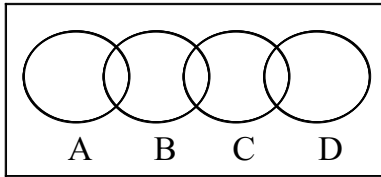


۱- اگر A و B و C و D چهار مجموعه مطابق شکل باشند، تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B \cup C \cup D$ برابر است با:



- (۱) $n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(B \cap C)$
 (۲) $n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(C \cap D)$
 (۳) $n(A) + n(D) + n((B \cup C) - (A \cup D))$
 (۴) $n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(B \cup C)$

۲- اگر $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $|A \cap B| = 2$ و مجموعه $(B - A) \times (A - B)$ دارای ۲۱ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه A کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۳- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $(-1)^n(n+1), 2n+1)$ باشد، چند عدد صحیح بزرگتر از ۷ در مجموعه $\bigcup_{n=1}^5 A_n$ وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۳

۴- A و B و C سه مجموعه هستند که $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$ و $n(A) = 5$ و $n(B) = 6$ و $n(C) = 10$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۵- از میان تعدادی ورزشکار، ۱۳ نفر در رشته‌های A و B ، ۱۶ نفر در رشته‌های B و C ، ۱۴ نفر در رشته‌های A و C و ۳۴ نفر فقط در دو رشته از رشته‌های A ، B و C فعالیت می‌کنند. چند نفر در هر سه رشته فعالیت می‌کنند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶- چه تعداد از اعداد حقیقی بازه $[-1, 3]$ در مجموعه‌ی جواب نامعادله $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2}$ قرار نمی‌گیرد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷- مجموعه‌ی $A = \{x \mid |x| \leq 3\}$ ، $B = \{x \mid x > 2\}$ ، $C = \{x \mid x < 0\}$ بر روی R تعریف شده‌اند. مجموع $(A \cup B) \cap C$ برابر کدام است؟

- (۱) $[-3, 0)$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴) $(-\infty, 0)$

۸- در رابطه بازگشتی $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = \frac{3}{4}$ مقدار a_8 کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{216}$ (۲) $\frac{19}{216}$ (۳) $\frac{15}{256}$ (۴) $\frac{17}{256}$

۹- مجموع ۴ جمله اول یک دنباله حسابی، ۴۰ و مجموع ۳ جمله بعدی آن ۵۱ می‌باشد. جمله اول آن چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۰- اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل تصاعد عددی بدهند، وتر این مثلث چند برابر مجموع دو ضلع دیگر مثلث است؟

- (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۱- در دو دنباله‌ی حسابی مقابل، چند جمله‌ی مشترک کوچک‌تر از ۱۹۰ وجود دارد؟
 $\left\{ \begin{array}{l} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{array} \right.$

(۱) جمله ۹ (۲) جمله ۱۰ (۳) جمله ۱۱ (۴) جمله ۸

۱۲- مجموع سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی ۶۵ و جمله وسط ۳۰٪ مجموع دو جمله دیگر بوده، مقدار این جمله چقدر است؟

(۱) ۶/۵ (۲) ۱۵ (۳) ۱۹/۵ (۴) ۲۰

۱۳- بین ۱ و ۸۱ چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله‌های تصاعد هندسی حاصل برابر با ۱۲۱ گردد؟

