

۱- معادله‌ی مقابله کنید. در صورتی که درجه آن اول بود پاسخ را بدست آورید.

$$x^2 + 2x - 4 = x^2 + x + 5 \Rightarrow 2x - x = 5 + 4 \Rightarrow x = 9$$

۲- عددی صحیحی به دست آورید که چهار برابر آن مساوی نصف آن عدد به اضافه ۷ باشد.

$$4a = \frac{a}{2} + 7 \Rightarrow 8a = a + 14 \Rightarrow 8a - a = 14 \Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

۳- طول مستطیلی دو برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۳۶ متر باشد طول و عرض مستطیل چند متر است؟

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2(x + y) = 36 \Rightarrow 2(2y + y) = 36 \Rightarrow 6y = 36 \Rightarrow y = 6 \rightarrow x = 2y \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

۴- کلاگی به دسته‌ی کبوتری که در حال پرواز بودند رسید و از پیشروی آنها پرسید شما چند تا هستید؟ کبوتر گفت: «ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی ۱۰۰ می‌شویم.»

تعداد کبوتران را x فرض می‌کنیم.

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \Rightarrow \frac{4x + 4x + 2x + x}{4} = 100 - 1 \Rightarrow \frac{11x}{4} = 99 \Rightarrow 11x = 4 \times 99$$

۵- آیا می‌توان سه عدد طبیعی متوالی پیدا کرد که مجموعشان ۲۸ باشد؟

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 28 \Rightarrow 3n + 3 = 28 \Rightarrow 3n = 28 - 3 = 25 \Rightarrow n = \frac{25}{3}$$

جواب معادله، عددی طبیعی نیست پس نمی‌توان سه عدد طبیعی با شرایط این مسئله پیدا کرد.

$$x = 2t - 1$$

$$t$$

$$x = 2t - 1 \Rightarrow 2t = x + 1 \Rightarrow t = \frac{x + 1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

۶- معادله‌ی مقابله را بر حسب متغیری که مشخص شده حل کنید. بر حسب t

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2S = gt^2 \Rightarrow g = \frac{2S}{t^2}$$

۸- معادله‌های زیر را حل کنید:

$$(الف) 2x + (2x + 3) = 4x - 1 + 2x - 3 + (7 - 2x)$$

$$(ب) \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{5}(3x - 9) = \frac{1}{3}x - 2$$

$$(الف) 2x + (2x + 3) = 4x - 1 + 2x - 3 + 7 - 2x$$

$\rightarrow 4x + 3 = 4x + 3 \rightarrow 0 \times x = 0 \rightarrow$ معادله مبهم است $\rightarrow R$

$$\rightarrow \frac{1}{7}x - \frac{1}{3}x = \frac{4}{7} - 2 \rightarrow 30 \left(\frac{1}{7}x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{7} \right) \rightarrow 5x - 10x = 8 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{4}$$

۹- معادله‌های زیر را حل کنید و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$(الف) \frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{6} = 1 - \frac{x}{3}$$

$$(ب) 7 - 2x - \frac{1 - 3x}{7} = 2 - \frac{2x - 1}{3}$$

$$(ب) -2x - \frac{1 - 3x}{7} + \frac{2x - 1}{3} = -5 \rightarrow -42x - 3 + 9x + 14x - 7 = -105 \rightarrow -19x = -95 \rightarrow x = \frac{95}{19}$$

۱۰- این معادله‌ها را حل کنید:

$$(الف) 3(4y + 9) = 7(2 - 5y) - 2y$$

$$(ب) (x + 1)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 3) - 14$$

$$(الف) 3(4y + 9) = 7(2 - 5y) - 2y \rightarrow 12y + 27 = 14 - 35y - 2y$$

$$(ب) (x + 1)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 3) - 14 \rightarrow$$

$$2x^2 + x + 2x + 1 = 2x^2 + 3x + 6x + 9 - 14 \rightarrow -6x = -6 \rightarrow x = 1$$

۱۱- مجموع ۵ عدد فرد پشت سر هم، برابر ۱۲۵ می‌باشد، این عددها را پیدا کنید.

