

ریاضیا

پایه می دهم «رشته های علوم تجربی و ریاضی و فنیک»

فصل ۶: شمارش بدون شمردن (ترکیبات)

تھیہ کنندہ: جابر عامری

عضو گروہ ریاضی دورہ ی دوّم متوسطہ

استان خوزستان

۱۳۹۹ مهر

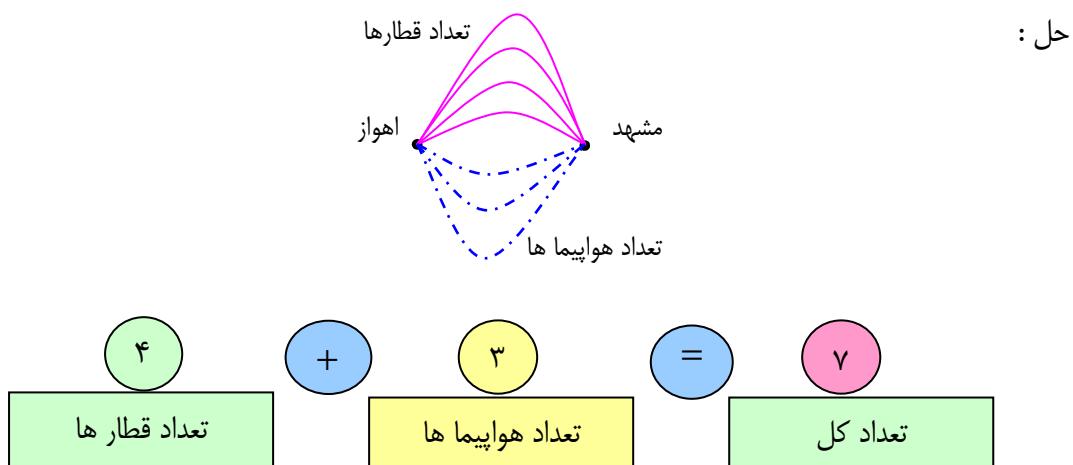
درس اول : شمارش

یکی از بحث های جالب ریاضیات، بحث ترکیبیات است. به کمک این بحث تعداد حالت های مختلف یک موضوع را بدون نوشتن آنها شمارش می کنیم. به همین جهت برخی، ترکیبیات را شمارش بدون شمردن نامیده اند. برای آشنایی دقیق با این مفهوم، شایسته است ابتدا اصل جمع و اصل ضرب را معرفی کنیم.

قسمت اول : اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد، طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوّم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.



تعمیم اصل جمع : اصل جمع برای تعداد محدودی روش مجزا انجام کار قابل تعمیم است.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما و ۲ اتوبوس متفاوت برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.

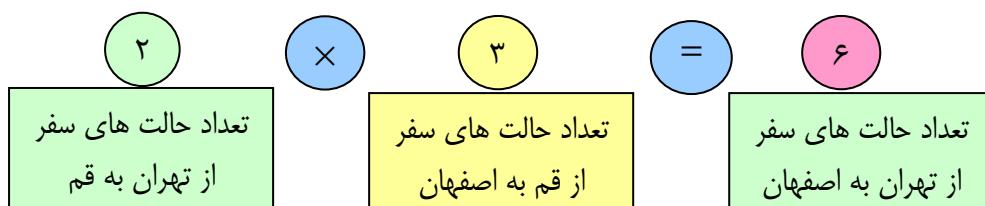
حل :

$$4 + 3 + 2 = 9$$

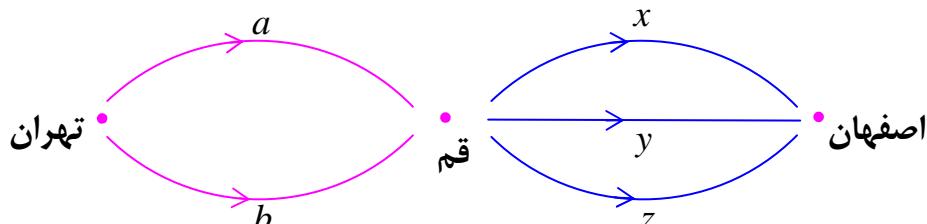
اصل ضرب : اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله‌ی دوم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

مثال : شخصی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد که از قم عبور کند. اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر (به نام‌های b و a) و از قم به اصفهان ۳ مسیر (به نام‌های z و y و x) وجود داشته باشد. این شخص به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد حالت‌های سفر از تهران به اصفهان را تعیین کرد.

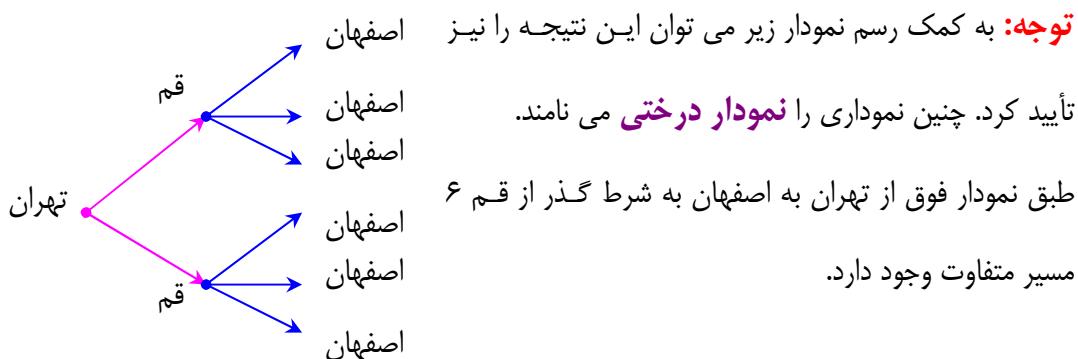


به نمودار زیر نیز توجه کنید که تعداد این مسیرها را نشان می‌دهد.



