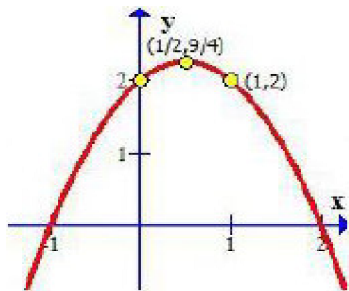


۱- نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$  ها را در نقاط به طول ۱ و -۱ قطع کرده است. معادله‌ی این سهمی را بنویسید و آنرا رسم کنید.

« پاسخ »



$$\begin{aligned} (0, 2) &= 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2 \\ (-1, 0) &\Rightarrow 0 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -2 \\ (2, 0) &\Rightarrow 0 = 4a + 2b + 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \\ \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} &\Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \\ \Rightarrow -2 + b = -1 &\Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  معادله سهمی :  $y = -x^2 + x + 2$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	$\frac{9}{4}$	2

۲- اگر  $(-2, 5)$  و  $(0, 5)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

« پاسخ »

با توجه به این که عرض نقاط یکسان است این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌ی یکدیگرند. به عبارت دیگر محور تقارن از وسط طول‌های این دو نقطه می‌گذرد.

معادله‌ی خط تقارن  $x = \frac{-2 + 0}{2} \Rightarrow x = -1$

۳- نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = -(x+1)^2 - 3$

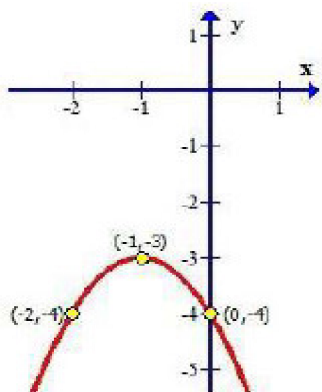
پ)  $y = x - x^2$

ب)  $y = 3x^2 - 2$

ت)  $y = \frac{x^2}{2} + x - 2$

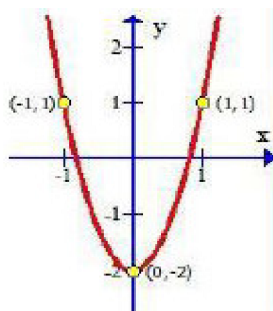
« پاسخ »

(الف)



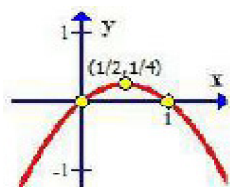
x	y
0	-4
-1	-3
-2	-4

(ب)



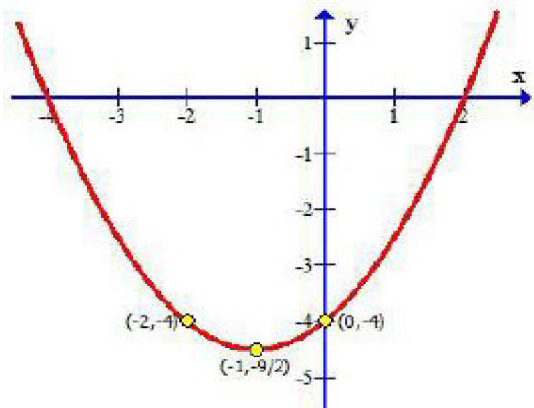
x	-1	0	1
y	1	-2	1

(پ)



x	y
0	0
1/2	1/4
1	0

(ت)



x	-2	-1	0
y	-4	-9/2	-4

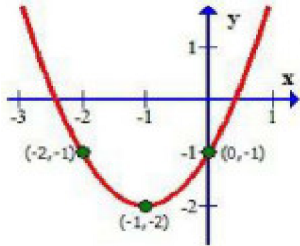
۴- در هریک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آنرا رسم کنید.

ب)  $y = -2x^2 + 1$

الف)  $y = (x+1)^2 - 2$

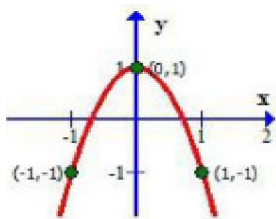
« پاسخ »

الف) رأس سهمی نقطه‌ی  $(-1, -2)$  است.



x	-2	-1	0
y	-1	-2	-1

ب) رأس سهمی نقطه‌ی  $(0, 1)$  است.