عدد سوم از این ۵ عدد را x فرض می‌کنیم بنابراین، این ۵ عدد به صورت زیر خواهد بود.
 $x - 4, x - 2, x, x + 2, x + 4$

که مجموع آنها باید ۱۲۵ باشد بنابراین:

$$(x - 4) + (x - 2) + x + (x + 2) + (x + 4) = 125 \rightarrow 5x = 125 \rightarrow x = 25$$

بنابراین ۵ عدد مورد نظر عبارتند از: ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹

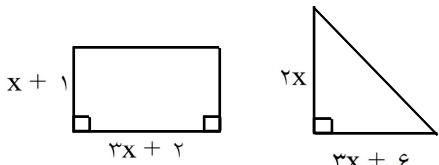
۱۲- دو برادر روی هم ۳۰ سال دارند. یک سال دیگر سن برادر بزرگ‌تر سه برابر سن برادر کوچک‌تر می‌شود. سن امروز هر کدام از آن‌ها چقدر است؟

اگر سن برادر کوچک را x در نظر بگیریم، سن برادر بزرگ‌تر $x - 30$ می‌شود بنابراین:

$$(30 - x) + 1 = 3(x + 1) \rightarrow 4x = 28 \rightarrow x = 7$$

یعنی برادر کوچک‌تر ۷ ساله است و برادر بزرگ‌تر $30 - 7 = 23$ سال دارد.

۱۳- اگر مساحت مثلث و مستطیل زیر مساوی باشند، x و مساحت‌ها را بیابید.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height} \Rightarrow (3x + 2)(x + 1) = (3x + 6)(2x) \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x^2 + 6x \Rightarrow 5x + 2 = 6x \Rightarrow x = 2$$

مساحت مثلث $= (3x + 2)(x + 1) = (6 + 2)(3) = 24$

۱۴- در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فنورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فنورز دارد. مدیرعامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه $55/5$ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فنورز در این کارخانه ماهیانه چه قدر است؟

حقوق یک فنورز = فرض x

$$\text{حقوق مهندس} = 2 \text{ برابر حقوق فنورز} \Rightarrow 2x = \frac{2}{3} \text{ حقوق مدیر}$$

$$\text{حقوق مهندس} = 2x$$

$$\frac{2}{3} \text{ حقوق مدیر} = 2x \Rightarrow 2x = \frac{2}{3} \times 3x$$

$$\text{حقوق مدیر} = 3x$$

$$\text{میلیون تومان } 55/5 = 12 \text{ فنورز} + 8 \text{ مهندس} + 3 \text{ مدیر}$$

$$9x + 16x + 12x = 55/5$$

$$37x = 55/5 \Rightarrow x = \frac{55/5}{37} \Rightarrow x = 1/5$$

میلیون تومان حقوق فنورز

۱۵- با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه‌ی ذوب‌آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است.

الف) مجموع تولید فولاد در این پنج روز چه قدر بوده است؟

ب) اختلاف تولید فولاد در یايان روز شنبه یا تولید فولاد در یايان روز چهارشنبه چه قدر است؟

$$\text{الف) } \frac{\sqrt{16x}}{\sqrt{4}} = \frac{64}{16} \Rightarrow x = 4 \text{ هزار تن}$$

شنبه x فرض کنیم
 یکشنبه $2x$
 دوشنبه $4x$
 سه شنبه $8x$
 چهارشنبه $16x$

$$\text{هزار تن} = 124 \quad \text{هزارت تن} = 60$$

$$16X - X = 15X \xrightarrow{X=4} 15 \times 4 = 60$$

$$16X + 8X + 4X + 2X + X = 31X \xrightarrow{X=4} 31 \times 4 = 124$$

۱۶- اگر در یک قالی با ابعاد $۸۸۰/۵$ عدد
باشد: (که عموماً ۳×۲ نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $۰۰۰/۰۰۰$

الف) این قالی چند رج دارد؟
ب) اگر برای هر گره 1 cm نخ قالی یا همان خامه‌ی قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

(پ) یک قالی‌باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی‌باف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

