فصل اوّل

دایــره

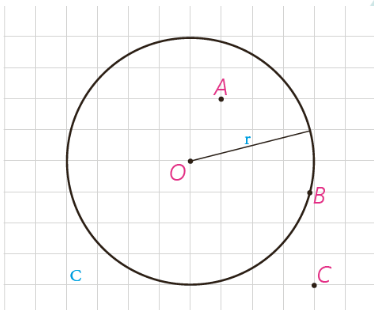
هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند. معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که :

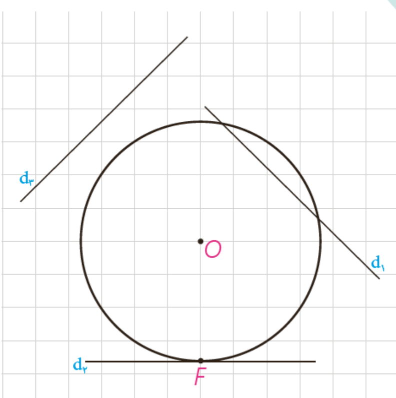


الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..برابربا. شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بزرگ‌.تر از شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کوچک‌ تر از شعاع دایره است.

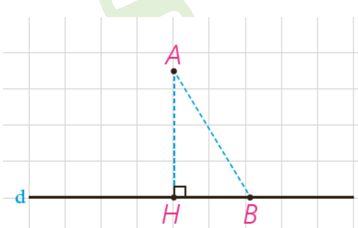
اوضاع نسبی خط و دایره



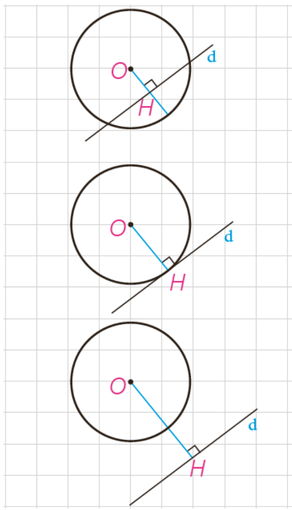
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.

یادآوری



اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است (AB > AH).



اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره ...در دو... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند.

ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره ...در یک.. نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی مماسند.

پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطهٔ اشتراک ندارند.

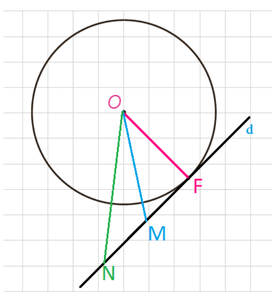
فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟

نزدیک ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O نقطهٔ F است .می دانیم طول $OF = R$ و هر نقطهٔدیگر از خط dخارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله ی آن ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است .

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟



در نقطهٔ F قطع می کند.اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط dعمود است.و Mپای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d هست که Mبین N وFقرار دارد و $FM = MN$در نتیجه :

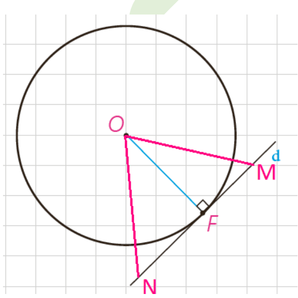
$$\left.\begin{array}{l} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OMN} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow ON = OF = R$$

بنا براین نقطه ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد.پس خط مماس در نقطهٔ F بر OFعمود است.

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F بر هم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره در نقطهٔ F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطهٔF بر OFعمود می شود رسم کنیم . این خط مماس بر دایره می باشد.



۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

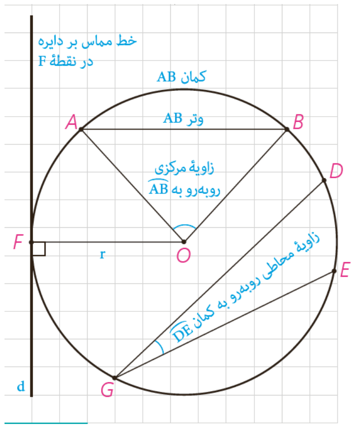
فرض کنیم M نقطهٔ دیگری غیر از F روی خط d باشد چون $OM > OF$ در نتیجه نقطهٔ Mبرون دایره C است . بنا براین خط dبا دایرهٔ C فقط یک نقطه مشترک دارد.

در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین :

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید.
در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

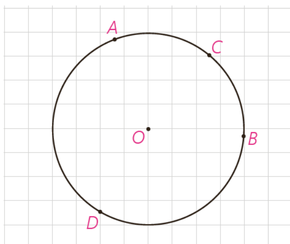
۱ــ شعاع دایره : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲ــ وتر دایره : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳ــ قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

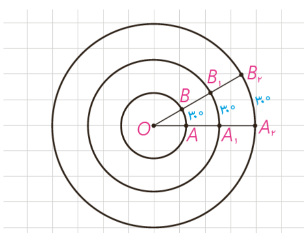
۴ــ زاویهٔ مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵ــ زاویهٔ محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دووتر از دایره باشند.



۶ــ کمان : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.

۷ــ اندازهٔ کمان، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

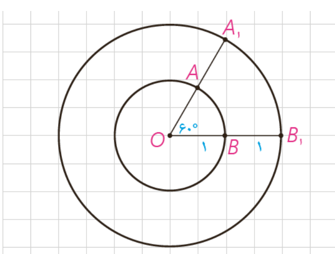


۸ــ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

کاردرکلاس

۱ــ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازهٔ °۳۶۰ است، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$



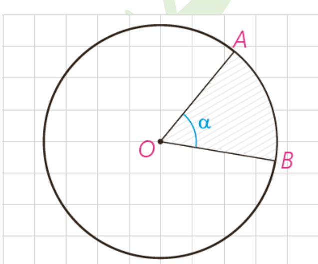
۲ــ با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

طول $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{۳}$ $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$

طول $\overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{۲\pi}{۳}$ $\overset{\frown}{A_1B_1} = ۶۰^\circ$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{۲\pi \times ۱} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1}}{۲\pi \times ۲} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{۲\pi}{۳}$$



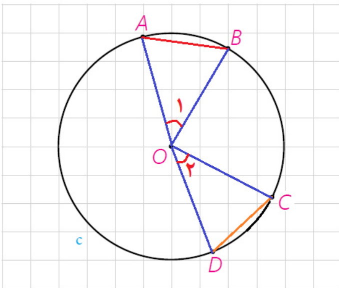
۳ــ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ C(O,R) برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$

طول کمان قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است یعنی $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$. در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi r}{۱۸۰}\alpha$ است

مساحت قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha$ است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فعالیت



۱ـ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

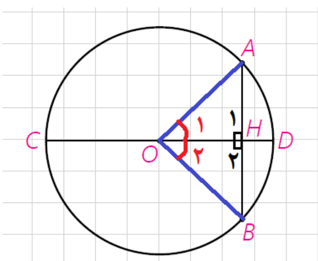
فرض : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ حکم : $AB=CD$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OA=OC=R\\ OB=OD=R\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض زض}} OAB\cong OCD\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB=CD$$

۲ـ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض : $AB=CD$ حکم : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

$$\left.\begin{array}{l}AB=CD\\ OA=OC=R\\ OB=OD=R\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}} OAB\cong OCD\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1=\hat{O}_2\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$



۳ـ وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $CD\perp AB$ حکم: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, $AH=BH$

$$\left.\begin{array}{l}OA=OB=R\\ H_1=H_2=90^\circ\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}AH=BH\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$$

۴ـ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $AH=BH$ حکم: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ و $CD\perp AB$

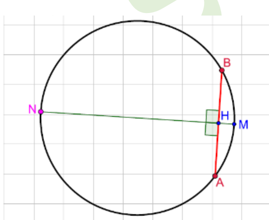
$$\left.\begin{array}{l}OA=OB=R\\ AH=BH\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}H_1=H_2=90^\circ\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$$

۵ـ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

فرض: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ حکم: $AH=BH$ و $CD\perp AB$

$$\left.\begin{array}{l}OA=OB=R\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}H_1=H_2=90^\circ\\ AH=BH\end{array}\right.$$

نتیجه : عمودمنصف وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.

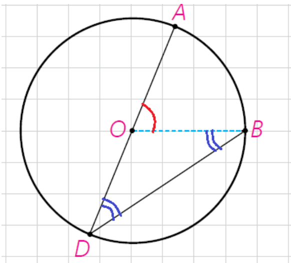


۶ـ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند.با توجه به ۴ و ۵ MN قطر عمود بر این وتر است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فعالیت

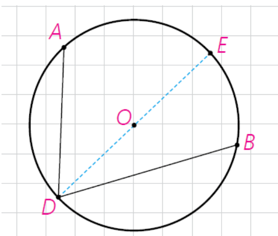


۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

بنابراین : $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \underline{\widehat{OBD}} = ۲\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود :

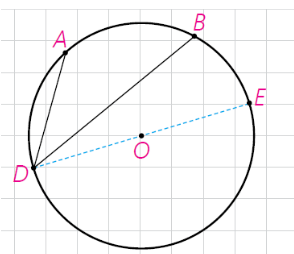
$$\widehat{ODB} = \frac{۱}{۲}\widehat{AOB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

ــ اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \widehat{EDB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE} + \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



۳ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

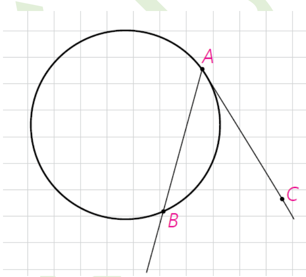
ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \widehat{BDE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE} - \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

بنابراین :

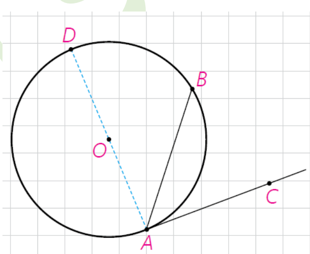
قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

زاویهٔ ظلی



نوع دیگری از زاویه که در دایره مطرح است زاویهٔ ظلی می‌باشد. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.

فعالیت



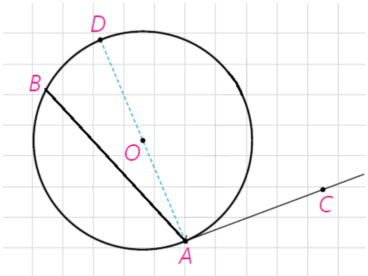
الف) $\widehat{DAC} = ۹۰^\circ$ و بنابراین : $\widehat{DAC} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}$

ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}(\widehat{DA} - \widehat{DB})$

و بنابراین $\widehat{BAC} = \frac{۱}{۲}\widehat{AB}$



ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

الف) $\widehat{DAC} = ۹۰^\circ$ و بنابراین : $\widehat{DAC} = \frac{۱}{۲}\widehat{AD}$

ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}\widehat{DB}$

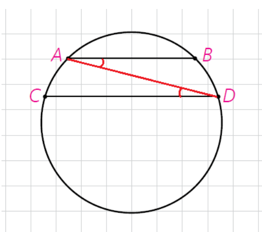
پ) از (الف) و (ب) داریم : $\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}(\widehat{DA} + \widehat{DB})$

و بنابراین $\widehat{BAC} = \frac{۱}{۲}\widehat{AB}$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با ... نصف ... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردرکلاس



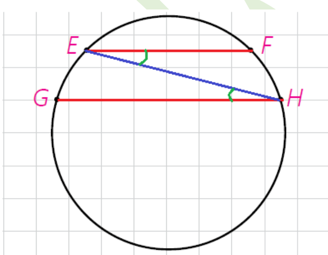
۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس بایکدیگر برابرند.



۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\widehat{EG} = \widehat{FH} \Rightarrow \frac{\widehat{EG}}{۲} = \frac{\widehat{FH}}{۲} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{EHG} = \widehat{FEH}$

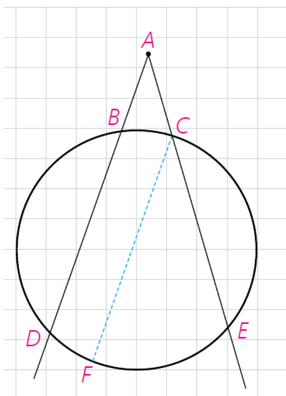
پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم موازی هستندبنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی که رأس آنها بر روی دایره باشد را بررسی کردیم و رابطهٔ اندازه این زاویه‌ها با اندازهٔ کمان‌های ایجاد شده توسط آنها را مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند می‌پردازیم.



فعالیت

۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشند.

ــ از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

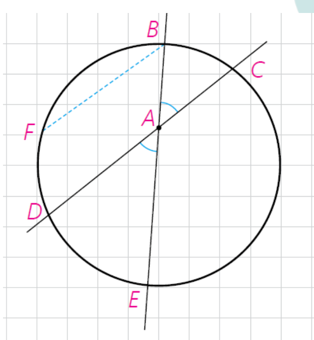
$CF \parallel AD$ و AE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $D\hat{A}E = F\hat{C}E$

زاویه $F\hat{C}E$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $F\hat{C}E = \frac{1}{2}\widehat{EF}$.

باتوجه به شکل $F\hat{C}E = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می دانیم $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم : $D\hat{A}E = F\hat{C}E = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

ــ از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

$BF \parallel DC$ و BE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $D\hat{A}E = F\hat{B}E$

زاویه $F\hat{B}E$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $F\hat{B}E = \frac{1}{2}\widehat{EF}$.

باتوجه به شکل: $F\hat{B}E = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می دانیم: $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

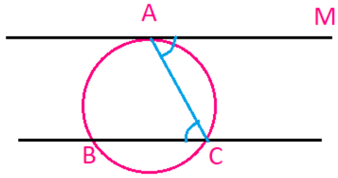
پس داریم : $D\hat{A}E = F\hat{B}E = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

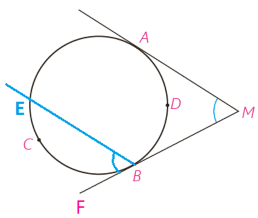
راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.

ثابت می شود که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره باهم برابرند.



در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC}=\widehat{BCA}$:

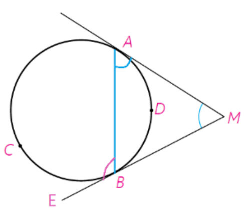
$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{MAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AC} & \text{ظلّی} \\ \widehat{ACB}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB} & \text{محاطی} \end{array}\right\} \xrightarrow{\widehat{MAC}=\widehat{ACB}} \frac{۱}{۲}\widehat{AC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{AB}$$



الف) $\hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$

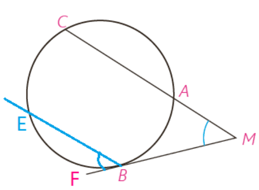
راه اول : بنا برقضیه خطوط موازی $\widehat{AMB}=\widehat{EBF}$

$$\widehat{AMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{EB}}{۲}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{AE}}{۲}\xrightarrow{\widehat{AE}=\widehat{ADB}}\widehat{AMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$$



راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم . در مثلث AMB زاویه $E\hat{B}A$ خارجی است پس :

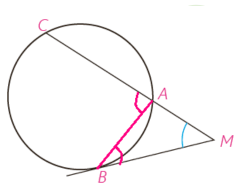
$$E\hat{B}A=M\hat{A}B+\hat{M}\Rightarrow \hat{M}=\underbrace{E\hat{B}A}_{\text{ظلّی}}-\underbrace{M\hat{A}B}_{\text{ظلّی}}\Rightarrow \hat{M}=\frac{۱}{۲}\widehat{ACB}-\frac{۱}{۲}\widehat{ADB}\Rightarrow \hat{M}=\frac{(\widehat{ACB}-\widehat{ADB})}{۲}$$



ب) $\hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$

راه اول : بنا برقضیه خطوط موازی $\widehat{CMB}=\widehat{EBF}$

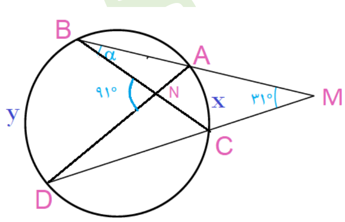
$$\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{EB}}{۲}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{CE}}{۲}\xrightarrow{\widehat{CE}=\widehat{AB}}\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$$



راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم . در مثلث AMB زاویه $B\hat{A}C$ خارجی است پس :

$$\widehat{BAC}=\widehat{MBA}+\hat{M}\Rightarrow \hat{M}=\underbrace{\widehat{BAC}}_{\text{محاطی}}-\underbrace{\widehat{MBA}}_{\text{ظلّی}}\Rightarrow \hat{M}=\frac{۱}{۲}\widehat{BC}-\frac{۱}{۲}\widehat{AB}\Rightarrow \hat{M}=\frac{(\widehat{BC}-\widehat{AB})}{۲}$$

۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

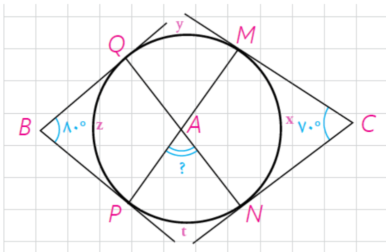


$$\hat{M}=\frac{y-x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۳۱^\circ=y-x$$

$$\hat{N}=\frac{y+x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۹۱^\circ=y+x$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y-x=۶۲^\circ \\ y+x=۱۸۲^\circ \end{cases}\Rightarrow ۲y=۲۴۴^\circ\Rightarrow y=۱۲۲^\circ\Rightarrow x=۶۰^\circ$$

۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



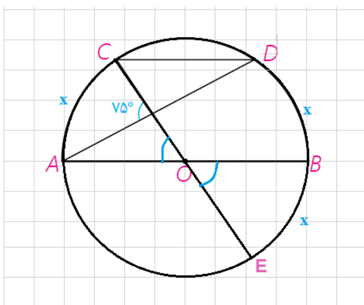
$$۷۰^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y+z+t)-x$$

$$۸۰^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{۲} \Rightarrow ۱۶۰^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y+z+t-x \\ ۱۶۰^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y+t) \Rightarrow y+t = ۱۵۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{y+t}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

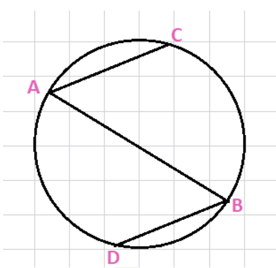
۴ــ در شکل، O مرکز نیم‌دایره است و CD||AB اندازه کمان CD را به‌دست آورید.



$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.
ثابت کنید: AC = BD

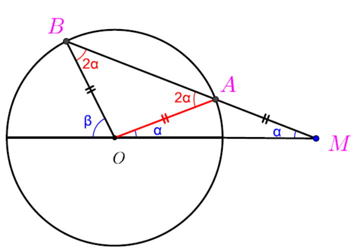


$$AC \parallel BD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} = ۱۸۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

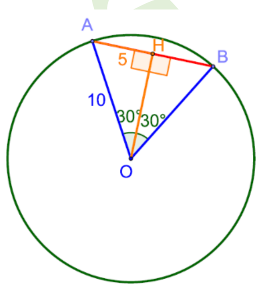
۶ــ دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$



با توجه به فرض مسئله، مثلث های OAM و OAB متساوی الساقین هستند.

در مثلث OBM داریم: $\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$

۷ــ در دایرهٔ C(O,R)، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و AB = ۱۰ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



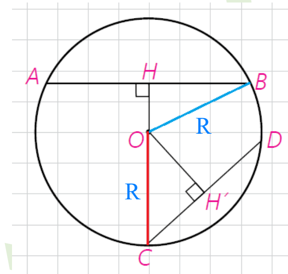
می دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر وتر را نصف می کند بنا بر این AH = ۵ پس در مثلث قائم الزاویهٔ OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^۲ - AH^۲} \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

۸ــ در دایرهٔ C(O,R) نشان دهید AB > CD اگر و تنها اگر $OH < OH'$
(OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.



فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$OB = OC = R \quad , \quad BH = \frac{AB}{۲} \quad , \quad CH' = \frac{CD}{۲} \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBH}: H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$$

$$\overset{\Delta}{OCH'}: H' = ۹۰^\circ \Rightarrow CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^۲ > CH'^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH'^۲ \Rightarrow -OH^۲ > -OH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} OH^۲ < OH'^۲ \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$$

فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

$$OB = OC = R \quad , \quad ۲BH = AB \quad , \quad ۲CH' = CD \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBH}: H = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^۲ = R^۲ - BH^۲$$

$$\overset{\Delta}{OCH'}: H' = ۹۰^\circ \Rightarrow OH'^۲ = R^۲ - CH'^۲$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^۲ - BH^۲ < R^۲ - CH'^۲$$

$$\Rightarrow -BH^۲ < -CH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} BH^۲ > CH'^۲ \xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$$

درس دوم

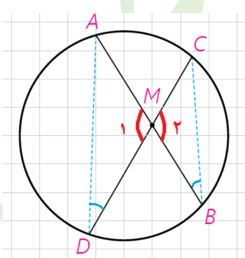
رابطه‌های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می‌کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره‌خط‌های حاصل می‌پردازیم.

فعالیت

۱ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.



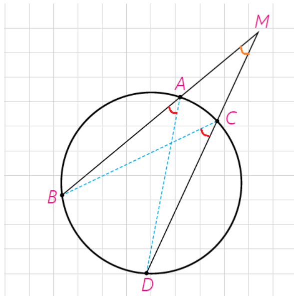
این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{CMB}$$

ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

۱ و در نتیجه: $AM.BM = CM.DM$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



۲ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطهٔ A را به D و نقطهٔ C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

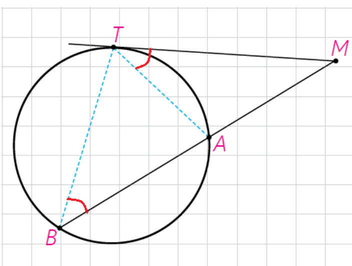
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ \hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}\cong\overset{\Delta}{CMB}$$

ب) با توجه به تشابه فوق داریم : $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MD}{MB}$

۲ و در نتیجه: $MA.MB = MC.MD$

نتیجه ۱ و ۲

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA.MB = MC.MD$



۳ــ فرض کنیم از نقطهٔ M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل نمایید و مشخص کنید چرا $M\hat{T}A=T\hat{B}M$؟

$$\left.\begin{array}{l}\text{ظلّی}\ \ M\hat{T}A=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\\ \text{محاطی}\ \ T\hat{B}M=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{T}A=T\hat{B}M$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطهٔ زیر را کامل نمایید.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

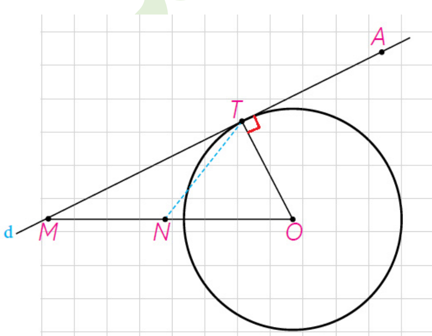
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ M\hat{T}A=T\hat{B}M\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{MTB}\cong\overset{\Delta}{MAT}$$

$$\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}$$

و در نتیجه : $MT^۲ = MA\ .\ MB$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دوطرف نقطهٔ T باشند، هرکدام از پاره‌خط‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.



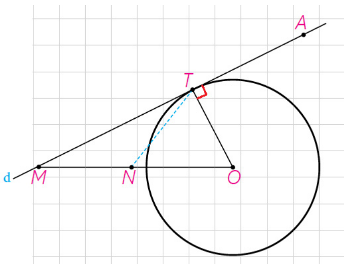
اگر O مرکز دایره باشد، ΔOMT دررأس T قائم‌الزاویه است. چرا؟

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

با توجه به کادر فوق چون طبق فرض خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس است پس $OT \perp d$ در نتیجه مثلث OMT در رأس T قائم الزاویه است .