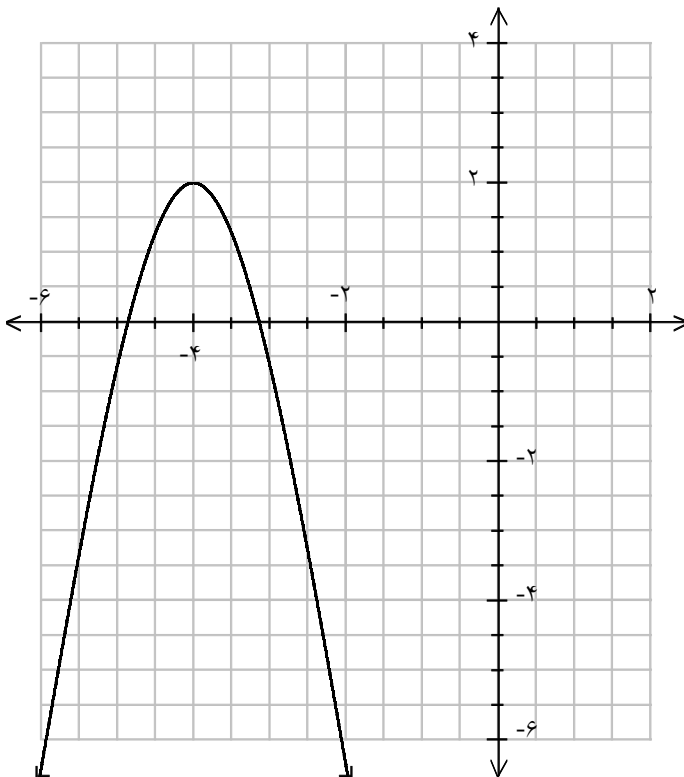
x	y
1	-1
0	1
-1	-1

$y = -2(x+2)^2 + 2$

۵- سهمی زیر را رسم کنید و معادله محور تقارن را بنویسید.

« پاسخ »

محور تقارن:  $x = -4$



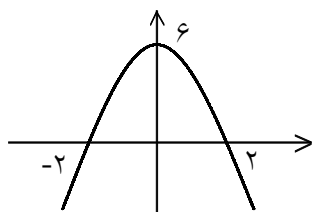
۶- m را طوری تعیین کنید که خط  $y = -2x + m - 3$  بر سهمی  $y = (m - 1)x^2 + 4x + 3m - 2$  در یک نقطه مماس باشد.

« پاسخ »

$$(m - 1)x^2 + 4x + 3m - 2 = -2x + m - 3 \Rightarrow (m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 36 - 4(m - 1)(2m + 1) = 0 \Rightarrow 36 - 4(2m^2 - m - 1) = 0 \xrightarrow{\div 4}$$

$$-2m^2 + m + 10 = 0 \xrightarrow{\times (-1)} 2m^2 - m - 10 = 0 \Rightarrow (2m - 5)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2/5 \\ m = -2 \end{cases}$$



۷- معادله سهمی زیر را بنویسید.

« پاسخ »

ریشه‌های معادله  $x = 2$  و  $x = -2$  است. بنابراین داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{\substack{x_1 = 2 \\ x_2 = -2}} y = a(x - 2)(x + 2)$$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 6 قطع می‌کند.

$$\frac{y = 6}{x = 0} \rightarrow 6 = a(0 - 2)(0 + 2) \Rightarrow a = \frac{6}{-4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2)(x + 2) = -\frac{3}{2}(x^2 - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$

۸- اگر رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + 5$  باشد، a , b را حساب کنید.

« پاسخ »

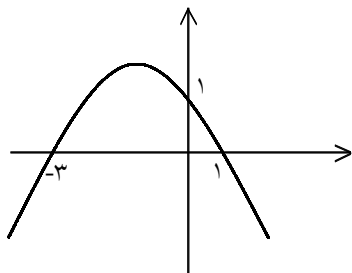
$$x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$S(-1, 4) \xrightarrow{\substack{x = -1 \\ y = 4 \\ b = 2a}} 4 = a(-1)^2 + b(-1) + 5 \Rightarrow a - b + 5 = 4 \Rightarrow a - b = -1$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{b = 2a} a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$

۹- معادله‌ی سهمی زیر را بنویسید.