نام مسیرها نیز بدین شکل است.

(a, x)	(a, y)	(a, z)
(b, x)	(b, y)	(b, z)



تمرین ۱ : یک سکه و یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. تمام حالت‌های ممکن به زمین افتد آنها را بنویسید. (از اصل ضرب و نمودار درختی کمک بگیرید).

تمرین ۲ : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۳ : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تعییم اصل ضرب : اصل ضرب برای تعداد محدودی مرحله برای انجام یک کار قابل تعییم است.

مثال: شخصی ۲ کفش و ۳ شلوار و ۴ پیراهن متفاوت دارد، حساب کنید که این شخص به چند حالت می‌تواند آنها را بپوشد.

حل :

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 3 & \times & 4 \\ \text{تعداد} & & \text{تعداد} & & \text{تعداد} \\ \text{کفش} & & \text{شلوار} & & \text{پیراهن} \end{array} = \boxed{24}$$

تمرین ۴ : به کمک نمودار درختی نتیجه‌ی بدست آمده در مثال فوق را بررسی کنید.

تمرین ۵ : با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۶ : با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تمرین ۷ : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

تمرین برای حل :

۸ : سه مهره (به نام‌های c و b و a) و دو تاس (به نام‌های y و x) در درون یک کیسه قرار دارند.

الف: شخصی می‌خواهد فقط یکی از اشیاء داخل کیسه را بردارد. تعیین کنید که به چند طریق این کار ممکن است؟

ب: شخصی می‌خواهد یک مهره و یک تاس بردارد، تعیین کنید که به چند حالت این کار ممکن است؟

۹ : با حروف کلمه‌ی «خوزستان» چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می‌توان نوشت؟

۱۰ : با حروف کلمه‌ی «تهران» چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می‌توان نوشت؟

۱۱ : یک برگ نظر خواهی مانند فرم زیر دارای ۵ سؤال چهار گزینه‌ای است. یک شخص نزد خود تصمیم گرفت که این فرم را به تصادف پاسخ دهد. حساب کنید که این شخص به چه تعداد حالت متفاوت می‌تواند پاسخ نامه را تکمیل نماید، به طوری که :

الف) تمام سؤالات پاسخ داده شوند.
ب) می‌توان به سؤالات نیز پاسخ نداد.

فرم نظر خواهی				
D گزینه	C گزینه	B گزینه	A گزینه	سؤال
				۱
				۲
				۳
				۴
				۵

توجه : گاهی برای یک یا چند خانه (رقم یا حرف و به طور کلی اشیاء) شرطی قرار داده می‌شود. در حل چنین مسائلی ابتدا باید خانه‌های مشروط تکمیل شود.

تمرین ۱۲ : با ارقام ۷ و ۸ و ۱ و ۶ و ۹ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۳ : چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

حل : چون قرار است اعداد حاصل بزرگتر از ۳۰۰۰ باشند، پس رقم سمت چپ فقط می‌تواند ۹ یا ۷ یا ۵ یا ۳ باشد. لذا:

$$\begin{array}{cccc}
 4 & 4 & 3 & 2 = 96 \\
 & & 1 & 1 \\
 & & 3 \\
 & & 5 & 5 \\
 & & 7 & 7 \\
 & & 9 & 9 & 9
 \end{array}$$

تمرین ۱۴ : به چند روش می‌توان با حروف کلمه‌ی «سازندگی» کلمه‌های ۴ حرفی ساخت (بدون توجه به معنی و بدون تکرار حروف) که حرف اوّل آنها نقطه دار نباشد.

آموزش ریاضی ۱۰ پایه‌ی ۱۰ ریاضی و تجربی

حل : کافی است ، مدلی مانند مثال زیر تشکیل دهیم.

$$4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$$

ی ی ی ی س

۱ ۱ ۱

د د د

گ گ گ گ

ز ز

ن

توجه : حرف « ی » در اول کلمه، نقطه دار می شود.

تمرین ۱۵ : مجموعه‌ی $S = \{a, b, c, d\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟

نتیجه : تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر 2^n است.

تمرین ۱۶ : در هر مورد تعیین کنید که با حروف کلمه‌ی « Computer » چند کلمه‌ی ۸ حرفی با

معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت،

الف : به شرط اینکه حروف **u** و **p** کنار هم باشند.

ب : به شرط اینکه حروف **u** و **p** به شکل « **pu** » کنار هم باشند.

توجه : گاهی لازم می شود که دو اصل ضرب و جمع را به صورت ترکیبی استفاده کنیم. به مثال های زیر

توجه کنید.

