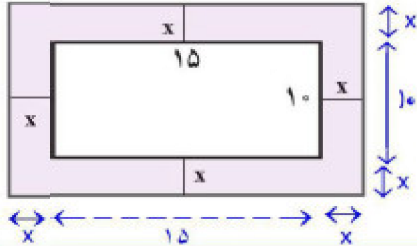


۱- یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

« پاسخ »

طبق شکل، طول مستطیل $2x + 15$ و عرض آن $2x + 10$ است. بنابراین طبق فرمول مساحت:



$$(2x + 10)(2x + 15) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 25x - 75 = 0$$

$$\Delta = 1225 \quad \xrightarrow{\quad} x = \frac{-25 \pm 35}{4}$$

غیرقابل قبول $x = -15$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ می باشد.}$$

۲- اختلاف سنی دو برابر با یک‌دیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چه قدر است؟

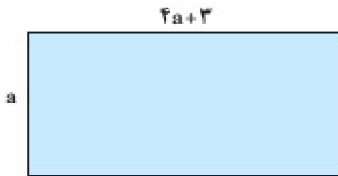
« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} = x + 4 \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 4 \xrightarrow{\quad} = x + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 4)(x + 8) = 60$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 14) = 0$$

غیرقابل قبول چون سن منفی نداریم $x = -14$

برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله اند. $\Rightarrow x = 2$



۳- طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیش‌تر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$S = a(4a + 3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \quad \Delta = 729 \quad \xrightarrow{\quad} a = \frac{-3 \pm 27}{8}$$

غیرقابل قبول $a = -\frac{15}{4}$

عرض مستطیل ۳ و طول آن ۵۱ است $\Rightarrow a = 3$

۴- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

« پاسخ »

اگر آن دو عدد k و $k + ۲$ باشند، بنابراین:

$$k^2 + (k + 2)^2 = 290 \Rightarrow k^2 + k^2 + 4k + 4 = 290 \Rightarrow 2k^2 + 4k - 286 = 0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$k^2 + k - 143 = 0 \Rightarrow (k + 13)(k - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -13 \Rightarrow -11 \text{ و } -13 \\ k = 11 \Rightarrow 13 \text{ و } 11 \end{cases}$$

۵- هریک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad 2x^2 &= 250 & (۱) \\ ۲) \quad 9 - 6z + z^2 &= 0 & (۲) \\ ۳) \quad 4a^2 + 3a &= 1 & (۳) \\ ۴) \quad b^2 + \sqrt{2}b - 4 &= 0 & (۴) \end{aligned}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} ۱) \quad 2x^2 &= 250 \xrightarrow{\div 2} x^2 = 125 \Rightarrow x = \pm\sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5} \\ ۲) \quad 9 - 6z + z^2 &= 0 \Rightarrow (z - 3)^2 = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3 \\ ۳) \quad 4a^2 + 3a &= 1 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 25} a = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, a = -1 \\ ۴) \quad b^2 + \sqrt{2}b - 4 &= 0 \xrightarrow{\Delta = 18} b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow b &= \sqrt{2}, b = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۶- هریک از معادله‌های زیر را با روش فرمولی کلی حل کنید.

$$\begin{aligned} r - r^2 &= 3 \quad (2) & 4x^2 - 13x + 3 &= 0 \quad (1) \\ \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} &= 0 \quad (4) & a^2 + 2\sqrt{3}a &= 9 \quad (3) \end{aligned}$$

« پاسخ »

$$1) 4x^2 - 13x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 169 - 48 = 121} x = \frac{13 \pm 11}{8} \Rightarrow x = 3, x = \frac{1}{4}$$

$$2) r - r^2 = 3 \Rightarrow r^2 - r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$3) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 48} a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$4) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 81} t = \frac{3 \pm 9}{4} \Rightarrow t = 3, t = \frac{-3}{2}$$

۷- معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\begin{aligned} s^2 - 3s + 3 &= 0 \quad (2) & x^2 - 6x &= 7 \quad (1) \\ 2a^2 + 5a - 3 &= 0 \quad (4) & r^2 + 4r + 4 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

« پاسخ »

$$1) x^2 - 6x + 9 = 7 + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Rightarrow x - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$2) s^2 - 3s = -3 \Rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{غیرممکن است}$$

معادله جواب حقیقی ندارد

$$3) r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^2 = 0 \Rightarrow r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} a^2 + \frac{5}{2}a = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(a + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

