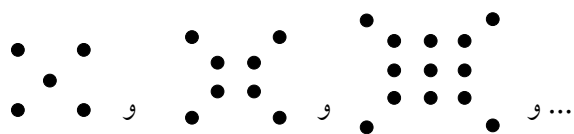


۱- برای هریک از دنباله‌های درجه‌ی دو زیر جمله‌ی عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

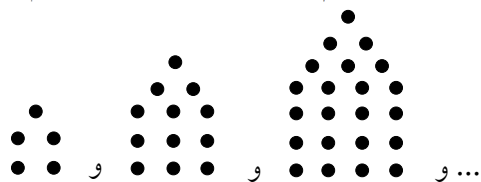
الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$ (ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

« پاسخ »



الف)

$$t_1 = 1^2 + 4 \quad t_2 = 2^2 + 4 \quad t_3 = 3^2 + 4 \quad t_n = n^2 + 4$$



ب)

$$t_1 = 2^2 + 1 \quad t_2 = 3^2 + 3 \quad t_3 = 4^2 + 6$$

یادآوری: دنباله $1, 3, 6, \dots$ دنباله مثلثی با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{بنابراین } t_n = (n+1)^2 + a_n \text{ در نتیجه:}$$

۲- جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n + 1$ (پ) $c_n = n^2 + 2$ (ت) $d_n = n^2 + n$

« پاسخ »

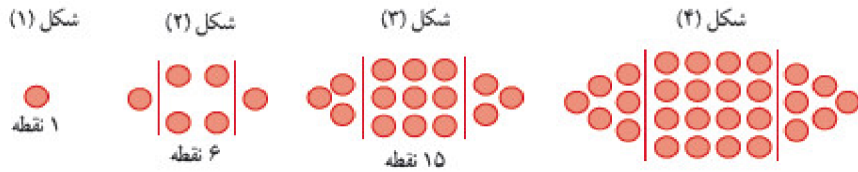
الف) $4, 8, 12, 16, \dots$

ب) $4, 7, 10, 13, \dots$

پ) $3, 6, 11, 18, \dots$

ت) $2, 6, 12, 20, \dots$

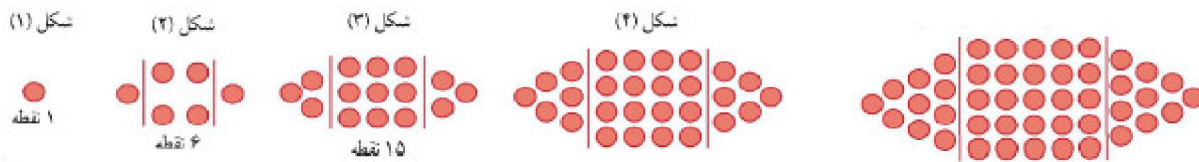
۳- الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.
 ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.
 پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

« پاسخ »

الف)



$$t_1 = 1^2 + 0 \times 1 \quad t_2 = 2^2 + 1 \times 2 \quad t_3 = 3^2 + 2 \times 3$$

$$t_4 = 4^2 + 3 \times 4 \quad t_5 = 5^2 + 4 \times 5$$

۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶, ...

$$t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$$

ب)

$$t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$$

پ)

۴- به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

« پاسخ »

الف) ۱۲ کاشی تیره



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

۱۲ کاشی تیره
۴ کاشی سفید

۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ...