مثال : با ارقام ۷ و ۳ و ۰ و ۶

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

ج) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

د) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

حل :

$$3 \times 4 \times 4 = 48 \quad \text{(الف)}$$

$$3 \times 3 \times 2 = 18 \quad \text{(ب)}$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{(ج)}$$

با توجه به دو حالت اینکه ، اگر صفر یکان باشد یا اینکه صفر یکان نباشد. می توان نوشت:

$$(2 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) + (4 \times 2 \times 1) = 4 + 6 = 10 \quad \text{(د)}$$

آموزش ریاضی ۱ تهیه کننده : جابر عامری

راه حل دوّم : با توجه به بند های ب و ج می توان نوشت.

$$18 - 8 = 10$$

مثال : با ارقام ۷ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت. به طوری که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند.

حل :

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی بدون تکرار} \quad 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{تعداد کل اعداد سه رقمی (دارای تکرار و بدون تکرار)} \quad 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند.} \quad 27 - 6 = 21$$

مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است. هر کدام از حروف مربوط به این رمز از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی می باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، حساب کنید که برای این رمز چند حالت وجود دارد؟

حل : مسئله دارای دو حالت است.

حالت اول : اوّلین حرف سمت چپ، فارسی باشد.

$$32 \times 26 \times 32 = 26624$$

حالت دوّم : اوّلین حرف سمت چپ، انگلیسی باشد.

$$26 \times 32 \times 26 = 21632$$

لذا تعداد کل حالت های ممکن (رمز ها)

$$26624 + 21632 = 48256$$

تمرین برای حل :

۱۷ : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۶ و ۹ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

۱۸ : با ارقام ۷ و ۸ و ۵ و ۶ و ۹ و ۴ را در نظر بگیرید. حساب کنید که با ارقام متمایز

الف : چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

ب : چند عدد چهار رقمی فرد می توان نوشت؟

ج : چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ می توان نوشت؟

د : چند عدد سه رقمی می توان نوشت که رقم یکان عدد فرد و دهگان مضرب ۳ باشد؟

۱۹ : با ارقام ۳ و ۵ و ۷ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت، که حتماً رقم تکراری داشته باشد.

حل چند تمرین دیگر

۲۰ : تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.

(الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که شامل یک عدد یا حرف فارسی است.

(ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که گزینه‌ی اول یک عدد و گزینه‌ی دوم یک حرف الفبای فارسی است.

(ج) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه‌ی دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

(د) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عدد هستند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی می‌باشند.

(ه) این رمز از چهار گزینه تشکیل شده است که دو گزینه‌ی اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه‌ی دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

حل :

(الف) رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود، بنابراین تعداد حالت‌ها می‌شود:

$$32 + 10 = 42$$

(ب) گزینه‌ی اول ۱۰ حالت و گزینه‌ی دوم ۳۲ حالت می‌شوند و لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر:

$$10 \times 32 = 320.$$

(ب) گزینه‌ی اول ۱۰ حالت و گزینه‌ی دوم ۳۲ حالت یا گزینه‌ی اول ۳۲ حالت و گزینه‌ی دوم ۱۰ حالت می‌شوند و لذا تعداد کل حالت‌ها برابر:

(د) یا هر دو گزینه عدد، یا اینکه هر دو حرف الفبای انگلیسی می‌باشند. پس:

$$(10 \times 10) + (26 \times 26) = 100 + 676 = 776$$

(ه) دو گزینه‌ی اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه‌ی دوم حروف انگلیسی غیر تکراری

$$10 \times 9 \times 26 \times 25 = 58500$$

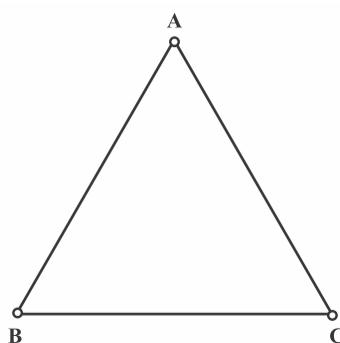
۲۱ : در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار ، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، را تعیین کنید.

حل :

$$\text{حداقل} = 5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000$$

$$\text{حداکثر} = 5 \times 10 \times 12 \times 30 = 18000$$

۲۲ : می خواهیم رأس های مثلث زیر را با سه رنگ قرمز و آبی و سبز رنگ کنیم.



(الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، همنگ نباشند.

حل :

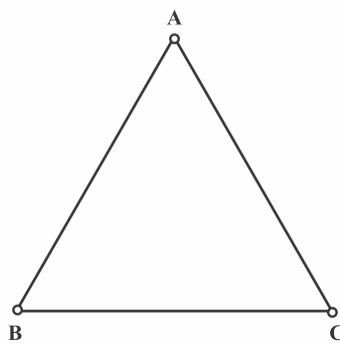
الف : هر رأس می تواند با یکی از سه حالت ، قرمز یا آبی یا سبز باشد. لذا هر رأس سه حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

ب : رأس A سه حالت انتخاب رنگ دارد. رأس B دو حالت و لذا رأس C فقط یک حالت دارد. پس :

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

۲۳ : می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



(الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، همنگ نباشند.