۸- هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

$$x^2 + 12 = 3 \quad (2)$$

$$3 - 3k = 3k(2k - 1) \quad (4)$$

$$n^2 - 2 = 26 \quad (1)$$

$$(3t - 2)^2 = 4 \quad (3)$$

« پاسخ »

$$1) n^2 - 2 = 26 \Rightarrow n^2 = 28 \Rightarrow \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7}$$

$$2) x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow \text{غیرممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$3) (3t - 2)^2 = 4 \Rightarrow 3t - 2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3t - 2 = 2 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \\ 3t - 2 = -2 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$4) 3 - 3k = 3k(2k - 1) \Rightarrow 3 - 3k = 6k^2 - 3k \Rightarrow 3 = 6k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹- معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$5t^2 = 20 \quad (2)$$

$$4k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 11x = -10 \quad (1)$$

$$5a^2 - 7a = 2a(a - 3) \quad (3)$$

« پاسخ »

$$1) x^2 - 11x = -10 \Rightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$2) 5t^2 = 20 \Rightarrow 5t^2 - 20 = 0 \Rightarrow 5(t - 2)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a - 3) \Rightarrow 5a^2 - 7a = 2a^2 - 6a \Rightarrow 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$4) 4k^2 - 12k + 8 = 0 \Rightarrow 4(k - 1)(k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

۱۰- معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

« پاسخ »

معادله جواب حقیقی ندارد $\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$ (الف)

ب) $\Delta = 1^2 - 4(-2) \times 3 = 25 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

پ) $\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$

۱۱- معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 + 2x = 24$ (الف) ب) $t^2 + 3t = 3$ (ب) پ) $n^2 - 4n + 5 = 0$ (پ) ت) $2r^2 + r - 2 = 0$ (ت)

« پاسخ »

الف) $x^2 + 2x + 1 = 25 \Rightarrow (x+1)^2 = 25 \Rightarrow x+1 = \pm 5 \Rightarrow x = 4, x = -6$

ب) $t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow t + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$

پ) $n^2 - 4n = -5 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 = -5 + 4 \Rightarrow (n-2)^2 = -1 \Rightarrow$ غیر ممکن است

معادله جواب حقیقی ندارد.

ت) $2r^2 + r = 2 \xrightarrow{\div 2} r^2 + \frac{1}{2}r = 1 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16} \Rightarrow \left(r + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$

$\Rightarrow r + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

۱۲- به ازای چه مقادیری از a ، $(a - 1)x^2 + (a - 8)x + a + 7 = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

« پاسخ »

$$(a - 8)^2 - 4(a - 1)(a + 7) = 0$$

$$-3a^2 - 40a + 92 = 0$$

$$a = 2 \text{ و } a = -\frac{46}{3}$$

۱۳- به ازای چه مقدار از a ، $x^2 - 3x - a = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

« پاسخ »

برای آن که دارای ریشه‌ی مضاعف باشد باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(-a) = 0 \Rightarrow 4a = -9 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$$

۱۴- به ازای چه مقادیری از a ، $2x^2 - ax + 8 = 0$ دارای ریشه مضاعف است؟

« پاسخ »

برای آن که دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(8) = 0 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

۱۵- جمع ریشه‌های معادله $(x - 2)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(x - 2)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm(\sqrt{3} - 1)$$

$$\begin{cases} x - 2 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{3} + 1 \\ x - 2 = -\sqrt{3} + 1 \Rightarrow x = -\sqrt{3} + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 3 = 4$$

۱۶- در معادله زیر حدود m را طوری تعیین کنید که معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز باشد.

$$mx^2 - 4x - 1 = 0$$

« پاسخ »

معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است بنابراین $\Delta > 0$ است.

$$a = m, b = 4, c = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 16 - 4(m)(-1) > 0 \Rightarrow 16 + 4m > 0$$

$$\Rightarrow 4m > -16 \Rightarrow m > -4$$

البته باید $m \neq 0$ باشد زیرا اگر $m = 0$ باشد معادله درجه اول می‌شود، بنابراین:

$$m \in (-4, +\infty) - \{0\}$$

$$(m+3)x^2 - 2mx + (m-5) = 0 \text{ حدود } m \text{ را طوری تعیین کنید که معادله ی}$$

الف) دارای دو ریشه‌ی متمایز باشد. ب) دارای یک ریشه‌ی مضاعف باشد.

ج) فاقد ریشه باشد. د) دارای ریشه‌ی صفر باشد.

« پاسخ »

$$a = m + 3 \quad b = -2m \quad c = m - 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m+3)(m-5) = 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 15)$$

$$= 4m^2 - 4m^2 + 8m + 60$$

$$\Delta = 8m + 60$$

$$\text{الف) } \Delta = 8m + 60 > 0 \Rightarrow 8m > -60 \Rightarrow m > -\frac{60}{8} \Rightarrow m > -\frac{15}{2}$$

$$\text{ب) } \Delta = 8m + 60 = 0 \Rightarrow m = -\frac{15}{2}$$

$$\text{ج) } \Delta = 8m + 60 < 0 \Rightarrow m < -\frac{15}{2}$$

$$\text{د) } x = 0 \Rightarrow (m+3)(0)^2 - 2m(0) + m - 5 = 0 \Rightarrow m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$$

۱۸- جدول زیر را کامل کنید.