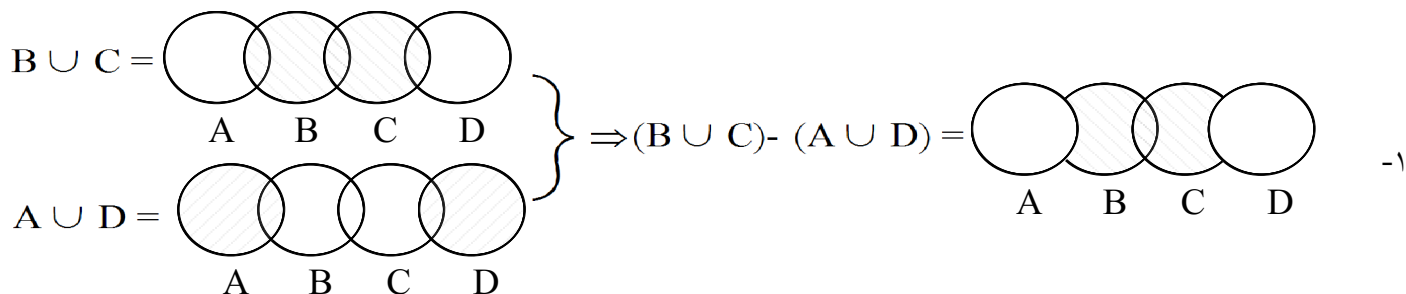
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴- در یک تصاعد هندسی مجموع چهار جمله‌ی اول برابر ۱۰ و جمله‌ی پنجم از جمله‌ی اول ده واحد بیشتر است. قدر نسبت تصاعد کدام است؟

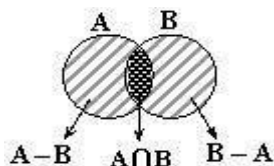
(۱) $q = 3$ (۲) $q = 2$ (۳) $q = 1/5$ (۴) $q = \frac{4}{3}$

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، تفاضل جمله‌های پنجم و اول برابر ۹ و مجموع دو جمله‌ی پنجم و هفتم برابر ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{3}$



بنابراین برای بدست آوردن $A \cup B \cup C \cup D$ کافی است دو مجموعه A و D را به مجموعه فوق اضافه کنیم. پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از روی شکل به سادگی مشخص می شود که:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|$$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 5 - 2 = 3 \quad \text{بنابراین:}$$

از طرفی می دانیم $|A \times B| = |A| |B|$ پس:

$$|(B - A) \times (A - B)| = |B - A| |A - B| = 21 \Rightarrow |A - B| = 7$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \Rightarrow 7 = |A| - 2 \Rightarrow |A| = 9$$

نکات:

۱- تعداد اعضای مجموعه $A - B$ برابر $|A| - |A \cap B|$ است. (نماد $|A|$ به معنی تعداد اعضای A است.)

۲- تعداد اعضای حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ برابر حاصل ضرب $|A| |B|$ است.

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A_1 = \{-2, 2\}, A_2 = \{2, 5\}, A_3 = \{-4, 7\}, A_4 = \{5, 9\}, A_5 = \{-6, 11\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^5 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{-6, 11\}$$

مجموعه $(-6, 11)$ شامل سه عدد صحیح ۸ و ۹ و ۱۰ بزرگتر از ۷ می باشد.

نکته: اگر $A \subset B$ آن گاه $A \cup B = B$.

۴- مجموعه های A و B و C دویدو از هم جدا هستند، پس:

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 0$$

و همچنین

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

پس:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

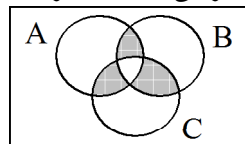
$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 5 + 6 + 10 = 21$$

و لذا گزینه ۴ صحیح است.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به صورت سؤال، $n(A \cap B) = 13$ ، $n(B \cap C) = 16$ ، $n(A \cap C) = 14$

و تعداد نفراتی که در منطقه ی هاشورخورده قرار دارند، برابر با ۳۴ نفر هستند. فرض کنیم تعداد نفراتی که در هر سه

رشته فعالیت می کنند، x باشد. با توجه به نمودار ون داریم:



$$34 = 13 + 16 + 14 - 3x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین گزینه ۲ درست است.

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2} \xrightarrow{x \neq 1} |x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس ۳ عدد $\{-1, 1, 3\}$ در مجموعه جواب نمی باشد.

۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \{x | -3 \leq x \leq 3\}, B = \{x | x > 2\}, C = \{x | x < 0\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [-3, 0) \cup \emptyset = [-3, 0)$$

۸- معادله بازگشتی را بصورت $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2}$ می‌نویسیم. در اینصورت:

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

پس دو عدد ثابت c و d وجود خواهند داشت بطوریکه:

$$a_n = (c + dn) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

به ازاء $a_1 = \frac{3}{2}$ و $a_2 = 1$ دو عدد c و d محاسبه می‌گردند:

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow c=1 \\ n=1 \Rightarrow \frac{3}{2}(c+d) = \frac{1}{2} \Rightarrow d=2 \Rightarrow a_n = (1+2n) \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_8 = \frac{17}{256} \end{cases}$$

یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۹- با توجه به مفروضات مسأله نتیجه می‌گیریم مجموع ۷ جمله اول برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} S_7 = 91 &\Rightarrow \frac{7(2a_1 + 6d)}{2} = 91 \Rightarrow \frac{7 \times 2(a_1 + 3d)}{2} = 91 \Rightarrow a_1 + 3d = \frac{91}{7} = 13 \\ S_4 = 40 &\Rightarrow \frac{4(2a_1 + 3d)}{2} = 40 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{2 \times 40}{4} = 20 \end{aligned} \right\} \text{پس:}$$

$$\Rightarrow (2a_1 + 3d) - (a_1 + 3d) = 20 - 13 \Rightarrow a_1 = 7$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 2b = a + c \Rightarrow c = 2b - a \Rightarrow c^2 = 4b^2 + a^2 - 4ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4b^2 + a^2 - 4ab \Rightarrow 3b^2 = 4ab \xrightarrow{b \neq 0} b = \frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow c = 2b - a = \frac{5}{3}a$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b} = \frac{\frac{5}{3}a}{a + \frac{4}{3}a} = \frac{5}{7}$$

$$\begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow d = \text{م.م.ك}(4, 5) = 20$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

در دنباله‌ی حسابی جدید که جمله‌های آن جملات مشترک دو دنباله هستند $a_1 = 7$ و $d = 20$ بنابراین جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است.

$$a_n = 7 + 20(n-1) \Rightarrow a_n = 20n - 13$$

$$a_n < 190 \Rightarrow 20n - 13 < 190 \Rightarrow 20n < 203 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 10$$

$$\left. \begin{aligned} a_n + a_{n+1} + a_{n+2} &= 65 \\ a_{n+1} &= \frac{30}{100}(a_n + a_{n+2}) \Rightarrow a_n + a_{n+2} = \frac{100}{30}a_{n+1} = \frac{10}{3}a_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad -12$$

$$\Rightarrow a_{n+1} + \frac{10}{3}a_{n+1} = 65 \Rightarrow \frac{13}{3}a_{n+1} = 65 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3 \times 65}{13} = 3 \times 5 = 15$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳- فرض می‌کنیم m جمله بین ۱ و ۸۱ درج کرده باشیم پس در مجموع $(m+2)$ جمله داریم که جمله اول $a_1 = 1$ و جمله $(m+2)$ ام، a_{m+2} است پس:

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{m+2} = \frac{(1)(q^{m+2} - 1)}{q - 1} \\ a_n &= a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{m+2} = (1)q^{m+1} = 81 \Rightarrow q^{m+2} = 81q \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 121 = \frac{81q - 1}{q - 1} \Rightarrow 121q - 121 = 81q - 1 \Rightarrow 121q - 81q = 121 - 1$$

$$\Rightarrow 40q = 120 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow q^{m+1} = 81 \Rightarrow 3^{m+1} = 81 = 3^4 \Rightarrow m+1 = 4 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a_5 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1 q^4 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1 q^4 - a_1 = 10 \Rightarrow a_1 (q^4 - 1) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-10}{1 - q} = 10 \Rightarrow 1 - q = -1 \Rightarrow q = 2$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$t_5 - t_1 = aq^4 - a = 9 \Rightarrow a(q^4 - 1) = 9 \quad (1)$$

$$t_5 + t_7 = aq^6 + aq^4 = 36 \Rightarrow aq^4(1 + q^2) = 36 \quad (2)$$

دو معادله (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a(q^4 - 1)}{aq^4(1 + q^2)} = \frac{9}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q} = \frac{1}{4} \Rightarrow q^4 - 4q^2 + 4 = 0 \Rightarrow (q^2 - 2)^2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{دنباله ی صعودی}} q = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow a((\sqrt{2}^4) - 1) = 9 \Rightarrow a = 3$$