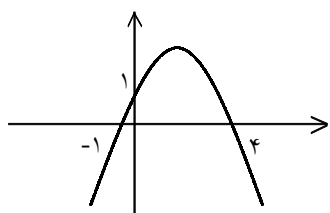
« پاسخ »

سهمی محور X ها را در نقطه‌ی ۱ و -۳ قطع کرده است و برای معادله سهمی داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \text{محله برخورد با محور X ها } x_1, x_2$$

$$y = a(x - 1)(x + 3) \xrightarrow{\text{از نقطه } A(0, 1) \text{ می گذرد}} 1 = a(0 - 1)(0 + 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1)(x + 3) = -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$



۱۰- معادله‌ی سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = ax^2 + bx + c \text{ معادله سهمی}$$

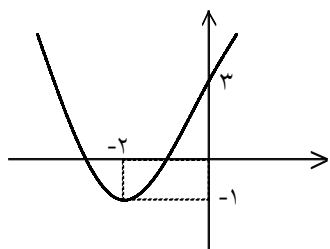
$$A(0, 1) \Rightarrow 1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1$$

$$B(-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -1$$

$$C(4, 0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + 1 \Rightarrow 16a + 4b = -1$$

$$4 \times \begin{cases} a - b = -1 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -4 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow 20a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$



۱۱- معادله‌ی سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{راس سهمی } x_s = \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$$

$$A(0, 3) \Rightarrow 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 3$$

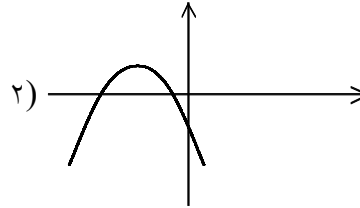
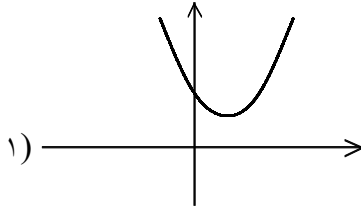
$$S(-2, -1) \Rightarrow -1 = a(-2)^2 + b(-2) + 3 \Rightarrow 4a - 2b = -4 \xrightarrow{b = 4a} 4a - 2(4a) = -4$$

$$\Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4$$

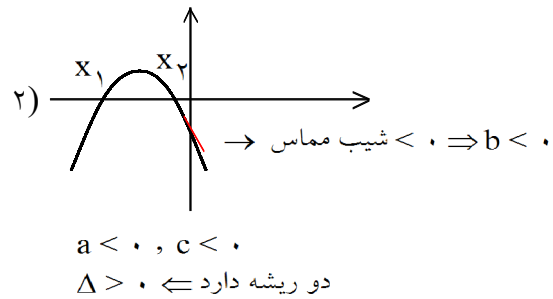
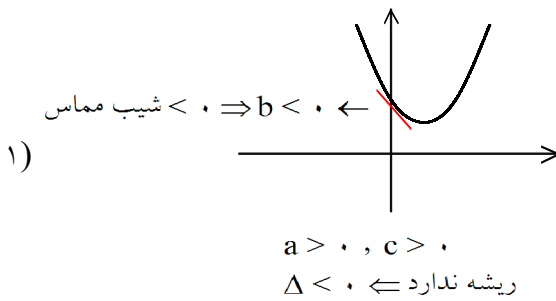
$$y = x^2 + 4x + 3$$

۱۲- جدول زیر را کامل کنید. (علامت a و b و c و Δ را مشخص کنید).

نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱					
۲					



« پاسخ »



نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱	+	-	+	-	صفر
۲	-	-	-	+	۲

۱۳- در سهمی  $y = 2x^2 + ax + b$  اگر رأس سهمی  $S(1, 5)$  باشد، b و a را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{4} = 1 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{\substack{x_0 = 1 \\ y_0 = 5}} 2 - 4 + b = 5 \Rightarrow b = 7$$

۱۴- جاهای خالی را پر کنید.