حل :

آموزش ریاضی ۱۰ پایه‌ی ۱۰ ریاضی و تجربی

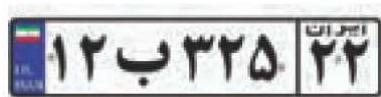
الف : هر رأس می تواند با یکی از دو حالت ، قرمز یا آبی باشد. لذا هر رأس دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ب : با توجه به اینکه هر رأس به رأس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

$$2 \times 1 \times 0 = 0$$

۲۴ : با پلاک هایی به صورت زیر عدد دو رقمی
 $A = \{11, 22, \dots, 99\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $C = \{\text{ای}, \text{و}, \text{ن}, \text{م}, \text{ل}, \text{ق}, \text{ط}, \text{ص}, \text{س}, \text{د}, \text{ج}, \text{ب}\}$
سمت راست آنها از مجموعه‌ی A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه‌ی B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه‌ی C انتخاب شود، حساب کنید با شرایط چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟



حل :

$$\begin{aligned} A &= \{11, 22, \dots, 99\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ C &= \{\text{ای}, \text{و}, \text{ن}, \text{م}, \text{ل}, \text{ق}, \text{ط}, \text{ص}, \text{س}, \text{د}, \text{ج}, \text{ب}\} \\ 13 \times 9^6 &= 69,873 \end{aligned}$$

۲۵ : در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل ، ۱۰ رنگ ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.



- الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟
ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟
ج) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود.

حل :

الف :

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

ب :

$$5 \times 1 \times 3 \times 2 = 30$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

ج :

$$5 \times 1 \times 3 \times 1 = 15$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

۲۶: یک آزمون چندگزینه ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله _ خیر) ، فردی

قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد، اگر:

الف) محصور باشد، به همهی سؤال ها پاسخ دهد.

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد.

حل :

الف :

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ بار}} \quad \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{5 \text{ بار}} = 2^{25}$$

سوالات دو گزینه ای سوالات چهار گزینه ای

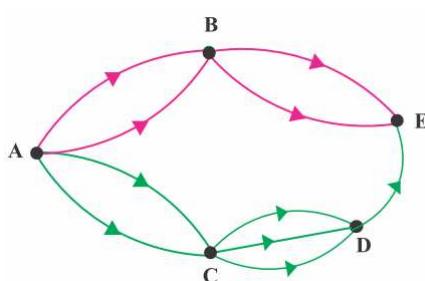
ب :

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ بار}} \quad \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{5 \text{ بار}} = 5^{10} \times 3^5$$

سوالات دو گزینه ای سوالات چهار گزینه ای

۲۷: اگر شکل مقابل نشان دهندهی جاده های بین

شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهی جاده ها یک



طرفه باشد، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

حل :

$$ABE \text{ تعداد مسیرهای } = 2 \times 2 = 4$$

$$ACDE \text{ تعداد مسیرهای } = 2 \times 3 \times 1 = 6$$

$$\text{تعداد کل مسیرها} = 4 + 6 = 10$$

۲۸ : مسئله‌ی زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله : چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت، به طوری که ؟

جواب : تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تا است. لذا با توجه

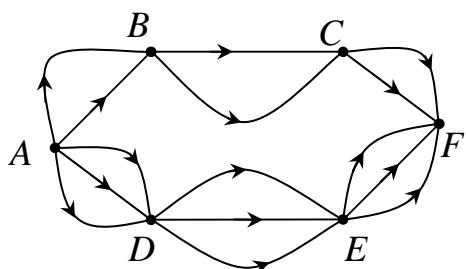
به اصل ضرب ۲۰ عدد شرایط مورد نظر وجود دارد.

حل : رقم یکان فرد و رقم دهگان عددی اوّل باشد.

۲۹ : مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن

به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



حل : اگر شکل مقابل نشان دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E و F باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه فرض شوند. در این صورت مسئله به صورت زیر طرح می‌شود.

به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر F رفت؟

۳۰ : با حروف کلمه‌ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که با « گل » شروع می‌شوند؟

حل :

الف:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

ب: طبق مسئله «**گل پیرا**» را با هم در نظر می گیریم.

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۳۱: با حروف کلمه‌ی «**گل پیرا**» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» کنار نباشند؟

حل :

الف:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

ب: طبق مسئله دو حرف «پ» و «ر» باید باشند و کنار هم. برای حل مسئله در ابتدا حروف «پ» و «ر» را با هم و به شکل «پر» در نظر می گیریم در این صورت

ی گ ل ا «پ ر»

اگر «پر» اول باشند. تعداد حالت ها می شود. پ، ر،، پ، ر،

$$1 \times 4 \times 3 = 12$$

اگر «پر» وسط باشند. تعداد حالت ها می شود.، پ، ر،

$$4 \times 1 \times 3 = 12$$

اگر «پر» آخر باشند. تعداد حالت ها می شود.،، پ، ر

$$4 \times 3 \times 1 = 12$$

لذا تعداد حالت ها در این مورد می شود.

$$12 + 12 + 12 = 3 \times 12 = 36$$

ولی اگر حروف «پ» و «ر» را با هم و به شکل «رپ» در نظر می گیریم. باز ۳۶ حالت داریم. لذا در کل تعداد حالت های می شود؟

$$36 + 36 = 2 \times 36 = 72$$

روش دوم

$$(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 1) \times 3 = 72$$

(ج)

$$360 - 72 = 288$$

۳۲ : با حروف کلمه‌ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف

الف : چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

ب : چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

حل :

الف : در این حالت ابتدا فرض می‌کنیم که « گ » و « پیرا » انتخاب شوند. پس

$$1 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1 = 24 + 24 = 48$$

و اگر « ل » و « پیرا » انتخاب شوند. باز داریم

$$1 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1 = 24 + 24 = 48$$

لذا در کل $48 + 48 = 2 \times 48 = 96$ حالت می‌شوند.

