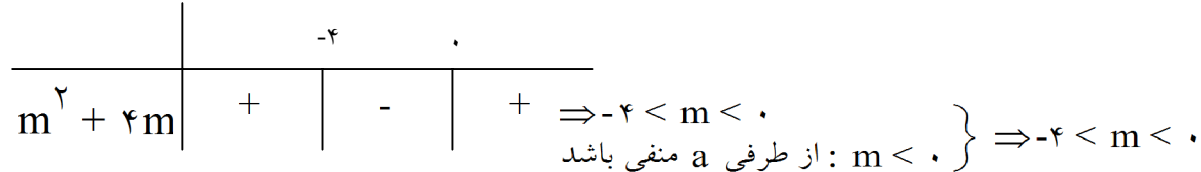


۱- به ازای چه مقادیری از  $m$ ، سهمی  $y = mx^2 - mx - 1$  همواره پایین محور  $x$  هاست؟

« پاسخ »

از فرض سوال نتیجه می‌شود که باید عبارت همواره منفی باشد پس باید دلتا منفی و  $a$  منفی باشند.

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0$$



۲- به ازای چه مقادیری از  $k$ ، عبارت  $A = x^2 + 3x + k$  همواره مثبت است؟

« پاسخ »

با توجه به مثبت بودن  $a$  کفیسست دلتا منفی باشد:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow -4k < -9 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

۳- در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف)  $1 < 2x - 3 \leq 3$     ب)  $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

پ)  $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$     ت)  $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

ث)  $x(x^2 + 4) < 0$     ج)  $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

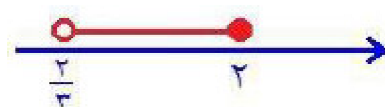
چ)  $|7 - 2x| < 1$     ح)  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

« پاسخ »

الف)  $\xrightarrow{+3} 4 < 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} 2 < x \leq 3 \Rightarrow (2, 3]$



ب)  $\begin{cases} x + 1 \leq 5 - x \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5 - x < 2x + 3 \Rightarrow -3x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cup} \left(\frac{2}{3}, 2\right]$



پ)  $\xrightarrow{\times 2} -4 < 5 - x < 0 \xrightarrow{-5} -9 < -x < -5 \xrightarrow{\times (-)} 9 > x > 5 \Rightarrow (5, 9)$



ت)  $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$

$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

مجموعه جواب =  $(-\frac{1}{3}, 2]$



۴- در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

ب)  $|5 - 2x| \geq 1$

الف)  $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$

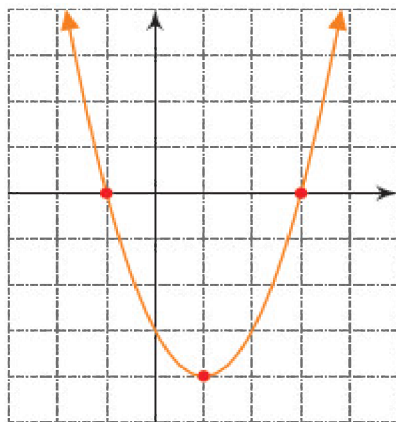
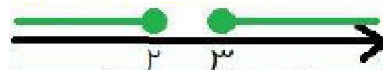
« پاسخ »

الف)  $-\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} -5 < x < -1 \Rightarrow (-5, -1)$



ب)  $|5 - 2x| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 5 - 2x \geq 1 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5 - 2x \leq -1 \Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$

$\Rightarrow (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$



۵- سهمی  $y = x^2 - 2x - 3$  را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیر از  $x$ ، نمودار سهمی، پایین محور  $x$  هاست؟

ب) جدول تعیین علامت عبارت  $y = x^2 - 2x - 3$  را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقداری از  $x$ ، علامت  $y$  منفی است؟

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هریک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادله  $x^2 - 2x - 3 < 0$  استفاده کرد.

« پاسخ »

$-1 < x < 3$

الف)

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

ب)

$x$		$-1$		$3$	
$y$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

به ازای  $-1 < x < 3$ ،  $y$  منفی است.

پ)  $x^2 - 2x - 3 < 0$  یعنی مجموعه مقادیری از  $x$  که به ازای آنها  $y < 0$  باشد که با توجه به نمودار  $-1 < x < 3$  مشخص شده است. هم‌چنین به کمک جدول تعیین علامت نیز به همین جواب رسیدیم.

