

۴۴- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

ب)  $\frac{1}{3\sqrt{2} + 4} =$

پ)  $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$

ت)  $\frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} =$

« پاسخ »

۴۵- صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف)  $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

ب)  $\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$

پ)  $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

ت)  $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{8y(y+2)} = \dots$

« پاسخ »

الف)  $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4 - x^2 + 1)}{(x^2+1)\cancel{1}} = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

ب)  $\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2\cancel{1}} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

پ)  $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$

ت)  $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{8y(y+2)} = \frac{\cancel{y}(y-2)\cancel{(y+2)}(y^2 + 3)}{8\cancel{y}(y+2)}$   
 $= \frac{(y-2)(y^2 + 3)}{8}$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

۴۶- الف) مخرج کسر روبه‌رو را گویا کنید.

ب) اگر  $x + \frac{1}{x} = 3$  باشد، حاصل  $x^2 + \frac{1}{x}$  را بیابید.

$$x^3 + x^2 - 4x - 4$$

پ) تجزیه کنید:

« پاسخ »

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}} = \frac{''}{x-1}$$

الف)

$$x^2 + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

ب)

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x^2 - 4)(x+1) \\ = (x-2)(x+2)(x+1)$$

پ)

$$x^6 - y^6$$

۴۷- عبارت مقابل را تا حد ممکن تجزیه کنید.

« پاسخ »

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$27x^3 - 8y^3$$

۴۸- تجزیه کنید.

« پاسخ »

$$27x^3 - 8y^3 = (3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$$

$$\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}}$$

۴۹- مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

« پاسخ »

$$\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}} \times \frac{9 + 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{9 + 4\sqrt{5}}{81 - 80} = 9 + 4\sqrt{5}$$

۵۰- گویا کنید.

الف)  $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

ب)  $\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2+1}}$

« پاسخ »

الف)  $\frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$

ب)  $\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2+1}} \times \frac{\sqrt[3]{2+1}}{\sqrt[3]{2+1}} = \frac{3(\sqrt[3]{2+1})}{2+1} = \sqrt[3]{2+1}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$

۵۱- مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

« پاسخ »

$\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9}{x-27}$

۵۲- حاصل اتحادهای زیر را حساب کنید.

الف)  $(x-2)^3$

ب)  $(3x+y)^3$

« پاسخ »

الف)  $(x)^3 + 3(x)^2(-2) + 3(x)(-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

ب)  $(3x)^3 + 3(3x)^2(y) + 3(3x)(y)^2 + (y)^3 = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

۵۳- جاهای خالی را پر کنید.

$$۱) (\dots - \dots)(۴a^۲ + ۶ab + ۹b^۲) = \dots - \dots$$

$$۲) (۳x - ۵y)(\dots + \dots + \dots) = ۲۷x^۳ - ۱۲۵y^۳$$

$$۳) (۱۰x + \dots)(۱۰۰x^۲ - \dots + ۴) = \dots + \dots$$

$$۴) (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots) = \sqrt[۴]{۸} - \sqrt{۲۷}$$

« پاسخ »

$$۱) (۲a - ۳b)(۴a^۲ + ۶ab + ۹b^۲) = ۸a^۳ - ۲۷b^۳$$

$$۲) (۳x - ۵y)(۹x^۲ + ۱۵xy + ۲۵y^۲) = ۲۷x^۳ - ۱۲۵y^۳$$

$$۳) (۱۰x + ۲)(۱۰۰x^۲ - ۲۰x + ۴) = ۱۰۰۰x^۳ + ۸$$

$$۴) (\sqrt[۴]{۲} - \sqrt[۴]{۳})(\sqrt[۴]{۲} + \sqrt[۴]{۱۸} + ۳) = \sqrt[۴]{۸} - \sqrt{۲۷}$$

۵۴- جاهای خالی را پر کنید.

$$۱) (\dots + \dots)(\dots - \dots + \dots) = x^۳ + ۸$$

$$۲) (\dots + y)(\dots - \dots + \dots) = \sqrt[۴]{۸}x^۳ + \dots$$

$$۳) (\dots - \dots)(\dots + ۶xy + \dots) = ۲۷x^۳ - \dots$$

$$۴) (x - ۱)(\dots + ۱)(x^۴ + \dots + \dots) = x^۶ - ۱$$

« پاسخ »

$$۱) (x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴) = x^۳ + ۸$$

$$۲) (\sqrt[۴]{۲}x + y)(۲x^۲ - \sqrt[۴]{۲}xy + y^۲) = \sqrt[۴]{۸}x^۳ + y^۳$$

$$۳) (۳x - ۲y)(۹x^۲ + ۶xy + ۴y^۲) = ۲۷x^۳ - ۸y^۳$$

$$۴) (x - ۱)(x + ۱)(x^۴ + x^۲ + ۱) = x^۶ - ۱$$

۵۵- جاهای خالی را به کمک اتحاد چاق و لاغر پر کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱) & (\dots)(\dots) = x^3 - ۱۲۵y^3 \\
 ۲) & (\dots)(\dots) = \frac{۸x^3}{۲۷} - ۱۲۵y^3 \\
 ۳) & (۱۰x - \sqrt[3]{۳})(\dots) = \\
 ۴) & (\sqrt{۵} - \sqrt[3]{۳})(\dots) =
 \end{aligned}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned}
 ۱) & (x - ۵y)(x^2 + ۵xy + ۲۵y^2) = x^3 - ۱۲۵y^3 \\
 ۲) & \left(\frac{۲x}{۳} - ۵y\right)\left(\frac{۴x^2}{۹} + \frac{۱۰}{۳}xy + ۲۵y^2\right) = \frac{۸x^3}{۲۷} - ۱۲۵y^3 \\
 ۳) & (۱۰x - \sqrt[3]{۳})(۱۰۰x^2 + ۱۰\sqrt[3]{۳}x + \sqrt[3]{۹}) = ۱۰۰۰x^3 - ۳ \\
 ۴) & (\sqrt{۵} - \sqrt[3]{۳})(۵ + \underbrace{\sqrt[۶]{۱۱۲۵}}_* + \sqrt[3]{۹}) = \sqrt{۱۲۵} - ۳
 \end{aligned}$$