روش دوّم :

$$(1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 \times 2 = 96$$

ب: جایگایی کُلی « گ » یا « ل » و « پیرا »

$$(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 3 = 144$$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوم : جایگشت

در ادامه‌ی این فصل ابتدا مفهوم جایگشت و سپس نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد جایشگت‌های اشیاء مختلف را بیان می‌کنیم.

قسمت اول : جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

مثال : سه فیش و سه درگاه مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. اگر فیش‌ها را a و b و c می‌نامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها در درگاه‌ها را، در جدول زیر تنظیم کنید و سپس تعداد حالت‌ها را بنویسید.



a	b	c
a	c	b

تمرین ۱ : تعداد حالت‌های صفت گرفتن چهار دانش آموز را بنویسید.

قسمت دوم : معرفی نماد فاکتوریل

فرض کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با $n!$ نمایش داده می‌شود، به شکل زیر تعریف می‌شود.

اگر $n = 0$ باشد. در این صورت $0! = 1$.

اگر $n = 1$ باشد. در این صورت $1! = 1$.

اگر $n > 1$ باشد. در این صورت $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

مثال :

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad (\text{الف})$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \quad (\text{ب})$$

تمرین ۲ : تساوی های زیر را کامل کنید.

$$5! = \quad (\text{الف})$$

$$4! - 3! + 2! + 1! = \quad (\text{ب})$$

تمرین ۳ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{5! + 3!}{9} = \quad (\text{الف})$$

$$(3!)! = \quad (\text{ب})$$

$$\frac{6! - 4!}{4(4!) + 5(5!)} = \quad (\text{ج})$$

تمرین ۴ : عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \quad (\text{الف})$$

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 = \quad (\text{ب})$$

$$5 \times 24 = \quad (\text{ج})$$

نتیجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که:

$$n! = n(n-1)!$$

برای مثال : $6 \times 5! = 6!$

تمرین ۵ : کسر های زیر را ساده کنید.

$$\frac{9!}{7!} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{k!}{(k-3)!} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} \quad (\text{د})$$

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین ۶ : با حروف کلمه‌ی «Computer» چند کلمه‌ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف

می توان نوشت؟

تمرین ۷ : چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار

هم نباشند؟

$$720(4)$$

$$480(3)$$

$$360(2)$$

$$340(1)$$

حل :

$6! = 720$ تعداد کل حالات

$2 \times 5! = 240$ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم باشند.

$720 - 240 = 480$ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند.

تمرین ۸: با حروف کلمه‌ی «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ: چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی «جهان» کنار هم باشند؟

ج: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل:

الف:

$= 8!$ تعداد کل کلمات

$= 7!$ تعداد کلماتی که به «ی» ختم می‌شوند.

ب:

$= 2 \times 7!$

پ:

$$\text{تعداد کل کلمات ۶ حرفی} = \frac{8!}{2!}$$

$$\text{تعداد کل کلماتی که به «گردی» ختم می‌شوند} = \frac{4!}{2!} = 12$$

ت:

$= 4! \times 4!$

ث:

$= 4! \times 5!$

ج:

$= 3 \times 7!$

تمرین برای حل :

۹ : با پنج حرف الفبای متمایز چند کلمه‌ی (با معنی و بی معنی) بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

۱۰ : حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{10!}{9!}$

(ب) $\frac{8!}{6!}$

(ج) $\frac{n!}{(n-2)!}$

۱۱ : عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

(الف) 9×8

(ب) 5

(ج) $n(n-1)!$

(د) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوجه

استان خوزستان

درس سوم: ترکیب و ترتیب

در این درس روش های تعیین تعداد جایگشت های اشیاء متمایز بدون تکرار اشیاء ولی در حالت های مهم بودن یا نبودن ترتیب آنها معرفی می کنیم.

ترتیب و ترکیب

در انتخاب k شیء از n شیء بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف: اگر اولویت (تقدم و تأخیر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه‌ی «خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!}=210.$$

در این مثال تقدم و تأخیر اشیاء (حروف) مهم است. برای مثال کلمات «ستا» «با» «تاس» تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب: اگر اولویت (تقدم و تأخیر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی ۷ عضوی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، برابر است با:

$$C(7,3)=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{3\times 2\times 1\times 4!}=35$$

در این مثال تقدم و تأخیر اشیاء (عضوها) مهم نیست. برای مثال زیر مجموعه های « $\{a,b,c\}$ » « $\{b,a,c\}$ » « $\{c,a,b\}$ » تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

تمرین ۱: با ارقام عدد ۵۶۸۷۴ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین ۲ : از میان شش کتاب مختلف

الف : به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب : به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف:

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360.$$

ب:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

تمرین ۳ : هفت نقطه روی دایره‌ای قرار دارند. حساب کنید که با این هفت نقطه

الف) چند پاره خط ایجاد می‌شود.

ب) چند بردار ایجاد می‌شود.

ج) چند مثلث تشکیل می‌شود.

تمرین ۴ : بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس یک

چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، را به دست آورید.

حل :

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

تمرین ۵ : تعداد قطرهای یک ۱۲ ضلعی محدب را محاسبه کنید.

