، شلوار را به ۲ طریق، کت را به ۴ طریق و جوراب را به ۳ طریق می تواند انتخاب کند. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل این حالت ها برابر است با:

$$۳ \times ۲ \times ۴ \times ۳ = ۷۲$$

مثال: چند ماتریس ۲ × ۳ می توان با چهار عدد مختلف ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نوشت؟

ماتریس ۲ × ۳ دارای ۶ درایه است و برای هر درایه ۴ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^{۶}$$

مثال: با اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد طبیعی ۳ رقمی می توان ساخت هرگاه:

الف) تکرار ارقام مجاز نباشد

۳	۴	۵

$$۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

ب) تکرار ارقام مجاز باشد.

۵	۵	۵

$$۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^{۳}$$

مثال: با حروف کلمه ی «پرسمان» :

الف) چند کلمه ی ۳ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ی ۳ حرفی با حروف متمایز می توان نوشت؟

ج) چند کلمه ی ۴ حرفی با حروف متمایز می توان نوشت که به حرف «م» ختم شوند؟

د) چند کلمه ی ۳

حل:

الف) تعداد حروف کلمه ی پرسمان، ۶ تا است.

بنابراین برای انتخاب حرف اول ۶ حالت، حرف دوم ۶ حالت و حرف سوم نیز ۶ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارت است از: $۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^{۳}$

۶	۶	۶

ب) هنگامی که می خواهیم کلمه ای با حروف متمایز بسازیم، هر خانه نسبت به خانه ی قبلی ۱ حالت کم تر دارد. زیرا حرفی که در خانه ی قبلی باشد (برای اینکه تکراری نشود) دیگر در خانه های بعدی مورد استفاده قرار نمی گیرد.

برای انتخاب حرف اول ۶ حالت، حرف دوم ۵ حالت و حرف سوم ۴ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارت است از: $۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$

۶	۵	۴

ج) در کلمه ای چهار حرفی با حروف متمایز که به حرف «م» ختم می شود، خانه ی آخر فقط یک حالت دارد.

برای انتخاب حرف اول ۵ حالت، حرف دوم ۴ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارت است از: $۵ \times ۴ \times ۱ = ۲۰$

۵	۴	۱

د) حرف پ یا در مکان اول قرار دارد یا در مکان دو و یا در مکان سوم.

حرف پ در مکان اول	پ	۵	۴	$۱ \times ۵ \times ۴ = ۲۰$		
حرف پ در مکان دوم	۵	پ	۴	$۵ \times ۱ \times ۴ = ۲۰$	$\}$	$۲۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۶۰$
حرف پ در مکان سوم	۵	۴	پ	$۵ \times ۴ \times ۱ = ۲۰$		

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. تعداد کل نتایج ممکن را به دست آورید.

تاس اول	تاس دوم

حل: عمل ما از دو جزء تشکیل شده است. برای هر جزء نیز ۶ حالت مختلف وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت های ممکن طبق اصل ضرب برابر است با: $۶ \times ۶ = ۳۶$

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم. تعداد کل نتایج ممکن را به دست آورید.

تاس	سکه

حل: عمل ما از دو جزء تشکیل شده است. یکی پرتاب تاس و دیگری پرتاب سکه. برای پرتاب تاس ۶ حالت مختلف و برای پرتاب سکه ۲ حالت مختلف وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت های ممکن طبق اصل ضرب برابر است با: $۶ \times ۲ = ۱۲$

جایگشت $(Permutation)$

موارد زیادی وجود دارد که ترتیب اجرای اعمال در آن ها مهم است.

فعالیت

احمد، آرش و رضا به عنوان دانش آموزان ممتاز استان شناخته شده اند. به همین مناسبت در مرکز استان مراسمی جهت تقدیر از آن ها ترتیب داده شده است و قرار است یکی یکی جهت دریافت هدایای خود بالای سکو بروند. قطعا روش های مختلفی برای بالا رفتن آن ها وجود دارد. ...