معادله	Δ	

« پاسخ »

$$x^2 - x = 5x - 10 \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4$$

$$x^2 = 3x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 12 = 21$$

معادله	Δ	
	-4	صفر
	21	2

۱۹- مربع سن ۶ سال پیش آرش از دو برابر سن فعلی اش ۴ واحد کم تر است. آرش چند سال دارد؟

« پاسخ »

x : سن فعلی آرش

$$(x - 6)^2 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 & \text{ق ق} \\ x = 4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۰- هریک از معادلات زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

الف) $(2x - h)^2 = k^2$

ب) $3x^2 + 1 = 0$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 2x - h = \pm k \Rightarrow \begin{cases} 2x - h = k \Rightarrow x = \frac{h + k}{2} \\ 2x - h = -k \Rightarrow x = \frac{h - k}{2} \end{cases}$$

ب) $3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ ریشه ی حقیقی ندارد.

۲۱- معادله‌های درجه دوم زیر را از روش‌های خواسته شده، حل کنید.

الف) $5x = x^2$ (تجزیه)

ب) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ (فرمول کلی یا دلتا: Δ)

ج) $(2x - 1)^2 - 81 = 0$ (ریشه زوج)

« پاسخ »

صفحه ۵۶ و ۶۷ کتاب

الف) $5x - x^2 = x(5 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0/25) \\ x = 5 & (0/25) \end{cases}$

ب) $9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (0/25)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$

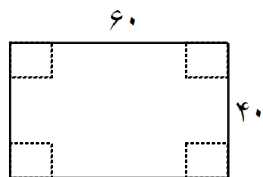
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm 0}{18} \Rightarrow x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \quad (0/25)$

$(2x - 1)^2 = 81 \quad (0/25) \Rightarrow 2x - 1 = \pm 9 \quad (0/25)$

ج) $2x = 10 \Rightarrow x = 5 \quad (0/25)$

$2x = -8 \Rightarrow x = -4 \quad (0/25)$

۲۲- در یک مغازه‌ی کف‌شالی، با داشتن مقواهای مستطیل شکل به طول ۶۰ سانتی‌متر و عرض ۴۰ سانتی‌متر با بریدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مستطیل بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ۲۴۰۰ سانتی‌متر مکعب شود؟



« پاسخ »

اگر طول ضلع مربع‌های کوچک را x فرض کنیم، خواهیم داشت:

$\text{حجم} = (60 - 2x)(40 - 2x)x = 2400$

معادله‌ی حاصل یک معادله‌ی از درجه‌ی سوم است که باید به روش آزمون و خطا جواب آن را بیابیم.

۲۳- برای چه مقدار از m معادله‌ی $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

« پاسخ »

$\Delta = 4m^2 - 4(m + 1)(m - 2) = 0 \Rightarrow 4m + 8 = 0 \Rightarrow m = -2$

۲۴- در معادله $x^2 - (m - 3)x + m - 2 = 0$ مقدار m را چنان تعیین کنید که الف) دو ریشه معادله، برابر باشند. ب) یکی از ریشه‌ها برابر m باشد.

« پاسخ »

الف) $\Delta = 0 \rightarrow (m - 3)^2 - 4(m - 2) = 0$

$$\rightarrow m^2 - 6m + 9 - 4m + 8 = 0 \rightarrow m^2 - 10m + 17 = 0 \rightarrow m = \frac{+10 \pm \sqrt{10^2 - 4(17)}}{2}$$

$$\rightarrow m = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

ب) $x_1 = m \rightarrow (m)^2 - (m - 3)(m) + m - 2 = 0$

$$\rightarrow m^2 - m^2 + 3m + m - 2 = 0 \rightarrow 4m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۲۵- مقدار m را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر برابر $\frac{1}{4}$ باشد. سپس معادله را حل کنید.

$$(m + 5)x^2 + (m - 6)x + 4 - m = 0$$

« پاسخ »

ریشه‌ی معادله باید در معادله صدق کند، $x = \frac{1}{4}$ را در معادله جاگذاری می‌کنیم:

$$(m + 5)\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (m - 6)\left(\frac{1}{4}\right) + 4 - m = 0 \rightarrow \left(\frac{m + 5}{4} + \frac{m - 6}{4} + 4 - m = 0\right) \times 4$$

$$\rightarrow m + 5 + 2m - 12 + 16 - 4m = 0 \rightarrow -m + 9 = 0 \rightarrow m = 9$$

بنابراین معادله‌ی اصلی به صورت $14x^2 + 3x - 5 = 0$ درمی‌آید.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(14)(-5)}}{2(14)} = \frac{-3 \pm 17}{28} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-5}{7} \end{cases}$$