جهت دهانه سهمی	رأس سهمی	محور تقارن	سهمی
			$y = -x^2 + 10x + 1$
		$x = -1$	$y = 3x^2 + \dots + 1$

« پاسخ »

$$y = -x^2 + 10x + 1 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5 \text{ محور تقارن}$$

$$x_0 = 5 \xrightarrow{\text{راس سهمی}} y = -25 + 50 + 1 = 26 \rightarrow S(5, 26)$$

$a = -1 < 0$  بنابراین دهانه سهمی به طرف پایین باز می‌شود.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{6} = -1 \Rightarrow b = 6 \xrightarrow{\text{معادله سهمی}} y = 3x^2 + 6x + 1$$

$$x_0 = -1 \xrightarrow{\text{راس سهمی}} y_0 = 3 - 6 + 1 = -2 \rightarrow S(-1, -2)$$

$a = 3 > 0$  بنابراین دهانه سهمی به طرف بالا می‌باشد.

۱۵- سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$  ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله‌ی این سهمی را بنویسید.

« پاسخ »

۱/۵ نمره

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=2} a - b = -2 \quad (1)$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (2, 0) \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c \xrightarrow{c=2} 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (2)$$

دارد.

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{a - b = -2} -1 - b = -2$$

$$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$$



۱۶- به ازای چه مقادیری از  $m$ ، نمودار رسمی  $y = x^2 + 3x + m$  همواره بالای محور  $x$  هاست؟

« پاسخ »

۱ نمره

با توجه به این که ضریب  $x^2$  مثبت است کافی است  $\Delta < 0$  باشد:

$$\Delta < 0 : 9 - 4m < 0 \rightarrow 9 < 4m \rightarrow m > \frac{9}{4}$$

۱۷- نمودار سهمی  $y = (x - 1)^2 + 2$  را رسم کنید.

« پاسخ »

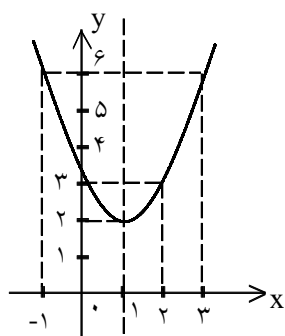
در معادله عمومی سهمی  $y = (x - x_0)^2 + y_0$  نقطه  $S(x_0, y_0)$  رأس سهمی

است و خط  $x = x_0$  محور تقارن سهمی است  $\Rightarrow$  رأس سهمی  $S(1, 2)$   
محور تقارن  $x = 1$

$x$	۱	۰	۲	-۱	۳
$y$	۲	۳	۳	۶	۶

نقاط کمکی

محور تقارن سهمی.



$$y = 3(x - 2)^2$$

۱۸- رأس و خط تقارن سهمی مقابل را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$y = 3(x - 2)^2 + 0 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 0 \Rightarrow \text{رأس } S(2, 0) \quad \text{خط تقارن } x = 2$$

$$y = -2(x + 3)^2 + 4$$

۱۹- رأس و خط تقارن سهمی مقابل را تعیین کنید.

« پاسخ »

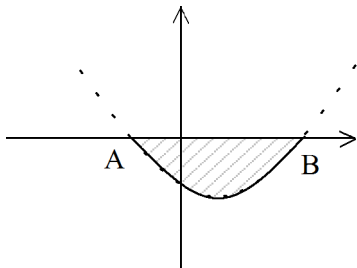
$$y = -2(x + 3)^2 + 4 \Rightarrow x_0 = -3, y_0 = 4 \Rightarrow \text{رأس } S(-3, 4) \text{ و محور تقارن } x = -3$$

۲۰- اگر خط  $y = x + 2k + 2$  سهمی  $y = 3kx^2 - 5x + k + 1$  را قطع نکند، مقادیر ممکن برای  $k$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$3kx^2 - 5x + k + 1 = x + 2k + 2 \Rightarrow 3kx^2 - 6x - k - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} 36 + 12k^2 + 12k < 0$$

$$\xrightarrow{\div 12} \underbrace{k^2 + k + 3}_{\text{همواره مثبت}} < 0 \Rightarrow k \text{ هیچ مقدار}$$