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

حالت های مختلف:

آرش – احمد – رضا	رضا – احمد – آرش	رضا – آرش – احمد
احمد – آرش - رضا	احمد – رضا – آرش	آرش – رضا – احمد

رضا	آرش	**احمد**
آرش	رضا	
رضا	احمد	**آرش**
احمد	رضا	
آرش	احمد	**رضا**
احمد	آرش	

مثال : چهار نفر به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بایستند؟

حل: نفر سمت چپ می تواند یکی از ۴ نفر باشد. بنابراین ۴ حالت دارد.

نفر دوم هر یک از ۳ نفر باقی مانده می تواند باشد. پس ۳ حالت دارد.

برای نفر سوم و چهارم به ترتیب ۲ و ۱ حالت وجود دارد.

در نتیجه طبق اصل ضرب جواب برابر است با: $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

در بخش های قبل، مفاهیمی از شمردن را بررسی کردیم و اصلی به نام اصل ضرب که یکی از مهم ترین قوانین شمارش است را بیان کردیم.

بزرگ ترین نتیجه ی اصل ضرب تعیین **تعداد** لیست هایی به طول r از یک مجموعه ی n عضوی است. $(r \leq n)$

که برابر n^r است . زیرا r جای خالی داریم که هر کدام به n طریق پر می شوند.

$$\underbrace{n.n.n\ldots\ldots n}_{r\ \text{تا}} = n^r$$

مثلا تعداد اعداد ۶ رقمی که با ارقام {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸} می توان نوشت برابر است با: $۸^۶$

اما اگر صورت مساله به این ترتیب بیان شود که با استفاده از ارقام {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸} چند عدد ۶ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت، در این صورت این مساله از مساله ی قبلی متفاوت می شود.

این بار وقتی خانه ی اول از ۶ خانه به ۷ طریق پر می شود، چون قرار است ارقام متمایز باشند پس خانه ی دوم به ۶ طریق و به همین ترتیب خانه های بعدی به ۵،۴،۳،۲ طریق پر می شوند.

پس بنا بر اصل ضرب این خانه ها به ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ طریق پر می شوند. یعنی ۵۰۴۰ عدد ۶ رقمی با ارقام متمایز با اعداد داده شده می توان نوشت.

جای گشت: اگر مجموعه ای شامل n شی متمایز باشد، هر طریق چیدن با ترتیب آن ها در یک ردیف، به طوری که هیچ شی تکرار نشود، یک جای گشت از این n شی نامیده می شود.

مثلا اگر a, b, c سه شی متمایز باشند، این سه شی دارای ۶ جایگشت متمایز به **طول ۳** به صورت زیر هستند:

$abc \qquad acb \qquad bac \qquad bca \qquad cab \qquad cba$

واژه ی جایگشت ترجمه ی «$Permutation$» است که به آن تبدیل هم گفته می شود.

به عنوان مثال ABC, BAC, BCA سه جایگشت مختلف از سه حرف A و B و C می باشند.

در فعالیت قبلی جایگشت های ۳ تایی از ۳ شی و در مثال قبلی جایگشت های ۴ تایی از ۴ شی مطرح بود.

مثال : با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۷،۹ چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف می توان نوشت؟

حل: با کمی دقت در می یابیم که باید تمام ترتیب های مختلف قرار گرفتن این اعداد کنار یکدیگر (جایگشت) را بیابیم.

جدول زیر را در نظر بگیرید. چون قرار است اعداد ۵ رقمی با ارقام متمایز ساخت بنابراین برای جایگاه اول ۵ حالت، جایگاه دوم ۴ حالت و ... وجود دارد.

۵	۴	۳	۲	۱

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

سوال: در مثال بالا اگر تکرار ارقام مجاز بود، تعداد کل حالت ها را به دست آورید.

حل:

۵	۵	۵	۵	۵

بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^{۵}$$

معرفی یک نماد:

برای سهولت در محاسبات، حاصل ضرب اعداد متوالی از ۱ تا n را با نماد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نشان می دهیم.