(ت) اگر این قالی‌باف برای خرید مواد اولیه‌ی قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و شش‌صدهزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آنرا به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی‌باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$\begin{aligned} 2/10 \text{ m} &= 210 \text{ cm} \\ 2/80 \text{ m} &= 280 \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

یعنی در این قالی، 1200 مربع 7×7 وجود دارد. $\Rightarrow 1200 = \frac{280 \times 210}{7 \times 7}$

$$\frac{۵ / ۸۸۰ / ۰۰۰}{۱۲۰۰} = \text{تعداد گره‌های موجود در یک مربع } ۷ \times ۷$$

$$\sqrt{4900} = 70$$

\Rightarrow تعداد گره های موجود در یک ضلع ۷ سانتی متری مربع $7 \times 7 = 49$ رج \Rightarrow طبق تعریف پس این قالی، ۷۰ رج دارد. \Rightarrow

$$5/880/\dots \times 1\text{ cm} = 5/880/\dots \text{ cm} \xrightarrow[\text{تبديل به متر}]{\div 1000} 58/800 \text{ m}$$

تعداد گره ها در ۵ روز یا همان یک هفته کاری $x \Rightarrow x = 30000$

$$\frac{۵/۸۸۰/۰۰۰}{۳۰۰۰} = ۱۹۶ \quad \text{پس } ۱۹۶ \text{ هفته طول می‌کشد.}$$

هزینه - درآمد = سود

$$\text{میزان سود در کل } ۱۹۶ \text{ هفته } = \frac{۳۵/۰۰۰/۰۰۰}{۵/۶۰۰/۰۰۰} = \frac{۲۹/۴۰۰/۰۰۰}{۵/۶۰۰/۰۰۰} = \frac{۳۵}{۳۰} = ۱\frac{۵}{۶}$$

میزان سود در یک هفته

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

۱۷- ریشه‌های معادله‌ی مقابل را تعیین کنید.

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}((6x)^2 - 5(6x) + 6) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(6x - 2)(6x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{مجموعه جواب} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$

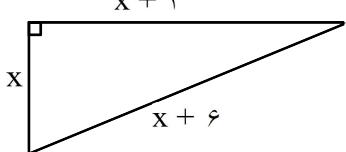
$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

۱۸- معادله‌ی مقابل را حل کنید. (به روش Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(7) = 8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{2}, x_2 = 3 - \sqrt{2}$$

۱۹- در مثلث قائم‌الزاویه زیر مقدار x را با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث به دست آورید. (به روش Δ)



$$(x+3)^2 + x^2 = (x+6)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + x^2 = x^2 + 12x + 36 \Rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 & \checkmark \\ x_2 = -3 & \times \end{cases}$$

غیر قابل قبول

۲۰- برای چه مقدار از a معادله‌ی $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است.

ریشه مضاعف $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\Rightarrow (a+2)^2 - 4(2a) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 - 8a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۲۱- نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

$$b = -a - c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a - c)^2$$

معادله ۲ ریشه دارد $\rightarrow 0 > \Delta$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{a + c - a - c}{2a} = \frac{2c}{2a} \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

۲۲- نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -\frac{c}{a}$ و دیگری $x = 1$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

$$\Delta = (a - c)^2 > 0 \rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a + c) \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a - c + a - c}{2a} \text{ یا } x = \frac{-a - c - a + c}{2a} \\ x = \frac{-\cancel{a}c}{\cancel{2}a} \quad x = \frac{-\cancel{a}}{\cancel{2}a} \\ x = \frac{-c}{a} \quad x = -1 \end{cases}$$

۲۳- اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

$$x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0$$

$$a = -15$$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0$$

$$\Delta = 1 > 0 \rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-15 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = -4 \text{ یا } x = \frac{-7}{2} \text{ ریشه مطلوب}$$

۲۴- معادله‌های درجه‌ی دوم زیر را حل کنید.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - x = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (4)$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad (5)$$

$$1) x^2 - x = 0$$

$$2) 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0 \text{ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = -1$$

$$3) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0 \text{ ریشه مضاعف دارد.}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$4) x^2 + 17x - 18 = 0$$

$$\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 361 > 0 \text{ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -18$$

$$5) 3x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(+4) = -47 < 0 \text{ ریشه ندارد.}$$

$$6) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\Delta = \sqrt{7}^2 - 4(+1)(-1) = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{7}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{7}}{2} \text{ یا } x = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{7}}{2}$$