اگر N وسط پاره‌خط OM باشد، $NM = NO = NT$ چرا؟

اگر N وسط پاره خط OM باشد در نتیجه TN میانه ی مثلث قائم الزاویه OMTاست .« در هر مثلث قائم الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر نصف اندازهٔ وتر است.»(صفحه ۶۰ کتاب هندسه دهم) . بنا براین $MN = NO = TN$.

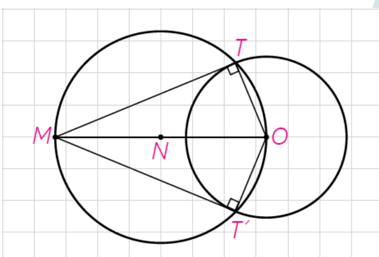


بنابراین دایره به مرکز Nو قطر OM از نقطه T می‌گذرد.

از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

اگر فاصله M تا O (مرکز دایره) d باشد، $MT = \sqrt{d^{۲} - R^{۲}}$ چرا؟

$$\overset{\Delta}{MTO}: \hat{T} = ۹۰^{\circ} \Rightarrow MT^{۲} = OM^{۲} - OT^{۲} \Rightarrow MT = \sqrt{d^{۲} - R^{۲}}$$



اکنون برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.

این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می‌کند. خط‌های MT و MT' بر دایره مماس‌اند چرا؟

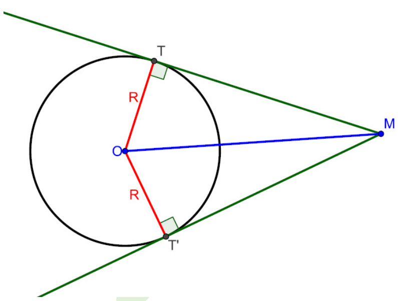
زاویه های $M\hat{T}O$ و $M\hat{T'}O$ محاطی روبه رو به قطر هستند بنا براین اندازه ی هرکدام ۹۰° است . پس شعاع نقطهٔ تماس بر پاره خط های MT و MT' عمود است .

درنتیجه MT و MT' بر دایره مماس هستند.

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کاردرکلاس

هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید :



الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا براجزای متناظر $MT = MT'$.

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

راه اول : دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا براجزای متناظر $O\hat{M}T = O\hat{M}T'$.

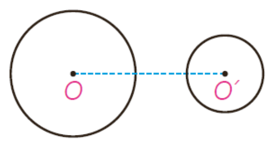
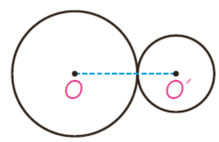
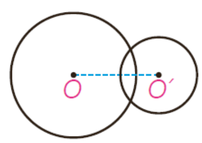
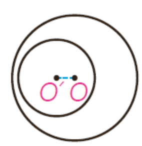
راه دوم : فاصلهٔ نقطهٔ O از دوضلع زاویه TMT' به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطهٔ O روی نیمساز این زاویه است. یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه TMT'است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

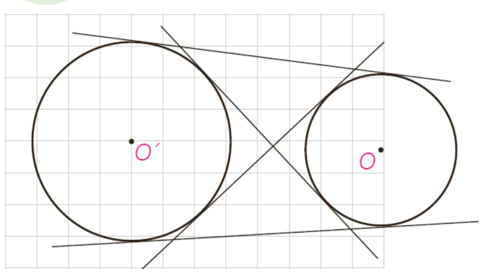
حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ درنظر می‌گیریم.

حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

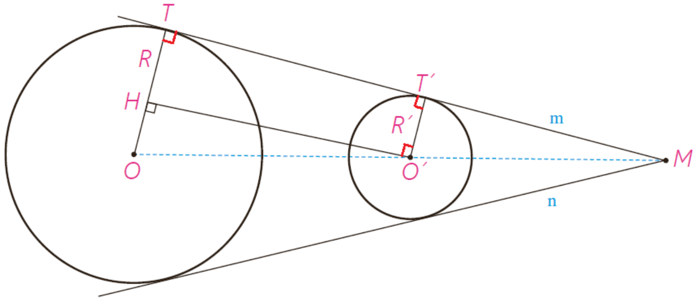
هر خطی یا پاره‌خطی را که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می‌نامند.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فعالیت

۱ــ فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده‌است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟

شعاع های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند. و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنا بر قضیه خطوط موازی $\hat{T}=\hat{H}=90^\circ$ و $\hat{T'}=\hat{O'}=90^\circ$

بنا بر این چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است .

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

$OO'=d$ و $OT=R$ و $O'T'=R'$ و با توجه به بند الف $O'H=TT'$

$$\overset{\Delta}{OO'H}:\hat{H}=90^\circ \Rightarrow O'H^2+OH^2=OO'^2 \Rightarrow O'H^2=OO'^2-OH^2$$

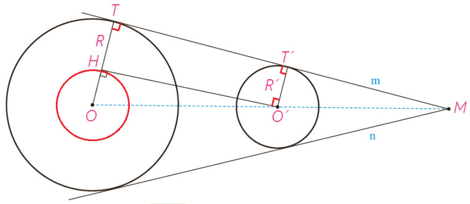
$$\Rightarrow O'H=\sqrt{d^2-(OT-OT')^2} \xrightarrow[OT=R,\,O'T'=R']{O'H=TT'} TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطهٔ تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشرک در نقطه ی M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است . همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و $O'M$ بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطهٔ تقاطع مماس ها روی خط OO' قرار دارد.

ت) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خط $O'H$ برای دایرهٔ رسم شده چگونه خطی است؟

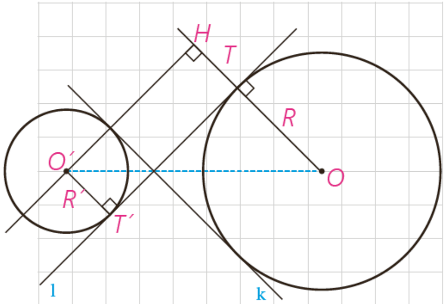
پاره خط $O'H$ بر این دایره مماس است .



ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایرهٔ مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این‌صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

از نقطهٔ O به H وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی $O'H$رسم می کنیم. این خط در نقطهٔ T' بر دایرهٔ (C')مماس می شود.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



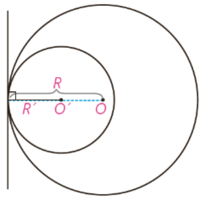
۲ــ دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده‌است مرکزهای دو دایره در دوطرف مماس مشترک‌اند. با به‌کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ مانند قبلی نشان دهید :

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

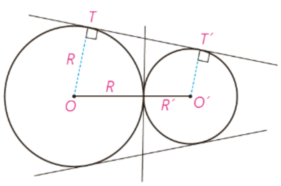
با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$. همچنین $TH = O'T' = R'$ و در نتیجه : $OH = R + R'$.

$$O'\overset{\Delta}{O}H : H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow O'H^{۲} = OO'^{۲} - OH^{۲} \xrightarrow[OH = R + R' , OO' = d]{TT' = O'H} TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

۳ــ دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
$OO' = |R - R'|$



مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.
$OO' = R + R'$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = ۲\sqrt{RR'}$

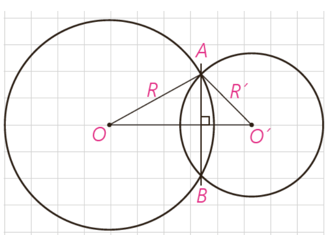
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} \xrightarrow{d = R + R'} TT' = \sqrt{(R + R')^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{R^{۲} + R'^{۲} + ۲RR' - (R^{۲} + R'^{۲} - ۲RR')} = \sqrt{R^{۲} + R'^{۲} + ۲RR' - R^{۲} - R'^{۲} + ۲RR'}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۴RR'} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{RR'}$$

۴ــ دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

و $|R - R'| < OO' < R + R'$ ؛ چرا؟



با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

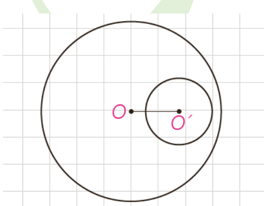
$$OO' < R + R' \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} R' < OO' + R \Rightarrow -OO' < R - R' \\ R < OO' + R' \Rightarrow R - R' < OO' \end{array}\right\} \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) , (۲)} |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره‌خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟

$OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$ بنا بر خاصیت عمودمنصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.

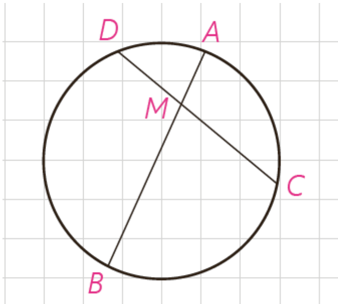


$OO' < |R - R'|$

۵ ــ دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین



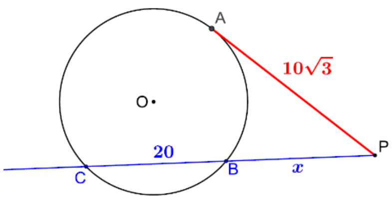
۱ــ در دایرهٔ C(O,R) وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر AB = ۱۱cm، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DM=۳\Rightarrow MC=۶$$

$$DM.MC=AM.BM\xrightarrow{AM=x}۳\times۶=x(۱۱-x)\Rightarrow x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰$$

$\Rightarrow(x-۹)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\quad,\ x=۹$ باتوجه به شکل غ ق ق

$$\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$$

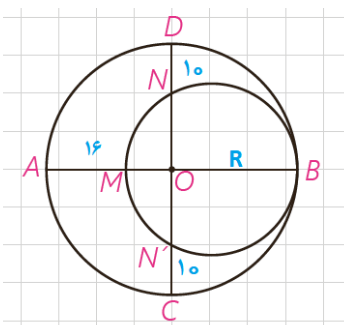


۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و BC = ۲۰. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

$$PA^{۲}=PB.PC\rightarrow(۱۰\sqrt{۳})^{۲}=x(x+۲۰)\Rightarrow x^{۲}+۲۰x-۳۰۰=۰$$

$\Rightarrow(x-۱۰)(x+۳۰)=۰\Rightarrow x=۱۰\quad,\quad x=-۳۰$ غ ق ق

$$\Rightarrow PB=۱۰\ ,\ PC=۳۰$$



۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر AM = ۱۶ و ND = ۱۰، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

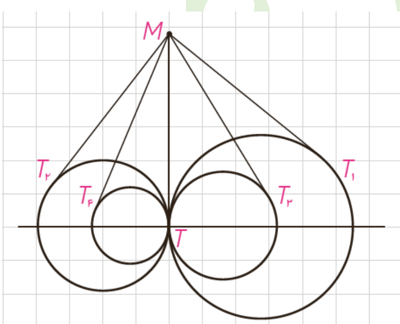
$$OB.OM=ON.ON'\Rightarrow R(R-۱۶)=(R-۱۰)(R-۱۰)$$

$$\Rightarrow R^{۲}-۱۶R=R^{۲}-۲۰R+۱۰۰\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

$$R'=\frac{MB}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۲R-۱۶}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۵۰-۱۶}{۲}=۱۷$$

۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

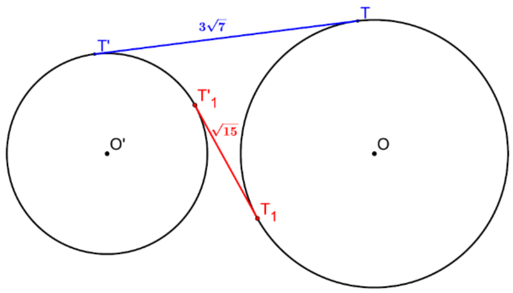
$$MT_{۱}=MT_{۲}=MT_{۳}=MT_{۴}=\dots$$



با توجه به کار درکلاس ص ۱۲ می دانیم که از هر نقطه خارج دایره طول مماس های رسم شده باهم برابرند. بنابراین داریم :

$$\left.\begin{aligned}MT&=MT_{۲}\\MT&=MT_{۴}\\MT&=MT_{۱}\\MT&=MT_{۳}\end{aligned}\right\}\Rightarrow MT=MT_{۱}=MT_{۲}=MT_{۳}=MT_{۴}$$

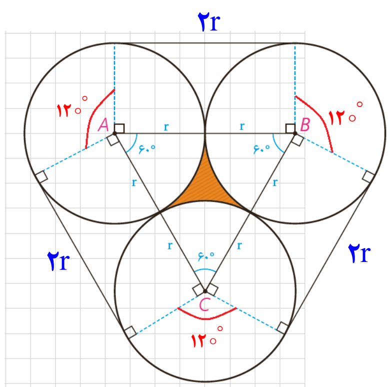
۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R - R')^{۲} \\ TT'^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ محدود است.



مجموع سه قطاع با زاویهٔ ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می دهد بنا براین داریم :

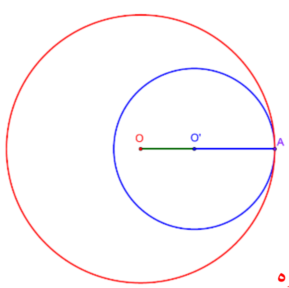
طول نخ $= ۲r + ۲r + ۲r +$ محیط یک دایره $= ۶r + ۲\pi r$

مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰درجه تشکیل یک نیم دایره می دهد بنا بر این داریم :

مساحت نیم دایره− مساحت مثلث ABC = مساحت ناحیه هاشور خورده

مساحت ناحیه هاشور خورده $= \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$

۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.



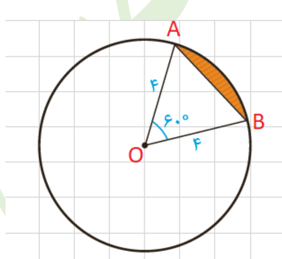
با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه :

مساحت ناحیه محدود بین دودایره $= \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi \Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = ۲} ۲(R + R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$$

$$\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵ \text{ , } R' = ۳$$

۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



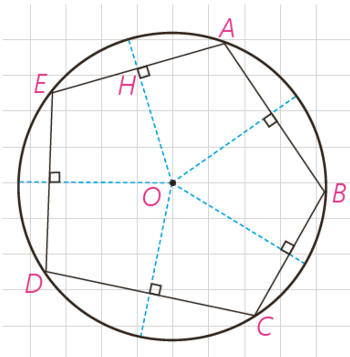
مثلث OAB متساوی الساقین است که و $\hat{O} = ۶۰^{\circ}$ پس این مثلث متساوی الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB − مساحت قطاع ۶۰ درجه =مساحت قسمت رنگی (A)

$$A = \frac{\pi r^{۲}}{۳۶۰}\alpha - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times r^{۲} \Rightarrow A = \frac{۱۶\pi}{۳۶۰} \times ۶۰ - ۴\sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$$

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی



چند ضلعی را **محاطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی** می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره‌خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین :

یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رأس باشند.

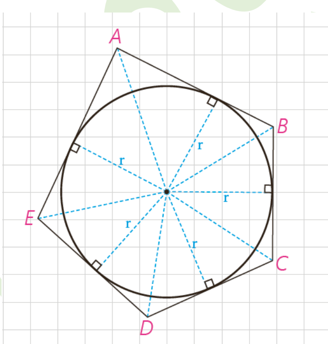
چرا؟ این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

فرض : چند ضلعی محاطی است . حکم : عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی آن در یک نقطه همرسند.

باتوجه به تعریف چند ضلعی محاطی و فرض واضح است که فاصله ی همهٔ رأس های چند ضلعی تا مرکز دایره به یک اندازه است (شعاع دایره) در نتیجه بنا برخاصیت عمود منصف فاصلهٔ مرکز دایره از دوسر هر ضلع به یک فاصله (شعاع دایره) است ، پس مرکز دایره روی عمود منصف این اضلاع قرار دارد.در نتیجه عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی آن در یک نقطه(مرکز دایره) همرسند.

فرض : عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی چندضلعی در یک نقطه همرسند. حکم : چند ضلعی محاطی است .

باتوجه به فرض و خاصیت عمود منصف همه ی رأس های چند ضلعی از نقطه ی همرسی عمود منصف ها به یک فاصله اند و در نتیجه این نقاط بنا بر تعریف دایره ، روی دایره ای به شعاع این فاصله ی ثابت قرار دارند و بنا بر تعریف چند ضلعی محاطی این چند ضلعی محاطی است .



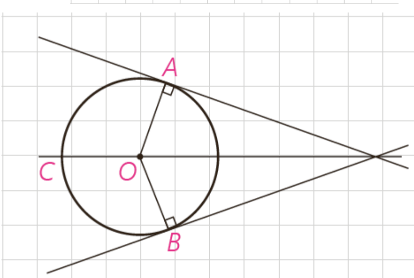
چند ضلعی را **محیطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محاطی این چند ضلعی** می‌نامیم.

فعالیت

فرض کنید دایرهٔ C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)

۱ــ پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OB و OA بنامید.



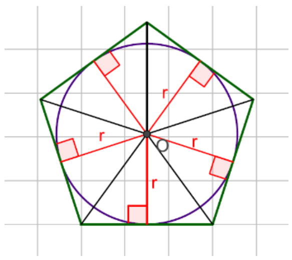
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۲ــ پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

شعاع های دایره اند.

۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

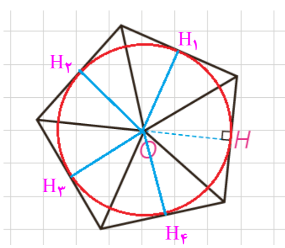
باهم برابرند . زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است .



۴ــ با توجه به (۲) و (۳) فاصلهٔ مرکز دایره از دو ضلع زاویه به.یک فاصله.است و بنابراین نقطهٔ O روی نیمساز.زاویه. است.

۵ــ فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟

بنا به تعریف چند ضلعی محاطی ، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می دانیم شعاع درنقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است ، پس این شعاع ها همان فاصله ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی با هم برابرند . بنا برخاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمساز های داخلی چند ضلعی است.



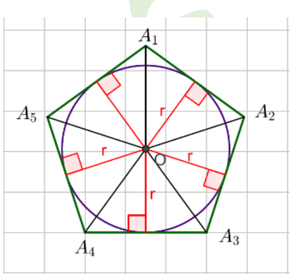
ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

نقطهٔ O روی نیمساز زوایای داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمساز ها: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$

همچنین OH_1 و OH_2و OH_3 و OH_4 همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره ای به شعاع OH رسم می کنیم شعاع ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطهٔ تماسشان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چندضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

> بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردرکلاس



اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید S=rp .

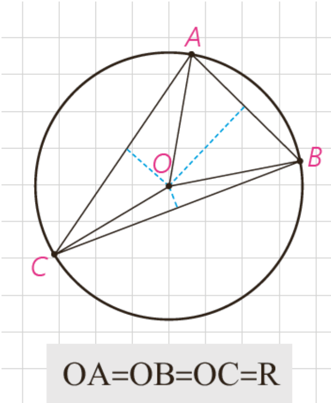
راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.

$$S = \frac{1}{2}r.A_1A_2 + \frac{1}{2}r.A_2A_3 + \frac{1}{2}r.A_3A_4 + \frac{1}{2}r.A_4A_5 + ... + \frac{1}{2}r.A_{n-1}A_n$$

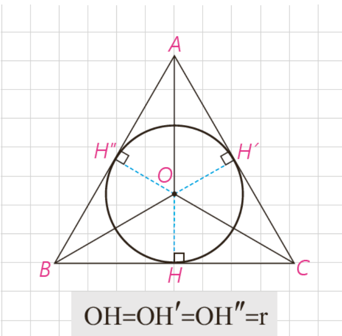
$$= \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

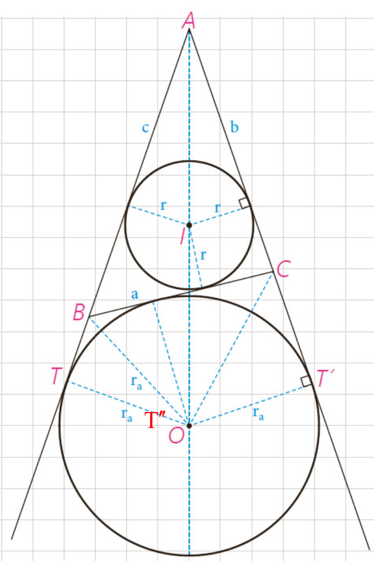


قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.



اگر نیمساز زاویه A از Δ ABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های ACو AB به یک فاصله است؛ چرا؟

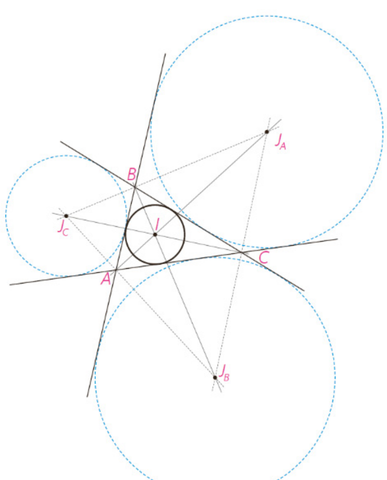
نقطهٔ O روی نیمساز زاویه A است پس $OT = OT'$ (۱)

نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔخارجی C است پس $OT'' = OT'$ (۲)

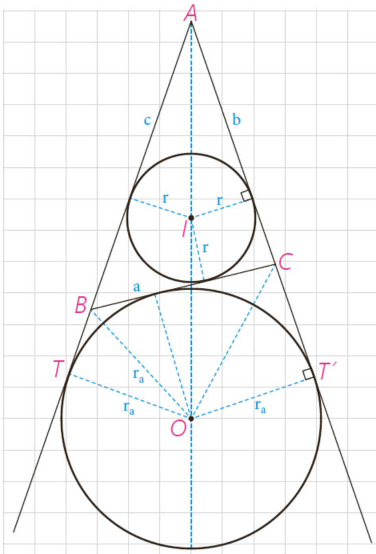
از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : $OT'' = OT$ پس نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ خارجی B نیز هست . به عبارتی این نقطه از خط BC و خط های AC و AB به یک فاصله است.

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



اکنون در فعالیت زیر محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

در شکل داریم: $S(ABC)=S(OAC)+S(OAB)-S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$. اگر محیط مثلث را با ۲p نشان دهیم، داریم، ۲p=a+b+c؛ پس $2p-2a=a+b+c-2a=b+c-a$

در نتیجه $S=r_a(P-a)$ و بنابراین $r_a=\frac{S}{p-a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

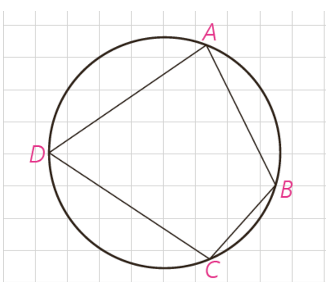
$r_b=\frac{S}{p-b}$ $\qquad$ $r_c=\frac{S}{p-c}$

برخلاف مثلث، همهٔ چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

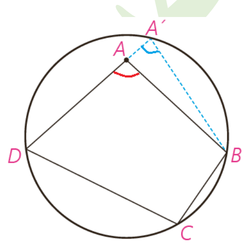
اثبات



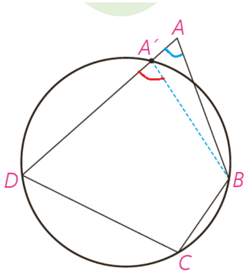
۱ــ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان 360° است و در نتیجه مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ برابر 180° است.
به همین ترتیب $\hat{B}$, $\hat{D}$ مکمل‌اند.

۲ــ فرض کنیم $\hat{A}$, $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه C،B و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

زیرا عمود منصف های اضلاع یک مثلث همرسند و مرکز دایره ی محیطی هر چندضلعی نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع است.



اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A بین A' و D است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟



زیرا در هر مثلث هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ تر است.