۶- عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

$$B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3} \quad (\text{ب})$$

$$A = (x^2 - 9)(3x - 1) \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف)} \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

		-3	$\frac{1}{3}$	3	
$x^2 - 9$	+	•	-	•	+
$3x - 1$	-	•	-	•	+
A	+	•	+	•	+

$$-x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} x = 3$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = -11} \text{جواب ندارد}$$

		3	
$-x^2 + 6x - 9$	-	•	-
$x^2 + x + 3$	+	•	+
B	-	•	-

۷- هر یک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

A = (3x + 1)(x - 2) (الف)

C = x<sup>3</sup>(7 - x) (پ)

B = (2x - 3)<sup>2</sup> (ب)

D =  $\frac{x-1}{5-2x}$  (ت)

« پاسخ »

x		$-\frac{1}{3}$		2	
3x + 1	-	•	+		+
x - 2	-		-	•	+
A	+	•	-	•	+

(الف)

x		$\frac{3}{2}$			
B = [2x - 3] <sup>2</sup>		•	+		+

(ب)

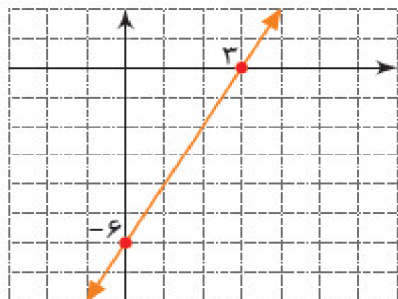
x		0		7	
x <sup>3</sup>	-	•	+		+
7 - x	+		+	•	-
C	-	•	+	•	-

(پ)

x		1		$\frac{5}{2}$	
x - 1	-	•	+		+
5 - 2x	+		+	•	-
D	-	•	+	•	-

(ت)

۸- نمودار خط  $y = 2x - 6$  در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت  $y$  را در جدول زیر بنویسید.



$x$	$x < 3$	$3$	$x > 3$
$y = 2x - 6$		$0$	

« پاسخ »

$x$	$x < 3$	$3$	$x > 3$
$y = 2x - 6$	$-$	$0$	$+$

۹- اگر چند جمله‌ای  $\frac{1}{4}x^2 - (m - 2)x + m - \frac{1}{4}$  به ازای همه‌ی مقادیر  $x$  همواره مثبت باشد حدود  $m$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \frac{1}{4} > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(m - \frac{1}{4}\right) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 < 0 \\ \Rightarrow m^2 - 6m + 5 < 0 \Rightarrow (m - 1)(m - 5) < 0 \Rightarrow 1 < m < 5 \end{cases}$$

$$\frac{2x - 7}{x - 1} \leq 1$$

۱۰- نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

« پاسخ »

$$\frac{2x - 7}{x - 1} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x - 7 - x + 1}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x - 6}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x$		$1$	$6$	
$x - 6$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$P(x) \leq 0$		$ج$		

مجموعه جواب  $=(1, 6]$

$$\frac{x-7}{4-x} \leq 0$$

۱۱- نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

« پاسخ »

$$x-7=0 \Rightarrow x=7$$

$$4-x=0 \Rightarrow x=4$$

x		4	7	
x-7	-	-	•	+
4-x	+	•	-	-
P(x)	-	•	+	•
P(x) ≤ 0	ج			ج

ج

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 4) \cup [7, +\infty)$$

۱۲- تعیین علامت کنید.

$$P = 11 - 2x \text{ (الف)}$$

$$P = \frac{1-x}{x+5} \text{ (ب)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } P = 11 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

x		$\frac{11}{2}$
P	+	•
		-

$$\text{ب) } P = \frac{1-x}{x+5} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

x		-5	1	
1-x	+	+	•	-
x+5	-	•	+	+
P	-	•	+	•

۱۳- تعیین علامت کنید.

$$P(x) = 1 - 3x \text{ (الف)}$$

$$P(x) = x^2 - 25 \text{ (ب)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } P(x) = 1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

x		$\frac{1}{3}$
P(x)	+	•
		-

$$\text{ب) } P(x) = x^2 - 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases}$$

x		-5	5
P(x)	+	•	-
		-	•
		+	+

۱۴- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $|2x - 1| > 5$

ب)  $|4x - 7| < 11$

« پاسخ »

الف)  $|2x - 1| > 5 \Rightarrow 2x - 1 > 5$  یا  $2x - 1 < -5$

$2x > 6$        $2x < -4$

$x > 3$    یا    $x < -2$

ب)  $|4x - 7| < 11 \Rightarrow -11 < 4x - 7 < 11 \xrightarrow{+7} -4 < 4x < 18 \xrightarrow{\div 4} -1 < x < \frac{9}{4}$

۱۵- جواب نامعادله  $|x + |x - 2|| < 10$  را حساب کنید.