به عبارت دیگر داریم: $n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times (n-۱) \times n = n(n-۱) \times \cdots \times ۲ \times ۱$

قرارداد: $\begin{cases} ۰! = ۱ \\ ۱! = ۱ \end{cases}$

با توجه به مثال های قبل گزاره ی کلی زیر در مورد تعداد جایگشت ها قابل بیان است:

تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

مثال: تعداد جایگشت های حروف کلمه ی «کشورمان» برابر است با: $۷!$

تمرین در کلاس

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید:

الف) $\frac{۱۰!}{۵!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶$

ب) $۱! + ۲! + ۳! + ۴! = ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ = ۳۳$

ج) $\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

۳- حاصل ضرب ۱۱ × ۱۰ × ۹ × ۸ را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$8 \times 9 \times 10 \times 11 \times \frac{7!}{7!} = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \frac{7!}{7!} = \frac{11!}{7!}$$

۴– ۱۰ نامه ی مختلف را به چند طریق می توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

۱	**۲**	**۳**	**۴**	**۵**	**۶**	**۷**	**۸**	**۹**	**۱۰**

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10!$$

نکته: تعداد جایگشت های n شی متمایز در یک حالت دایره ای برابر است: $(n-1)!$

مثال: ۵ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند؟

حل: طبق نکته ی بالا تعداد حالت ها برابر است با: $\mathbf{(5-1)! = 4! = 24}$

مثال: ۷ اتومبیل به چند حالت می توانند دور یک میدان قرار بگیرند؟

حل: طبق نکته ی بالا تعداد حالت ها برابر است با: $\mathbf{(7-1)! = 6!}$

چند مثال:

۱– به چند طریق می توان ۶ دانش آموز را در یک صف پشت سر هم قرار داد؟

حل: تعداد حالت های مختلف قرار گیری ۶ دانش آموز در یک صف همان تعداد جایگشت های آن ها است. $P(۶,۶) = ۶!$

۲– با ۵ رقم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار می توان ساخت؟

حل: تعداد جایگشت های این ۵ رقم مد نظر است: $۵! = ۱۲۰$

۳– با حروف کلمه ی **EHSAN** چند کلمه ی ۵ حرفی (بدون تکرار) می توان نوشت؟

حل: کلمه ی **EHSAN** دارای ۵ حرف است. در این جا تعداد جایگشت های(به طول ۵) این ۵ حرف مد نظر است. $۵! = ۱۲۰$

۴– با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟

حل: چون عدد صفر را نمی توان در سمت چپ قرار داد، پس برای رقم اول ۴ حالت مختلف وجود دارد و برای ۴ رقم بعدی !۴ حالت.

پس طبق اصل ضرب تعداد اعداد ۵ رقمی با شرط فوق برابر است با: $۴ \times ۴!$

۵– با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵

الف) چند عدد ۵ رقمی فرد بدون تکرار می توان نوشت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار می توان نوشت؟

الف) برای رقم یکان عدد فرد ۳ انتخاب وجود دارد و برای ۴ رقم دیگر !۴ حالت. پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارتند از: $۳ \times ۴!$

ب) برای رقم یکان عدد زوج، ۲ انتخاب و برای ۴ رقم دیگر !۴ حالت مختلف وجود دارد. پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارتند از: $۴! \times ۲$

۶– با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد فرد ۶ رقمی بدون تکرار می توان ساخت؟

حل: برای رقم یکان ۳ انتخاب و برای رقم اول از چپ ۴ انتخاب وجود دارد.(زیرا یک رقم یکان انتخاب شده و عدد صفر نیز نمی تواند در سمت چپ قرار گیرد. پس از ۶ عدد ۲ حالت رفته و ۴ انتخاب وجود دارد.)