$$* \text{ برای قسمت ۴ } \Rightarrow \sqrt{۵} \times \sqrt[3]{۳} = \sqrt[۶]{۱۲۵} \times \sqrt[۶]{۹} = \sqrt[۶]{۱۱۲۵}$$

۵۶- گویا کنید.

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})}{\cancel{x-y}} \\
 & = (x+y)(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})
 \end{aligned}$$

۵۷- الف) عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$8x^3 - 27$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

ب) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

« پاسخ »

۲ نمره

الف)  $8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

ب) 
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

۵۸- مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

« پاسخ »

۱ نمره

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \times \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$$

۵۹- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

« پاسخ »

$x, y > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}} &= \frac{(\sqrt{x+\sqrt{y}}) - (\sqrt{x-\sqrt{y}})}{(\sqrt{x-\sqrt{y}})(\sqrt{x+\sqrt{y}})} \\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}}{x-y} = \frac{2\sqrt{y}}{x-y} \end{aligned}$$

۶۰- حاصل را به کمک اتحادها بدست آورید. ( $x > 0$ )

$$(\sqrt{x} - x)(x^2 + x^3 + x^4)(\sqrt{x} + x)(x^6 + x^{12} + x^9)$$

« پاسخ »

$$(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x) = x - x^2$$

$$(x - x^2)(x^2 + x^3 + x^4) = (x)^3 - (x^2)^3 = x^3 - x^6$$

$$(x^3 - x^6)(x^6 + x^9 + x^{12}) = (x^3)^3 - (x^6)^3 = x^9 - x^{18}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^4 + \frac{1}{16}\right) = ?$$

۶۱- حاصل را به کمک اتحادها به دست آورید.

« پاسخ »

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{4} \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = x^4 - \frac{1}{16} \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$\left(x^4 - \frac{1}{16}\right)\left(x^4 + \frac{1}{16}\right) = (x^4)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = x^8 - \frac{1}{256}$$

۶۲- حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$(الف) (x^2 - x + 1)^2 \quad (ب) (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^3 - 8)$$

« پاسخ »

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

اتحاد مربع سه جمله‌ای:

(الف)

$$(x^2 - x + 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + (1)^2 + 2(x^2)(-x) + 2(-x)(1) + 2(x^2)(1)$$

$$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + 2x^2 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

(ب) اتحاد مزدوج و مجموع مکعبات:

$$(a + b)(b^2 - ab + a^2) = a^3 + b^3 \quad \text{و} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^3 - 8) = (x^3 + 2^3)(x^3 - 8) = (x^3 + 8)(x^3 - 8) = (x^3)^2 - (8)^2 = x^6 - 64$$



۶۳- عبارتهای زیر را به عوامل اول تجزیه کنید:

الف)  $z^3x - zx^3$

ب)  $12y - 2y^2 - 18$

« پاسخ »

الف)  $z^3x - zx^3 = zx(z^2 - x^2)$  فاکتورگیری  
 $= zx(z+x)(z-x)$  اتحاد مزدوج

ب)  $12y - 2y^2 - 18 = -2(-6y + y^2 + 9)$  فاکتورگیری  
 $= -2(y-3)^2$  اتحاد مربع ۲ جمله ای

۶۴- عبارتهای زیر را تجزیه کنید:

الف)  $\frac{9m^2}{25} + \frac{25}{9m^2} - 2$

ب)  $a^2 - 9b^2 + 3\left(b + \frac{a}{3}\right)$

« پاسخ »

الف)  $\frac{9m^2}{25} + \frac{25}{9m^2} - 2 = \left(\frac{3m}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{3m}\right)^2 - 2\left(\frac{3m}{5}\right)\left(\frac{5}{3m}\right) = \left(\frac{3m}{5} - \frac{5}{3m}\right)^2$

ب)  $a^2 - 9b^2 + 3\left(b + \frac{a}{3}\right) = a^2 - 9b^2 + 3b + a = (a^2 - 9b^2) + (3b + a)$   
 $= (a + 3b)(a - 3b) + (a + 3b) = (a + 3b)(a - 3b + 1)$

۶۵- تجزیه کنید:

الف)  $3x^2 - x - 2$

ب)  $-9x^2 + 13x + 10$

« پاسخ »

الف)  $A = 3x^2 - x - 2$

$3A = (3x)^2 - (3x) - 6$

$3A = (3x - 3)(3x + 2)$

$3A = 3(x - 1)(3x + 2)$

$A = (x - 1)(3x + 2)$

ب)  $B = -9x^2 + 13x + 10$

$-9B = (9x)^2 - 13(9x) - 90$

$-9B = (9x - 18)(9x + 5)$

$-9B = -9(-x + 2)(9x + 5)$

$B = (2 - x)(9x + 5)$