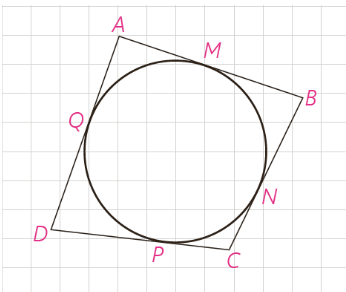
در نتیجه A' همان A است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند.

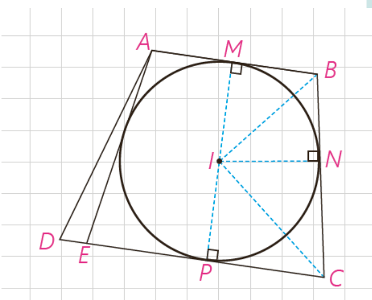
اثبات



۱ــ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB+CD=AM+MB+PC+PD=AQ+BN+CN+DQ$$
$$=AQ+DQ+BN+CN=AD+BC$$

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.



۲ــ فرض کنید : $AB+CD=BC+AD$.

نیمسازهای دو زاویهٔ B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطهٔ I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟($IM=IN=IP$)

نقطهٔ I روی نیمساز زاویهٔ B است پس $IM=IN$ (۱)

نقطهٔ I روی نیمساز زاویهٔ C است پس $IP=IN$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : $IP=IN=IM$ پس نقطهٔ I از سه ضلع CD، BC و AB به یک فاصله است.

چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟

زیرا این شعاع ها در نقاط اشتراک با دایره بر آن عمود هستند.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود.

پس، $AB+EC=AE+BC$ ؛ (چرا؟)

چهار ضلعی ABCE محیطی است پس بنا بر بند (۱) همین قضیه نتیجه می گیریم : $AB+CE=AE+BC$

از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می گیرید : $AD=DE+AE$ ؟

$$\left.\begin{array}{l}AB+CD=AD+BC\\AB+CE=AE+BC\end{array}\right\}\Rightarrow CD-CE=AD-AE\Rightarrow CD-CE+AE=AD\Rightarrow DE+AE=AD$$

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟)

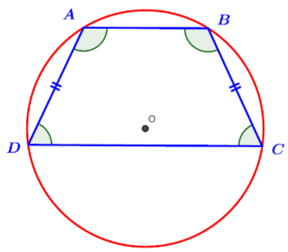
بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث ADE داریم : $DE+AE>AD$ پس رابطه ی فوق امکان ندارد؛مگر این که E همان D باشد.

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کاردرکلاس

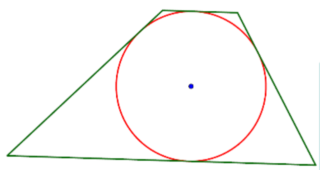
با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های ذوزنقه، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. ذوزنقه متساوی‌الساقین چطور؟



ذوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند.

اما اگر ذوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

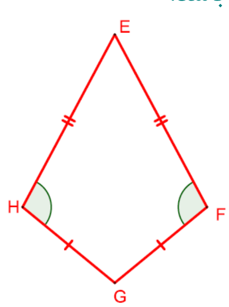
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ذوزنقه ABCD محاطی است

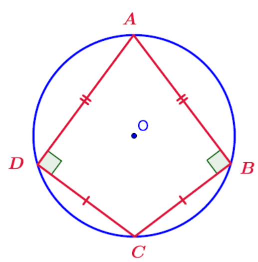


یک ذوزنقه در حالت کلی محیطی نسیت اما می تواند محیطی باشدبه شرط آن که نیمساز های داخلی همرس باشند.

مانند شکل مقابل:

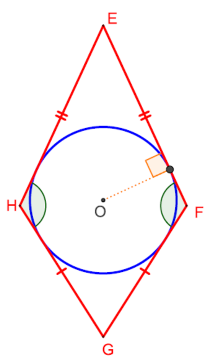
یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می تواند محاطی باشد.





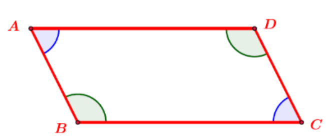
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\hat{D}=180^\circ} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$$

پس بنا برقضیه کایت ABCD محاطی است.



یک کایت حتما محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}EF=EH \\ GH=GF\end{array}\right\} \Rightarrow EF+GH=EH+GF$$



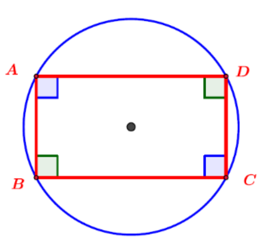
یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست ؛ زیرا :

زاویه های مقابل نمی توانند مساوی 180° باشند.

$$\hat{A}+\hat{C}<180^\circ \ , \ \hat{B}+\hat{D}>180^\circ$$

یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محیطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آن ها با هم برابر نیست .

با توجه به شکل فوق : $AB+DC<AD+BC$.



یک مستطیل محاطی است ؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل همیشه برابر با 180° است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن ها باهم برابر نیست

با توجه به شکل : $AB+DC<AD+BC$

یک لوزی محاطی نیست ؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل ۱۸۰° نیست .

یک لوزی محیطی است ؛ زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

یک مربع هم می تواند محیطی و هم محاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل ۱۸۰° است و هم مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

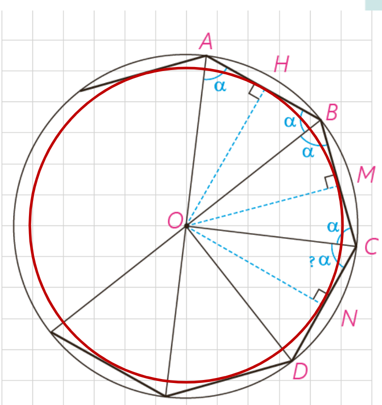
از دیگر چندضلعی‌های محاطی و محیطی، چند ضلعی‌های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :

فعالیت



فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم $ABCD...$، ۲α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA=\cdot OB\cdot=OC$.

پس $\Delta OAB\cong\Delta OBC$ چرا؟

دو مثلث به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند.

$$\widehat{ABC}=\widehat{OBA}+\widehat{OBC}\xrightarrow{\widehat{OBA}=\widehat{OBC}}۲\alpha=۲\widehat{OBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$$

$$\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$$

اکنون از D به O وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\Delta OCD\cong\Delta OCB$؟ و $OA=OB=OC=OD$؟

$$\widehat{BCD}=\widehat{OCB}+\widehat{OCD}\Rightarrow ۲\alpha=\alpha+\widehat{OCD}\Rightarrow\widehat{OCD}=\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}OC=OC\\ BC=DC\\ \widehat{OCD}=\widehat{OCB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OCD}\cong\overset{\Delta}{OCB}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}OD=OB$$

$$\left.\begin{array}{l}OD=OB\\ OA=OB=OC\end{array}\right\}\Rightarrow OA=OB=OC=OD$$

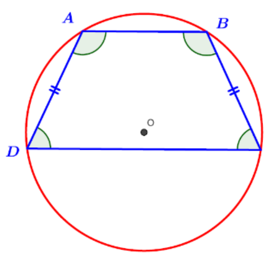
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

با ادامه این روند داریم :

$OA=OB=OC=OD=\cdots$ و $OH=ON=OM=\cdots$ بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.

تمرین



۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

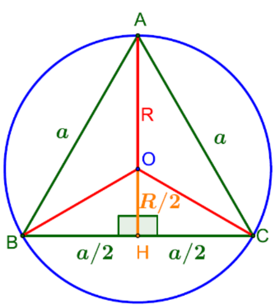
فرض : ذوزنقه متساوی الساقین است. حکم : ذوزنقه محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض : ذوزنقه محاطی است. حکم : ذوزنقه متساوی الساقین است.

$$AB \parallel DC\ ,\ AD \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{C} \Rightarrow \hat{D}=\hat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \hat{A}=\hat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه های مجاور به ساق برابرند درنتیجه ذوزنقه متساوی الساقین است .



۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

مرکز دایره ی محیطی نقطهٔ O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی الاضلاع است نقطهٔ O محل برخورد میانه هاهم هست. بنا براین :

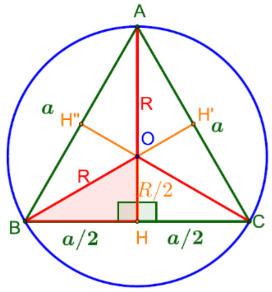
راه اول :

$$AB=BC=AC=a \quad , \quad BH=CH=\frac{a}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}OH=\dfrac{OA}{۲} \Rightarrow OH=\dfrac{R}{۲} \Rightarrow AH=R+\dfrac{R}{۲}=\dfrac{۳}{۲}R \\ \overset{\Delta}{ACH}:H=۹۰^\circ \Rightarrow AH=\sqrt{AC^۲+CH^۲} \Rightarrow AH=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}a\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{۳}{۲}R \Rightarrow a=\frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a=R\sqrt{۳}$$

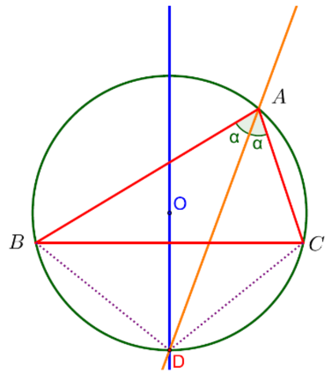
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: باتوجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است . این مثلث های به حالت(ض ز ض) همنهشت هستند.



$$\overset{\Delta}{OBH}:H=۹۰^\circ \Rightarrow BH=\sqrt{R^۲-(\frac{R}{۲})^۲}=\frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC}=۶\times\frac{۱}{۲}\times\frac{R}{۲}\times\frac{R}{۲}\sqrt{۳} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

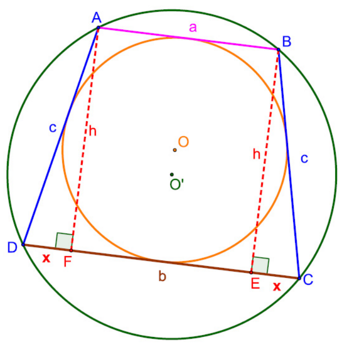


۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

فرض کنیم نیمساز زاویهٔ BAC دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ D قطع کند:

$$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}\xrightarrow{\text{محاطی}}\widehat{BD}=\widehat{CD}\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}}BD=CD$$

فاصلهٔ نقطهٔ D از دونقطهٔ B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمود منصف نقطهٔ D روی عمود منصف پاره خط BC نیز قرار دارد.



۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون ذوزنقهٔ ABCD محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.در نتیجه: $۲c=a+b$ و مثلث ADF قائم الزاویه است.

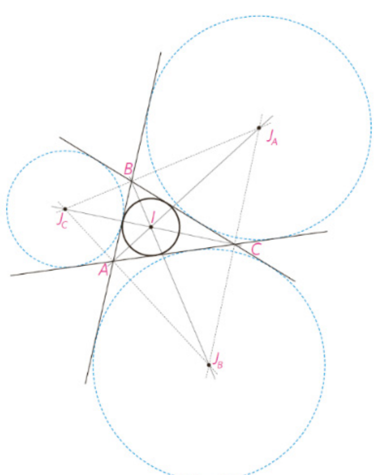
$$۲c=a+b\Rightarrow c=\frac{a+b}{۲}\qquad,\qquad b=۲x+a\Rightarrow x=\frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲=c^۲-x^۲\Rightarrow h^۲=(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{b-a}{۲})^۲\Rightarrow h^۲=\frac{۴ab}{۴}\Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+b)\times h\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

۵ــ اگر r_a , r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$



$$S=rp\Rightarrow\frac{۱}{r}=\frac{p}{S}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}\Rightarrow\frac{۱}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

$$r_b=\frac{S}{p-b}\Rightarrow\frac{۱}{r_b}=\frac{p-b}{S}$$

$$r_c=\frac{S}{p-c}\Rightarrow\frac{۱}{r_c}=\frac{p-c}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{۳p-(a+b+c)}{S}=\frac{۳p-۲p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

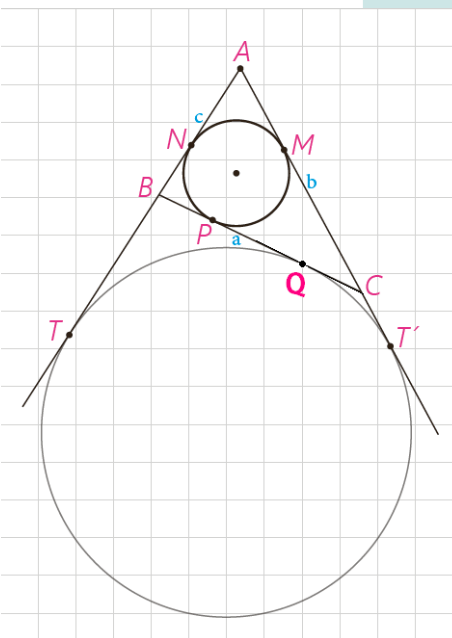
به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S} \\ S=\frac{۱}{۲}bh_b \Rightarrow h_b=\frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S} \\ S=\frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow h_c=\frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲p}{۲S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :



AM=AN=P−a

$$\left.\begin{array}{l} AN=c-BN \\ AM=b-CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM+AN=b+c-(BN+CM)$$

$$\xrightarrow[CM=CP,\,BN=BP]{AM=AN} ۲AM=b+c-\underbrace{(BP+CP)}_{a}=b+c-a$$

$$۲AM=۲p-۲a \Rightarrow AM=AN=p-a$$

BN=BP=P−b

$$\left.\begin{array}{l} BN=c-AN \\ BP=a-CP \end{array}\right\} \Rightarrow BN+BP=a+c-(AN+CP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM\ ,\ CP=CM]{BP=BN} ۲BN=a+c-\underbrace{(AM+CM)}_{b}=a+c-b$$

$$۲BN=۲p-۲b \Rightarrow BN=BP=p-b$$

CM=CP=P−C

$$\left.\begin{array}{l} CM=b-AM \\ CP=a-BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM+CP=b+a-(AM+BP)$$

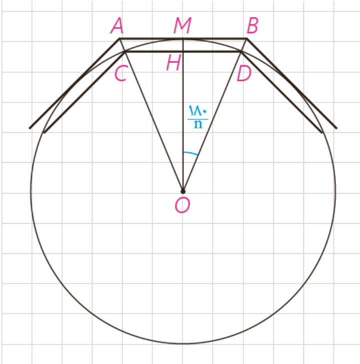
$$\xrightarrow[AN=AM\ ,\ BP=BN]{CM=CP} ۲CM=b+a-\underbrace{(AN+BN}_{c}=b+a-c$$

$$۲CM=۲p-۲c \Rightarrow CM=CP=p-c$$

AT=AT′=P

$$AT+AT'=c+BT+b+CT' \xrightarrow[BT=BQ,\,CT'=CQ]{AT=AT'} ۲AT=c+b+\underbrace{BQ+CQ}_{a}=c+b+a=۲p$$

$$\Rightarrow ۲AT=۲p \Rightarrow AT=AT'=p$$



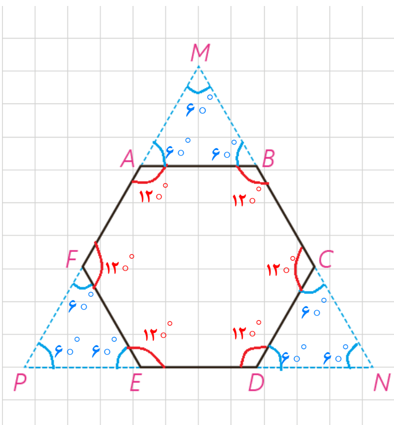
۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$.

$$\overset{\Delta}{OHD}: \hat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲HD}{r}$$

$$\xrightarrow{۲HD=CD} CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

$$\overset{\Delta}{OMB}: \hat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM=r} \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r}$$

$$\xrightarrow{۲MB=AB} AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$

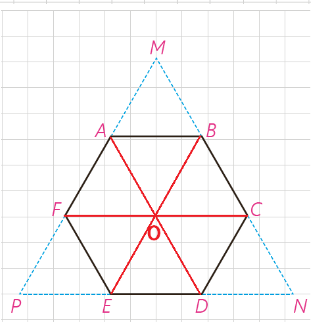


۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

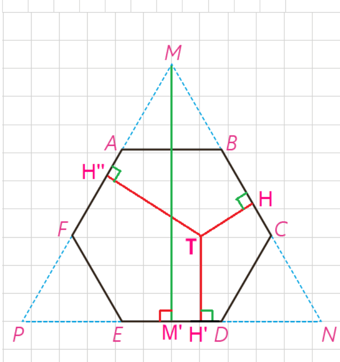
اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰° است . بنا بر این زاویه های خارجی ۶۰° است . با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می گیریم که $\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی الساقین است.

ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.



اگر قطر های شش ضلعی منتظم را رسم کنیم آن را به شش مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم و در مثلث MNP ، ۹ مثلث همنهشت ایجاد می شود .

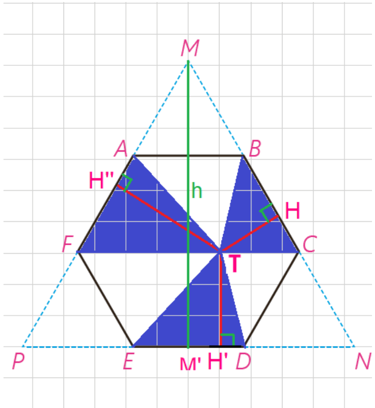
$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{۶S_{MAB}}{۹S_{MAB}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$



پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$



ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

$$S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}AF.TH''+\frac{۱}{۲}DE.TH'+\frac{۱}{۲}BC.TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}a(\underbrace{TH''+TH'+TH}_{h})=\frac{۱}{۲}ah$$

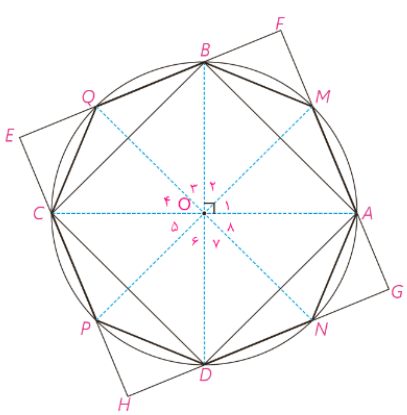
$$\Rightarrow S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}ah$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۱}{۲}MN.h \xrightarrow{MN=۳a} S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۳}{۲}a.h$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۳}{۲}a.h}\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{۱}{۳}$$

مساحت مثل های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است ومساحت شش ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث های سفید هم برابر با $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$ است بنا براین مساحت مثلث های آبی با مساحت مثلث های سفید برابر است.

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$



۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

در چهار ضلعی ABCD قطر همدیگر را نصف می کنند و باهم برابرندپس مستطیل است و چون قطر ها برهم عمودند نتیجه می گیریم که مربع است.

عمود منصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:

$$O_۱=O_۲=O_۳=O_۴=O_۵=O_۶=O_۷=O_۸=۴۵^\circ$$

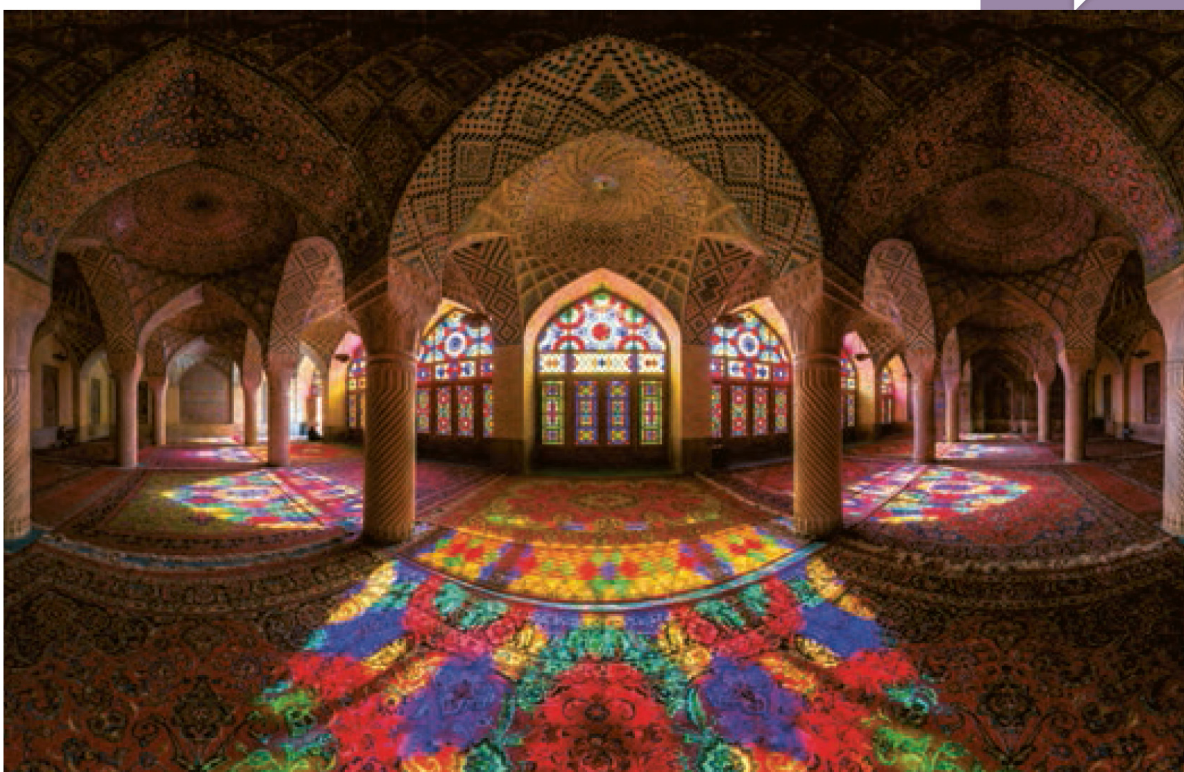
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{QC}=\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{NA}$$

$$\Rightarrow AM=MB=BQ=QC=CP=PD=DN=NA$$

۲

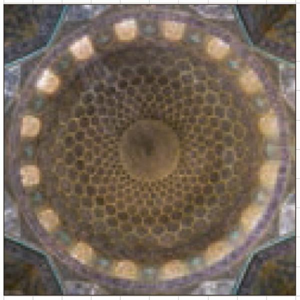
فصل دوم

تبدیل‌های هندسی و کاربردها



عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیر الملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.



درس اوّل

تبدیل‌های هندسی

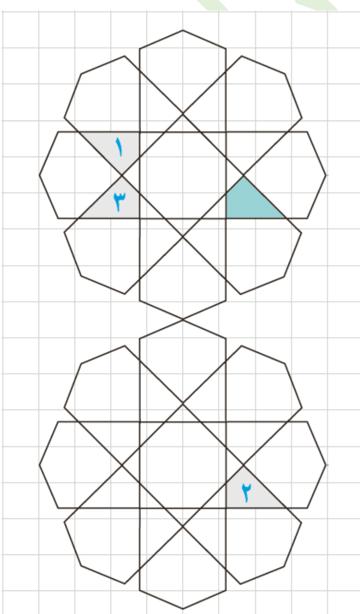
در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و . . . شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را **تبدیل‌های هندسی** می‌نامیم.

> تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند موقعیت[1] (جایگاه شکل در صفحه) یا اندازهٔ[2] شکل را تغییر دهد.
> تبدیل‌یافتهٔ یک شکل را، تصویر آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت



۱ــ به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده بدانیم :

الف) کدام چهار ضلعی، انتقال‌یافتهٔ چهارضلعی رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۲ انتقال یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

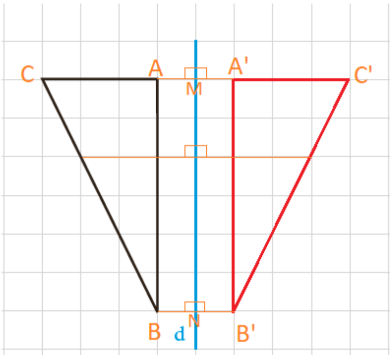
پ) کدام شکل، دوران یافتهٔ شکل رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۱ دوران یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۱ـ Position
۲ ـ Size

۲ـ الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.
(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)



از هر رأس مثلث بر خط d عمودی رسم می کنیم و سپس به اندازه ی آن پاره خط امتداد می دهیم تا تصویرش به دست آید. ($AM = A'M$, $BN = B'N$, $CM = C'M$)سپس نقاط تصویر یعنی A' ، B' و C' را به هم وصل می کنیم . مثلث A'B'C' بازتاب مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟ اندازه‌ها را چطور؟

موقعیت شکل را تغییر می دهد اما اندازه ها را تغییر نمی دهد.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

خیر شیب پاره خط BC با شیب پاره خط متناظرش B'C' برابر نیست.

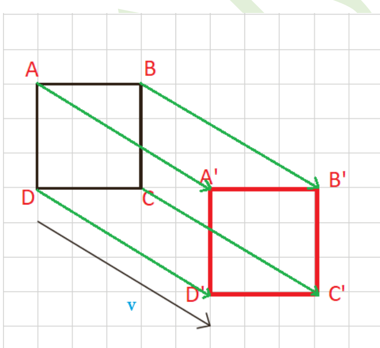
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خط مورد نظر موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب آن حفظ می شود .

در شکل بالا همانطور که می بینیم پاره خط AC بخشی از خط عمود بر خط d است و تصویر آن نیز روی همان خط عمود قرار خواهد گرفت وبه همین دلیل شیب پاره خط A'C' با شیب پاره خط AC برابر است.

اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد تصویرش هم با آن موازی است پس هم شیب خواهند شد.

۳ـ الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



با توجه به برداد v باید رأس های مربع را ۵ واحد به سمت راست و۳ واحد به سمت پایین انتقال بدهیم تا نقاط تصویر به دست آیند. واضح است که باتوجه به شکل بردارد ها یی که هر نقطه را به تصویرش برده است با بردار v برابر هستند. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می کنیم. مربع A'B'C'D' انتقال یافته ی مربع ABCD تحت بردارv است.

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاره خط هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می کنند باهم موازی هستند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

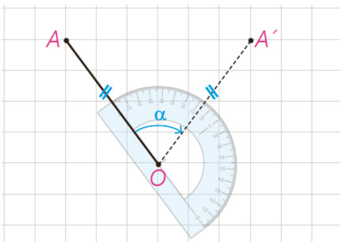
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

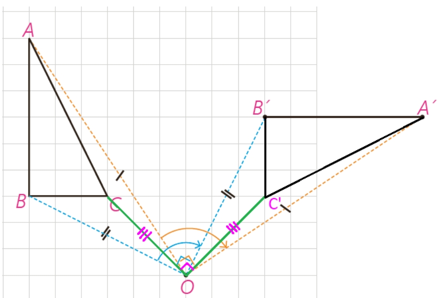
در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویرش برابر است.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می‌شود؟

در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود.



۴ــ در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، کافی‌است هر نقطه از شکل، مثل نقطهٔ A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا کنیم تا نقطهٔ A' به دست آید.



می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطهٔ C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟

دراین تبدیل شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می‌توانید زاویهٔ دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

اگر زاویهٔ دوران ۰ ، ۱۸۰ و یا ۳۶۰ درجه انتخاب شود دوران تحت آن ، شیب خط را حفظ می کند.

به طور شهودی می‌توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می‌توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند.

در ادامهٔ این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحهٔ قبل، اندازهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود ولی اندازهٔ پاره‌خط‌ها تغییر می‌کند. این تبدیل را **تجانس** می‌نامیم.

حال که به‌طور شهودی، برخی ویژگی‌های تبدیل‌های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی‌ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تعریف: تبدیل T[1] در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحهٔ P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از صفحهٔ P است.
اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$T: P \longrightarrow P$

$T(A)=A'$

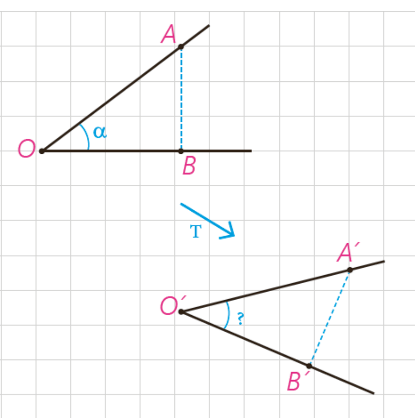
پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازهٔ پاره‌خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازهٔ پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً **طولپایی** یا **ایزومتری** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند.
به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$، آن‌گاه داریم: $AB=A'B'$

پیش از این به‌طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.



فرض کنید T تبدیلی طولپاست.
و داریم :

$T(A)=A'$

$T(B)=B'$

$T(O)=O'$ و $\widehat{AOB}=\alpha$

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

چون این تبدیل طولپا است پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} AB=A'B' \\ OA=O'A' \\ OB=O'B' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O'\overset{\Delta}{A'}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}=\alpha$$

---

[1] ـ Transformation

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

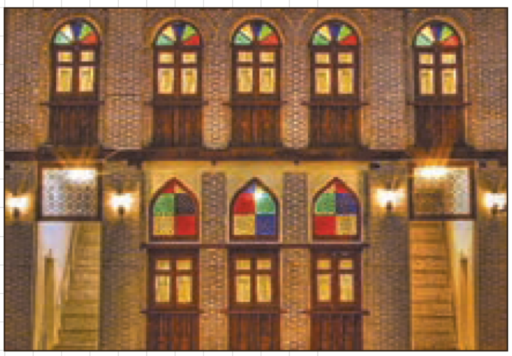
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافتهٔ هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافتهٔ یک خط، کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

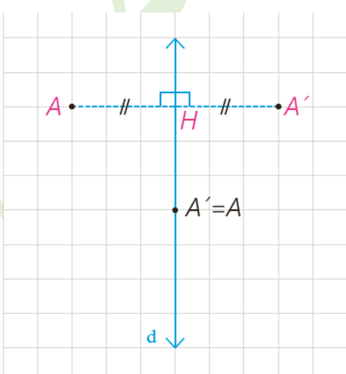
بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.

در این صورت A' را بازتاب یا قرینهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S^{1}(A) = A'$$



در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

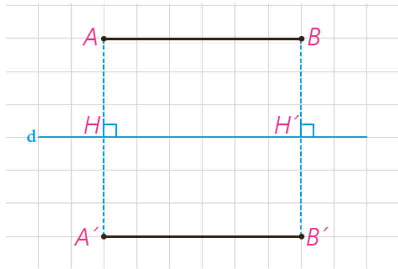
خط d، **خط بازتاب** یا **محور بازتاب** نامیده می‌شود.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت



می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازهٔ پاره‌خط با اندازهٔ تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است.

بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.

چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

می دانیم مستطیل چهار ضلعی است که همه زاویه های آن قائمه باشد .

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel d, AH \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A}=\hat{H}=90^\circ \\ AB \parallel d, BH' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{H'}=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ABH'H \quad \text{مستطیل است}$$

در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابرند پس :

$$\left.\begin{array}{l} AH=BH' \Rightarrow 2AH=2BH' \xrightarrow[BH'=B'H']{AH=A'H} AA'=BB' \\ \left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \end{array}\right\} \Rightarrow ABB'A' \quad \text{متوازی الاضلاع است}$$

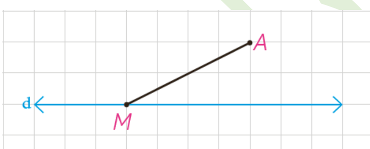
در نتیجه: $A'B'$ موازی AB است.

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد:

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک ...مستطیل.. است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی : $AB = A'B'$.

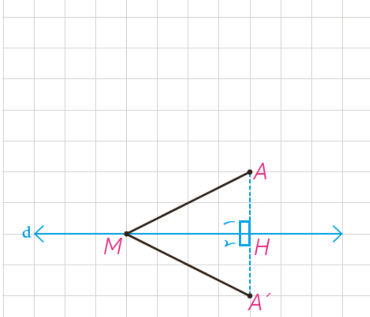
ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.



(اگر هر دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

خوب در این حالت بازتاب پاره خط MA بر روی خط و بر روی خودش منطبق است.

$S(M)=M \;,\; S(A)=A \Rightarrow MA=MA$



بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب M، خود M است.

به عبارتی : $S(A)=A'$ و $S(M)=M$

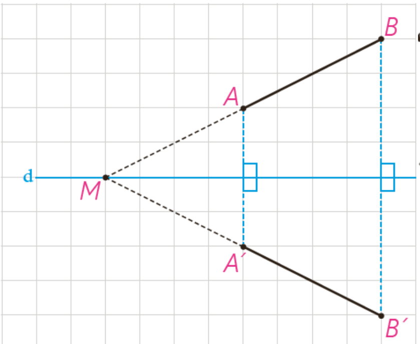
آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA=MA'$ ارائه کنید؟

$$\left.\begin{array}{l} AH=A'H \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{A'}H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} MA=MA' \;,\; \widehat{AMH}=\widehat{A'MH}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

خط d عمود منصف پاره خط 'AA است ؛ بنا براین هر نقطه مانند M روی خط d از دو سر پاره خط 'AA به یک فاصله است . یعنی: $MA = MA'$

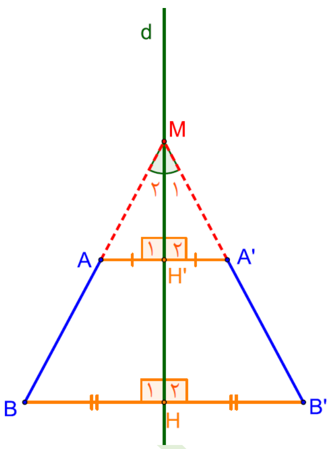


پ) در حالتی که پاره‌خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطهٔ M قطع کند.

نقطه ′B بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره‌خط ′MB را رسم می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط ′MB واقع می‌شود؛ چرا؟

با توجه به قسمت (ب) می دانیم که $MB = MB'$ پس مثلث متساوی الساقین است و چون خط d عمود منصف 'BB است با توجه به قضایای متساوی الساقین d نیمساز زاویهٔ 'BMB نیز هست. بنا براین : $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$.



از نقطهٔ A موازی پاره خط 'BB خطی رسم می کنیم تا 'MB را در نقطهٔ 'A قطع کند.

حالا باید ثابت کنیم که'A تصویر نقطهٔ A نسبت به خط بازتاب d است یعنی :

$AH' = A'H' \quad , \quad H'_۱ = H'_۲ = ۹۰^\circ$

راه اول : در مثلث 'MAA پاره خط 'MH هم نیمساز است و هم ارتفاع پس مثلث متساوی الساقین است. و در نتیجه 'MH میانه نیز هست پس: $AH' = A'H'$

راه دوم :

$$AA' \parallel BB' \ , \ d \ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} H = H' = ۹۰^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow H'_۱ = H'_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MH' = MH' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} M\overset{\Delta}{A}H' \cong M\overset{\Delta}{A'}H' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AH' = A'H'$$

بنا براین : $AH' = A'H' \quad , \quad H'_۱ = H'_۲ = ۹۰^\circ$ و حکم ثابت شد.

راه دیگر برای پاسخ به (چرا):

H وسط 'BB و 'H وسط 'AA است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و 'H روی خط d یعنی خط بازتاب هستند.با توجه به بند (ب) خط d نیمساز زاویه های $\widehat{BMB'}$ و $\widehat{AMA'}$ است.

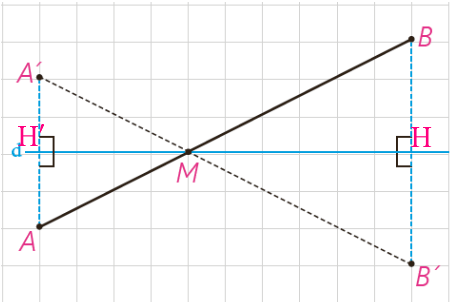
$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \ \text{با توجه به شکل} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و'MH) و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی 'MA و 'MB بر هم منطبق هستند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ \text{با توجه به قسمت ب } MB = MB' \text{ و } MA = MA' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



ت) در حالتی که پاره‌خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم.

پاره‌خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

H وسط 'BB و 'H وسط 'AA است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و 'H روی خط d یعنی خط بازتاب هستند.با توجه به بند (ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \text{ متقابل به رأس} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع ('MH و MH) و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی 'MA و 'MB بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

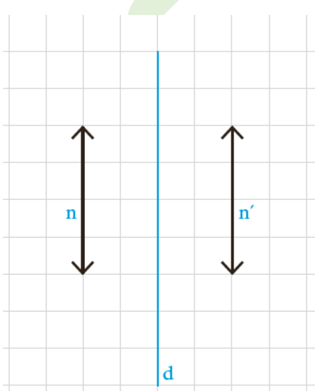
$$\left.\begin{array}{l} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + B'M \\ \text{با توجه به قسمت ب } MB = MB' \text{ و } AM = A'M \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

نتیجهٔ این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت



می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

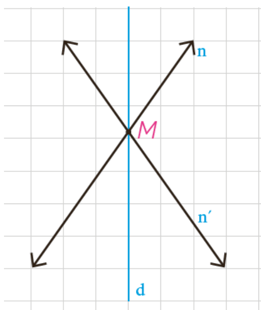
مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می‌گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.

الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

خط n موازی خط بازتاب d است . دونقطهٔ دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می کنیم . بنا بر قسمت (الف) فعالیت قبل می دانیم که تصویر پاره خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره خط A'B' با پاره خط AB و خط d موازی است از طرفی چون خط n' تصویر خط n است پس حتما نقاط A' و B' نیز روی خط n' قرار دارند در نتیجه خط n' موازی n و d است.

آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟

وقتی دو خط موازی باشند در صورت وجود شیب ، شیب ها با هم برابرند پس شیب حفظ می شود و وقتی که شیب برای یکی از آن ها تعریف نشود برای دیگری نیز تعریف نمی شود . پس در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می کند.



ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط‌های d، n و n′ در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n′ موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را ...حفظ.نمی.کند.. . بنابراین؛

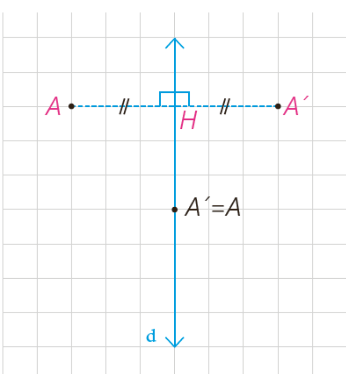
در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ..حفظ.نمی..کند..

دیدیم که طولپاها اندازهٔ زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به‌طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولپا از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند.

در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولپا هستند.

کار در کلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :



الف) وقتی A′ بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A′ نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ ...A.. چرا؟

چون خط d عمود منصف پاره خط AA' است بنا براین: $d \perp AA'$, $A'H = AH$

پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم نقطهٔ A به دست می آید.

ب) قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه چیست؟ خود آن نقطه.است.

در واقع : ....A... = S(.A'.) =S(S(A)) و به زبان ساده‌تر ..A..=′(A′)

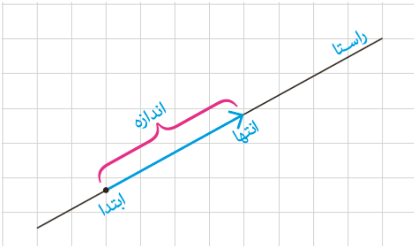
پ) در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، یک . .مثلث. است که با مثلث اولیه ...همنهشت... است.

ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .موازی. باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط، .روی. خط . d. . . .

است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب .....بیشمار.... است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

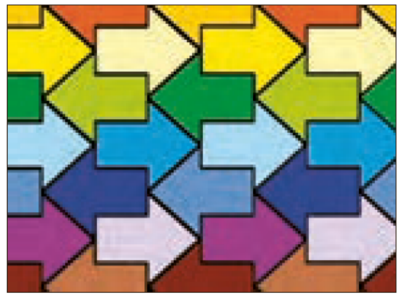


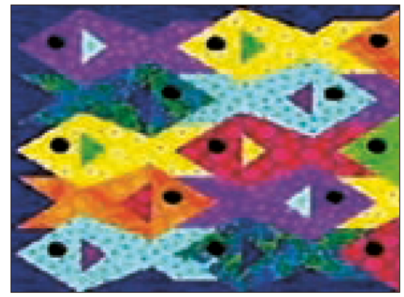
انتقال

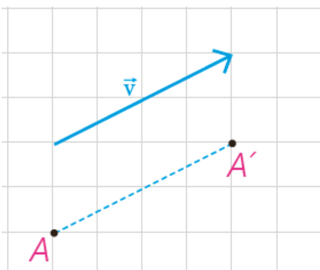
یادآوری

۱ــ در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲ــ دو بردار، که هم‌اندازه، هم راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



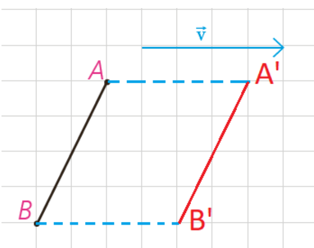




در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

تعریف: انتقال T[1] تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

فعالیت



۱ــ می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

الف) اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل‌یافتهٔ AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید : $AB=A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

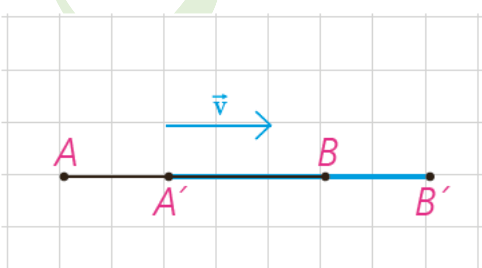
A' تصویر A است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط AA' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.

B' تصویر B است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط BB' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.

در نتیجه AA' موازی و مساوی BB' است و بنا بر راهنمایی داده شده نتیجه می گریم که چهارضلعی AA'B'B متوازی الاضلاع است پس $AB = A'B'$.

ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید : $AB=A'B'$.

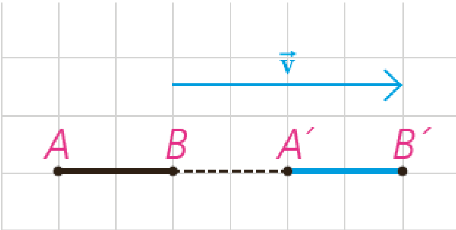
(۱)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ \text{طبق تعریف انتقال } AA' = BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۱ــ Translation



(۲)

$$\left.\begin{aligned} AB &= AA' - BA' \\ A'B' &= BB' - BA' \\ AA' &= BB' \quad \text{طبق تعریف انتقال} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

بنابراین :

قضیه: در هر انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

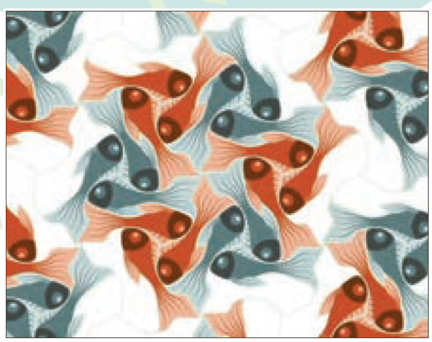
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحهٔ P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

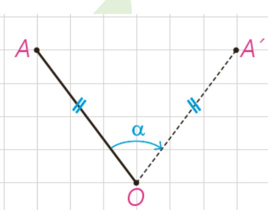
۲ــ در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می کند.

در حالت (الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی AA'B'B متوازی الاضلاع است پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه شیب خط ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره خط و تصویرش بر روی یک خط قرار دارند به عبارتی نقاط A، B، B' و B هم خط هستند. پس شیب آن ها هم برابر است.

دوران





دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا می‌کنیم تا A′ به دست آید.

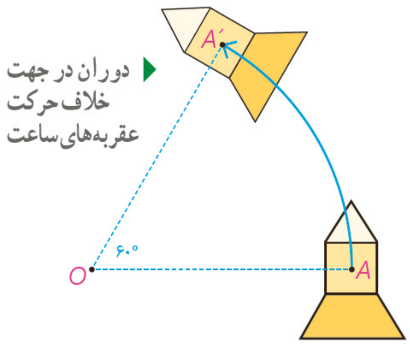
بدین ترتیب :

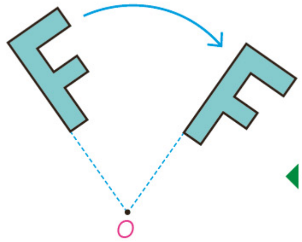
تعریف: دوران R[1] به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A′ تصویر نقطهٔ A باشد، داریم:

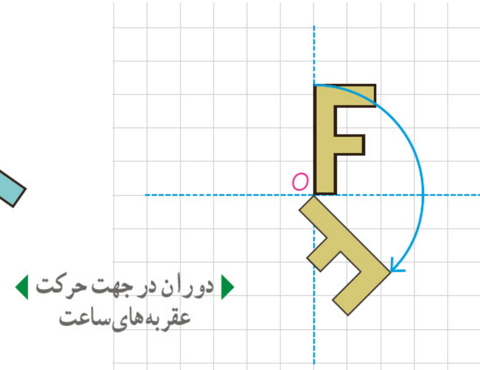
$OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۱ــ Rotation



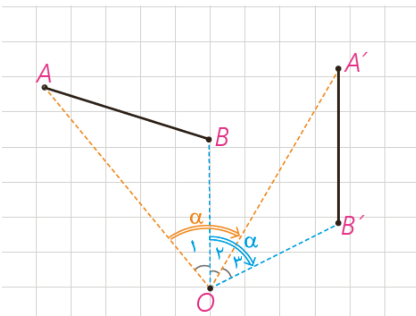




فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A′ و B′ حاصل شود. پاره خط A′B′ را رسم می‌کنیم.



مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

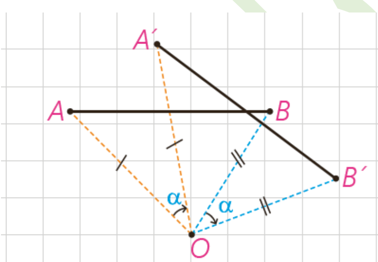
الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران ا زاویهٔ $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1+O_2=O_3+O_2=\alpha$

پس می‌توان مدعی شد که ... $\widehat{AOB}$ ... = ... $\widehat{A'OB'}$ ...

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA′B′ نشان دهید AB و A′B′ هم‌اندازه‌اند.

با توجه به تعریف دوران
$$\left.\begin{cases} OA=OA' \\ OB=OB' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}\end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\triangle}{O}B \cong A'\overset{\triangle}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB=A'B'$$



ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی AB =A′B′ برقرار است.