« پاسخ »

x	$x < 2$	2	$x \geq 2$
$x - 2$	-	0	+

$x \geq 2 \Rightarrow |x + x - 2| < 10 \Rightarrow |2x - 2| < 10 \Rightarrow -10 < 2x - 2 < 10 \xrightarrow{+2} -8 < 2x < 12$

$\xrightarrow{\div 2} -4 < x < 6$       اشتراک با شرط  $x \geq 2$   $\rightarrow 2 \leq x < 6$  (۱)

$x < 2 \Rightarrow |x - x + 2| < 10 \Rightarrow 2 < 10$       همواره درست بنابراین کل بازه جواب است  $\rightarrow x < 2$  (۲)

$\xrightarrow{(1) \cup (2)} (-\infty, 6)$

۱۶- حدود m را چنان بیابید که  $y = (3m - 2)x^2 + (m + 2)x + 1$  همواره بالای محور x ها قرار گیرد.

« پاسخ »

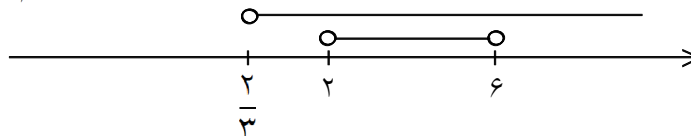
$(3m - 2)x^2 + (m + 2)x + 1 > 0$

$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow 3m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3} \end{cases}$  (۱)

$\Delta < 0 \Rightarrow (m + 2)^2 - 4(3m - 2) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 12m + 8 < 0$

$\Rightarrow m^2 - 8m + 12 < 0 \Rightarrow 2 < m < 6$  (۲)

$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 2 < m < 6$



۱۷- به ازای چه محدوده از  $x$  سهمی  $y = x^2 - 6x + 8$  پایین محور  $x$  ها نیست؟

« پاسخ »

برای آنکه سهمی پایین محور  $x$  ها نباشد باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، بنابراین:

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) \geq 0$$

$x$		۲		۴	
$P(x)$	+	•	-	•	+
		ج		ج	
		ج		ج	

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

$$(25 - x^2)(1 + \sqrt{-x}) \leq 0$$

۱۸- مجموعه جواب نامعادله زیر را حساب کنید.

« پاسخ »

عبارت  $(1 + \sqrt{-x})$  همواره مثبت است و چون در نامعادله ضرب شده است می توان آنرا در نظر نگرفت. البته باید درون رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و با جواب نهایی اشتراک گرفت.

$$\sqrt{-x} \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$25 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5 \text{ یا } x \geq 5 \xrightarrow[\text{اشتراک}]{x \leq 0} x \leq -5$$



۱۹- اگر سهمی  $y = mx^2 - (m+1)x + m - \frac{5}{3}$  همواره پایین محور X ها باشد، حدود m را حساب کنید.

« پاسخ »

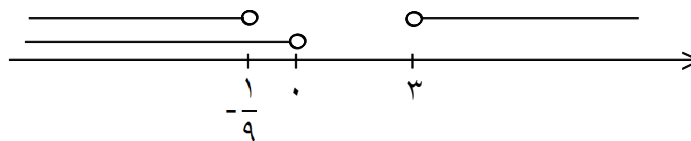
چون سهمی پایین محور X ها می باشد بنابراین باید همواره منفی باشد در نتیجه دو ویژگی زیر را باید داشته باشد.

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow m < 0 & (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4m\left(m - \frac{5}{3}\right) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + \frac{20}{3}m < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3m^2 + \frac{26}{3}m + 1 < 0 \xrightarrow{\times(-3)} 9m^2 - 26m - 3 > 0 \Rightarrow \frac{(9m-27)(9m+1)}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{1}{9} \Rightarrow m > 3 \text{ یا } m < -\frac{1}{9} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m < -\frac{1}{9}$$



۲۰- حدود m را چنان بیابید که سهمی  $y = mx^2 - mx + 1$  پایین تر از سهمی  $y = x^2$  نباشد؟

« پاسخ »

باید سهمی اول را بزرگتر یا مساوی سهمی دوم قرار دهیم.

$$mx^2 - mx + 1 \geq x^2 \Rightarrow mx^2 - x^2 - mx + 1 \geq 0 \Rightarrow (m-1)x^2 - mx + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \{2\}$$

۲۱- مجموعه جواب  $x$  را طوری تعیین کنید که  $\frac{|x-4|(x^2-4)}{x^3-1}$  منفی نباشد.