ب)

$$t_n = 2(n+2) = 2n + 4$$

پ)



تعداد کاشی‌های سفید

$$t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$$

ت)

$$t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23 \Rightarrow \text{تعداد کاشی‌های سفید ۲۳ است.}$$

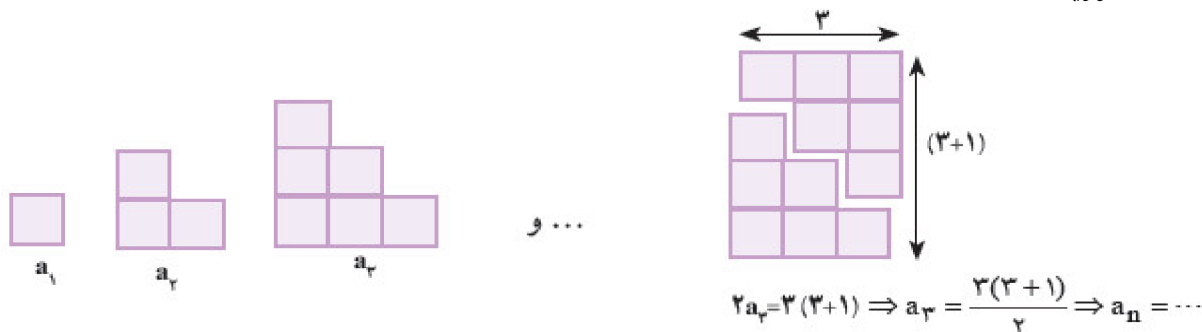
ث)

۵- الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله‌ی خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید.



$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

ت) به کمک مرحله‌ی قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

« پاسخ »

الف) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ (دنباله مثلثی)

ب) خیر - چون اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن، عددی ثابت نیست.

پ) $2a_3 = 3(3 + 1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ت) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ همان جمله‌ی n ام مرحله‌ی قبلی است.

۶- در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله‌ی بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله‌ی عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-۱	-۲	-۳	-۴					-n	
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$						
۱	۴	۹	۱۶						
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱						
-۱	۸	-۲۷	۶۴						
۵	۱۸	۳۱	۴۴						
-۲	۱	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$						
۱	۲	۴	۷						
۳	۱	۴	۱	۵					
۱	۱	۲	۳	۵					
۲	۳	۵	۷						

« پاسخ »

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	-n	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	n^2	...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱	...	$(۰/۱)^n$...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^3$...
۵	۱۸	۳۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳
-۲	۱	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷

۷- جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰, ۳, ..., ۱۵, ۲۴

ب) $b_n = -n + 4$: ۳, ۲, ۱, ۰, ..., -۲

ج) $c_n = -13 + 2n$: -۱۱, ..., -۷, ..., -۳

« پاسخ »

الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴

ب) $b_n = -n + 4$: ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

ج) $c_n = -13 + 2n$: -۱۱, -۹, -۷, -۵, -۳

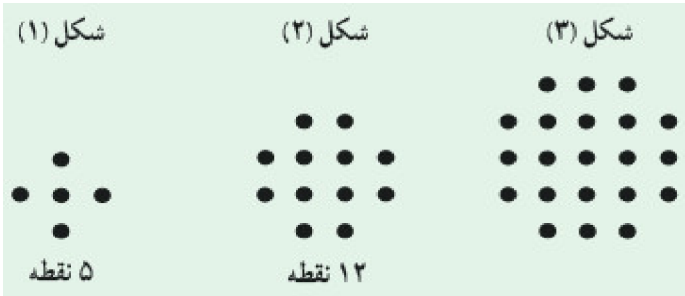
۸- دو دنباله‌ی دلخواه مثال بزنید.

« پاسخ »

دنباله اعداد طبیعی زوج : ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ...

دنباله فیبوناتچی : ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

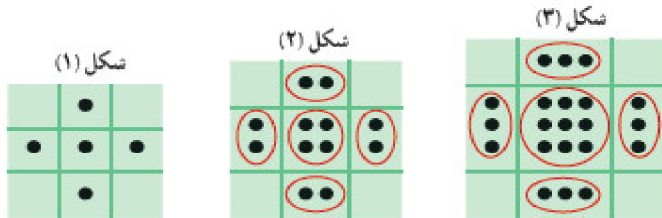
۹-۱- در الگوی زیر، شکل بعد را رسم کنید و جدول را کامل کنید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها : t_n	۵	۱۲			
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 =$			