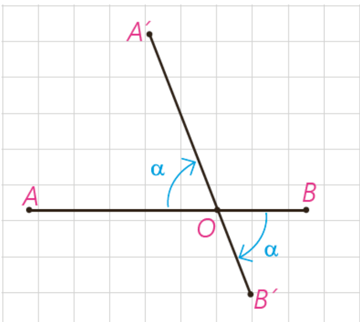
تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

با توجه به شکل :

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AOB}&=\alpha+\widehat{A'OB} \\ \widehat{A'OB'}&=\alpha+\widehat{A'OB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

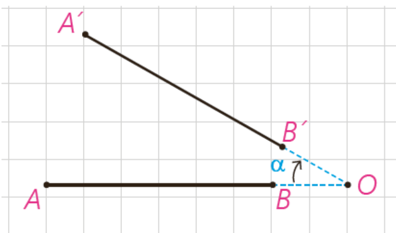
در نتیجه :

با توجه به تعریف دوران
$$\left.\begin{cases} OA=OA' \\ OB=OB' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}\end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\triangle}{O}B \cong A'\overset{\triangle}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB=A'B'$$



پ) اگر نقطهٔ O روی پاره خط AB باشد :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ \text{طبق تعریف دوران } AO = A'O \text{ و } OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطهٔ O روی امتداد پارخط AB باشد، حکم برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ \text{طبق تعریف دوران } AO = A'O \text{ و } OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین :

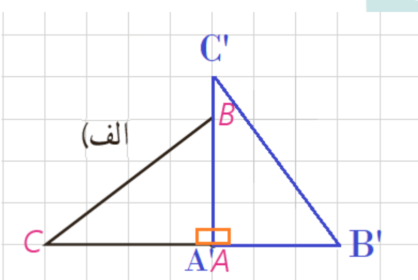
قضیه: در هر دوران، اندازهٔ هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند.

به‌عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

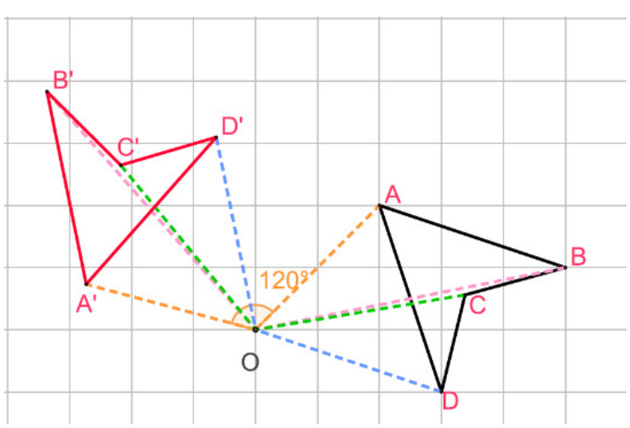
کاردرکلاس

دوران یافتهٔ هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه °۹۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت



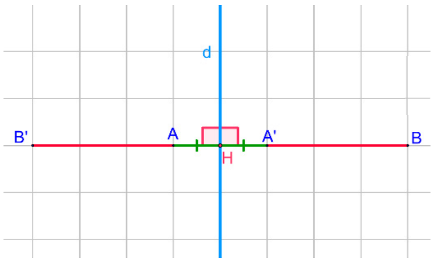
ب) دوران به مرکز O و با زاویه °۱۲۰ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

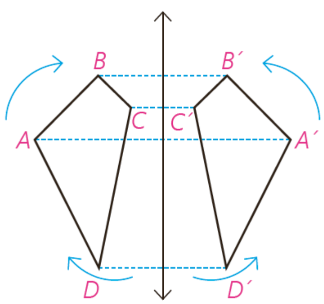
۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.



$$B'H = BH \Rightarrow B'A + AH = BA' + A'H \xrightarrow[\text{بنا بر تعریف بازتاب}]{AH=A'H} B'A = BA'$$ بنا بر تعریف بازتاب

$$\left.\begin{aligned} AB &= AA' + A'B \\ A'B' &= AA' + B'A \\ B'A &= BA' \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

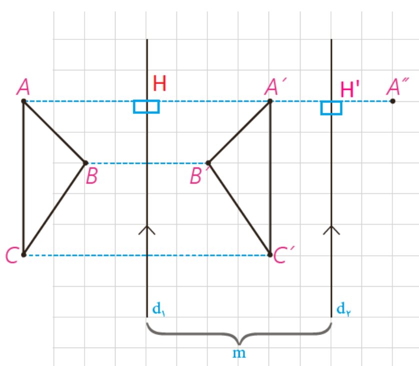
۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه های ساعت است .

خیر نمی توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می کند.

۳ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.



الف) نشان دهید : $AA''=2m$

$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow[A'H'=H'A'']{AH=HA'} AA'' = 2HA' + 2A'H'$$

$$\Rightarrow AA'' = 2(\underbrace{HA' + A'H'}_{m}) \Rightarrow AA'' = 2m$$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

بنا براثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می گیریم که : $BB'' = CC'' = 2m$

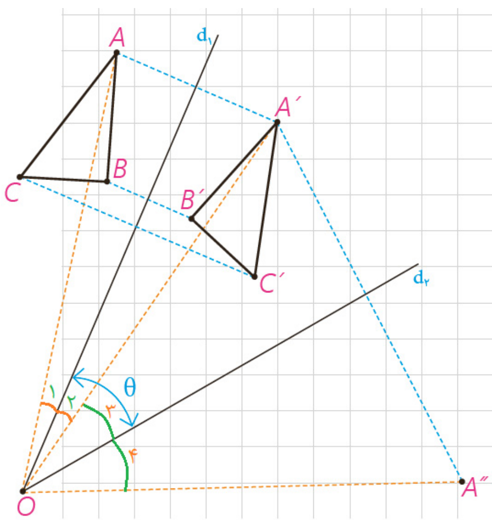
پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازهٔ آن دوبرابر فاصله ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است ، می توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست.

نتیجه می گیریم ، ترکیب دو بازتابی که محور های بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۴ــ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.



الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''} = 2\theta$

خط d_1 محور بازتابت است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

خط d_2 محور بازتابت است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی: $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \xrightarrow[\hat{O}_3=\hat{O}_4]{\hat{O}_1=\hat{O}_2} \widehat{AOA''} = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = 2(\underbrace{\hat{O}_2 + \hat{O}_3}_{\theta}) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 2\theta$$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

بنا بر اثبات الف به روش مشابه : $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = 2\theta$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با دورانی به مرکز O نقطه ی برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2 و زاویه ای به اندازهٔ دو برابر زاویه بین دو خط (2θ) می توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست.

نتیجه می گیریم ، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

تجانس

در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را **تجانس** می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 0$، آن را **نسبت تجانس (مقیاس)** می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است :

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k\neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k|.OM$

پ)
– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

مثال: $OM' = 2\,OM$ 

$k = 2$

$OM' = \frac{1}{2}OM$ 

$k = \frac{1}{2}$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM' = 2\,OM$ 

$k = -2$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطهٔ M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطهٔ O بین نقاط M و M' باشد و $OM'=|k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k و نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

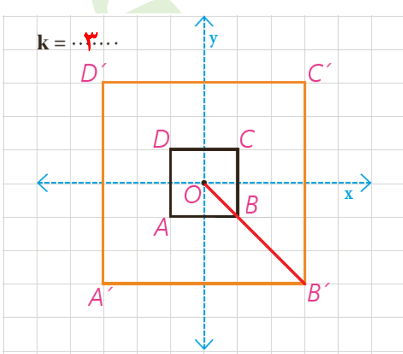
اگر در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k باشد آنگاه :

$$k > 0 \Rightarrow OM' = k.OM \xrightarrow{\times(\frac{1}{k})} \frac{1}{k}.OM' = OM$$

$$k < 0 \Rightarrow OM' = |k|.OM \xrightarrow{\times\left|\frac{1}{k}\right|} \left|\frac{1}{k}\right|.OM' = OM$$

بنا براین نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است .

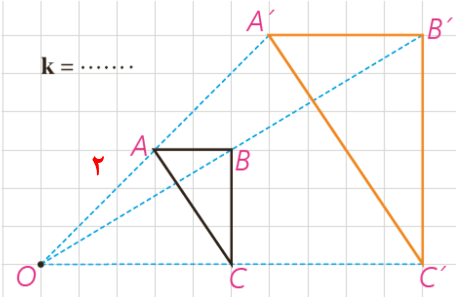
فعالیت



۱ــ این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $K>0$



در نتیجه: $OB' = k.OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow k = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow k = ۳$

$OC' = k.OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow k = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow k = ۲$

ب) آیا تجانس طولپاست؟ چرا؟

خیر زیرا اندازهٔ پاره خط ها حفظ نمی شود.

پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

در مربع : $A'B' = ۳AB \ , \ B'C' = ۳BC \ , \ C'D' = ۳CD \ , \ D'A' = ۳DA$

طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است .

همچنین محیط شکل نیز ۳ برابر می شود.

در مثلث : $A'B' = ۲AB \ , \ B'C' = ۲BC$

$AC = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \ , \ A'C' = \sqrt{۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow A'C' = ۲AC$

طول تصویر هر پاره خط ۲ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است .

همچنین محیط شکل نیز ۲ برابر می شود.

ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

در مربع : $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ = ۳^۲$

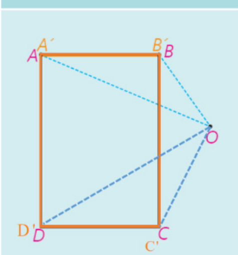
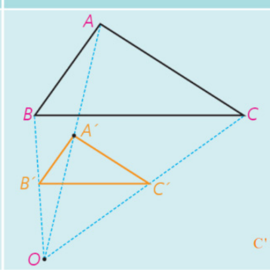
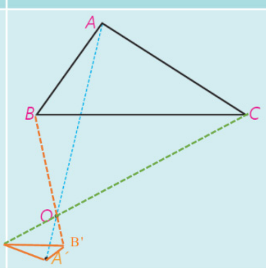
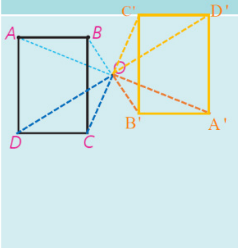
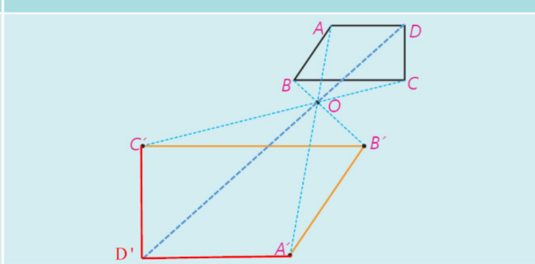
در مثلث : $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶}{\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳} = ۴ = ۲^۲$

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲ــ در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی : $k > ۱$.

حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.

k	$k = ۱$	$۰ < k < ۱$	$-۱ < k < ۰$
مثال		$k = \frac{۱}{۲}$	$k = -\frac{۱}{۳}$
			
k	$k = -۱$	$k < -۱$	
مثال		$k = -۲$	
			

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

			طولپاست	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k>0$	$k>1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k=1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$0<k<1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$k<0$	$-1<k<0$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k=-1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$k<-1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که $K=1$ یا $K=-1$ به عبارتی $|k|=1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA'، BB' و . . . نسبت به هم چه وضعی دارند؟

این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطهٔ O همرسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k>0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k<0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k|<1$ تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر . بزرگ‌تر. تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

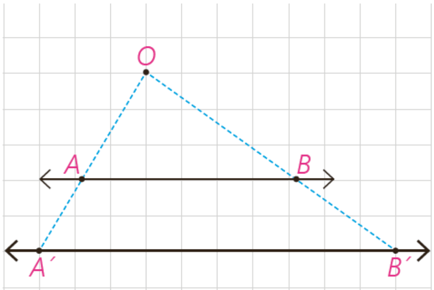
فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D[1]، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطهٔ O روی خط AB است.

حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

۱ـ Dilation



ب) نقطهٔ O غیر واقع بر خط AB است.

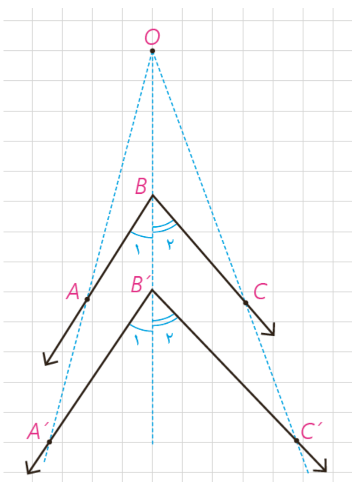
حل : در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم :

$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB. \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k.$$

$\Rightarrow AB \| A'B'$ (چرا؟) بنا بر عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین :

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.



فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیهٔ قبل و شکل داده شده، ثابت کنید : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم :

$AB \| A'B'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا برقضیه خطوط موازی $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ (۱)

$BC \| B'C'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا برقضیه خطوط موازی $\hat{B}_2 = \hat{B}'_2$ (۲)

در نتیجه از جمع دو طرف رابطه ی (۱) و (۲) داریم : $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

نتیجهٔ این فعالیت را در قالب قضیهٔ زیر مطرح می‌کنیم :

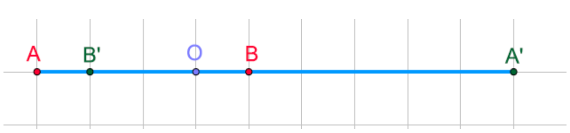
قضیه: تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

کاردرکلاس

۱ــ الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید : $\frac{A'B'}{AB} = |k|$

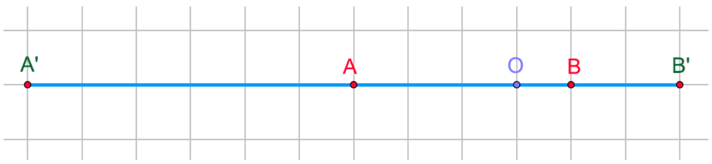
۱) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow[OB' = |k|.OB]{OA' = |k|.OA} A'B' = |k|.OA + |k|.OB = |k|(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



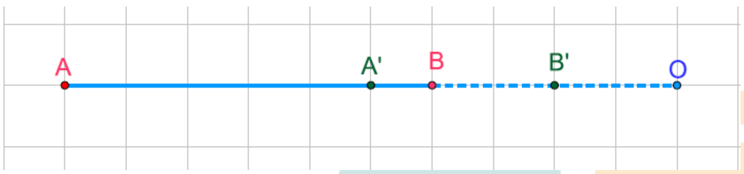
۲) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow[OB'=k.OB]{OA'=k.OA} A'B' = k.OA + k.OB = k(\underbrace{OA+OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



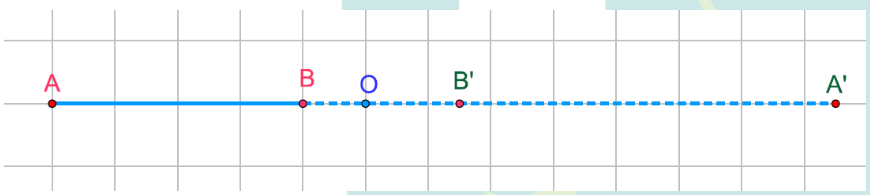
۳) در این حالت نقطهٔ O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow[OB'=k.OB]{OA'=k.OA} A'B' = k.OA - k.OB = k(\underbrace{OA-OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



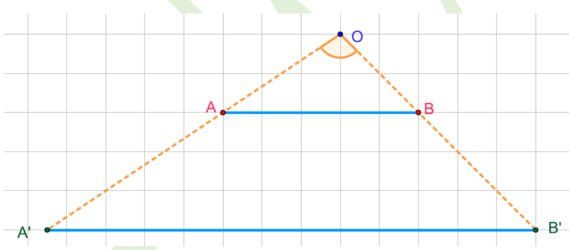
۴) در این حالت نقطهٔ O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

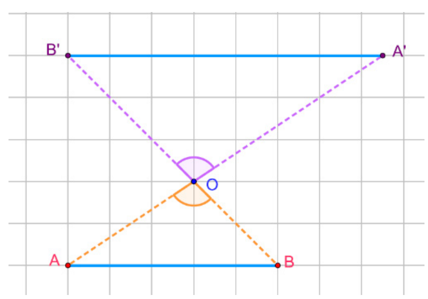
$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow[OB'=|k|.OB]{OA'=|k|.OA} A'B' = |k|.OA - |k|.OB = |k|(\underbrace{OA-OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



۵) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$





۶) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} A\overset{\Delta}{O}B \sim A'\overset{\Delta}{O}B' \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

ب) اگر nضلعی $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$ مجانس nضلعی $A_1 A_2 \ldots A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

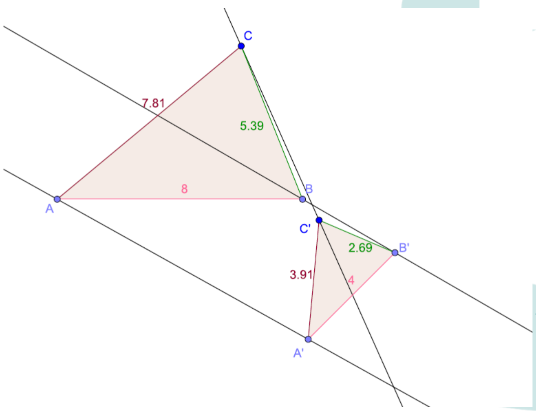
فرض کنیم $A_1A_2A_3....A_n$ یک n ضلعی و نقطه ی O مرکز تجانس و k نسبت تجانس باشد

و چند ضلعی $A'_1A'_2A'_3....A'_n$ مجانس آن باشد بنا بر تعریف تجانس داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OA'_1 = |k|OA_1 \\ OA'_2 = |k|OA_2 \\ OA'_3 = |k|OA_3 \\ \vdots \\ OA'_n = |k|OA_n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \frac{OA'_3}{OA_3} = \cdots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابه اند.

۲ــ با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



کافی است که دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل می کنیم و امتداد می دهیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود نخواهد داشت و در این صورت تجانسی هم در کار نیست.

در شکل مقابل مثلث های ABC و A'B'C' متشابه اند اما متجانس نیستند .

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$؛ این نقاط را نقاط ..~~ثابت~~.تبدیل.. نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، **هر نقطهٔ صفحه** را به **خود آن نقطه** نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل همانی** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هر گاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

انتقال زمانی همانی است که بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد .

دوران زمانی تبدیل همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد .

تجانس زمانی تبدیل همانی است که در آن $k=1$.

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

بله تبدیل همانی یک تبدیل طولپا است زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می کند .

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند و تحت یک تبدیل همانی بخواهیم تصویر آن ها را بیابیم داریم :

$$T(A) = A \ \ , T(B) = B \Rightarrow AB = AB$$

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱ــ انتقال غیرهمانی :

خیر نمی توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

۲ــ دوران غیرهمانی :

اگر نقطه ی مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می ماند.پس مرکز دوران نقطهٔ ثابت تبدیل است.

۳ــ تجانس غیرهمانی :

اگر نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویرش روی خودش قرار می گیرد . پس مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تبدیل است.

کار در کلاس

۱ــ درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

تمرین

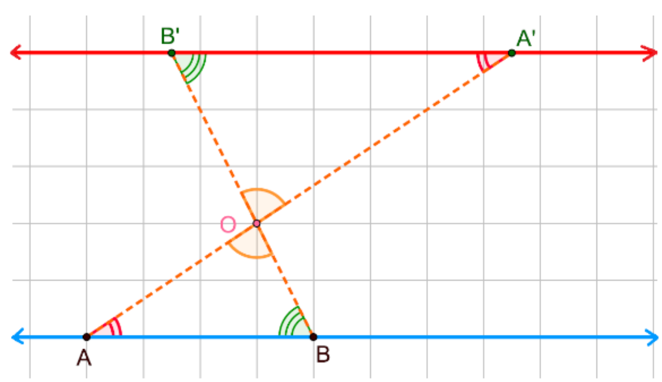
۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۱) درحالتی که نقطهٔ O روی خط AB قرار دارد و $k<0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند؛ بنا براین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب تغییر نمی کند.

۲) در حالتی که نقطهٔ O روی خط AB قرار ندارد و $k<0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب ، مجانس های نقاط A و B باشند ، طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=k.OA\\ OB'=k.OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=k\\ \widehat{A'OB'}=\widehat{AOB}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}}\overset{\triangle}{AOB}\sim \overset{\triangle}{A'OB'}\Rightarrow \widehat{OB'A'}=\widehat{OBA}\ ,\ \widehat{OA'B'}=\widehat{OAB}$$



پس بنا برعکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط $A'B'$ است . و شیب خط ها در صورت وجود باهم برابر است.

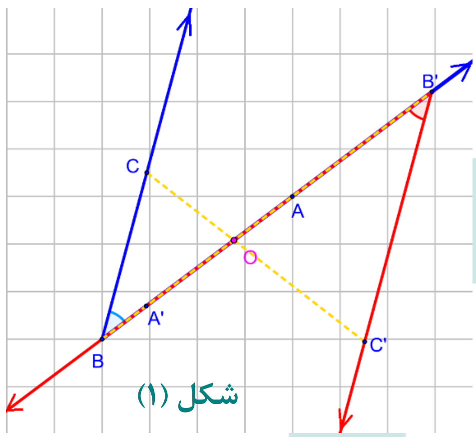
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

زاویهٔ $\widehat{ABC}$ را در صفحه در نظر می گریم :

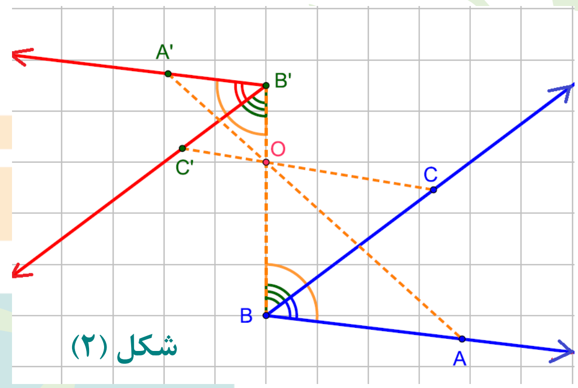
۱) اگر نقطهٔ O روی رأس زاویه یعنی نقطهٔ B باشد آنگاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی خود $\widehat{ABC}$ منطبق می شود.پس اندازه ی آن حفظ می شود.

۲) اگر نقطهٔ O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل (۱) آنگاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می کندپس:

$$BC \parallel B'C',\ BB' \ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



شکل (۱)



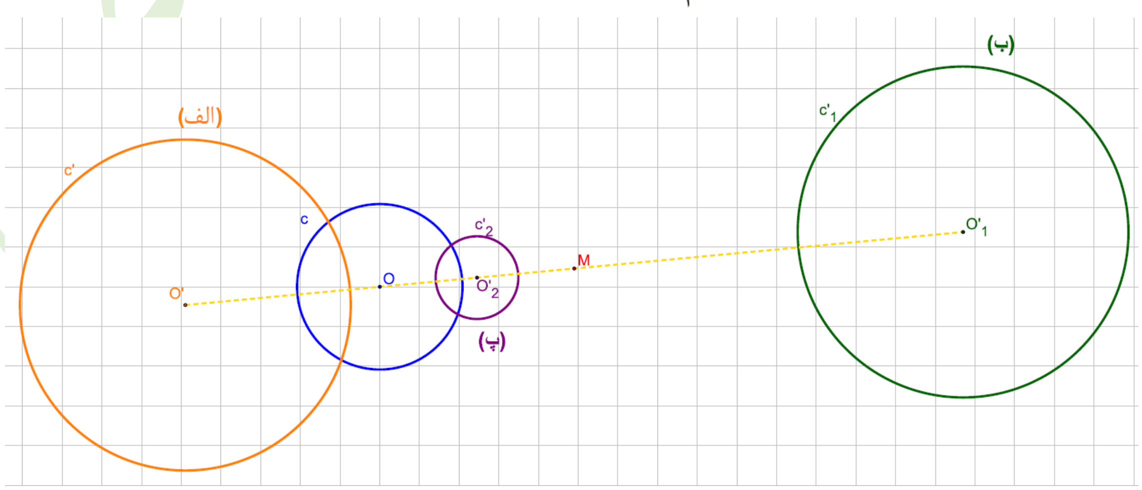
شکل (۲)

۳) اگر نقطهٔ O نه روی اضلاع ونه روی رأس زاویه باشد مانند شکل (۲) با توجه به بند قبلی ، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس :

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B'C',\ BB' \ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B',\ BB' \ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

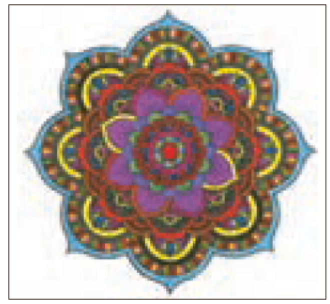
۲ــ دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

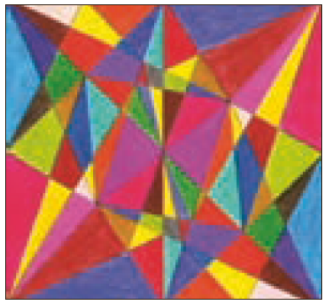
الف) $k=۲$ ب) $k=-۲$ پ) $k=\frac{۱}{۲}$

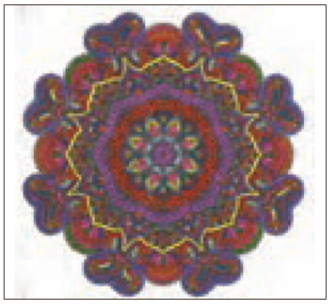


مجله ریاضی

تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.