برای ۴ رقم باقی مانده !۴ حالت مختلف وجود دارد. پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارتند از:

$$۴ \times ۴! \times ۳ = ۲۸۸$$

مثال : ۱۰ نفر دانش آموز دبیرستانی در مسابقه ی دو ۱۰۰ متر شرکت کرده اند. نفرات اول، دوم و سوم مدال طلا، نقره و برنز دریافت خواهند کرد. به چند طریق ممکن است که برندگان طلا، نقره و برنز مشخص شوند؟

حل: برای مشخص شدن مدال طلا ۱۰ امکان وجود دارد، برای مدال نقره ۹ امکان و برای مدال برنز ۸ امکان وجود دارد.

بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر $۸ \times ۹ \times ۱۰$ یعنی ۷۲۰ است که می توان آن را به صورت $\frac{۱۰!}{۷!}$ نیز نشان داد.

در این مثال تعداد جایگشت های سه تایی (به طول ۳) از ۱۰ نفر مورد نظر بود به طوری که ترتیب آن ها نیز نفرات اول تا سوم را مشخص می کرد.

به طور کلی اگر جایگشت های k تایی از n شی متمایز مدنظر باشد، تعداد آن ها برابر است با:

$$n(n-۱)(n-۲)\ldots\big(n-(k-۱)\big) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

تعداد جایگشت های k تایی(به طول k) از n شی متمایز را با نماد $\mathbf{P}(n,k)$ نشان می دهیم و داریم:

$$\mathbf{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}\ ; k \le n$$

تمرین در کلاس

۱- در مورد معنای $\mathbf{P}(n,n)$ بحث کرده و به دو روش نشان دهید: $\mathbf{P}(n,n) = n!$

حل: $\mathbf{P}(n,n)$ یعنی تعداد جایگشت های n تایی(به طول n) از n شی مختلف.

روش اول: با استفاده از اصل ضرب:

جایگشت به طول n

n	$(n-۱)$	$(n-۲)$	$\cdots$	۲	۱

$$n \times (n-۱)(n-۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱ = n!$$

روش اول: با استفاده از فرمول:

$$\mathbf{P}(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!} = \frac{n!}{۱} = n!$$

۲- چند رشته ی (کلمه ی) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می توان نوشت؟

حل: تعداد کل حروف انگلیسی برابر ۲۶ تا است. در این جا تعداد جایگشت های ۳ تایی از این ۲۶ حرف خواسته شده است.

$$\mathbf{P}(۲۶,۳) = \frac{۲۶!}{(۲۶-۳)!} = \frac{۲۶!}{۲۳!} = \frac{۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ \times ۲۳!}{۲۳!} = ۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴$$

۴– نشان دهید تعداد جایگشت های ۵ حرفی از حروف کلمه ی $computer$ که حرف اول بی صدا باشد برابر $۵P(۷,۴)$ است.

اولین حرف، حرف صدادار نباید باشد. پس برای حرف اول ۵ انتخاب داریم.

از بین ۷ حرف یک حرف انتخاب شد. ۷ حرف باقی مانده برای ۴ مکان دیگر است که به حالت قابل انتخاب می باشند.

پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها عبارت است از: $۵P(۷,۴)$

جایگشت های چندقسمتی:

در جایگشت افراد یا اشیاء اگر بخواهیم چند فرد یا چند شی در کنار هم باشند، کافی است آن ها را یک بسته در نظر بگیریم. سپس جایگشت اشیا درون بسته را حساب کرده و در جایگشت خود بسته با اشیا بیرون آن ضرب کنیم.

مثال: ۴ کتاب ریاضی، ۲ کتاب فیزیک و ۳ کتاب شیمی را به چند طریق می توان در یک قفسه چید به طوری که کتاب های ریاضی همیشه کنار هم باشند؟

حل: چون می خواهیم کتاب های ریاضی در کنار هم باشند، پس ۴ کتاب ریاضی را یک شی در نظر می گیریم.