۲- آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۳- امیررضا برای یافتن جمله‌ی عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



$$t_1 = (1)^2 + 4(1) \quad t_2 = (2)^2 + 4(2) \quad t_3 = (3)^2 + 4(3) \quad t_4 = (4)^2 + 4(4) \quad \dots$$

$$t_n =$$

۴- امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



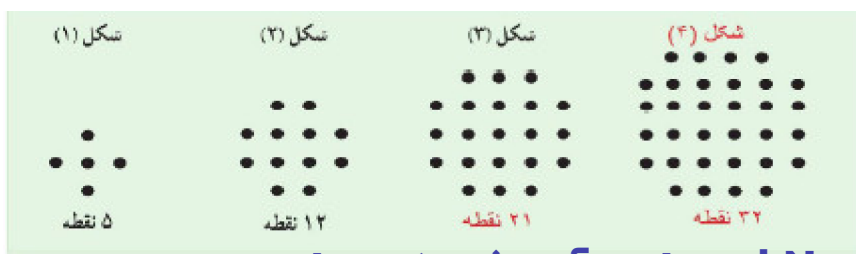
$$t_1 = 3^2 - 4 \quad t_2 = 4^2 - 4 \quad t_3 = (3+2)^2 - 4 \quad t_4 = (4+2)^2 - 4 \quad \dots \quad t_n =$$

$$= (1+2)^2 - 4 \quad = (2+2)^2 - 4$$

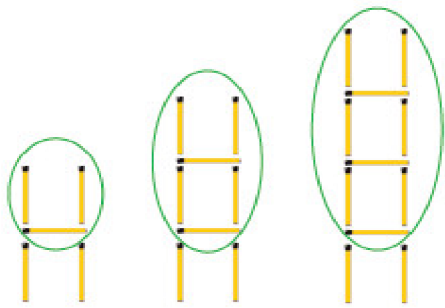
۵- نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶- آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانان مقایسه کنید.

« پاسخ »



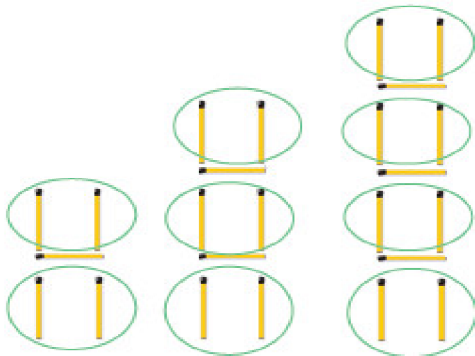
۱۰-۱- آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2$$

$$a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = \dots \quad a_n = \dots$$

۲- آيسا روش ديگري را به كار برد. او تعداد چوب کبريت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2)$$

چوب های افقی چوب های عمودی

$$a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10 + 1)2 \quad \dots \quad a_n = \dots$$

۳- آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

۴- همان‌طور که دیدید، آیدا و آيسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت‌های $a_n = n + (n+1)(2)$ و $a_n = 3n + 2$ به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

۵- به کمک رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبريت‌های شکل بیستم را بنویسید.

۶- با استفاده از رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبريت است؟

« پاسخ »

$$a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2 \quad -1$$

$$a_n = n + (n+1)2 \Rightarrow a_n = 3n + 2 \quad -2$$

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad -3$$

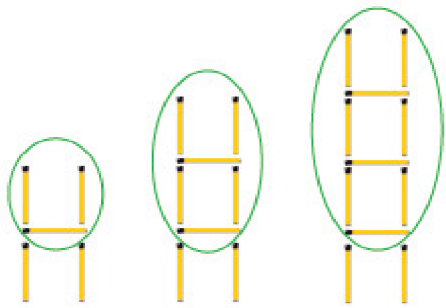
$$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2 \quad -4$$

همان جواب آیدا است $a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2 \Rightarrow$ جواب آيسا -5