« پاسخ »

$x$	-۲	۱	۲	۴
$ x-4 $	+	+	+	+
$x^2-4$	+	-	-	+
$x^3-1$	+	-	+	+
$P(x)$	-	+	-	+
	ج	ج	ج	ج

مجموعه جواب =  $[-2, 1) \cup [2, +\infty)$

۲۲- هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^4 - 5x^2 - 36 < 0$

ب)  $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 4} < 0$

« پاسخ »

الف)  $x^4 - 5x^2 - 36 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 + 4)}_{\text{همواره مثبت}} (x^2 - 9) < 0 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < 3$

ب)  $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 4} < 0$

$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$x$	-۲	۰	۱	۲
$x^2$	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$x^2-4$	+	-	-	+
$P(x)$	-	+	+	-
	ج			ج

مجموعه جواب =  $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$

۲۳- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^3 - 3x^2 \leq 0$

ب)  $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - x^4} > 0$

« پاسخ »

الف)  $x^3 - 3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2(x - 3) \leq 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

x	0	3
$x^2$	+   •   +	+
$x - 3$	-	-   •   +
P(x)	-   •   -   •   +	
	ج	ج

مجموعه جواب =  $(-\infty, 3]$

ب)  $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - x^4} > 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$4x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(4 - x^2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

x	-2	-1	0	1	2
$x^2 - 1$	+   +   •   -	-	-   •   +	+	+
$x^2$	+   +   +   •   +	+	+	+	+
	-   •   +	+   +   +	+   +   •	-	-
P(x)	-   •   +	•   -   •   -	•   +   •	-	-
	ج			ج	

مجموعه جواب =  $(-2, -1) \cup (1, 2)$

$\frac{2x - 9}{45} - \frac{3 + x}{10} > \frac{3 - 3x}{18}$

۲۴- نامعادله‌ی مقابل را حل کنید:

« پاسخ »

$90 \times \left( \frac{2x - 9}{45} - \frac{3 + x}{10} > \frac{3 - 3x}{18} \right) \Rightarrow 2(2x - 9) - 9(3 + x) > 5(3 - 3x)$

$\Rightarrow 4x - 18 - 27 - 9x > 15 - 15x \Rightarrow -5x + 15x > 15 + 45 \Rightarrow 10x > 60 \Rightarrow x > 6$

۲۵- نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + 4 < 3 - \frac{2x}{x-1}$$

« پاسخ »

$$\frac{1}{x-1} + 4 < 3 - \frac{2x}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{1 + (x-1) + 2x}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{3x}{x-1} < 0$$

		۰	۱	
$3x$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$\frac{3x}{x-1}$	+	-	+	+

جواب نامعادله عبارت است از:  $0 < x < 1$ .

۲۶- حدود  $x$  را طوری تعیین کنید که  $A = \frac{4-5x}{3(x+2)}$  منفی باشد.

« پاسخ »

$$4 - 5x = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$x$		-۲	$\frac{4}{5}$	
$4-5x$	+	+	-	-
$3(x+2)$	-	+	+	+
$A$	-	+	-	-

حدود  $x$  عبارت است از  $x < -2$  و  $x > \frac{4}{5}$ .

$$(x-1)^2 - (x+2)^2 > 0$$

۲۷- نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

« پاسخ »

$$(x-1)^2 - (x+2)^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4) > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 > 0 \Rightarrow -6x > 3 \Rightarrow x < \frac{3}{-6} \Rightarrow x < \frac{-1}{2}$$

۲۸- عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$P = (x - 2)^3(x + 2)$$

« پاسخ »

x	-۲	۲
$(x - 2)^3$	-	-
$x + 2$	-	+
p	+	+

$$p = 0 \rightarrow x = 2 \text{ و } x = -2$$

دقت کنید که تعیین علامت  $(x - 2)^3$  مثل تعیین علامت  $x = 2$  است چون توان پارانتر فرد است.

۲۹- نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|2x + 1| < |x + 3|$$

« پاسخ »

$$(2x + 1)^2 < (x + 3)^2 \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 < x^2 + 6x + 9 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 < 0$$

عبارت  $p = 3x^2 - 2x - 8$  را تعیین علامت می‌کنیم. جواب  $-\frac{4}{3} < x < 2$  به دست می‌آید.

۳۰- m را طوری تعیین کنید که معادله‌ی  $x^2 + 2mx + 9 = 0$  ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

« پاسخ »

$$\Delta < 0 \rightarrow 4m^2 - 36 < 0 \rightarrow m^2 < 9 \rightarrow -3 < m < 3$$