درس دوم

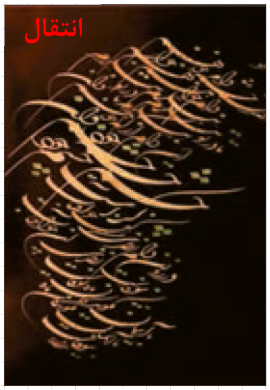
کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیرمستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به‌کار رفته‌اند؟

نقش قالی ، خطاطی ، کاغذ دیواری و ....

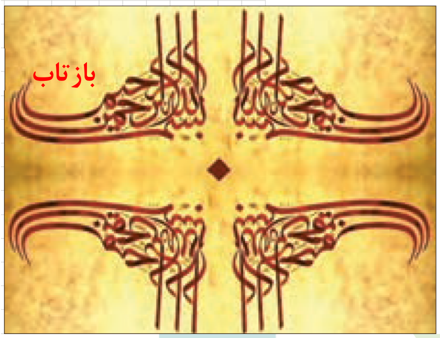
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

به این تصاویر دقت کنید. کدام‌یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



بازتاب

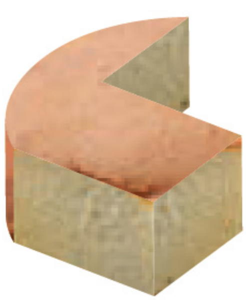
دوران

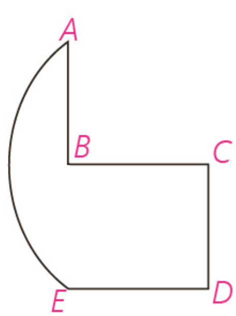


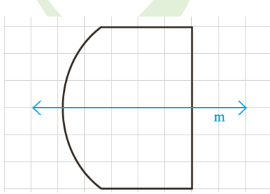
کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینهٔ تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

۱ــ می‌خواهیم کیکی به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری‌که A و B و E روی یک خط هستند.



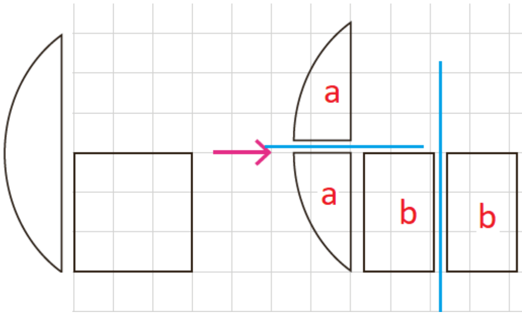




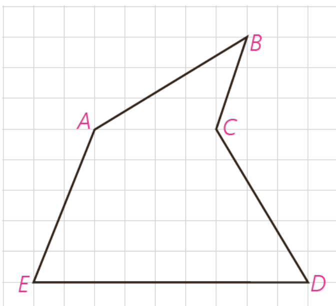
اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.

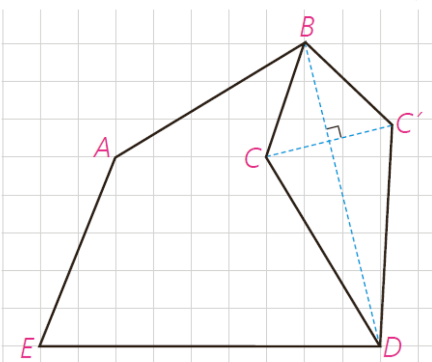


شکل های a نسبت به محور بازتاب قرینه اند پس با هم اندازه اند.
همچنین شکل های b هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه اند و در نتیجه هم اندازه اند حالا به ره نفر یک شکل a و یک شکل b می دهیم.



۲ــ یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل **هم‌پیرامونی** یا **هم‌محیطی** معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.
برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازهٔ حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک تصویر روبه‌رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.



در شکل از نقطهٔ B به D وصل می کنیم. سپس آن را به عنوان محوربازتاب در نظر می گریم . و تصویر نقاط B، C و D را نسبت به این محور به دست می آوریم.
واضح است که تصویر نقاط B و D روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطهٔ C نقطهٔ C' است .

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC′DE یکی است؟

با توجه به این که بازتاب یک تبدیل طولپا است پس داریم:

$$BC = BC' \ , CD = C'D$$

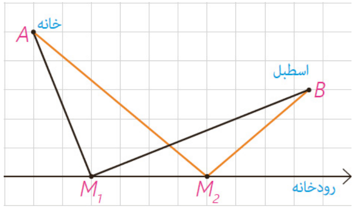
$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow[CD=C'D]{BC=BC'} P_{ABCDE} = AB + BC + C'D + DE + EA$$

$$\Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

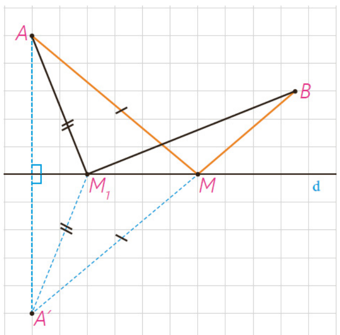
الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل[1] ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطهٔ M روی خط d است به گونه‌ای که AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد.



هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A′ نامید. خط فرضی A′B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم :

۱ــ برای هر نقطهٔ دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A= M_1A'$ (و به همین ترتیب $AM=A'M$)؛ چرا؟

زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمود منصف پاره خط 'AA است و نقاط M و M_1 روی این خط هستند. بنا بر خاصیت عمود منصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$.

۲ــ در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 +M_1B > A'B$؛ چرا؟

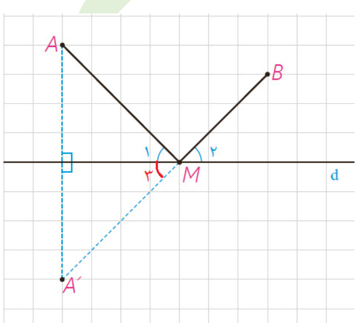
بنابر قضیه نامساوی مثلثی ، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است.

از تساوی $A'B=A'M+MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

$$\left.\begin{array}{r} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} A'B = AM + MB \\ A'B < A'M_1 + M_1B \end{array}\right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطهٔ M_1 دلخواه بود پس ادعای هرون ثابت می شود.

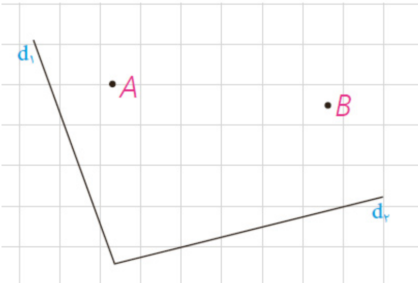
سؤال : در همین مسئله فرض کنید که d یک آینهٔ تخت و A یک نقطهٔ نورانی است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطهٔ B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$).



نقطهٔ M روی عمودمنصف 'AA است بنا براین $MA = MA'$ پس مثلث 'MAA متساوی الساقین است در نتیجه خط d نیمساز زاویهٔ $\widehat{AMA'}$ است.

$$\left.\begin{array}{r} M_1 = M_3 \\ \text{متقابل به رأس}\quad M_3 = M_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

[1]ــ جایی سرپوشیده برای نگهداری چهارپایان به ویژه اسب

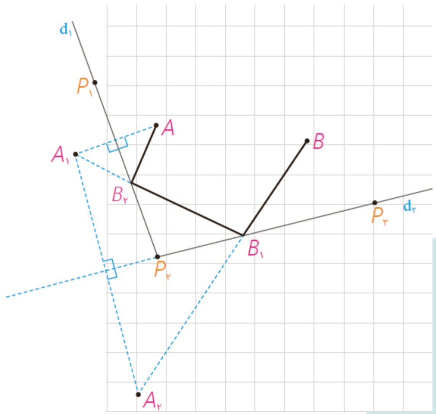


ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطهٔ B گذشت؟

حل :

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر به روش زیر عمل می‌کنیم :

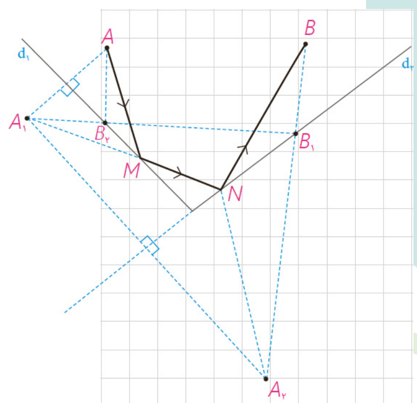
قرینهٔ A را نسبت به خط d_1، نقطهٔ A_1 و قرینهٔ A_1 را نسبت به خط d_2، نقطهٔ A_2 می‌نامیم.



از A_2 به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_2، B_1 می‌نامیم.

به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_1، B_2 می‌نامیم. از A به B_2 وصل می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.

تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می‌کنیم که A و A_1 هر دو در یک طرف خط P_2P_3 باشند و پاره‌خط‌های A_2B و P_2P_3 متقاطع باشند.



کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره‌خط A_2B برابر است.

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_2 = AB_2 \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_2B_1 \Rightarrow A_1B_1 + B_1B = A_2B \end{array}\right\} \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 + B_1B = A_2B$$

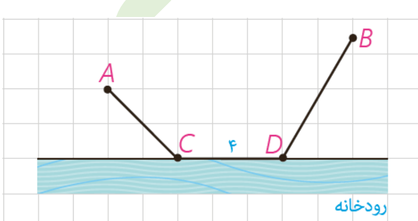
(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند AMNB را درنظر می‌گیریم؛ داریم :

$$AM = A_1M \Rightarrow AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = A_2N \Rightarrow \underbrace{AM+MN}_{A_1N} + NB = A_2N + NB$$

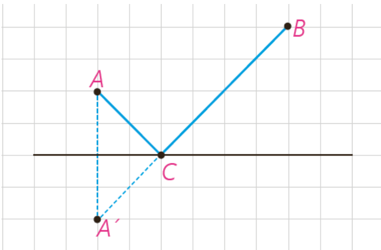
حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم :

طول مسیر اول $\boxed{<}$ طول مسیر دوم



پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

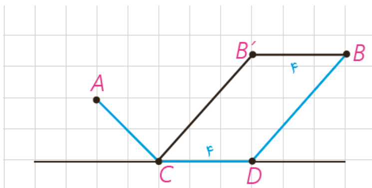
حل : مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.



۱ــ اگر جادهٔ ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر CD=۰، این مسئله به کدام‌یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟

مسئلهٔ هرون مردی که از رودخانه می خواهد آب بردارد و به اسطبل ببرد.

۲ــ با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما :

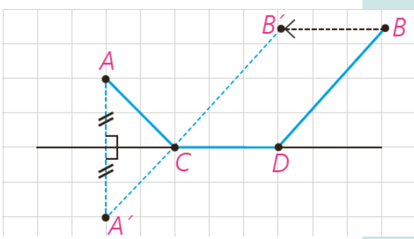


(چرا؟) طول مسیر ACB′B = طول مسیر ACDB

در واقع نقطه ی C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B منتقل شده است بنا براین با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی CDBB' متوازی الاضلاع است . پس :

$$\text{مسیر}\ ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow[CB'=DB]{CD=B'B} ACDB = AC + CB' + B'B = ACB'B\ \text{مسیر}$$

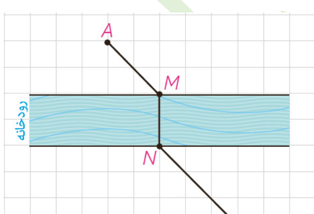
بنابراین : ۴ + طول مسیر ACB′ = طول مسیر ACDB

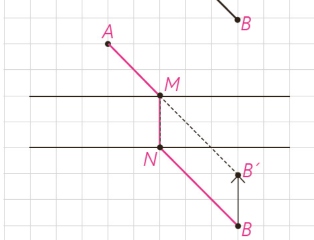


۳ــ پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ACB′ کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.

۴ــ به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر ACDB چگونه است.

ابتدا نقطهٔ B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه ودر جهت شهر A به نقطهٔ B' انتقال می دهیم؛ حالا مسئله شبیه مسئله ی اسطبل می شود . بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می آوریم یعنی نقطهٔ A' سپس از A' به B' وصل می کنیم نقطهٔ C به دست می آید. از نقطهٔ C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت می کنیم تا نقطهٔ D به دست آید.به این ترتیب کوتاه ترین مسیر رسم می شود.





کاردرکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقهٔ رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

نقطهٔ B را تحت برداری مساوی وعمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطهٔ B' انتقال می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم . تا نقطهٔ M به دست آید ازنقطهٔ M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطهٔ N به دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست می آید به طوری که مسیر AMNB کوتاه ترین مسیر است. مشابه مسئله ی قسمت (پ) می دانیم که مسیر AMB'B کوتاه ترین است پس :

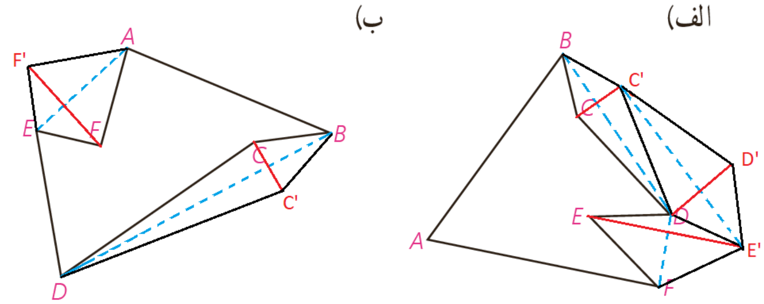
$$AMB'B_{\text{مسیر}} = AM + MB' + BB' \xrightarrow[MN=BB']{MB'=NB} AMB'B_{\text{مسیر}} = AM + NB + MN = AMNB\ \text{مسیر}$$

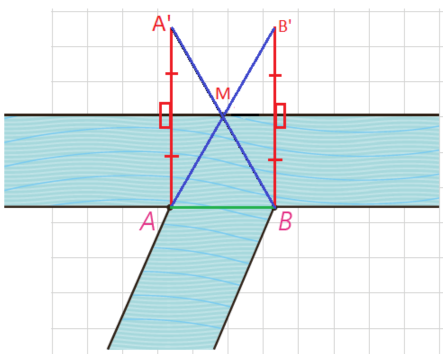
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ــ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

الف)   ب)

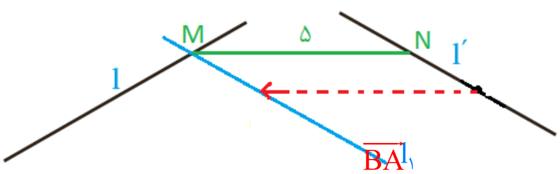


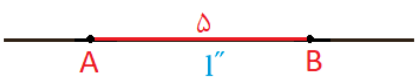


۲ــ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس یا از نقطه B یا از A روش هرون را برای پید کردن نقطه M اجرا می کنیم.

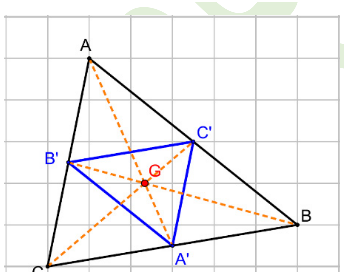
۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l'، و موازی l'' باشد.





ابتدا روی خط l'' پاره خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی متر را مشخص می کنیم . خط l' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می دهیم تا خط l_1 به دست آید این خط l را در نقطه ای مانند M قطع می کند.از نقطه M موازی خط l''خطی رسم می کنیم تا خط l' را در نقطه N قطع کند.

پاره خط MN جواب مسئله است .



۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

A' وسط BC ، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند.

باتوجه به خاصیت مرکز ثقل می دانیم که $GA'=\frac{1}{2}GA$ همچنین نقطهٔ G بین A و A' پس نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است . همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می کند.

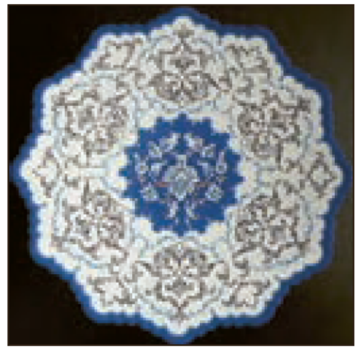
ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ ، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC است.

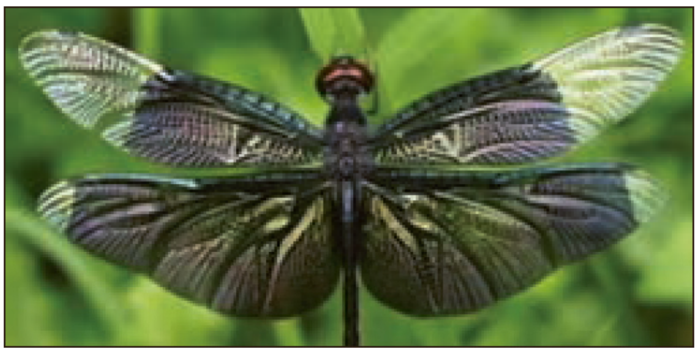
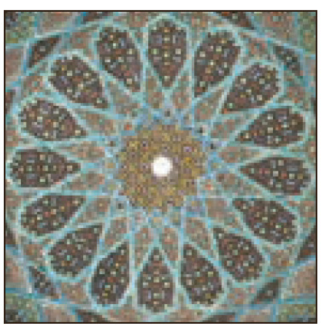
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

مجله ریاضی (خــوانـدنـی)

تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی

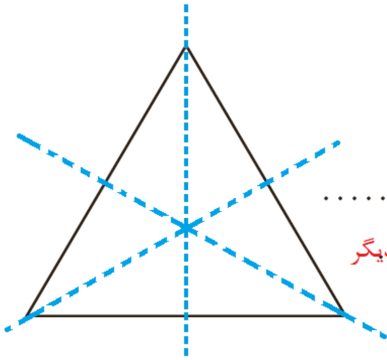




در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحهٔ بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید :

الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟. . .خود مثلث است.

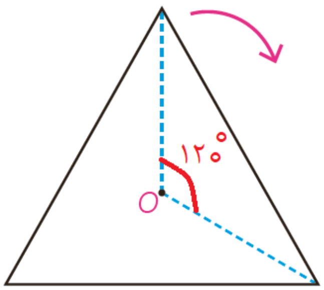
ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟. . .خیر. . .

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟ . . .بله. . . . .

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟ . .بله عمودمنصف.دو.ضلع دیگر

این مثلث چند خط بازتاب دارد؟. .سه.تا. .

ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟. . بله.دوران. . .



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟. . 120° . . .

اگر $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ زاویهٔ دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویهٔ α می‌توانید مشخص کنید؟ . .120°.و. .240° و 360°

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویهٔ $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل‌های تقارنی** این مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

دقت کنید که دوران 360°، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$، هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل‌یافتهٔ شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

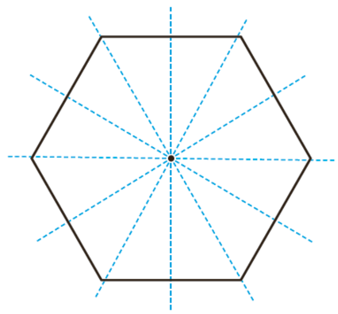
تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.

در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

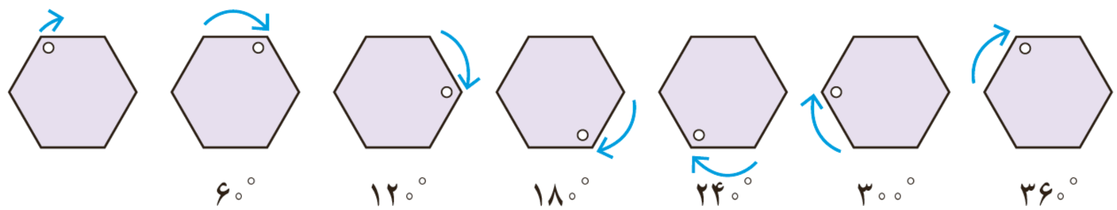
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.

تقارن‌های بازتابی :



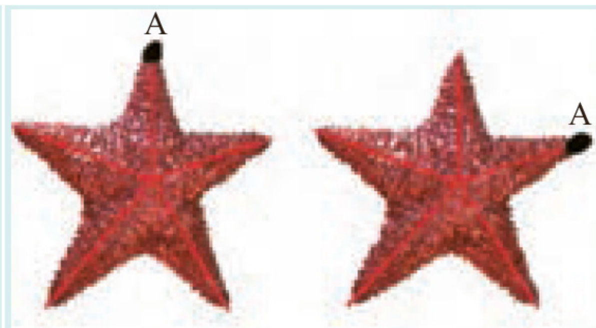
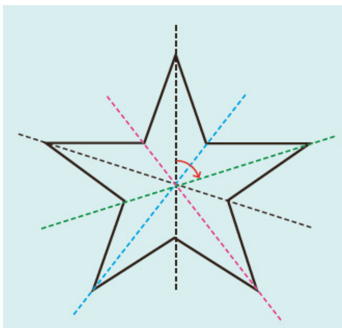
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویهٔ °۳۶۰، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس k=۱ تبدیل‌های همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

شکل‌های زیر را به عنوان تصویر دو بعدی در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید :

		
تقارن‌های دورانی	تعداد تقارن‌های بازتابی	تعداد کل تقارن‌ها
۷۲°، ۱۴۴، ۲۱۶، ۲۸۸ ، ۳۶۰	....۵ تا....	.....۱۰تا...

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره‌خط　　　ب) خط　　　پ) دایره

الف) پاره خط دو تقارن دورانی دارد که مرکز آن وسط پاره خط و زاویه های آن °۱۸۰ و °۳۶۰ است. و یک تقارن بازتابی دارد که عمود منصف پاره خط است.

ب) خط بی شمار تقارن دورانی و بی شما ر تقارن بازتابی دارد.

پ) دایره بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

مسائلی برای علاقمندان

۱ــ الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی nضلعی منتظم را مشخص کنید.

nضلعی منتظم	n=۳	n =۴	n=۵	n=۶	n=۷	n=۸	...	n
تعداد تقارن‌های بازتابی	۳ تا	۴تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		nتا
تعداد تقارن‌های دورانی	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		nتا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۶ تا	۸تا	۱۰ تا	۱۲ تا	۱۴ تا	۱۶ تا		۲nتا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	خیر	بله	خیر	بله	خیر	بله		

ب) nضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد .

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک nضلعی منتظم ارائه کنید.