بنابراین تعداد کل کتاب ها (اشیا) ۶ تاست. (یک دسته کتاب های ریاضی، ۲ کتاب فیزیک و ۳ کتاب شیمی)

تعداد حالت های قرار گیری این ۶ شی برابر است با: $۶!$

اما دسته ی کتاب های ریاضی خود دارای $۴!$ جایگشت است. پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها برابر است با: $۶! \times ۴!$

تمرین: به چند طریق می توان ۳ کتاب ریاضی مختلف و ۴ کتاب فیزیک مختلف را کنار هم قرار داد به طوری که:

الف) کتاب های ریاضی کنار هم باشند.

ب) کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

ج) کتاب های هم موضوع کنار هم باشند؟

ترکیب: $(Combination)$

در اکثر مسائلی که تا به حال حل کرده ایم، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اعم از حروف، ارقام و ... مهم بود.

اما مسائلی وجود دارند که در آن ها **ترتیب قرار گرفتن اشیاء** به هیچ وجه مهم نیست.

به عنوان مثال، فرض کنید در یک کلاس ۲۴ نفره قرار است ۵ نفر برای نمایندگی در شورای دانش آموزی انتخاب شود.

در این جا ترتیب انتخاب افراد مهم نیست.

یا مثلا وقتی می گوییم با اعداد مجموعه ی، {۱,۲,۳,۴} اعداد دو رقمی بسازید عدد ۱۲ و ۲۱ کاملا متفاوت اند.
یعنی اینکه رقم ۲ در یکان باشد یا در دهگان، دو عدد مختلف را پدید می آورد.

اما اگر در همین جا ذکر شود که با اعداد مجموعه ی {۱,۲,۳,۴} مجموعه های دو عضوی بنویسید، در این حالت وضعیت با قسمت قبل متفاوت است.

در این جا دو مجموعه ی {۱,۲} و {۲,۱} یکی هستند. یعنی در این جا ترتیب قرار گرفتن اعداد مهم نیست.

تعریف ترکیب:

به طور کلی ترکیب های k تایی از n شی متمایز، به انتخاب های k تایی از آن n شی اطلاق می شود که در آن ها ترتیب فاقد اهمیت است.

ترکیب های k تایی از n شی متمایز را با $\binom{n}{k}$ یا $C(n,k)$ (بخوانید انتخاب k از n) نمایش می دهیم.

تعداد ترکیب های تایی از شی را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad ; k \le n$$

تذکر: مفهوم ترکیب ارتباط نزدیکی با مفهوم جایگشت دارد.

به طور کلی در انتخاب k شی اگر ترتیب آن ها مهم نباشد، با مساله ی ترکیب رو به رو هستیم.

مثال: به چند طریق می توان از بین ۵ دانش آموز، ۳ نفر را برای شرکت در یک اردو انتخاب کرد؟

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{(۵-۳)!\,۳!} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۲ \times ۱ \times ۳!} = ۱۰$$

تمرین در کلاس

۳- تساوی های زیر را ثابت کنید:

الف) $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

$$\binom{n}{۲} = \frac{n!}{(n-۲)!\,۲!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!\,۲\times۱} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

ب) $\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$

$$\binom{n-۱}{k} = \frac{(n-۱)!}{(n-۱-k)!\,k!}$$

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \frac{(n-۱)!}{\big(n-۱-(k-۱)\big)!\,(k-۱)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-۱-k+۱)!\,(k-۱)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-k)!\,(k-۱)!}$$

$$\Rightarrow \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} = \frac{(n-۱)!}{(n-k-۱)!\,k!} + \frac{(n-۱)!}{(n-k)!\,(k-۱)!} = \frac{(n-k)(n-۱)! + k(n-۱)!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{n(n-۱)! - k(n-۱)! + k(n-۱)!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

۴- دو دلیل ذکر کنید که $\binom{n}{۰} = ۱$

الف) $\binom{n}{۰}$ یعنی انتخاب صفر شی از n شی. که فقط به یک حالت امکان پذیر است.