۲۱- شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله  $y = x^2 - 2x - 8$  و مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.  
الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید.  
ب) اگر  $x$  برحسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.  
پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و  $y$  برحسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چه قدر است؟

« پاسخ »

الف) در نقاط A و B سهمی صفر است.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

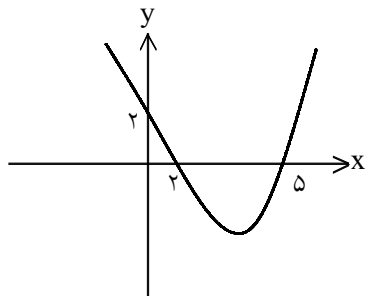
ب)

$$AB = |x_A - x_B| = 6 \text{ cm}$$

پ)

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1 - 2 - 8 = -9 \Rightarrow \text{بیشترین ضخامت} = 9 \text{ mm}$$

۲۲- معادله‌ی سهمی زیر را بنویسید.



« پاسخ »

سهمی محور  $x$  ها را در نقطه‌ی ۲ و ۵ قطع کرده است و برای معادله سهمی داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \text{محله برخورد با محور } x \text{ ها } x_1, x_2$$

از نقطه  $A(0, 2)$  می‌گذرد

$$y = a(x - 2)(x - 5) \xrightarrow{\text{از نقطه } A(0, 2) \text{ می‌گذرد}} 2 = a(0 - 2)(0 - 5) \Rightarrow 10a = 2$$

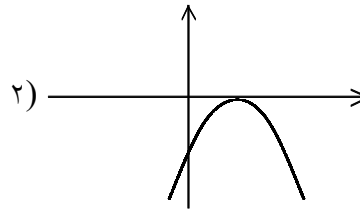
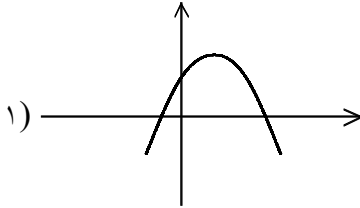
$$\Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}(x - 2)(x - 5) = \frac{1}{5}(x^2 - 7x + 10)$$

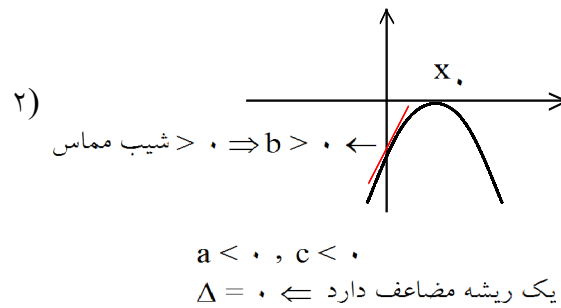
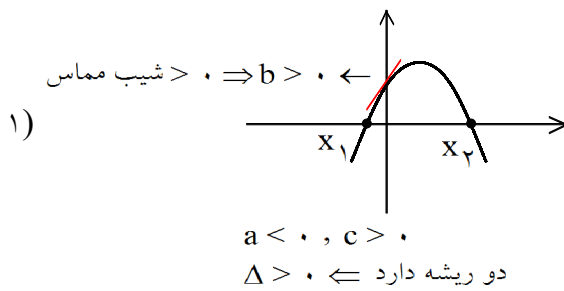
$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + 2$$

۲۳- جدول زیر را کامل کنید. (علامت a و b و c و Δ را مشخص کنید).

نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱					
۲					



« پاسخ »



نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱	-	+	+	+	۲
۲	-	+	-	صفر	۱

۲۴- اگر نقطه‌ی  $A(1, -1)$  رأس سهمی  $y = 2x^2 + ax + b$  باشد، این سهمی محور  $y$  ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

« پاسخ »

$$\text{رأس سهمی } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{4} = 1 \Rightarrow a = -4$$

$$A(1, -1) \Rightarrow 2 + a + b = -1 \Rightarrow a + b = -3 \xrightarrow{a = -4} -4 + b = -3 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 4x + 1 \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها}} y = 1 \xrightarrow{x = 0}$$

۲۵- مختصات نقطه‌ی می‌نیم سهمی  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \sqrt{3}$  کدام است؟

« پاسخ »

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 2(2) + \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$$

$$S = (2, -2 + \sqrt{3})$$