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n},(\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times ۲),(\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times ۳),\ldots,(\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times n)$$

۲ــ تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

چند ضلعی	مستطیل	لوزی	مثلث متساوی الساقین	ذوزنقه متساوی الساقین	متوازی الاضلاع
تعداد تقارن‌های بازتابی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	ندارد
تعداد تقارن‌های دورانی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	۲ تا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۴ تا	۴ تا	۲ تا	۲ تا	۲ تا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	بله	بله	خیر	خیر	بله

محور بازتاب مستطیل عمود منصف های طول و عرض است و مرکز دوران محل برخورد عمودمنصف ها (یا قطر ها) است.

محور بازتاب لوزی قطرهای آن و مرکزدوران محل برخورد قطر ها است.

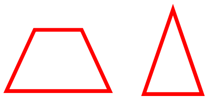
محور بازتاب مثلث متساوی الساقین عمودمنصف قاعده است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف های سه ضلع است.زاویه دوران ۳۶۰° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

محور بازتاب ذوزنقه متساوی الساقین محل عمود منصف قاعده ها است و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است. زاویه دوران ۳۶۰° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

مرکز دوران متوازی الاضلاع محل برخورد قطر های آن است.

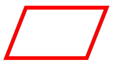
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۳ــ الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته‌باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).



مثلث و ذوزنقهٔ متساوی الساقین خط بازتاب دارند ، ولی تقارن دورانی غیر همانی ندارند.

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته‌باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

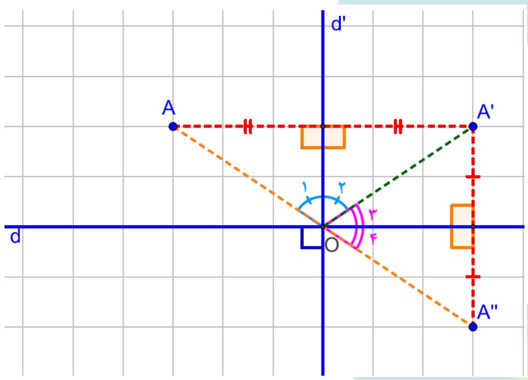


متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط بازتاب ندارد.

۴ــ نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

d و d' دو خط بازتاب عمود بر هم هستند و نقطهٔ A یک نقطه ی دلخواه از شکل است.

$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ S(A')=A'' \Rightarrow \hat{O}_۳=\hat{O}_۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AOA''}=\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۴=۲\hat{O}_۲+۲\hat{O}_۳=۲(\underbrace{\hat{O}_۲+\hat{O}_۳}_{۹۰^\circ}) \Rightarrow \widehat{AOA''}=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \Rightarrow OA=OA' \\ S(A')=A'' \Rightarrow OA'=OA'' \end{array}\right\} \Rightarrow OA=OA'' \quad (۲)$$

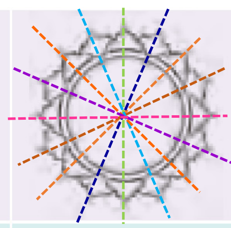
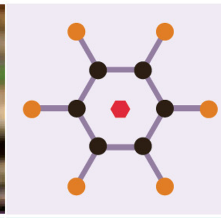
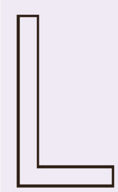
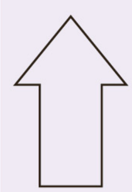
از (۱) و (۲) نتیجه می گریم که نقطهٔ O مرکز دوران به زاویه ۱۸۰° است.

با توجه به جدول سؤال قبل مستطیل و لورزی همین خاصیت را دارند.

اما سؤال این است که آیا اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد حتماً دو محور بازتاب عمود برهم دارد؟ پاسخ با یک مثال نقض داده می شود .

متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد یعنی یک دوران با زاویه ۱۸۰° اما محور بازتاب ندارد.

۵ــ جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی	۸ تا	۶ تا	۳ تا	ندارد	یک
تقارن دورانی	۸ تا	۶ تا	۳ تا	یک	یک
تعداد تبدیل‌های تقارنی	۱۶ تا	۱۲ تا	۶ تا	یک	۲ تا

۳

فصل سوم

روابط طولی در مثلث

عکس: فرهاد کولی‌وند

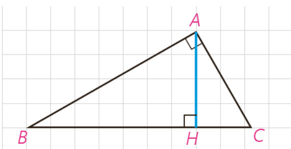
محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جملهٔ آنها محاسبهٔ ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

تئودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

درس اوّل

قضیهٔ سینوس‌ها

یادآوری



منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم :

۱ـ $AB^2=BC.BH$

۲ـ $AC^2=BC.CH$

در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع قائم واسطهٔ هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

۳ـ $AH^2=BH.CH$

در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی قطعه های ایجاد شده روی وتر است.

۴ـ $AB^2+AC^2=BC^2$

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر است.(قضیه فیثاغورس)

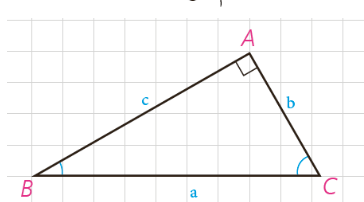
۵ـ $AB.AC=BC.AH$

در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائمه با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است.

اینک به ادامهٔ بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایهٔ دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جاهای خالی را پر کنید :



$$\operatorname{Sin}B=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\operatorname{Sin}B}=a$$

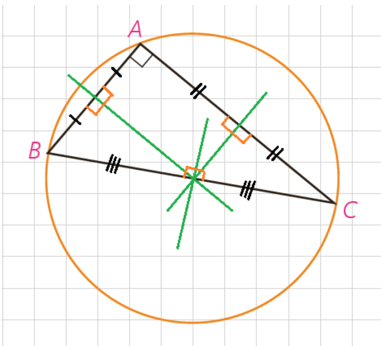
$$\operatorname{Sin}C=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\operatorname{Sin}C}=a$$

$$\operatorname{Sin}A=\operatorname{Sin}90^\circ=1\Rightarrow\frac{a}{\operatorname{Sin}A}=a$$

بنابراین داریم :

> در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ..ضلع.. به .سینوس.زاویه مقابل به آن.ضلع برابر است با اندازهٔ .وتر.مثلث..

فعالیت ۲



در کتاب هندسهٔ ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

محل برخورد عمود منصف ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. پس مرکز این دایره وسط وتر است.

$\widehat{BAC}=۹۰^\circ$ یک زاویه محاطی است و اندازه کمان مقابل آن ۱۸۰° یعنی وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، یعنی قطر دایره است.

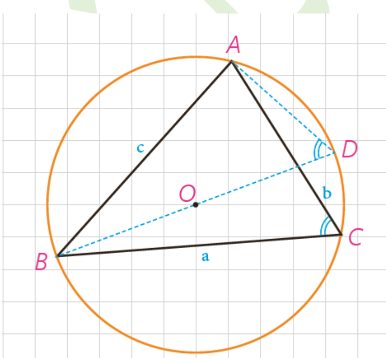
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

> در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .....قطر... دایرهٔ محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

فعالیت ۳

مثلث دلخواه ABC($\hat{A}<۹۰^\circ$) و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.



قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. $(BD=۲R)$

۱ــ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هردو روبه رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند پس هم اندازه اند.

اندازهٔ آنها برابر است با نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$.

۲ــ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

زیرا زاویهٔ A محاطی روبه رو به قطر دایره است . $\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۲}$

۳ــ با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

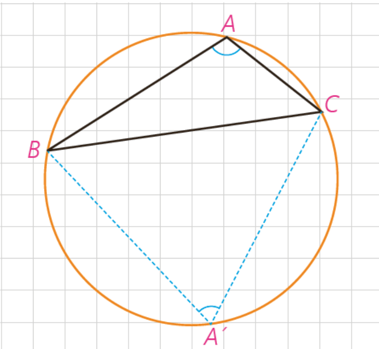
$$\text{SinC}=\text{SinD} \;\text{و}\; \text{SinD}=\frac{c}{BD}\Rightarrow \text{SinC}=\frac{c}{۲R}\Rightarrow \frac{c}{\text{SinC}}=۲R$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۴ــ به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=۲R \quad , \quad \frac{b}{\mathrm{Sin}B}=۲R$$

۵ــ حال مثلث ABC$(\hat{A}>۹۰^\circ)$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول : چهارضلعی ABA'C محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\dfrac{\widehat{BA'C}}{۲}\\[2mm] \hat{A}'=\dfrac{\widehat{BAC}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}'=\frac{\widehat{BA'C}}{۲}+\frac{\widehat{BAC}}{۲}=\frac{\widehat{BA'C}+\widehat{BAC}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰^\circ$$

$\hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A=\sin(۱۸۰^\circ-A')=\sin A'$$

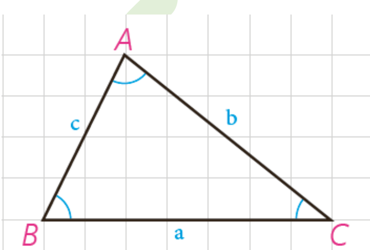
در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'}=۲R \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A}=۲R$$

طول قطر برابر با ۲R است.

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ..ضلع.. به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ..طول قطر دایرهٔ محیطی مثلث..



قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع BC=a ، AC=b و AB=c داریم:

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\frac{c}{\mathrm{Sin}C}=۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC=۱۰cm$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

حل : به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت :

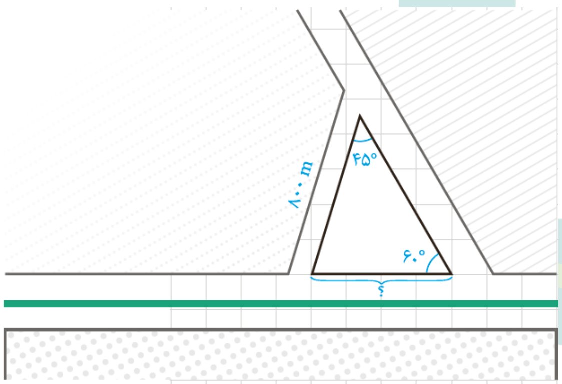
$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=۲R \text{ و } \sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=\frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad \text{و} \quad R=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

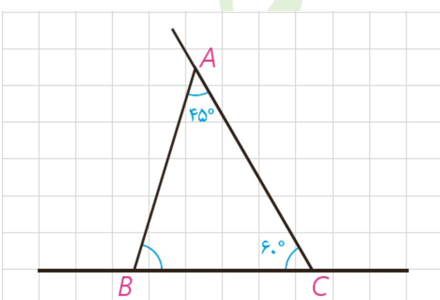
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}=\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۲۰\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow B=۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \text{ و } \hat{A}=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ ۶۰° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ ۴۵° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ ۶۰° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



حل : با یک شکل مناسب مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه‌های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویهٔ ۷۵° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم :



$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۸۰۰}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{BC}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۸۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

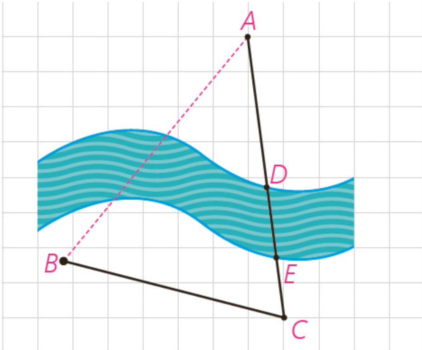
$$\Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\sqrt{۶}}{۳}\approx ۶۵۳/۲m$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ ۷۵° بنا کنیم.

کاردرکلاس

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد:



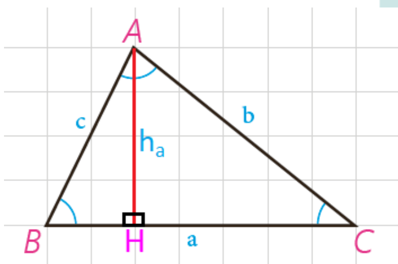
$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{BC}{\sin(۱۸۰^\circ-(B+C))}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=\frac{BC\times\sin C}{\sin(B+C)}$$

اگر $BC=۳km$ و $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

$$AB=\frac{BC\times\sin C}{\sin(B+C)}\Rightarrow AB=\frac{۳\times\sin ۵۰^\circ}{\sin(۷۰^\circ+۶۰^\circ)}\approx\frac{۳\times ۰/۵}{۰/۷۶}\approx ۱/۹۷$$

تمرین

۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم:

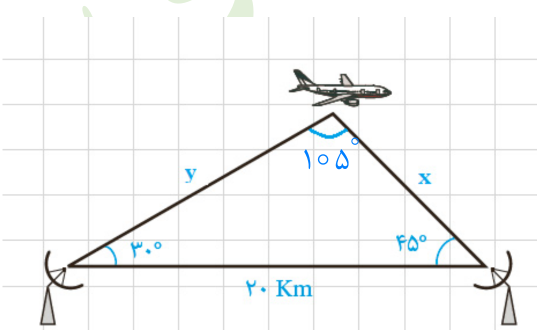


$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{۱}{۲}bc\\ S=\frac{۱}{۲}a.h_a\end{array}\right\}\Rightarrow bc=ah_a\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}(bc)^۲=(ah_a)^۲\Rightarrow b^۲c^۲=a^۲h_a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲c^۲=(b^۲+c^۲)h_a^۲\Rightarrow b^۲c^۲=b^۲h_a^۲+c^۲h_a^۲\xrightarrow{\div b^۲c^۲h_a^۲}\frac{b^۲c^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}=\frac{b^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}+\frac{c^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}\Rightarrow\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{c^۲}+\frac{۱}{b^۲}$$

۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.



$$\frac{۲۰}{\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{x}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{y}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲۰}{۰/۹۶}=\frac{x}{۰/۵}\Rightarrow x\approx ۱۰/۴۱۶\\ \frac{۲۰}{۰/۹۶}=\frac{y}{۰/۷۰۷}\Rightarrow y\approx ۱۴/۷۲\end{cases}$$

درس دوم

قضیهٔ کسینوس‌ها

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$). با داشتن طول‌های دو ضلع (AB=c) و (AC=b) می‌توانیم اندازه وتر مثلث (BC=a) را بر حسب b و c به‌دست آوریم : $a^2=b^2+c^2$

حال می‌بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

فعالیت ۱

در مثلث ABC ($\hat{A}<90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، جاهای خالی را پر کنید :

$$\cos A=\frac{AH}{c}\Rightarrow AH=c\times \cos A \quad \text{و} \quad CH=b-AH=b-c.\cos A$$

$$\sin A=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c\times \sin A$$

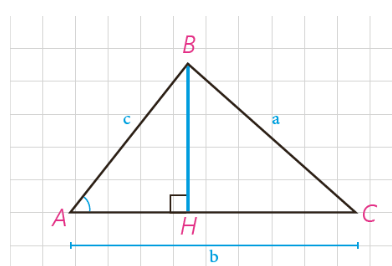
$$\Delta BHC: BC^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(c.\sin A)^2+(b-c.\cos A)^2$$

حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2A+\cos^2A=1$، نشان دهید :

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$

$$\begin{aligned} a^2 &= (c.\sin A)^2+(b-c.\cos A)^2 = c^2\sin^2A+b^2+c^2\cos^2A-2bc.\cos A \\ &= b^2+c^2\underbrace{(\sin^2A+\cos^2A)}_{1}-2bc.\cos A \\ &= b^2+c^2-2bc.\cos A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

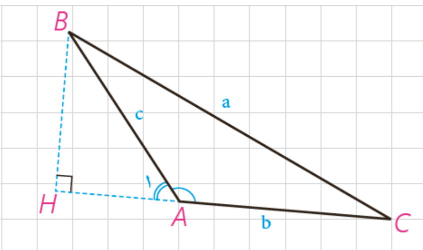


تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

اکنون در مثلث ABC $(\hat{A}>۹۰^\circ)$ ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.

اگر $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_۱=۱۸۰-\hat{A}$ داریم:

$\sin A_۱ = \sin A$ و $\cos A_۱ = -\cos A$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\cos A_۱ = \frac{AH}{c} \text{ و } \sin A_۱ = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \times (-\cos A) \text{ و}$$

$$BH = c \times \sin A \text{ و } CH = b + AH = b - c.\cos A$$

$$\Delta BHC:\ BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow a^۲ = (c.\sin A)^۲ + (b - c.\cos A)^۲$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$$

$$a^۲ = (c.\sin A)^۲ + (b - c.\cos A)^۲ = c^۲\sin^۲ A + b^۲ + c^۲\cos^۲ A - ۲bc.\cos A$$

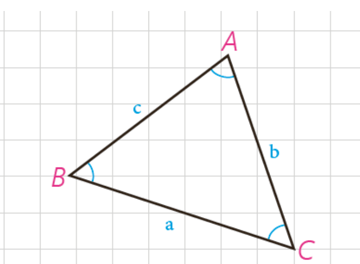
$$= b^۲ + c^۲(\underbrace{\sin^۲ A + \cos^۲ A}_{۱}) - ۲bc.\cos A$$

$$= b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$$

$$\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$$

سؤال: در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos ۹۰^\circ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \times ۰ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

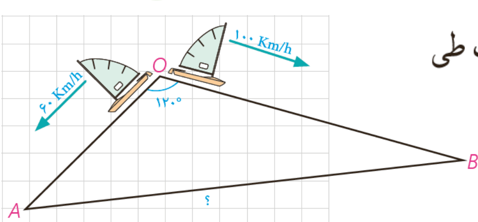


قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$, $b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac.\cos B$

$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab.\cos C$

مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰km/h و ۱۰۰km/h و با زاویهٔ ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



حل: با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times۰/۵=۵۰$

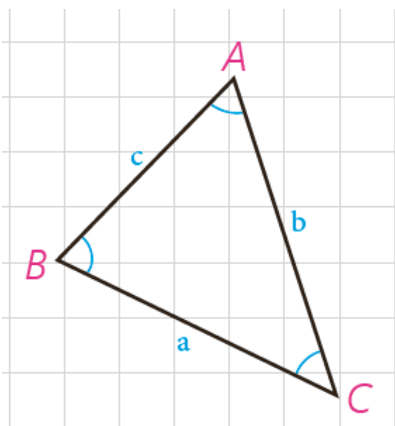
حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA.OB.\cos۱۲۰^\circ$ و $\cos۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$

$AB^۲=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times۳۰\times۵۰\ (-\frac{۱}{۲})\ =۴۹۰۰\Longrightarrow$

$AB=۷۰km$

کار در کلاس



در مثلث ABC، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$

۱ــ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$BC^۲=..AC..^۲+...AB..^۲-۲\times .AC..\times .AB.\times \cos A. \Longrightarrow$

$BC^۲=..(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲...+.(۲\sqrt{۲})^۲..\ -۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\cos۶۰^\circ \Longrightarrow$

$۶+۲+۲\sqrt{۱۲}+۸-۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\frac{۱}{۲}=۱۶+۲\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۱۲}-۴=۱۲$

$BC^۲=...۱۲...$ و $BC=..۲\sqrt{۳}..$

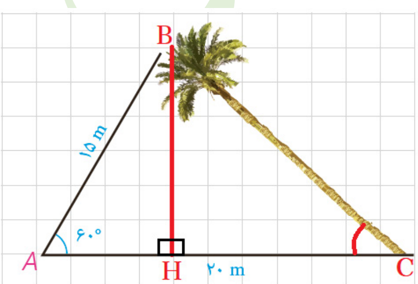
۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$\frac{C}{\sin C}=\frac{a}{....}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ و $\hat{C}=۲۴^\circ$

$\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰^\circ}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow\sin C=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۳}}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

$\Rightarrow\hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=۹۶^\circ$

تمرین



۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

$a^۲=۲۰^۲+۱۵^۲-۲\times۲۰\times۱۵\times\cos۶۰^\circ=۴۰۰+۲۲۵-۳۰۰$

$\Rightarrow a^۲=۳۲۵\Rightarrow a=۵\sqrt{۱۳}$

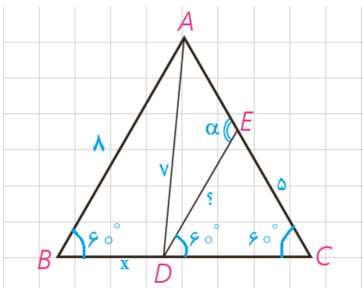
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{۵\sqrt{۱۳}}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{۱۵}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}}\approx ۰/۷۲\Rightarrow \hat{C}\approx ۴۶^\circ$$

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۱۵}\Rightarrow BH=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$



۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟

$$۷^۲=x^۲+۸^۲-۲\times x\times ۸\times \sin ۶۰^\circ\Rightarrow ۴۹=x^۲+۶۴-۸x$$

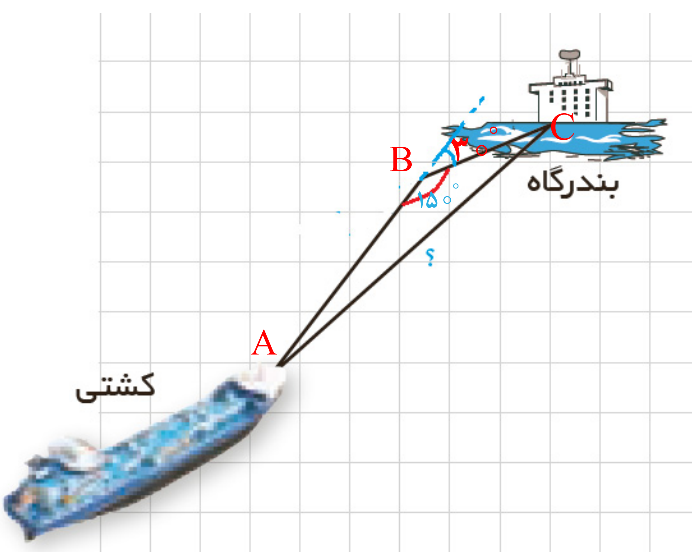
$$\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۳)=۰\ \Rightarrow x=۵\ ,\ x=۳$$

$$\xrightarrow{BD<DC} BD=۳\ \ ,\ \ DC=۵$$

$DC=CE=۵$ درنتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی الاضلاع است یعنی

$DE=۵$. درمثلث DCE زاویهٔ α یک زاویه خارجی است پس : $\alpha=۶۰^\circ+۶۰^\circ\Rightarrow \alpha=۱۲۰^\circ$

۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



$$AB=۶۰\times ۱=۶۰\ km\ \ ,\ \ BC=۴۰\times ۰/۵=۲۰\ km$$

$$AC^۲=۶۰^۲+۲۰^۲-۲\times ۶۰\times ۲۰\times \cos ۱۵۰^\circ$$

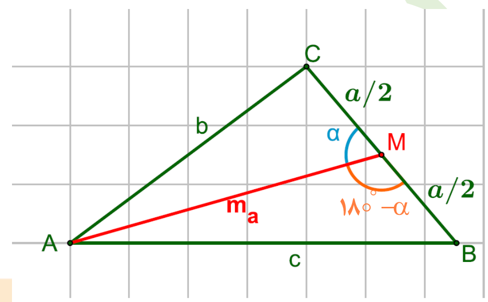
$$=۳۶۰۰+۴۰۰-۲\times ۱۲۰۰\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\Rightarrow AC^۲=۴۰۰۰+۱۲۰۰\sqrt{۳}=۴۰۰(۱۰+۳\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC=۲۰\sqrt{۱۰+۳\sqrt{۳}}$$

۴ـ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB=MC=\frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$ (قضیهٔ میانه‌ها)



$$\overset{\Delta}{ACM}: b^۲=(\frac{a}{۲})^۲+AM^۲-۲\times\frac{a}{۲}\times m_a\times\cos\alpha$$

$$b^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABM}: c^۲=(\frac{a}{۲})^۲+AM^۲-۲\times\frac{c}{۲}\times m_a\times\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)$$

$$c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\cos\alpha+\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM^۲$$

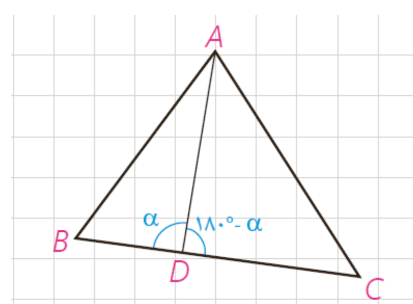
در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.