-۲۵- معادله های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \text{ب)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \text{ت)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{الف)$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \quad \text{ب)}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \xrightarrow{\substack{\text{اضافه کردن قرینه} \\ \text{عدد ثابت ۶ به طرفین}}} x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0 - 6$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \text{به طرفین اضافه}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \xrightarrow{\text{جذر}} x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \xrightarrow{\substack{\text{اضافه کردن قرینه} \\ \text{عد ثابت ۲- به طرفین}}} \frac{9x^2}{9} + \frac{3x}{9} - \frac{2}{9} = 0 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = 2$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{6}x\right) = 2 \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{6}x\right) + \frac{1}{36} = \frac{2 \times 36}{1 \times 36} + \frac{1}{36}$$

$$\left(\frac{1}{6}x\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \text{به طرفین اضافه}$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{73}{36} \quad \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{73}}{6} \quad \begin{cases} x = \frac{-1}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{73}}{6} \\ x = \frac{-1}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{73}}{6} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + 1x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

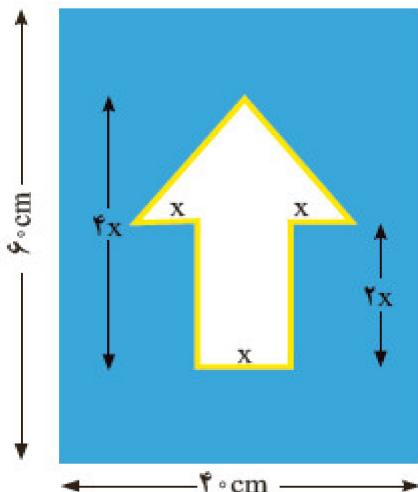
$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{به طرفین اضافه}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

البته

-۲۶- برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از
برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه‌ی 1 cm^2 برچسب سفید
۳۰ تومان و هزینه‌ی 1 cm^2 برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه‌ی
برچسب‌های سفید و آبی $27/000$ تومان شده است.

(الف) اندازه‌ی X چه قدر است؟



ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه رو علاوه بر چسب سفید و آبی از خطوط برچسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه‌ی 1 cm ۱۰۰ تومان است، هزینه‌ی رنگ آمیزی تابلو $34/800$ تومان می‌شود. در این حالت اندازه‌ی X چه قدر است؟

مساحت مستطيل سفید + مساحت مثلث سفید = مساحت فلش (الف)

$$= \frac{1}{2} \times 3x \times \cancel{x} + x \times 2x = 5x^2 \quad \begin{array}{l} \text{هزینه بر حسب} \\ \text{سفید} \end{array} \quad 5x^2 \times 30 = 150x^2$$

$$\frac{\text{هزینه برچسب}}{\text{آبی}} = \frac{2400 - 5x^2}{60 \times 40 - 5x^2} = \frac{2400 - 5x^2}{2400 - 5x^2}$$

$$(24\cdots - \omega x) \times 1 = 24\cdots - \omega \cdot x$$

$$27/ \dots \Rightarrow 150x^2 + 24\dots - 50x^2 = 27\dots$$

$$100x^2 = 300 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{30} \text{ غرق} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$$

$$\text{ب) } 2a + 3x + 2(2x) = \cancel{2} \left(\cancel{2}x \right) + 3x + 4x = 12x \xrightarrow{\substack{\text{هزینه برچسب} \\ \text{زرد}}}$$

$$12X \times 100 = 1200X$$

$$150x^2 + 24000 - 50x^2 + 1200x = 34800$$

$$100x^2 + 120x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x + 18)(x - 6) = 0$$

$$x = -18 \text{ ق} \quad x = 6 \text{ ي} \text{ا} \text{غ}$$

$$a^r = \left(x + \frac{x}{r} \right)^r + (rx)^r$$

$$a^2 = \frac{25}{4}x^2 \xrightarrow{\text{جذر ۲}} a = \pm \frac{5}{2}x$$

$$a = \frac{\omega}{\gamma} x$$

-۲۷ در معادله‌ی $(x - ۱)^۲ = K$:

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K = ۲$ ، $K = ۴$ ، $K = ۰$ و $K = -۹$ به دست آورید.

ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه‌ی مضاعف دارد؟

پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟

ت) به ازای چه مقادیری از k ریشه‌ی حقیقی ندارد؟

الف) اگر:

$$k = ۲ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{\text{جذر}} x - ۱ = +\sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad x - ۱ = -\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad x = ۱ - \sqrt{۲}$$

اگر:

$$k = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad \text{یا} \quad x = ۱ \quad \text{ریشه مضاعف}$$

اگر:

$$k = -۹ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = -۹$$

سمت چپ همواره نامنفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی غیرممکن است یا این‌که اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند، پس معادله جواب ندارد.

ب) $k = ۰$

پ) $k = ۴$ ، $k = ۲$

ت) $k = -۹$

-۲۸- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد.

$$x = ۱ \quad \text{یا} \quad x = ۱$$

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$$

-۲۹- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که $x = ۲$ و $x = -۳$ جواب‌های آن باشد.

$$x = ۲ \quad \text{یا} \quad x = -۳$$

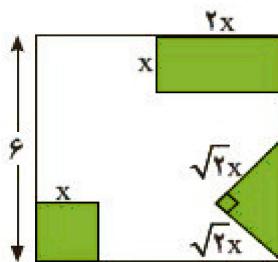
$$x - ۲ = ۰ \quad x + ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۳) = ۰ \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{از اتحاد}} x^۲ + (-۲ + ۳)x + (-۲)(۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱x - ۶ = ۰$$

یا

$$x - ۲ = ۰ \quad x + ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۳) = ۰ \xrightarrow{\text{به کمک ضرب}} x^۲ + ۳x - ۲x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$



-۳۰- از مربعی به ضلع 6 cm سه شکل رو به رو بریده شده است. مساحت باقیمانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چه قدر است؟

$$6^2 = 36 \quad \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$x^2 \quad \text{مساحت مربع کوچک}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = x \times 2x = 2x^2$$

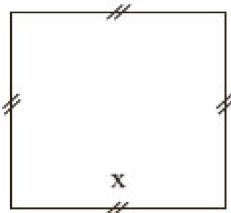
$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times x^2 = x^2 \quad \text{مساحت مثلث}$$

$$x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2 \quad \text{مجموع قسمت‌های رنگی}$$

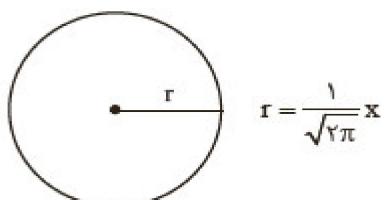
$$\text{مساحت باقیمانده} = \text{مساحت رنگی} - \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$x = +\sqrt{3}$$

-۳۱- اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر 6 باشد، طول ضلع مربع چه قدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

$$x^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} x \right)^2 = \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2} \quad \text{مساحت دایره}$$

$$x^2 + \frac{x^2}{2} = 6 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

۳۲- در معادله زیر مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$$

برای اینکه معادله‌ی درجه دوم ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، باید میان معادله، صفر باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow$$

$$4m^2 - 4m^2 + 4m + 8 = 0 \Rightarrow 4m = -8 \Rightarrow m = -2$$

۳۳- در معادله $x^2 - (2m-1)x + m-1 = 0$ مقدار m را به گونه‌ای بیابید که الف) یکی از ریشه‌ها برابر ۱ - باشد. ب) دو ریشه، قرینه باشند. ج) دو ریشه عکس هم باشند.

الف) ریشه معادله باید در معادله صدق کند:

$$x = -1 \rightarrow (m+1)(-1)^2 - (2m-1)(-1) + m-1 = 0 \rightarrow m+1 + 2m-1 + m-1 = 0 \\ \rightarrow 4m-1 = 0 \rightarrow nm = \frac{1}{4}$$

ب) وقتی دو ریشه قرینه باشند مجموع آنها صفر خواهد بود بنابراین:

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow 2m-1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

البته باید به ازای این مقدار، حاصل $\frac{c}{a} = 0$ مثبت باشد که اینگونه است.

ج) وقتی دو ریشه عکس هم باشند حاصل ضرب آنها ۱ خواهد بود بنابراین:

$$x_1 x_2 = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m-1}{m+1} = 1 \rightarrow m-1 = m+1 \rightarrow -1 = +1 \rightarrow \text{غیرممکن}$$

یعنی به ازای هیچ مقدار از m ریشه‌های معادله فوق عکس هم نیستند.

۳۴- در معادله زیر مقدار m را چنان تعیین کنید که الف) دو ریشه معادله، برابر باشند.

ب) یکی از ریشه‌ها برابر m باشد.

$$x^2 - (m-3)x + m-2 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow (m-3)^2 - 4(m-2) = 0 \rightarrow \text{ریشه‌ها برابر (الف)}$$

$$+10 \pm \sqrt{10^2 - 4(17)} \\ \rightarrow m = \frac{m-3 \pm \sqrt{10^2 - 4(17)}}{2}$$

$$\rightarrow m = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = m \rightarrow \text{ریشه معادله باید در معادله صدق کند} \rightarrow (m)^2 - (m-3)(m) + m-2 = 0 \rightarrow \text{(ب)}$$

$$\rightarrow m^2 - m^2 + 3m + m - 2 = 0 \rightarrow 4m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

-۳۵ به ازای چه مقادیری از y تساوی روبرو برقرار است؟

$$(y+1)^6 + 20 = 9(y+1)^3$$

: فرض می کنیم $(y+1)^3 = x \Rightarrow x^2 + 20 - 9x = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \Rightarrow (y+1)^3 = 4 \Rightarrow y_1 = \sqrt[3]{4} - 1 \\ x_2 = 5 \Rightarrow (y+1)^3 = 5 \Rightarrow y_2 = \sqrt[3]{5} - 1 \end{cases}$$

-۳۶ جواب های معادله مقابل را بدست آورید.

$$x^4 + 25 = 26x^2$$

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Rightarrow (x^2 - 25)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5)(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \\ x+5 = 0 \Rightarrow x_2 = -5 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{مجموعه جواب} = \{-1, 1, -5, 5\}$$

-۳۷ به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2 - 68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

$$t = -3 \Rightarrow \frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{\underbrace{((- 3)^2 + 1)^2}_{16} - 68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27 + k}{32} \Rightarrow \frac{(27 + k) \times 1}{32 \times 1} - \frac{7 \times 4}{8 \times 4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{27 + k - 28}{32} = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

-۳۸ معادله های زیر را حل کنید.

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{3x-5}{x+3} = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \quad (\text{ث})$$

$$(الف) \frac{3x - 5}{x + 3} = 1 \Rightarrow \frac{(3x + 5) \times 1}{(x + 3) \times 1} - \frac{1 \times (x + 3)}{1 \times (x + 3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x + 5 - x - 3}{x + 3} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 2}{x + 3} = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(ب) \frac{3x - 2}{x} + \frac{2x + 5}{x + 3} = 5 \Rightarrow \frac{(3x - 2) \times (x + 3)}{x \times (x + 3)} + \frac{(2x + 5) \times x}{(x + 3) \times x} - \frac{5 \times x (x + 3)}{1 \times x (x + 3)} = 5.$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3x^2} + 9x - 2x - 6 + \cancel{2x^2} + 5x - \cancel{5x^2} - 15x}{x(x + 3)} = 5 \Rightarrow \frac{-3x - 6}{x(x + 3)} = 5.$$

$$\Rightarrow -3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(پ) \frac{2}{x + 2} + \frac{x}{x + 2} = x + 3 \Rightarrow \frac{2 + x}{x + 2} - (x + 3) = 0 \Rightarrow \frac{(x + 2) \times 1}{(x + 2) \times 1} - \frac{(x + 3) \times (x + 2)}{1 \times (x + 2)} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{x + 2 - x^2 - 5x - 6}{(x + 2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 4x - 4}{(x + 2)} = 0.$$

$$\Rightarrow -x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \text{ایا } x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \text{اتحاد مربع ۲ جمله‌ای}$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند} \\ \Rightarrow \text{پس معادله جواب ندارد}$$

یا این‌که

$$\frac{2 + x}{\cancel{x} + 2} = x + 3 \Rightarrow x = -2 \quad \text{پس معادله جواب ندارد} \Rightarrow \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند} \quad x = -2$$

$$(ت) \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1 + x}{x} = \frac{x - 1}{x - 2} \Rightarrow \frac{(x^2 - 2x + 2) \times 1}{x(x - 2) \times 1} - \frac{(1 + x) \times (x - 2)}{x \times (x - 2)} - \frac{(x - 1) \times x}{(x - 2) \times x} = 0.$$

$$\frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{x} - 2 - x^2 + \cancel{x}}{x(x - 2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 4}{x(x - 2)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

جذر

$$\xrightarrow{} x = \pm 2 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ایا } x = \pm 2 \quad \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند} \quad x = -2$$

$$(ث) \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 3} = \frac{4}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{3 \times (x + 3)(x - 2)}{(x - 1) \times (x + 3) \times (x - 2)} - \frac{2 \times (x - 1)(x - 2)}{(x + 3) \times (x - 1)(x - 2)} - \frac{4 \times (x - 1)(x + 3)}{(x - 2) \times (x - 1)(x + 3)} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 3x - 18 - 2x^2 + 6x - 4 - 4x^2 - 8x + 12}{(x + 3)(x - 1)(x - 2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + x - 10}{(x + 3)(x - 1)(x - 2)} = 0.$$

$$\Rightarrow \Delta = -95 < 0 \quad \text{معادله ریشه ندارد}$$

$$(ج) \frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2}$$

ف

$$\Rightarrow \frac{11 \times 1}{(x-2)(x+2) \times 1} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = .$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad \text{پس معادله جواب ندارد.}$$

۳۹- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \quad (\text{ب})$$

$$1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{4}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2 - 9} = 1 - \frac{y-1}{3-y} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m} \quad (\text{پ})$$

$$\text{ث) به ازای چه مقدار } a, \text{ معادله } \frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} \text{ دارای جواب } x=2 \text{ است؟}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \text{معادله ریشه ندارد.}$$

$$\text{ب) } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \frac{24}{10+m} + 1 &= \frac{24}{10-m} \\ \frac{24(10-m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{1(10-m)(10+m)}{(10-m)(10+m)} - \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)} &= 0 \\ \cancel{240} - 24m + 100 - m^2 - \cancel{240} - 24m &= 0 \\ (10-m)(10+m) & \end{aligned}$$

$$\Delta = (-4\lambda)^2 - 4(-1)(100) = 2704 \Rightarrow \Delta = 2704 > 0 \quad \text{معادله دو ریشه دارد.}$$

$$m = \frac{4\lambda \pm \sqrt{2704}}{-2} = \frac{4\lambda \pm 52}{-2} \Rightarrow m = -50 \quad \text{یا} \quad m = 2$$

$$\text{ت) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2 - 9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$\frac{-y - 6}{(y - 3)(y + 3)} - \frac{(2y - 4) \times (y + 3)}{(y - 3)(y + 3)} = 0 \Rightarrow \frac{-y - 6 - 2y^2 - 6y + 4y + 12}{(y - 3)(y + 3)} = 0$$

$$\frac{-2y^2 - 3y + 6}{(y - 3)(y + 3)} = 0 \Rightarrow -2y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-2)(6) \Rightarrow \Delta = 57 > 0 \quad \text{معادله ۲ ریشه دارد}$$

$$\text{ث) } x = 2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$$

$$\frac{2}{a-2} - 1 \cdot \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow 4-a = 0 \Rightarrow a = +4$$

-۴۰- مسئله‌ی خوارزمی: یک درم را بین چند مرد تقسیم کردیم ولی چون یک مرد به آنها افزوده شده تقسیم را دوباره بین همه‌ی مردها انجام دادیم. معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز چند مرد بوده است؟

تعداد مردها را در آغاز برابر x فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{6} = 0$$