حل : اگر از تعداد حالات انتخاب ۲ نقطه از کل نقاط تعداد اضلاع را کم کنیم، تعداد قطرها به دست می‌آید.

$$\binom{n}{2} - n = \binom{12}{2} - 12 = 66 - 12 = 54$$

تمرین ۶ : تعداد قطرهای یک ۸ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۷: ثابت کنید که هر n ضلعی محدب دارای $\frac{1}{2}n(n-3)$ قطر است.

تمرین ۸: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند. می خواهیم از بین آنها :

(الف) ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.

(ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.(هر نفر یک پست داشته باشد.)

حل :

(الف)

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220.$$

(ب)

$$P(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320.$$

تمرین ۹: درون قفسه‌ی یک کتابخانه یک کتاب درسی ، یک کتاب علمی و یک کتاب داستان گذاشته شده است. اگر از بین ۷ نفر به طرف قفسه رفته و هر کدام یک کتاب بردارند. به چند روش ممکن است کتاب‌ها توزیع شده باشند؟

حل :

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210.$$

تمرین ۱۰: راه‌های مختلفی که می‌توان از بین ۱۰ سؤال متفاوت به ۷ سؤال پاسخ داد، مساوی با

فاکتوریل چه عددی است؟

حل :

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$$

تمرین ۱۱: هفت نقطه‌ی A و B و C و D و E و F روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

حل :

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

تمرین ۱۲: با حروف کلمه‌ی « گل پیرا » و بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

حل :

$$P(6,4) = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 36.$$

تمرین ۱۳: در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما وجود دارد و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به

چند طریق می‌توان از بین آنها ۴ نفر را سوار کرد؟

حل :

$$C(9,4) = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$$

تمرین ۱۴: حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(الف) \binom{12}{7} - \binom{12}{5} = \quad (ب) \frac{\binom{9}{3} + \binom{6}{2}}{\binom{6}{4} + \binom{9}{6}} = \quad (ج) \frac{P(n,n-1)}{n!} =$$

تمرین ۱۵: به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز، ۳ مهره انتخاب کنیم. به طوری که

- ب) هر سه مهره‌ی آبی باشند.
- الف) رنگ مهره‌ها مهم نباشد.
- د) دو مهره‌ی آبی و یکی سبز باشند.
- ج) هر سه مهره‌ی سبز باشند.
- هـ) هر سه مهره‌ی هم رنگ باشند.

تمرین ۱۶: به چند طریق می‌توان از بین ۸ دانش آموز پایه‌ی دهم، ۷ دانش آموز از پایه‌ی یازدهم و ۵

دانش آموز از پایه‌ی دوازدهم به تعداد ۶ دانش آموز جهت مسابقات ورزشی انتخاب کرد به طوری که :

(الف) پایه‌ی دانش آموزان مهم نباشد.

ب) ۳ دانش آموز دهم و ۱ دانش آموز یازدهم و بقیه دوازدهم باشند.

ج) هر ۶ دانش آموز همکلاس باشند.

تمرین ۱۷: در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از

این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ مهره سیاه باشند؟

حل :

$$\binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{3} \binom{8}{0} = 6 \times 8 + 4 \times 1 = 52$$

تمرین ۱۸: به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، شش نفر انتخاب کرد به طوری که حداقل سه

زن انتخاب شوند؟

حل :

$$\binom{4}{3} \binom{5}{3} + \binom{4}{4} \binom{5}{2} = 4 \times 10 + 1 \times 10 = 40 + 10 = 50$$

توجه: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است.

تمرین ۱۹: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به دست آورید.

تمرین ۲۰: تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه، برابر ۲۱ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین ۲۱: یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه‌ی $2 - n$ عضوی دارد. عدد n را بیابید.

حل :

$$\binom{n}{n-2} = 55 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times (n-(n-2))!} = 55 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 55$$

$$\rightarrow n(n-1) = 110 \rightarrow n = 11$$

تمرین ۲۲: تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل عضو a را به

دست آورید؟

1. توجه کنید که تعداد انتخاب $\binom{n}{k}$ باشد، برابر صفر می‌باشد.

حل : کافی است ، تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $\{b, c, d, e, f\}$ را به دست آوریم.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

توجه : به هر کدام از زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $\{b, c, d, e, f\}$ اگر عضو a را اضافه کنیم، یک زیر مجموعه از زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل a به دست می آید.

نتیجه : به کمک تعیین تعداد زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی n عضوی نتیجه می شود که :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تمرین ۲۳ : با حروف کلمه‌ی $Computer$ چند کلمه‌ی ۵ حرفی می توان نوشت که در آن حروف p و u کنار هم قرار داشته باشند؟

حل : ابتدا باید ۳ حرف دیگر غیر از حروف p و u را از بین ۶ حرف باقی مانده انتخاب کنیم. سپس با شرط گفته شده در کنار هم بچینیم. اگر بخواهیم p و u در کنار هم باشند. لازم است p و u را یک حرف در نظر بگیریم (به چسبیده) در این صورت:

$$\text{تعداد حالت های انتخاب ۳ حرف از ۶ حرف (غیر از } p \text{ و } u \text{)} = \binom{6}{3} = 20$$

= تعداد جایگشت های ۵ حرف که p و u کنار هم در نظر گرفته شده اند.