ب) با استفاده از فرمول:

$$\binom{n}{۰} = \frac{n!}{(n-۰)!\,۰!} = \frac{n!}{n! \times ۱} = \frac{n!}{n!} = ۱$$

۵– ۱۰ چراغ در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق می توان ۳ تا از آن ها را روشن کرد؟ به چند طریق می توان ۷ تا از آن ها را روشن کرد؟ دو پاسخ را با هم مقایسه کنید.

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!\,۳!} = \frac{۱۰!}{۷!\,۳!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۳ \times ۲} = ۱۲۰$$

$$\binom{۱۰}{۷} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۷)!\,۷!} = \frac{۱۰!}{۳!\,۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۳ \times ۲ \times ۷!} = ۱۲۰$$

در هر دو حالت جواب یکسان است.

۶– تعداد زیر مجموعه های چهار عضوی مجموعه ی $\mathbf{A} = \{۱,۲,\ldots,۷\}$ را بیابید. به چند طریق می توان ۳ عضو از مجموعه ی $\mathbf{A}$ حذف کرد؟ دو جواب را مقایسه کنید.

$$\binom{۷}{۴} = \frac{۷!}{(۷-۴)!\,۴!} = \frac{۷!}{۳!\,۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳ \times ۲ \times ۴!} = ۳۵$$

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{(۷-۳)!\,۳!} = \frac{۷!}{۴!\,۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳ \times ۲ \times ۴!} = ۳۵$$

در هر دو حالت جواب یکسان است.

۷– با توجه به دو تمرین قبل، یک تساوی برای $\binom{n}{k}$ بیان کنید.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

نکته ی ۱: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «و» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را به دست می آوریم و در هم ضرب می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

مثال

۱– از میان ۶ دانش آموز کلاس اول و ۸ دانش آموز کلاس دوم، به چند طریق می توان کمیته ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که ۳ دانش آموز کلاس اول و ۲ دانش آموز کلاس دوم باشد؟

حل: برای انتخاب ۳ دانش آموز از کلاس اول $\binom{۶}{۳}$ راه وجود دارد و برای انتخاب دانش آموز از کلاس دوم $\binom{۸}{۲}$ روش وجود دارد.

بنابراین طبق نکته ی فوق تعداد کل حالت ها برابر است با: $\binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۳}$

۲– در یک آپارتمان که ۱۰ خانوار زندگی می کنند قرار است یک شورای ۴ نفره متشکل از اعضای آن تشکیل شود. از هر خانواده تنها زن یا شوهر می تواند عضو آن شورا شود. به چند طریق ممکن است شورای ۴ نفره تشکیل شود؟

حل: ابتدا تعیین می کنیم که چهار خانواری که قرار است یک نفر از آن ها عضو شورا شود کدامند.

تعداد این خانوارها به $\binom{۱۰}{۴}$ قابل انتخاب است.

پس از انتخاب چهار خانوار از هر کدام به دو حالت می توان یک نفر را انتخاب کرد.

بنابراین جواب مسئله برابر $۲^۴ \times \binom{۱۰}{۴}$ است.

نکته ی ۲: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «یا» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را به دست می آوریم و با هم جمع می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

تذکر: چنین نیست که همواره در صورت سوال کلمه ی «یا» ذکر شده باشد. بلکه گاها باید با دقت در مفهوم سوال این نکته را متوجه شویم.

مثال: از گروه ۹ نفره شامل ۵ مرد و ۴ زن به چند طریق می توان کمیته ی ۴ نفره تشکیل داد، به طوری که:

حداقل شامل یک زن باشد.

حل : حداقل یک زن باشد یعنی: ۱ زن یا ۲ زن یا ۳ زن یا ۴ زن باشد.

پس طبق نکته ی ۲ تعداد هر حالت را به دست آورده و با هم جمع می کنیم.

۱ زن و ۳ مرد $\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۳}$

۲ زن و ۲ مرد $\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}$

۳ زن و ۱ مرد $\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}$

۴ زن و ۰ مرد $\binom{۴}{۴}\times\binom{۵}{۰}$

$$\xRightarrow{\text{کل حالت ها}} \binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۴}\times\binom{۵}{۰}$$