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62 \quad -5$$

$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25 \quad -6$$

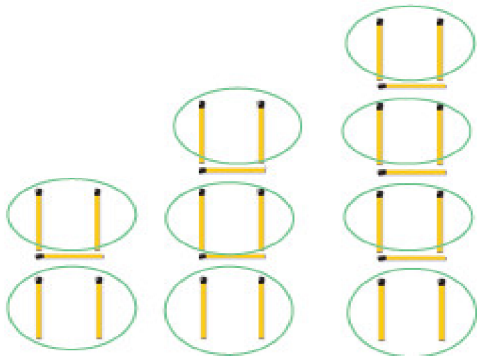
۱۱-۱- آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2$$

$$a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = \dots \quad a_n = \dots$$

۲- آيسا روش ديگري را به كار برد. او تعداد چوب کبريت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2)$$

چوب های افقی چوب های عمودی

$$a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10 + 1)2 \quad \dots \quad a_n = \dots$$

۳- آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

۴- همان‌طور که دیدید، آیدا و آيسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت‌های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n + 1)(2)$ به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

۵- به کمک رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبريت‌های شکل بیستم را بنویسید.

۶- با استفاده از رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبريت است؟

« پاسخ »

۱- $a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$ -۱

۲- $a_n = n + (n + 1)2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$ -۲

۳- $a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3$ -۳

$a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$ -۴

همان جواب آیدا است $\Rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2$ -۴

$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$ -۵

$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$ -۶

۱۲- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۶, ۱۳, ۲۴, ...

« پاسخ »

$$a_n = an^2 + bn + c$$

دنباله تفاضل جملات
۶, ۱۳, ۲۴, ... \longrightarrow ۷, ۱۱, ...

$$\Rightarrow a = \text{نصف قدرنسبت دنباله حسابی تفاضل} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_n = 2n^2 + bn + c$$

$$a_2 - a_1 = 8 + 2b + c - 2 - b - c = 7 \Rightarrow 6 + b = 7 \Rightarrow b = 1$$

$$a_1 = 2 + 1 + c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$a_n = 2n^2 + n + 3$$

۱۳- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۷, ۱۳, ۲۳, ...

« پاسخ »

$$a_n = an^2 + bn + c$$

دنباله تفاضل جملات
۷, ۱۳, ۲۳, ... \longrightarrow ۶, ۱۰, ... \Rightarrow نصف قدرنسبت دنباله حسابی تفاضل $= \frac{4}{2} = 2$

$$a_n = 2n^2 + bn + c$$

$$a_2 - a_1 = 8 + 2b + c - 2 - b - c = 6 \Rightarrow 6 + b = 6 \Rightarrow b = 0$$

$$a_1 = 2 + 0 + c = 7 \Rightarrow c = 5$$

$$a_n = 2n^2 + 5$$

۱۴- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۳, ۷, ۱۳, ...

« پاسخ »

$$a_n = an^2 + bn + c$$

دنباله تفاضل جملات
 $3, 7, 13, \dots \longrightarrow 4, 6, \dots \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1$

$$a_n = n^2 + bn + c$$

$$a_2 - a_1 = 4 + 2b + c - 1 - b - c = 4 \Rightarrow b + 3 = 4 \Rightarrow b = 1$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = 1$$

$$a_n = n^2 + n + 1$$

۱۵- جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$ می‌باشد.

(آ) جمله‌ی هفتم دنباله را مشخص کنید.
 (ب) جمله‌ی چندم دنباله برابر $\frac{4}{5}$ است؟

« پاسخ »

۱ نمره

$$a_n = \frac{3n+1}{4n-1} \Rightarrow a_7 = \frac{3(7)+1}{4(7)-1} = \frac{22}{27}$$

(آ)

$$a_n = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{3n+1}{4n-1} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5(3n+1) = 4(4n-1) \Rightarrow 15n+5 = 16n-4$$

(ب)

$$\Rightarrow 5+4 = 16n-15n \Rightarrow n = 9$$