= تعداد جایگشت های p و u با هم

و طبق اصل ضرب داریم:

$$20 \times 24 \times 2 = 960.$$

چند تساوی مهم

نکته ۱: برخی از حالت های خاص ترتیب بصورت زیر می باشند.

$$۱) P(n,\cdot) =$$

$$۴) P(n,n-1) = n!$$

$$۲) P(n,n) = n!$$

$$۵) P(n,2) = n(n-1)$$

$$۳) P(n,1) = n$$

$$۶) P(n,n-2) = \frac{n!}{2}$$

نکته ۲: برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

$$۱) \binom{n}{\cdot} = \binom{n}{n} = 1$$

$$۵) \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

اتحاد پاسکال

$$۲) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$۶) \binom{n}{\cdot} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$۳) \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$۷) \binom{n}{\cdot} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = .$$

$$۸) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$۸) P(n,r) = C(n,r).r!$$

توجه کنید که تمام تساوی های فوق به کمک مفهوم ترتیب یا ترکیب قابل اثبات هستند. برای مثال

$$P(n,n-1) = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!(1)!} = \frac{n}{1} = n$$

تمرین ۲۴: هر یک از تساوی های فوق را ثابت کنید.

تمرین ۲۵: از رابطه‌ی $C(n,n-2) = 120$ ، عدد n را تعیین کنید.

حل :

$$C(n,n-2) = 120 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 120 \rightarrow n(n-1) = 240 \rightarrow n = 16$$

تمرین ۲۶: اگر $C(n,4) = P(n-1,3)$ ، عدد n را بباید.

حل :

$$C(n, 4) = P(n - 1, 3)$$

$$\rightarrow \frac{n!}{4!(n - 4)!} = \frac{(n - 1)!}{(n - 1 - 3)!} \rightarrow \frac{n(n - 1)!}{4!(n - 4)!} = \frac{(n - 1)!}{(n - 4)!} \rightarrow \frac{n}{4!} = 1 \rightarrow n = 4! = 24$$

تمرین ۲۷ : دو خط موازی داده شده است و روی هر کدام از این دو خط ۵ نقطه قرار دارد. چند مثلث با این

نقاط می‌توان ساخت؟

حل : باید یکی از دو خط را انتخاب کنیم. سپس از آن خط دو نقطه و از خط دیگر یک نقطه برداریم.

$$\binom{5}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 5 \cdot + 5 \cdot = 100$$

تمرین ۲۸ : از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته‌ی دو نفره

انتخاب شود، به گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. تعداد حالت‌های انجام این کار را به دست

آورید.

حل :

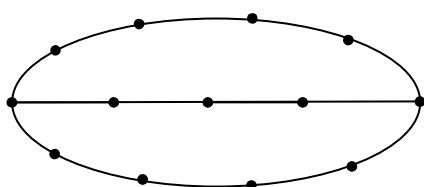
$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$$

تمرین ۲۹ : معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\binom{n}{1} = 5n - 8$ (ب) $P(n, 5) = P(n, n - 1)$

(ج) $P(5, 2) = 2n + C(5, 2)$ (د) $\binom{n}{1} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{5} = 32$

تمرین ۳۰ : به کمک نقاط موجود در شکل زیر و از به هم وصل کردن آنها چند مثلث ایجاد می‌شود.



آموزش ریاضی ۱ تهیه کننده: جابر عامری

حل: تعداد کل حالت هایی که می توان با ۱۳ نقطه، مثلث ایجاد کرد برابر $\binom{13}{3}$ می باشد. اما باید توجه داشت که از این ۱۳ نقطه ۵ نقطه روی خط راست قرار دارند و با این ۵ نقطه مثلث تشکیل نمی شود، لذا

باید $\binom{5}{3}$ را از حاصل کم کرد.

$$\text{تعداد مثلث های حاصل} = \binom{13}{3} - \binom{5}{3} = 286 - 10 = 276$$

تمرین ۳۱: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اوّل تا سوم به چند حالت

مختلف می توانند مشخص شوند؟

حل:

$$P(18,3) = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

تمرین ۳۲: از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر

تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

حل:

$$P(n,3) = 210 \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \rightarrow n(n-1)(n-2) = 210 \rightarrow n = 7$$

تمرین ۳۳: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید

سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به

طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد (در بدترین حالت) و در چه

زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

حل:

$$2 \times P(20,3) = 2 \times \frac{20!}{17!} = 2 \times 6840 = 13680 \text{ ثانیه}$$

تمرین ۳۴: یک فروشنده‌ی تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه‌ی کدو، تخمه‌ی ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. تعیین کنید که او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

حل :

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 7 + 1 = 29$$

تمرین ۳۵: یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود؟ هرگاه (الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

(ب) رئیس و دقیقاً معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

(ج) رئیس و دقیقاً معاون و یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

حل :

(الف)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{14}{3} = 1 \times 3 \times 364 = 1092$$

(ب)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{2} = 1 \times 3 \times 3 \times 55 = 495$$

(ج)

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 9 = 162$$

تمرین ۳۶: در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

حل : فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشند. بنابراین.

$$\binom{n}{2} = 28 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \rightarrow n(n-1) = 56 \rightarrow n(n-1) = 8 \times 7 \rightarrow n = 8$$

تمرین ۳۷: یک گل فروش در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه

گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

حل :

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 120 + 210 + 252 = 582$$

تمرین ۳۸: یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند

قطوی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از

جواب شما است؟

حل :

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ‌ها یکسان نباشد. به طور مثال یک بار ۵۰ درصد از یک رنگ و ۵۰

درصد از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰ درصد از یک رنگ و ۴۰ درصد از رنگ دیگر استفاده شود و

در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

تمرین ۴۰: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست

می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند؟ هرگاه

(الف): هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد.

(ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند.

(ج) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند.

(د) ادویه‌ها به ۲ دسته‌ی ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته‌ی اول با هیچ یک از ادویه

های دسته‌ی دوم سازگاری ندارند.

حل :

(الف)

$$\binom{10}{3} = 120$$

ب) اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه‌ی سوم از ۸ ادویه‌ی باقی مانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$$= \text{تعداد حالات وجود دو ادویه با هم} \\ = \binom{8}{1}$$

= تعداد کل حالاتی که دو ادویه‌ی خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که دو ادویه‌ی خاص با هم استفاده می‌شوند - تعداد کل حالات

$$= \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

(ج)

= تعداد کل حالاتی که هر سه ادویه‌ی خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که هر سه ادویه‌ی خاص با هم استفاده می‌شوند - تعداد کل حالات

$$= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

د) هر سه ادویه باید از دسته‌ی اوّل انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته‌ی دوم انتخاب شوند. بنابراین :

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

تمرین ۴۱: در هر مورد، مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

(الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{2}$

(ب) $\binom{5}{3} + \binom{6}{2}$

حل :

الف) به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۶ زن، پنج نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۲ زن و

۳ مرد وجود داشته باشد؟

ب) واضح است که

$$\binom{5}{3} + \binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

لذا مسئله را به صورت زیر طراحی می‌کنیم.

از بین ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی، دو مهره استخراج می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی را تعیین

کنید که این دو مهره همنگ باشند.

تمرین برای حل :

۴۲ : با حروف کلمه‌ی «**گل بهار**» چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان ساخت به طوری که:

الف) با حرف «**گ**» شروع و به حرف «**ب**» ختم شوند.

ب) در این کلمات حروف «**ب**» و «**ه**» موجود و در کنار هم باشند.

ج) در این کلمات حروف «**ب**» و «**ه**» و «**ا**» موجود و در کنار هم باشند.

۴۳ : از بین ۴ زن و ۳ مرد به چند حالت می‌توان یک گروه ۳ نفری انتخاب کرد که :

الف) ۲ مرد و یک زن باشد.

ج) نفر اول رئیس و نفر دوم معاون و نفر سوم خدمت کار باشند.

۴۴ : از بین ۵ نفر به چند حالت می‌توان

الف) یک نفر رئیس و یک نفر معاون انتخاب کرد.

۴۵ : با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت به طوری که :

الف) اعداد سه رقمی همگی فرد باشند.

ب) همگی با ۲ شروع شوند.

ج) دو عدد ۲ و ۳ همواره در کنار هم باشند.

د) دو رقم ۲ و ۳ به شکل «۲۳» کنار هم باشند.

۴۶ : به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفره از بین ۷ دانش آموز رشته‌ی ریاضی و ۵ دانش آموز رشته‌ی

تجربی انتخاب کرد؟

۴۷ : از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند

طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود؟ هرگاه

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

ج) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

۴۸ : معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $n! = 2 \cdot (n-2)!$

(ب) $P(n,3) = 12C(n,2)$

(ج) $P(n,2) + 9 = C(6,4)$

۴۹: تساوی های زیر را ثابت کنید.

(الف) $P(n,r) = nP(n-1,r-1)$

$$(ب) \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

۵۰: از بین پنج گل آبی و سه گل سفید به چند طریق می‌توان سه گل انتخاب کرد که هر سه گل همنگ

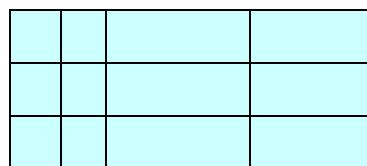
باشند.

۵۱: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

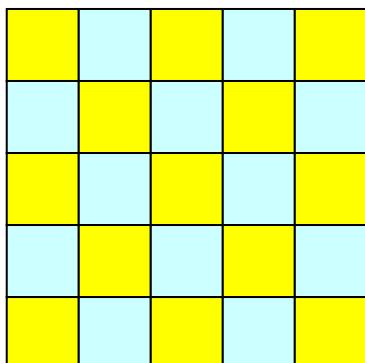
(الف) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$

(ب) $\binom{8}{5} - \binom{8}{3} =$

۵۲: در شکل رو برو چند مستطیل وجود دارد؟



۵۳: با توجه به شکل مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف : چند مربع وجود دارد؟

ب : چند مستطیل وجود دارد؟

ج : چند مستطیل وجود دارد که مربع نباشند؟

نتیجه :

الف : در یک مربع به ضلع $n \times n$ ، تعداد کل مربع های موجود از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ب : در یک مستطیل به ابعاد $m \times n$ ، تعداد مستطیل های موجود برابر $\binom{m+1}{2} \times \binom{n+1}{2}$ است.

در این محاسبه مربع ها هم به عنوان مستطیل در نظر گرفته شده اند.

Tehيه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوم متوسطه

استان خوزستان