$AB=c=۴,\ AC=b=۶\ ,\ BC=a=۸$

$$b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM\Rightarrow AM=\frac{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}{۴}\Rightarrow AM=\frac{۲(۳۶+۱۶)-۶۴}{۴}\Rightarrow AM=۱۰$$

۵ـ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$AB^۲ . DC+AC^۲ . DB=AD^۲ . BC+DB . DC . BC$ (قضیهٔ استوارت)



$$\overset{\Delta}{ABD}: AB^۲=AD^۲+DB^۲-۲AD.DB.\cos\alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^۲.DC=DC.AD^۲+DC.DB^۲-۲DC.AD.DB.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲=AD^۲+CD^۲-۲AD.DC.\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲.DB=DB.AD^۲+DB.DC^۲+۲DB.AD.DC.\cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^۲.DC+AC^۲.DB=DC.AD^۲+DC.DB^۲\cancel{-۲DC.AD.DB.\cos\alpha}+DB.AD^۲+DB.DC^۲+\cancel{۲DB.AD.DC.\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲(\underbrace{DC+DB}_{BC})+BD.DC(\underbrace{DC+DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲.BC+DB.DC.BC$$

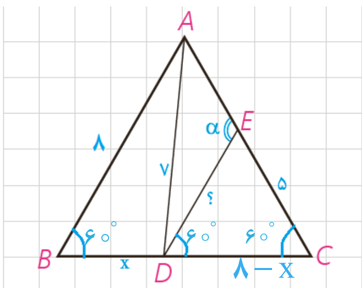
به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$DC = DB = \frac{a}{۲}\ ,\ AC = b\ ,\ \Rightarrow AB = c$

$\Rightarrow \frac{a}{۲} \times c^۲ + \frac{a}{۲} \times b^۲ = AD^۲ \times a + \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times a \Rightarrow \frac{a}{۲}(c^۲ + b^۲) = \frac{a}{۲}(۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲})$

$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}$

۶ــ مسئلهٔ ۲ را بار دیگر، این‌بار به کمک قضیهٔ استوارت حل کنید.



$AB = AC = BC = ۸\ ,\ AD = ۷\ ,\ DB = x\ ,\ DC = x - ۸\ ,\ DB < DC$

$AB^۲.DC + AC^۲.DB = AD^۲.BC + DB.DC.BC$

$\Rightarrow ۶۴(۸ - x) + ۶۴x = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$

$\Rightarrow ۶۴ \times ۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$

$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^۲ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۵) = ۰$

$\Rightarrow x = ۳\ ,\ \ x = ۵ \xrightarrow{DB<DC} x = DB = ۳\ ,\ DC = ۵$

درس سوم

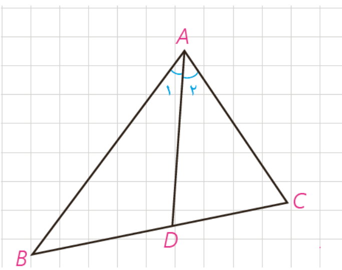
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

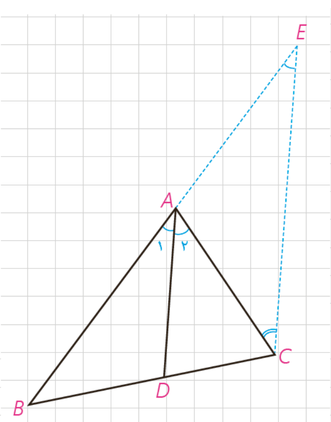
قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات: مطابق شکل از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



الف) چرا $\widehat{A_1} = \hat{E}$ و چرا $\widehat{A_2} = \hat{C}$؟

$AD \| EC$, BE مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_1} = \hat{E}$

$AD \| EC$, AC مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_2} = \hat{C}$

ب) با توجّه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟

با توجه به فرض می توان نتیجه گرفت که $\hat{E} = \hat{C}$.

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

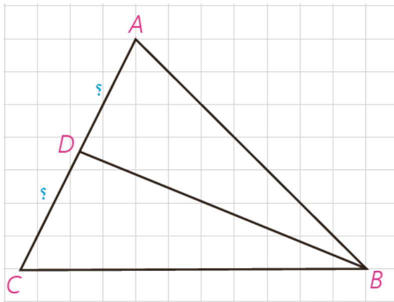
متساوی الساقین است .(اگر در یک مثلث دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.)

ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC $(AD \| EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD \| EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد :

مثال : در مثلث ABC، AB=۷، AC=۵ و BC=۸ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



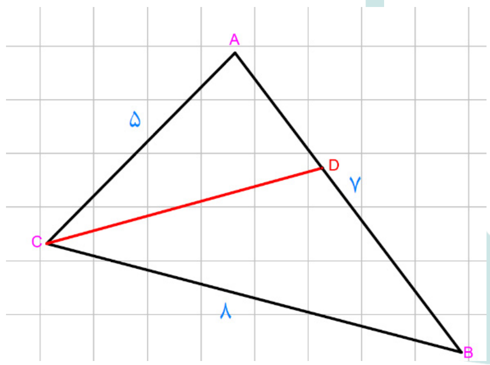
حل :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{۷}{۸}\Rightarrow\frac{AD+CD}{CD}=\frac{۷+۸}{۸}\Rightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{۱۵}{۸}\Rightarrow\frac{۵}{CD}=\frac{۱۵}{۸}$$

$$CD=\frac{۸\times ۵}{۱۵}=\frac{۸}{۳}\ ,AD=AC-CD=۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

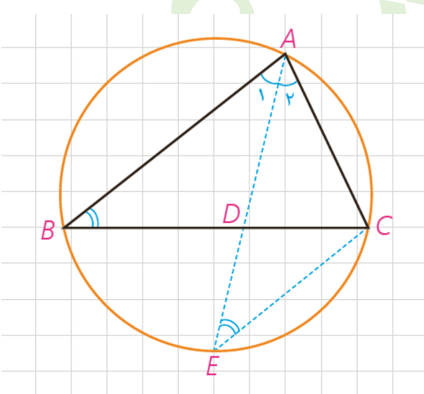


$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{۵}{۸}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{۵+۸}{۸}=\frac{AD+BD}{BD}\Rightarrow\frac{۱۳}{۸}=\frac{۷}{BD}$$

$$BD=\frac{۸\times ۷}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳}\Rightarrow BD=۷-\frac{۵۶}{۱۳}=\frac{۳۵}{۱۳}$$

۲ــ محاسبهٔ طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ $(\hat{A}_۱=\hat{A}_۲)$، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.



الف) چرا $\hat{E}=\hat{B}$؟

زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه رو به یک کمان (کمان AC) هستند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{B}=\hat{E}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ق اول تشابه}}A\overset{\Delta}{B}D\sim A\overset{\Delta}{E}C$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB}=\frac{CE}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می گیریم :

$$AB.AC = AD.AE = AD(AD+DE) = AD^{۲}+AD.DE$$

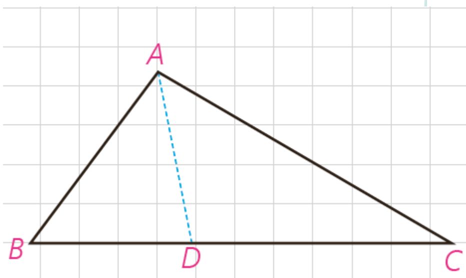
و چون $AD.DE = BD.DC$ (چرا؟)

دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطهٔ D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم : $AD.DE = DB.DC$

بنابراین : $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$

قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال : در مثلث ABC، AB=۳، AC=۵ و BC=۷ است. طول نیمساز زاویهٔ A را بیابید.



حل : به کمک قضیهٔ (۱) طول‌های BD و CD را به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{۷}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow CD = \frac{۳۵}{۸}\ ,\ BD = ۷ - \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۱}{۸}$$

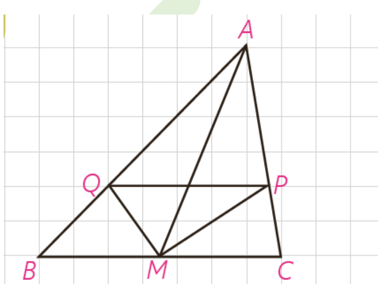
حال با توجه به قضیهٔ (۲) داریم :

$$AD^{۲} = AB.AC - BD.CD = ۳\times۵ - \frac{۳۵}{۸}\times\frac{۲۱}{۸} = ۱۵ - \frac{۷۳۵}{۶۴} = \frac{۲۲۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

تمرین

۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : $PQ\|BC$

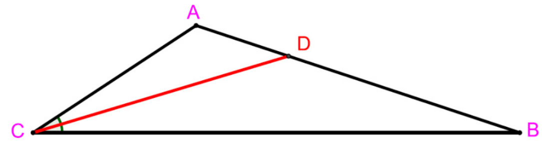


در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AQ}{QB} \\ \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ\|BC$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۲ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.



$$CD^۲ = AC.BC - AD.BD$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA} \Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$$

$$CD^۲ = ۴\times۱۰ - ۲\times۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$$

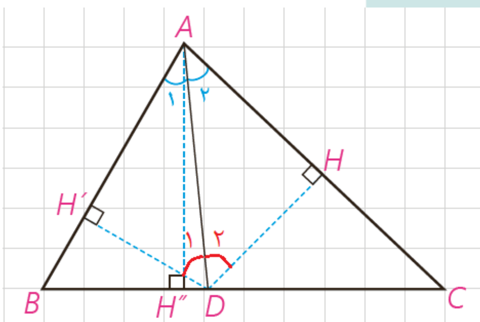
۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$؟

راه اول:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A_۱}+\widehat{D_۱}=۹۰^\circ\\ \widehat{A_۲}+\widehat{D_۲}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۱}+\widehat{D_۱}=\widehat{A_۲}+\widehat{D_۲} \xrightarrow{\widehat{A_۱}=\widehat{A_۲}} \widehat{D_۱}=\widehat{D_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D_۱}=\widehat{D_۲}\\ \widehat{A_۱}=\widehat{A_۲}\\ AD=AD\end{array}\right\} \longrightarrow DH = DH'$$



راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .پس $DH = DH'$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \qquad (۲)$$

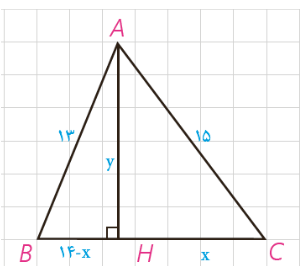
از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسهٔ ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :



به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left.\begin{matrix} CH^۲+AH^۲=AC^۲ \\ BH^۲+AH^۲=AB^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^۲+y^۲=۲۲۵ \\ (۱۴-x)^۲+y^۲=۱۶۹ \end{matrix}\right.$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف $y^۲$ معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^۲-(۱۴-x)^۲=۵۶ \quad \Rightarrow \quad x^۲-۱۹۶-x^۲+۲۸x=۵۶$$

$$\Rightarrow \quad x=۹ \quad , \quad y=۱۲ \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}BC.AH=۸۴$$

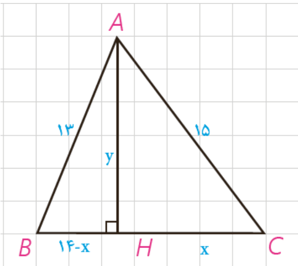
اگر همین روش را در حالت کلّی در مثلث ABC، که BC=a، AB=c و AC=b به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$ (دستور هرون)

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :



$$۲P=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow P=۲۱$$

$$s=\sqrt{۲۱\times ۶\times ۷\times ۸}=\sqrt{۷^{۲}\times ۳^{۲}\times ۲^{۴}}=۸۴$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a=\frac{۲s}{a}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۴}=۱۲ \quad h_b=\frac{۲s}{b}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۵}=\frac{۵۶}{۵}\ ,\ h_c=\frac{۲s}{c}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۳}=\frac{۱۶۸}{۱۳}$$

کاردرکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به‌دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

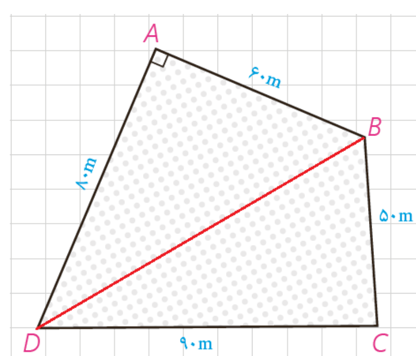
$$BD^{۲}=۶۰^{۲}+۸۰^{۲}=۳۶۰۰+۶۴۰۰=۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD=۱۰۰$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

مساحت برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع قائمه :

$$S_{ABD}=\frac{۶۰\times ۸۰}{۲}=۲۴۰۰$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.



$$P=\frac{۵۰+۹۰+۱۰۰}{۲}=۱۲۰\ ,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-C)}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۲۰\times(۱۲۰-۱۰۰)\times(۱۲۰-۹۰)\times(۱۲۰-۵۰)}$$

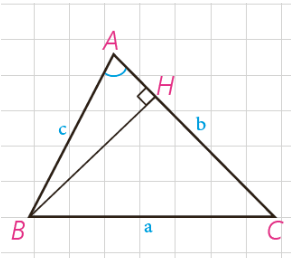
$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۲۰\times ۲۰\times ۳۰\times ۷۰}=\sqrt{۳۶\times ۱۴\times ۱۰۰۰۰}=۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S=۲۴۰۰+۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوریم.

۱ــ در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c.\sin A$$

۲ــ مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BH = \frac{۱}{۲} bc.\sin A$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc.\sin A = \frac{۱}{۲} ab.\sin C = \frac{۱}{۲} ac.\sin B$$

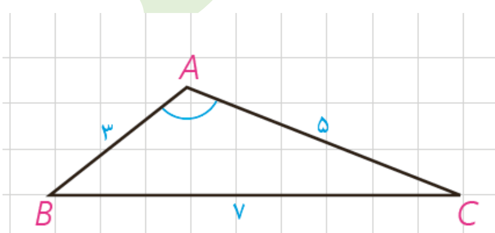
کاردرکلاس

۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.

$$P = \frac{۵ + ۷ + ۳}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times (\frac{۱۵}{۲} - ۵) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۷) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۳)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$$

۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$ بنویسید.



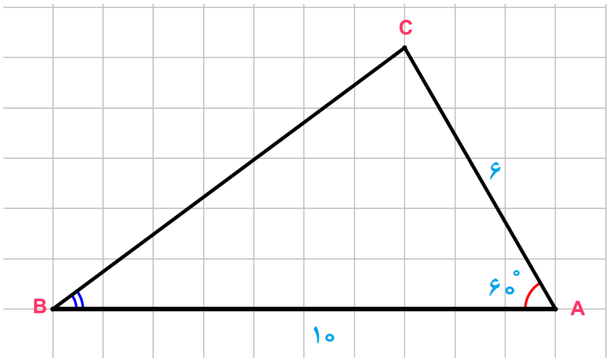
$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin A = \frac{۱۵}{۲} \sin A$$

۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۲} \sin A = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

تمرین

۱ـ در مثلث ABC، $AB=۱۰$، $AC=۶$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$.



الف) طول BC را به‌دست آورید.

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^۲ = ۳۶+۱۰۰-۲\times۶\times۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$$

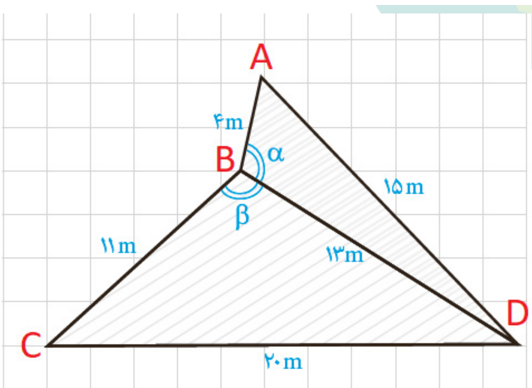
ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

$$S = \frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ) مقدار sinB را پیدا کنید.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$

۲ـ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{۴+۱۳+۱۵}{۲} = ۱۶\ m$$

$$P_{BCD} = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲\ m$$

$$S_{ABD} = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۳\times۱} = ۲۴\ m^۲$$

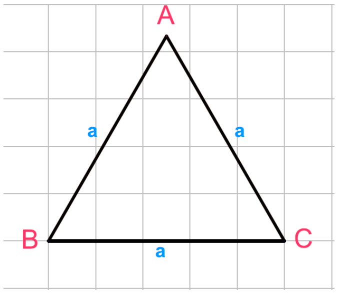
$$S_{BCD} = \sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶\ m^۲$$

$$S_{ABCD} = ۲۴+۶۶ = ۹۰\ m^۲$$

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.BD.\sin\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times۴\times۱۳\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BC.BD.\sin\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

۳ــ دستور محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

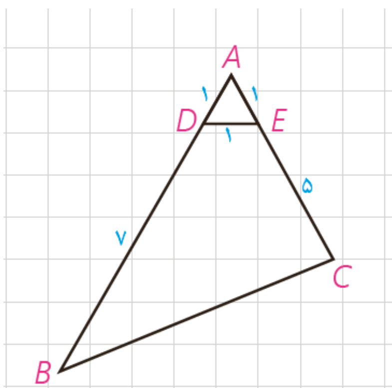


$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{۳a}{۲}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times(\frac{a}{۲})^{۳}} = \sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

۴ــ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^{\circ}$ در نتیجه :



$$BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^{۲} = ۳۶ + ۶۴ - ۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲} = ۵۲ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

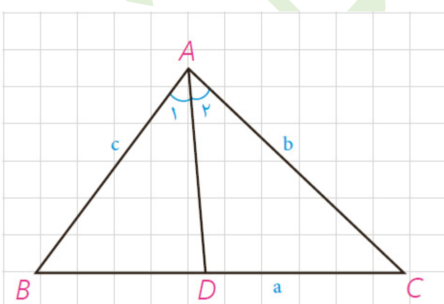
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.\sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^{۲} = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۵ــ در شکل، AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC)$$

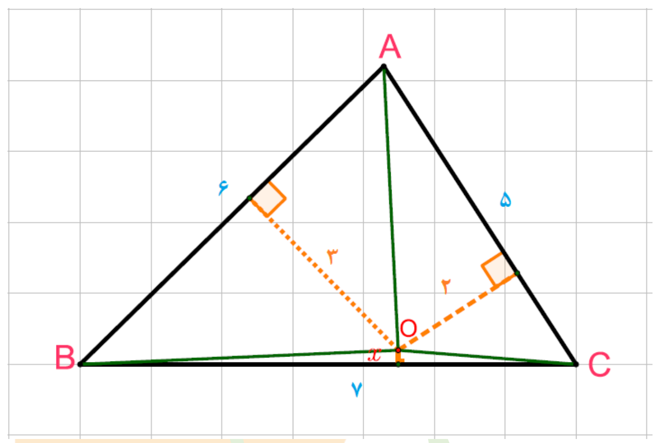
$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}} = \frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}}$$

$\Rightarrow AD = ..d_a \Rightarrow$ (نیمساز رأس A) $d_a = \dfrac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۶ـ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S_{ABC} = \sqrt{9\times 2\times 3\times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\times 6\times 3 = 9$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}\times 5\times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}\times 7\times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9+5+\frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6}-14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6}-14) \approx 0/2$$

۷ـ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید. **راهنمایی:** B را به D وصل کنید.

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازهٔ زاویه C ، اندازهٔ دو زاویه دیگر هرکدام 30° خواهد بود . در این مثلث ارتفاع CH را رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه CHD ، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ در نتیجه : $CH = \frac{7}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times BD = \frac{7}{4}BD \\ S_{BCD} = \frac{1}{2}\times 7\times 7\times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{4}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11+13+7\sqrt{3}}{2} = 12+\frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12+\frac{7}{2}\sqrt{3})(12+\frac{7}{2}\sqrt{3}-7\sqrt{3})(12+\frac{7}{2}\sqrt{3}-11)(12+\frac{7}{2}\sqrt{3}-13)}$$

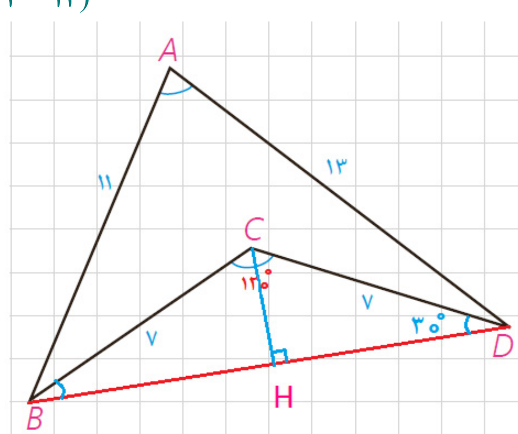
$$S_{ABD} = \sqrt{(12+\frac{7}{2}\sqrt{3})(12-\frac{7}{2}\sqrt{3})(\frac{7}{2}\sqrt{3}+1)(\frac{7}{2}\sqrt{3}-1)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(144-\frac{147}{4})(\frac{147}{4}-1)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \qquad (1)$$

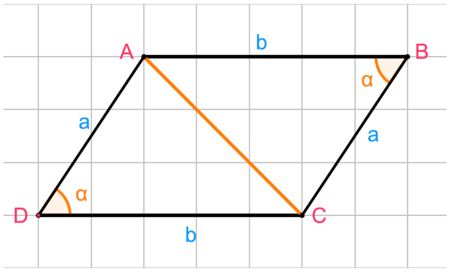
$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\times 11\times 13\times \sin A = \frac{143}{2}\sin A \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2}\sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$



۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.



با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times a\times b\times \sin\alpha \Rightarrow S_{ABCD} = a.b\sin\alpha$$

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A < ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A < ۰ \Leftrightarrow -bc.\cos A > ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\cos A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

ب) $\hat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A > ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A > ۰ \Leftrightarrow -bc.\cos A < ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\cos A < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

پ) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A = ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A = ۰ \Leftrightarrow -bc.\cos A = ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\cos A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) AB=۱۰ , AC=۶ , BC=۹

$a = ۹ , b = ۶ , c = ۱۰$

$a^۲ = ۸۱ \quad , \quad b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$

ب) AB=۸ , AC=۴ , BC=۹

$a = ۹ , b = ۴ , c = ۸$

$a^۲ = ۸۱ \quad , \quad b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$

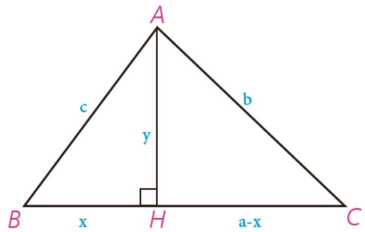
پ) AB=۸ , AC=۱۵ , BC=۱۷

$a = ۱۷ , b = ۱۵ , c = ۸$

$a^۲ = ۲۸۹ \quad , \quad b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

اثبات دستور هرون (برای محاسبهٔ مساحت مثلث)



در مثلث ABC، AB=c و AC=b و AH=y و BC=a و BH=x و CH=a−x. با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH و تفاضل روابط به‌دست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ (a-x)^2+y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2-c^2=(a-x)^2-x^2=a^2+x^2-2ax-x^2= a^2-2ax \Rightarrow x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیهٔ آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود :

$$y=AH=\sqrt{\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}=\frac{1}{2a}\sqrt{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]}=$$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض a+b+c=۲p خواهیم داشت :

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$$

و به همین صورت :

$$b+c-a=2(p-a) \quad , \quad b+a-c=2(p-c)$$

و بنابراین :

$$AH=\frac{1}{2a}\sqrt{2p\times 2(p-a)\times 2(p-b)\times 2(p-c)}=$$

$$\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad S=\frac{1}{2}AH.a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی