فصل ۱

جبر و معادله

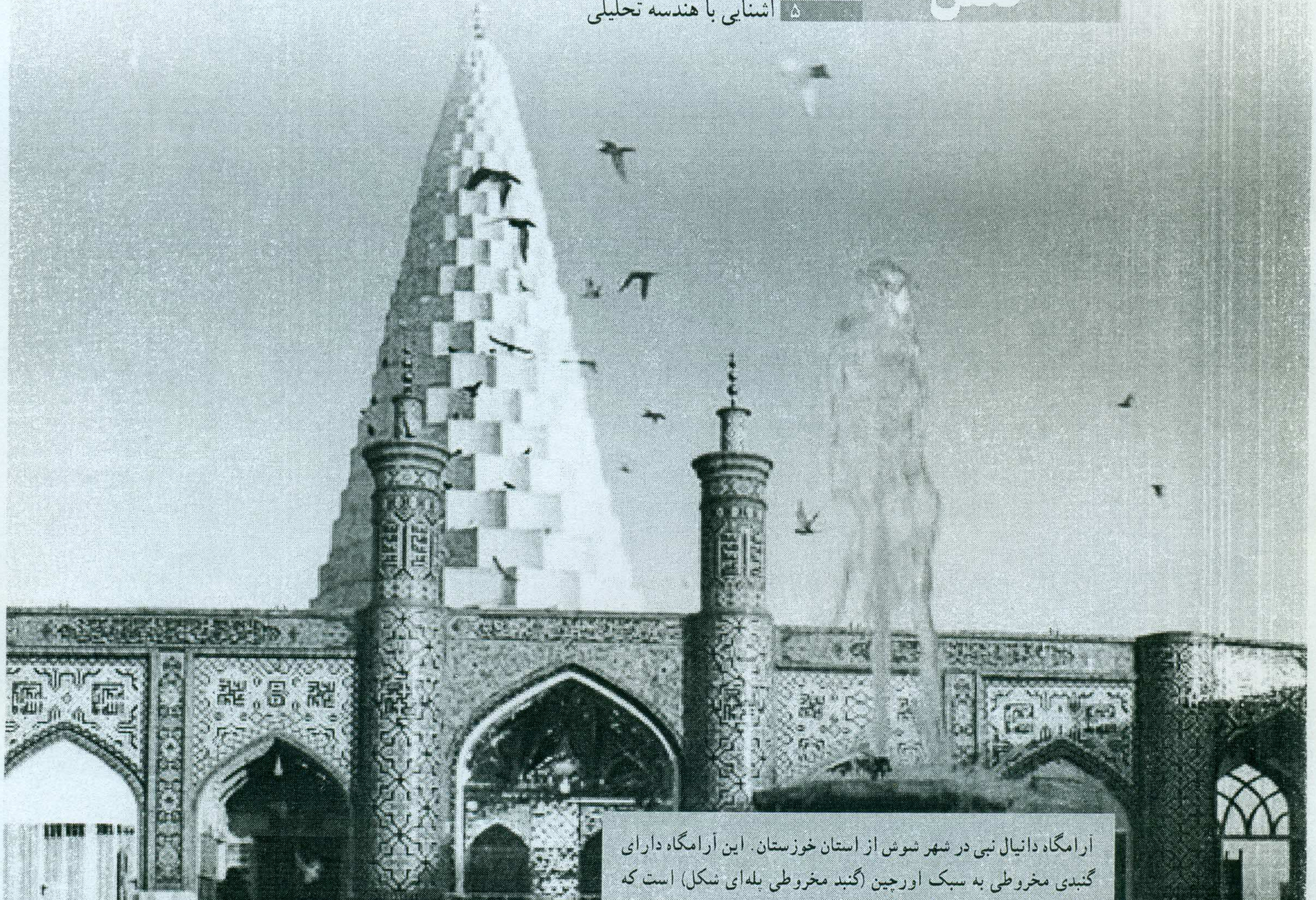
۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۲ معادلات درجه دوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



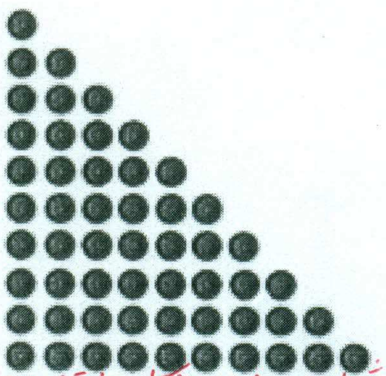
آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

فعالیت



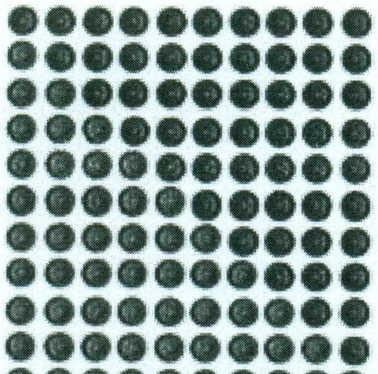
تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف برابر شماره ردیف در شکل فوق و ۱۰ در شکل پایین است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۰۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :



$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۵$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots\ldots + (n-۱) + n$$

$$S = n + (n-۱) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱$$

$$۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \ldots + (n+۱) + (n+۱)}_{n \text{ تا}}$$

$$۲S = n(n+۱)$$

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ابتدا اعداد طبیعی ۱ تا n را نوشته به ترتیب صعودی سپس n تا ۱ را زیر مجموع ۱ تا n قرار می‌دهیم طوری که مجموع هر دو عدد زیر هم $n+1$ می‌شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما n تا $n+1$ داریم پس $2S=n(n+1)$ می‌شود

$$1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال : روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

حل : نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$19+18+17+\ldots+2+1=\frac{19}{2}(1+19)=190$$

تذکر : این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+2d\,,\,\ldots\,,\,\,a+(n-2)d\,\,,\,\,a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+(n-2)d)+(a+(n-1)d)$$

۱ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به‌دست آورید. نتیجه خواهید گرفت :

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S=a+(a+d)+\cdots+a+(n-1)d$$
$$S=a+(n-1)d+a+(n-2)d+\cdots+a$$
$$2S=\underbrace{(2a+(n-1)d)+(2a+(n-1)d)+\cdots+2a+(n-1)d}_{n\ \text{تا}}$$
$$2S=n[2a+(n-1)d]$$

مثال : مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......, ۱۱,۱۵, ۷, ۳ را به‌دست آورید.

حل : جملهٔ اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{100}=\frac{100}{2}\left[(2\times3)+(99\times4)\right]=50\times402=20100$$

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی‌که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : حل شد! معلم با تعجب گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. سپس گفت : اول چنین نوشتم :

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

و بعد چنین :

$$100+99+98+97+\ldots+3+2+1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم :

$$101+101+101+\ldots+101+101+101+101$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به‌دست آوردم که حاصل‌ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل‌جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

کار در کلاس

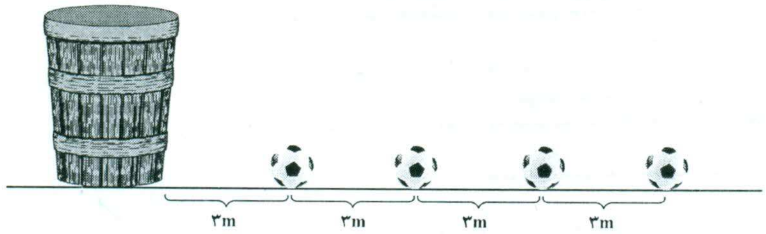
۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر $a_۱$ و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$

بنابر صفحه قبل $S_n = \frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d] = \frac{n}{۲}[a+\underbrace{a+(n-۱)d}_{a_n}] = \frac{n}{۲}[a+a_n]$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

$\underset{a}{۱۲}, ۱۶, ۲۰, \ldots, \underset{a_n}{۹۶}$ $\quad n = \frac{۹۶-۱۲}{۴} = ۲۲ \quad S_n = \frac{۲۲ \times [۱۲+۹۶]}{۲} = ۱۱۸۸$

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت ۶=۳+۳ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d)$$

$$۹۱۸ = \frac{n}{۲}(۱۲ + (n-۱)۶) \Rightarrow ۳۰۶ = n(n+۱) \Rightarrow ۱۷ \times ۱۸ = n(n+۱) \Rightarrow n = ۱۷$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به‌دست آورید. $(a \neq ۰)$

$a, a, a, \ldots, a$ $\quad q = ۱ \quad S_n = na$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q \neq ۱)$

$a, aq, aq^۲, \ldots$

الف) جمله nام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-۱}$

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم :

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

کار در کلاس

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

$S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^{10}}{1-\frac{1}{4}} \simeq$ ۰/۲۴۹۷۵۵

مثال : برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هریک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل : اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند ($\frac{1}{4}$) و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به‌دست می‌آید :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

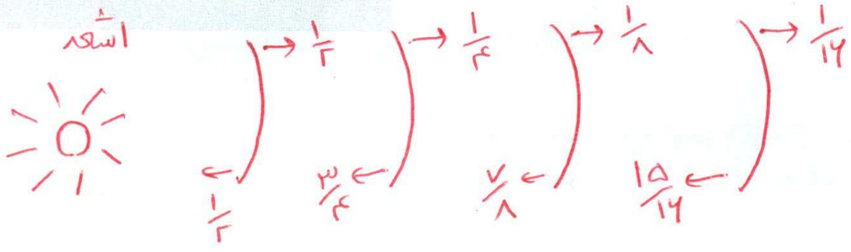
این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3}$$ $\simeq$ ۳۳/۳

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $64 = 2^6$ درمی‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.



روش تصویری

خواندنی

در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به‌دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد : برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64}-1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل ۱۰۰۰ قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

سوال ۱ ←

$$\frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64}-1 = 18446744073709551615$$

کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

$(1+2+4+8+\cdots+2^{63})$ گرم

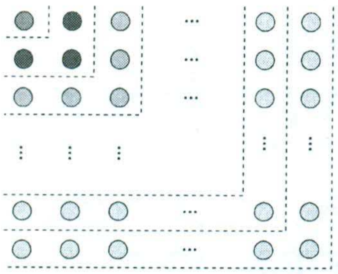
الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟[1]

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم

$a=1 \quad q=2 \quad n=64 \quad S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \to 1\left(\frac{1-2^{64}}{1-2}\right) = S_{64}$

$S_{64} = 2^{64}-1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$

تمرین



۱ در دنباله حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$a=5 \quad S_n > 493 \quad \frac{n}{2}[10+3(n-1)] > 493 \quad 3n^2+7n-986>0$

$d=3 \quad n_1 = \frac{-7+109}{6} \Rightarrow n \geq 17 \to n=18$

$\Delta = 11881 \quad n_2 = \frac{-7-109}{6}$ غ ق ق

۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید. صفحه بعد

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟ صفحه بعد

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید. صفحه بعد

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟ صفحه بعد

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ صفحه بعد

۷ برای عدد حقیقی a $(a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

۱ــ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

سوال ۲ قسمت ب)

$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$a=1 \quad d=2 \quad n=n \qquad S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n=\frac{n}{2}[2+(n-1)\times 2]=\frac{n}{2}\times 2n=n^2$

سوال ۳

$102, 108, \dots, 996 \qquad a=102 \qquad a_n=996 \qquad n=\frac{996-102}{6}=149+1=150$

$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{150}{2}[2\times 102+(150-1)\times 6]=82350$

سوال ۴

$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$150+135=\frac{20}{2}[2a+19d] \longrightarrow \boxed{285=20a+190d} \rightarrow 4a+38d=57$

جملات فرد

$a+a+2d+a+4d+\dots+a+18d=135$

$\boxed{10a+90d=135} \longrightarrow 2a+18d=27$

$$2\begin{cases}4a+38d=57\\2a+18d=27\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\cancel{4a}+38d=57\\-\cancel{4a}-36d=-54\end{cases}$$

$2d=3 \qquad \underline{d=1/5}$

$2a+18d=27 \qquad 2a+27=27 \quad 2a=0 \qquad \underline{a=0}$

$18d \to 27$

سوال ۵

$a_n=2^{n-1} \qquad 1, 2, 4, 8, \dots$

$S_n=a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] \qquad S_n=255 \qquad \left[\frac{1-2^n}{-1}\right]=255$

$2^n-1=255 \qquad 2^n=256$

$2^n=2^8$

$n=8$

سوال ۶

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \qquad S_n=a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$

$S_n>\frac{99}{100} \quad \cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right]>\frac{99}{100} \qquad 1-(\frac{1}{2})^n>\frac{99}{100}$

$(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{100} \longrightarrow 2^n>100 \quad n_{\text{حداقل}}=7$

سوال ۷

$1+a+a^2+\dots+a^{n-1}= \qquad a=1,\ q=a,\ n=n \qquad S_n=a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$

$S_n=1\left[\frac{1-a^n}{1-a}\right] \longrightarrow 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}$

$\longrightarrow 1-a^n=(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$

درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ است $(a\neq۰)$ که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

$۳x^۲-۵x+۲=۰$

$a \quad b \quad c \qquad \Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۴\times۳\times۲=۱$

۱ معادله $۳x^۲=۵x-۲$ را حل کنید.

$x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۵+۱}{۶}=۱$

$x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۵-۱}{۶}=\dfrac{۴}{۶}=\dfrac{۲}{۳}$

۲ اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادله $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$x=-۱ \rightarrow ۴-m(-۱)-۷=۰ \qquad m-۳=۰ \qquad m=۳$

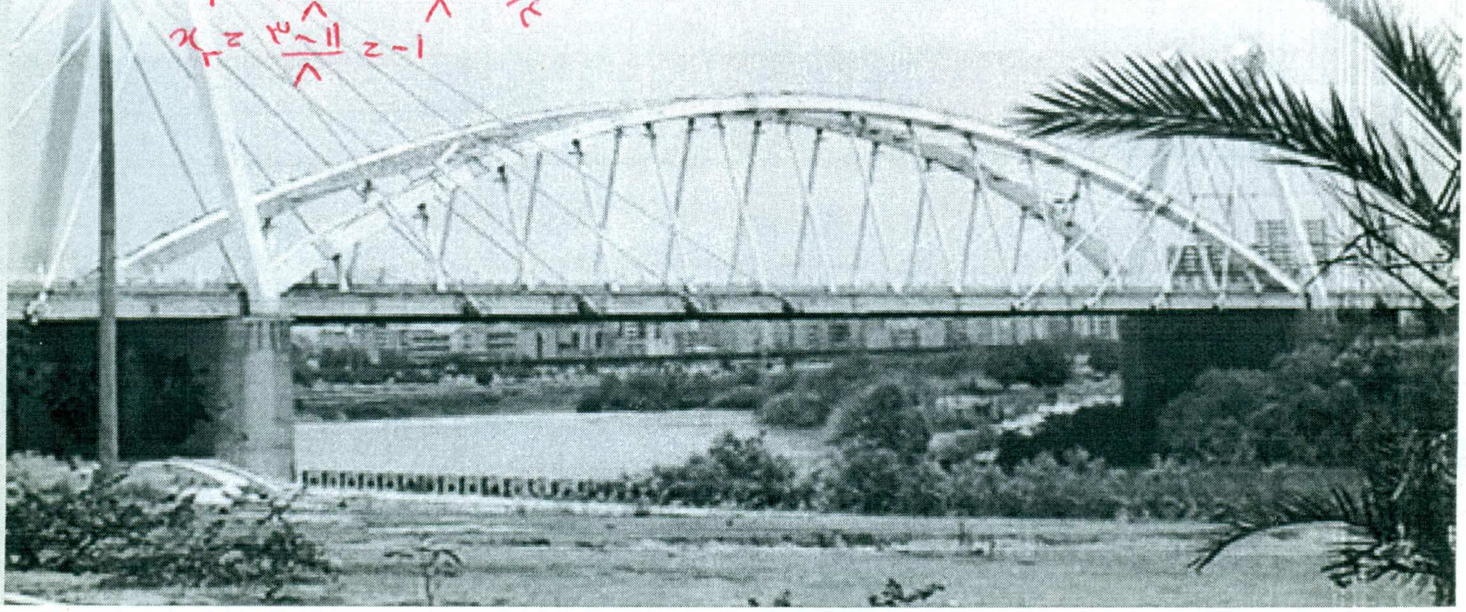
$۴x^۲-۳x-۷=۰$

$a=۴ \quad b=-۳ \quad c=-۷ \qquad \Delta=۹-۴(۴)(-۷)=۹+۱۱۲=۱۲۱$

$x_۱=\dfrac{۳+۱۱}{۸}=\dfrac{۱۴}{۸}=\dfrac{۷}{۴}$

$x_۲=\dfrac{۳-۱۱}{۸}=-۱$

پل پارک جزیره (اهواز ـ استان خوزستان)



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار هر ریشه x_1 و x_2	$ax^۲+bx+c=۰$
$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	۵-	۳	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$ ، ۱	$۳x^۲-۵x+۲=۰$
$\frac{-۷}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	۷-	۳-	۴	$\frac{-۷}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$ ، ۱-	$۴x^۲-۳x-۷=۰$
۱	۲	۱	۲-	۱	۱	۲	۱ ، ۱	$x^۲-۲x+۱=۰$
$-\frac{۸}{۵}$	$-\frac{۶}{۵}$	۸-	۶	۵	$-\frac{۸}{۵}$	$-\frac{۶}{۵}$	$\frac{۴}{۵}$ ، ۲-	$۵x^۲+۶x-۸=۰$

جمع ریشه‌ها $= -\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a}$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، نشان دهید:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \cdots = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

$$b^۲-\Delta = \cancel{b^۲}-\cancel{b^۲}+۴ac = ۴ac \qquad \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S = \frac{-b}{a}\ ,\ P = \frac{c}{a}$$

مثال: اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-۱)x_2 = \frac{-۷}{۴} \Rightarrow x_2 = \frac{۷}{۴}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -۱+\frac{۷}{۴} = \frac{m}{۴} \Rightarrow m = ۳$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x = ۲ \\ x = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \\ x + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$

۲ اگر $x_۱ = \alpha$ و $x_۲ = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-\alpha) = ۰ \\ (x-\beta) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \Rightarrow x^۲ - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{S} x + \underbrace{\alpha\beta}_{P} = ۰$$

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^۲ - Sx + P = ۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲ + \sqrt{۳}$ و $۲ - \sqrt{۳}$ باشند.

$S = ۲ - \cancel{\sqrt{۳}} + ۲ + \cancel{\sqrt{۳}} = ۴$

$P = (۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = ۴ - ۳ = ۱$

$x^۲ - Sx + P = ۰ \qquad x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم :

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_۱ x_۲ = ۶۵$$

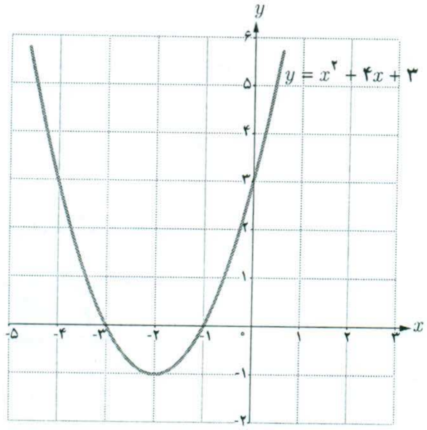
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{۳۳}{۲}$ و $P = ۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۳۳}{۲}x + ۶۵ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳۳x + ۱۳۰ = ۰$$

از حل معادله اخیر $x_۱ = ۱۰$ یا $x_۲ = \frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^۲+۴x+۳$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

۱ معادله $f(x)=۰$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

$x^2+4x+3=0 \quad (x+1)(x+3)=0$

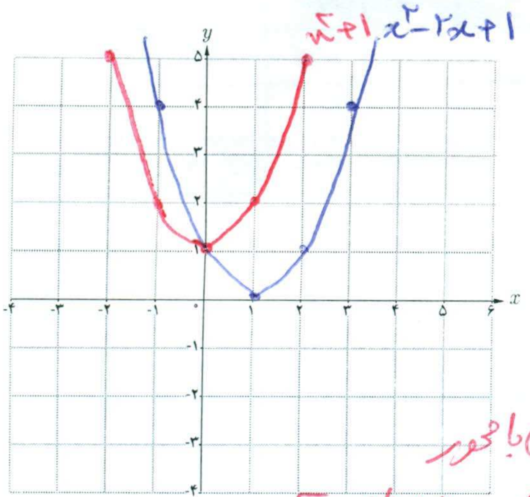
$\begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=۰$ دارد؟ محل تلاقی نمودار با محور x ها دقیقاً جواب‌های معادله $f(x)=0$ هستند

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^۲-۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ چه می‌توان گفت؟

معادله $g(x)=0$ جواب ندارد چون محل برخوردی با محور xها ندارد و معادله $f(x)=0$ چون مماس بر محور x هاست یک جواب دارد

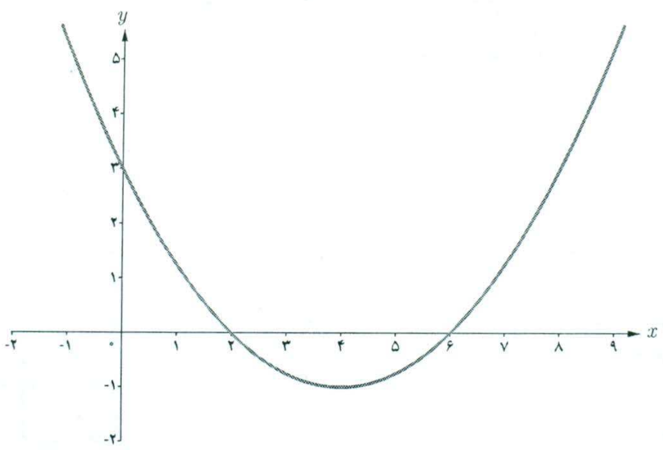
مثال : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

حل : از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و داریم :

$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$
$$= a(x^2 - Sx + p)$$
$$= a[x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a}]$$
$$= ax^2 + bx + c$$

مثال : اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول : از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می‌توان نوشت :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند و داریم.

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به‌صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

روش دوم : از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

کار در کلاس

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ مثبت دارد. **(شکل‌های ۸ و ۹)**

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (۴)

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۱ و ۲)

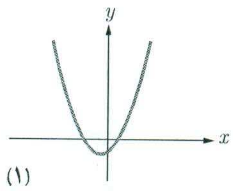
ت) ریشه ندارد. (۵ و ۷)

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

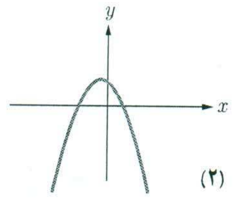
ج) یک ریشه دارد. (۳)

چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳، ۸، ۹)

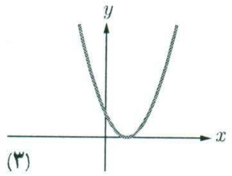
ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (۱، ۲، ۴، ۶)



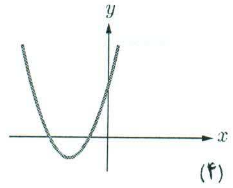
(۱)



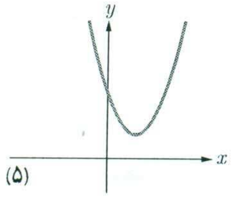
(۲)



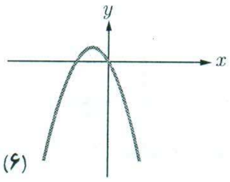
(۳)



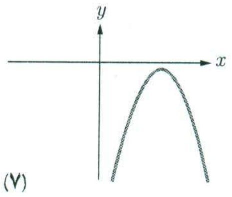
(۴)



(۵)

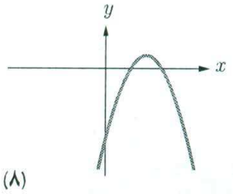


(۶)

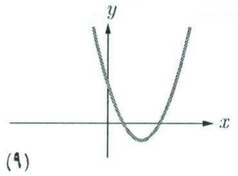


(۷)

$-\frac{b}{2a}>0 \quad -b\cancel{<} \quad b\cancel{>}0$



(۸)



(۹)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل / ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	۰	−	−	+

تذکر : ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a}>0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$

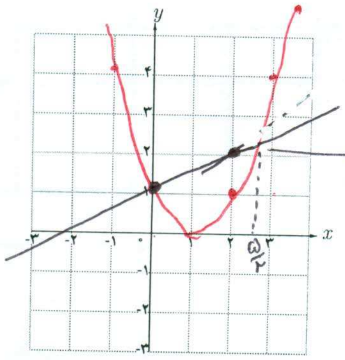
$x^2 - 2x + \cancel{1} = \frac{1}{2}x + \cancel{1}$

$x^2 - \frac{5}{2}x = 0$

$x(x - \frac{5}{2}) = 0 \rightarrow x = 0 , \; x = \frac{5}{2}$

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



نقطه برخورد

۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ را حل کنید. در بالا راه حل ارائه شده

۲ نمودار دو تابع $y = (x-1)^2$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$ را رسم کنید.

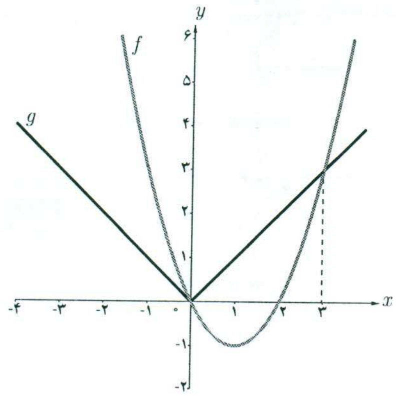
y هر دو تابع به ازای $x = \frac{5}{2}$ برابر $\frac{9}{4}$ می شود

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ ریشه‌های معادله دقیقاً همان طول‌های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

مثال : به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

حل : با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از : $x = 0 \; , \; x = 3$

که جواب‌های معادله $|x| = x^2 - 2x$ می‌باشند.

مثال : اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل : از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم. می‌توان نوشت $p(x)=(x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x)=0$ داریم :

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline \underline{-x^3+2x^2} & x^2+x-2 \\ x^2-4x & \\ \underline{-x^2+2x} & \\ -2x+4 & \\ \underline{+2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر -2 , 2 , 1 می‌باشند.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \hline \underline{-x^3-2x^2} & x^2-1 \\ -x-2 & \\ \underline{+x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^2-1 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=1 ,\ x=-1$

سایر صفرها

کار در کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

$x=-2$

$0=-8+4k+\cancel{2}-\cancel{2}$

$k=+2$

مثال : صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

حل : هر چند معادله $f(x)=0$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t=x^2-1$، معادله به‌صورت $t^2+t-2=0$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t=x^2-1$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=-2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می‌باشد.

> برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را به‌دست آورید.

$x^4-10x^2+16=0 \qquad x^2=t$

$t^2-10t+16=0$

$(t-8)(t-2)=0$

$t=8 \quad x^2=8 \quad x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

$t=2 \quad x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$

۱- الف) $S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1 \quad P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$x^2-Sx+P=0 \quad x^2-1x+\frac{2}{9}=0$

ب) $\alpha, 2\alpha \quad S=3\alpha \quad P=2\alpha^2$

$x^2-Sx+P=0 \quad x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$

مسئله بی‌شمار جواب دارد

تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. بالای صفحه

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.

$y=a(x-2)^2$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=4a \quad a=-\frac{1}{2}$

$P(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$

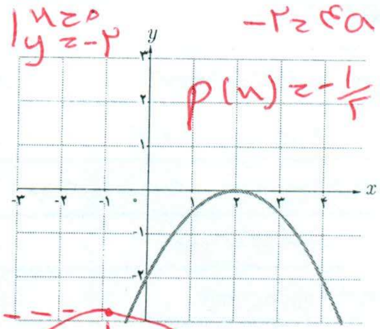
$y=a(x-1)(x+3)$

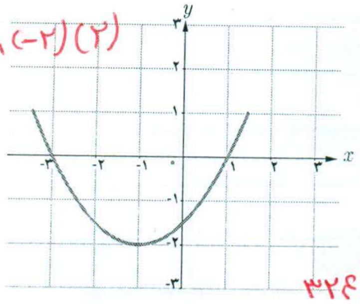
$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=a(-2)(2)$

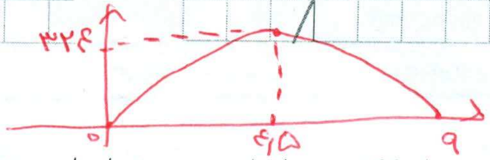
$a=\frac{1}{2}$

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

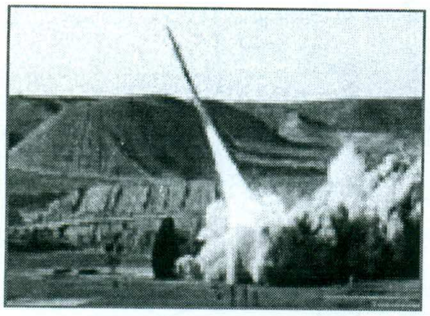
$P(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$


(الف)


(ب)



نمودار تمرین ۴



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t، از رابطه $h(t)=-16t^2+144t$ به‌دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به‌دست آورید.

$t_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-144}{-32}=\frac{9}{2} \quad h_{max}=-16\times\frac{81}{4}+144\times\frac{9}{2}$

$=-324+648=324$

$t(-16t+144)=0 \to \begin{cases} t=0 \\ t=9 \end{cases}$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x \qquad x(x^2-4)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2=4 \end{cases} \quad x=\pm 2$

ب) $g(x)=2x^3+x^2+3x \qquad x(2x^2+x+3)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+x+3=0 \end{cases} \quad \Delta<0$ ریشه حقیقی ندارد

پ) $h(x)=x^4+3x^2+5 \to t^2+3t+5$ (a, b, c)

$\Delta=9-4(1)(5)=-11$ ریشه حقیقی ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4-3x^2-4=0 \qquad x^2=t \quad t^2-3t-4=0 \quad (t-4)(t+1)=0 \quad (x^2-4)(x^2+1)=0 \quad x=\pm 2$

ریشه حقیقی ندارد

ب) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$

$\frac{x^2}{3}-2=t$

$t^2-7t+6=0 \quad (t-1)(t-6)=0$

$t=1 \to \frac{x^2}{3}-2=1 \to \frac{x^2}{3}=3 \quad x^2=9 \quad x=\pm 3$

$t=6 \to \frac{x^2}{3}-2=6 \to \frac{x^2}{3}=8 \quad x^2=24$

$x=\pm\sqrt{24}$

پ) $(4-x^2)^2-(4-x^2)=12$

$4-x^2=t$

$t^2-t-15=0 \quad \Delta=61 \quad t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$

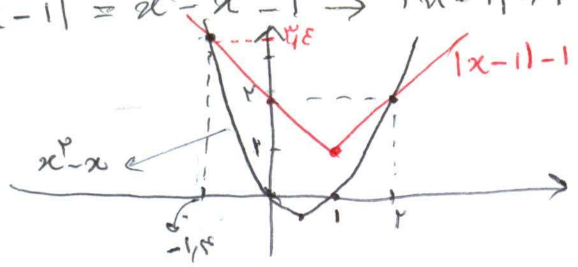
$4-x^2=\frac{1+\sqrt{61}}{2} \quad x^2=4-\frac{1+\sqrt{61}}{2}=\frac{7-\sqrt{61}}{2}$

$4-x^2=\frac{1-\sqrt{61}}{2} \quad x^2=4-\frac{1-\sqrt{61}}{2}=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$

$x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{61}}{2}}$

$|x-1| = x^2-x-1 \rightarrow |x-1|+1 = x^2-x$

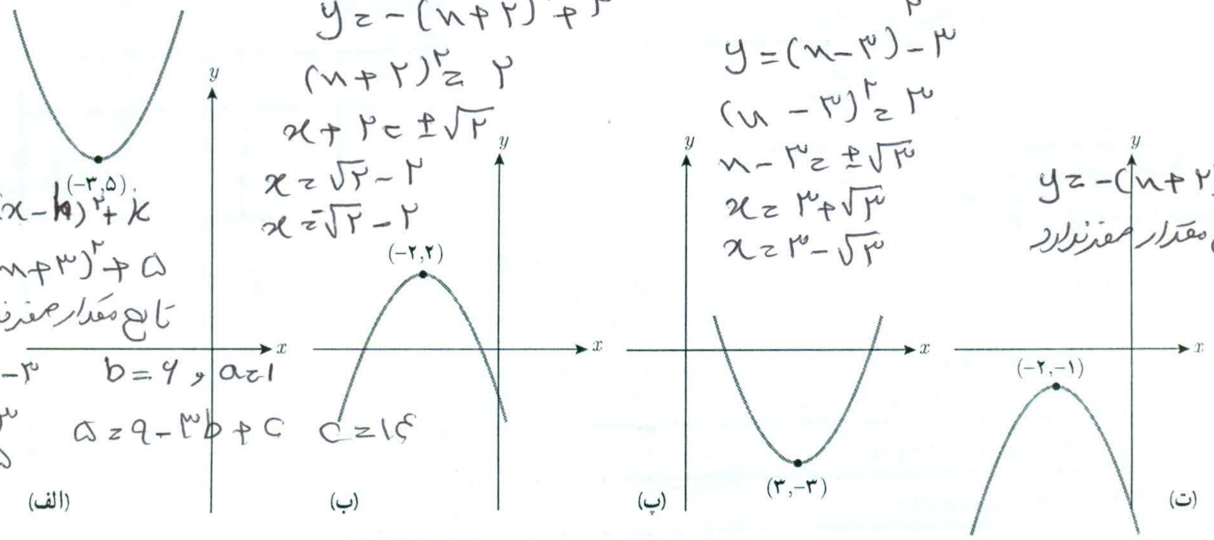
$\begin{cases} f(x)=|x-1|+1 \\ g(x)=x^2-x \end{cases}$



معادله دارای دو ریشه می باشد یکی ۲ و دیگری تقریبا ۱/۴

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

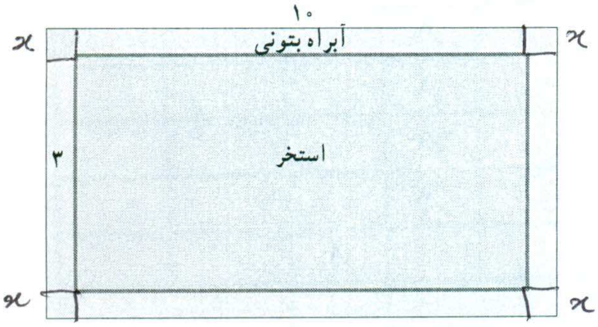


(ب):
$y=-(x+2)^2+2$
$(x+2)^2=2$
$x+2=\pm\sqrt{2}$
$x=\sqrt{2}-2$
$x=-\sqrt{2}-2$

(پ):
$y=(x-3)^2-3$
$(x-3)^2=3$
$x-3=\pm\sqrt{3}$
$x=3+\sqrt{3}$
$x=3-\sqrt{3}$

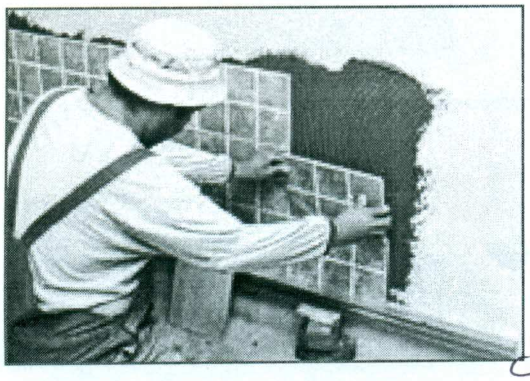
(ت):
$y=-(x+2)^2-1$
تابع مقدار صفر ندارد

(الف):
$y=a(x-h)^2+k$
$y=(x+3)^2+5$
تابع مقدار صفر ندارد
$-\frac{b}{2a}=-3 \quad b=6,\ a=1$
$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases} \quad 5=9-3b+c \quad c=14$

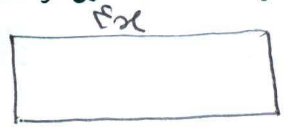


۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$4x^2+20x+6x=14$
$4x^2+26x-14=0$
$2x^2+13x-7=0$
$\Delta=169+56=225$
$x=\frac{-13+15}{4}=\frac{1}{2}$ ق‌ق $\quad x=\frac{-13-15}{4}=-7$ غ‌ق‌ق



۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟



$21m^2 = 210000\ cm^2$
۲۰۰۰ عدد کفپوش

کف‌پوش $S=x(4x+1)$
$S=4x^2+x$
$2000S=2000(4x^2+x)$
$8000x^2+2000x=210000$
$8x^2+2x-210=0$
$4x^2+x-105=0$
$\Delta=1+16(105)=1681$
$x_1=\frac{-1+41}{8}=5$ ق‌ق
$x_2=\frac{-1-41}{8}=-\frac{42}{8}=-\frac{21}{4}$

درس ۳
معادلات گویا و گنگ

معادلاتِ شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازهٔ کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازهٔ کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد : $۲۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=۸$ کیلوگرم

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک x+۸ و وزن کل محلول x+۲۰۰ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود :

$$\frac{x+۸}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $۱۰۰(۲۰۰+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰۰(x+۸)=۷(۲۰۰+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت : $۹۳x=۶۰۰$ و در نتیجه $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به‌دست آید.

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $۷(۲۰۰-y)=۸۰۰$ و از آنجا $y=\frac{۶۰۰}{۷}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کار در کلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

وزن نمک $۸+۵=۱۳$

وزن کل محلول $۲۰۰+۵=۲۰۵$

$\frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$ $\quad ۱۴۳۵-۷y=۱۳۰۰$

$y=\frac{۱۳۵}{۷}=۱۹,۲۹$

برای حل معادلاتِ شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال : معادله $\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$ را حل کنید.

حل : کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^۲-۴)$ است. (چرا؟)

با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم :

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)$$
$$۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$
$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۲$$

البته جواب $x=-۲$ مورد قبول نیست. (چرا؟) چون مخرج کسر را صفر می‌کند

۲) ابتدا با یک مساله ساده‌تر جواب را بدست می آوریم فرضاً محیط زمین ۲ متر باشد سپس جواب را در ۱۶۰ ضرب می کنیم تا جواب مساله اصلی بدست آید

$$2L+2w=2 \rightarrow L+w=1 \rightarrow L=1-w$$

$$\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L} \rightarrow \frac{1-w}{w}=\frac{1}{1-w}$$

$$(1-w)^2=w \rightarrow w^2-3w+1=0 \qquad w_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \text{غق} \qquad w_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \text{قق}$$

$$L=1-w=1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

کار در کلاس

عرض $160 \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}=240-80\sqrt{5}$

طول $160 \times \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-80+80\sqrt{5}$

۱ معادله $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}=3$ را حل کنید.

ابتدا دو طرف در $(x-2)^2$ ضرب می کنیم

$$1+2(x-2)=3(x-2)^2 \rightarrow 1+2x-4=3x^2-12x+12$$

$$3x^2-14x+15=0 \qquad \frac{1}{3}(3x-9)(3x-5)=0$$

$$\begin{cases} 3x=9 & x=3\ \text{قق} \\ 3x=5 & x=\frac{5}{3}\ \text{قق} \end{cases}$$

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$
آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

بالای صفحه

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

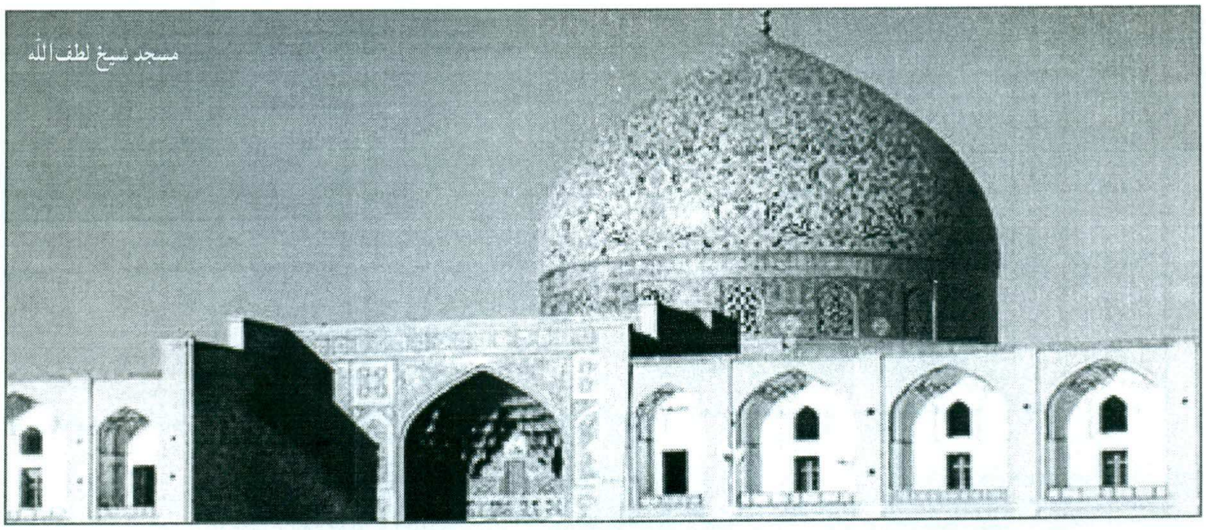
در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبهٔ بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

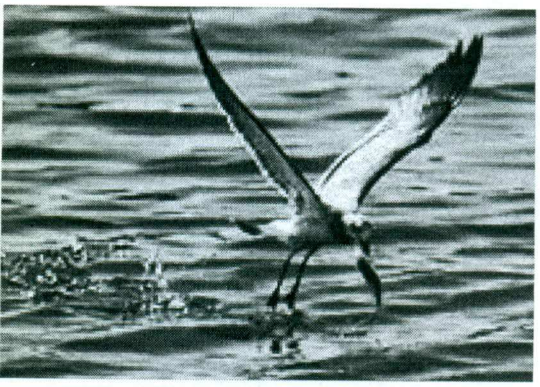
در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

منبع : مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲



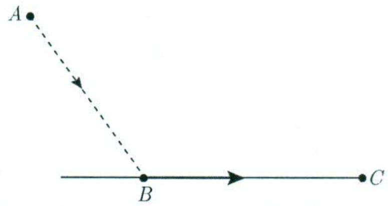
مسجد شیخ لطف‌الله

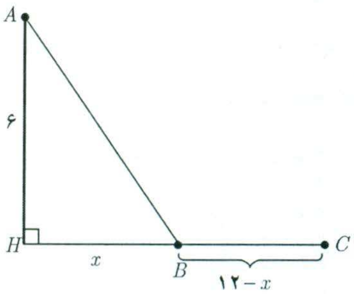
معادلات شامل عبارت‌های گنگ



طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟





حل: برای درک بهتر صورت‌مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $۱۲-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{۳۶+x^۲}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با: $۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۰(۱۲-x)$

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم:

$$۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۲۰-۱۰x=۱۸۰ \Rightarrow ۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}=۱۰x+۶۰$$
$$۷\sqrt{۳۶+x^۲}=۵x+۳۰$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $۲x^۲-۲۵x+۷۲=۰$ می‌رسیم که از آنجا $x=۸$ و $x=۴/۵$. در این‌صورت فاصلهٔ B تا C برابر $۱۲-۸=۴$ یا $۱۲-۴/۵=۷/۵$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟ $AC=\sqrt{۳۶+۱۴۴}=\sqrt{۱۸۰}=۶\sqrt{۵}$

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

$۶\sqrt{۵}\times۱۴=۱۸۷/۸۳=$ مقدار کالری

$x_{min}=۶/۱۱۵۷$ و

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان‌رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال : معادله $\sqrt{x+۲}=x-۴$ را حل کنید.

حل :

$$(\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲$$
$$x+۲=x^۲-۸x+۱۶$$
$$x^۲-۹x+۱۴=۰$$
$$(x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ و } x=۷$$

آزمایش جواب‌ها

$x_۲=۷ : \sqrt{۷+۲}\overset{?}{=}۷-۴$

$۳=۳ \quad \checkmark$

جواب معادله است

$x_۱=۲ : \sqrt{۲+۲}\overset{?}{=}۲-۴$

$۲\neq-۲ \quad \times$

جواب مسئله نیست

بنابراین $x=۷$ تنها جواب معادله است.

تذکر : در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به‌دست آوردن دامنه تعریف داریم :

$$\begin{cases} x+۲\geq۰ \Rightarrow x\geq-۲ \\ x-۴\geq۰ \Rightarrow x\geq۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x\geq۴$$

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$x+\sqrt{x}=۶ \qquad \sqrt{x}=۶-x \qquad (\sqrt{x})^۲=(۶-x)^۲$

$x=۳۶-۱۲x+x^۲ \qquad x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \qquad (x-۴)(x-۹)=۰ \begin{cases} x=۴ \text{ قابق} \\ x=۹ \text{ غیرقابق} \end{cases}$

۲ معادله $\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟ هنگامی مجموع دو عبارت نامنفی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند

$\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰ \begin{cases} x^۲-۴=۰ \quad x^۲=۴ \quad x=\pm۲ \\ x=۰ \end{cases}$

جواب مشترک وجود نداشته در نتیجه جواب ندارد

(۹

v_1 سرعت رفت t_1 زمان رفت

v_2 سرعت بازگشت t_2 زمان برگشت

$v_2 = v_1 - 8 \qquad t_1 + t_2 = 17 - 2 = 15 \qquad t_1 = \frac{144}{v_1} \qquad t_2 = \frac{144}{v_1 - 8}$

$t_1 + t_2 = \frac{144}{v_1} + \frac{144}{v_1 - 8} = 15$ → $v_1 = 24$ ق ق ، $v_1 = -3/2$ غ ق ق

$144(v_1 - 8) + 144 v_1 = 15 v_1 (v_1 - 8)$

~~$144 v_1 - 8 \times 144 + 144 v_1 = 15 v_1^2 - 15 \times 8 v_1$~~

$5 v_1^2 - 136 v_1 + 384 = 0$

$15 v_1^2 - 408 v_1 + 1152 = 0 \rightarrow 5 v_1^2 - 136 v_1 + 384 = 0$ صفحه بعد

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$ **۲** $\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$ **۳** $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

۴ $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$ **۵** $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - x$ **۶** $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

۷ $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x قیمت y تعداد

$xy = 120 \qquad (x-1)(y+4) = 120 \qquad 120 + 4x - y - 4 = 120 \qquad y = 4x - 4$

$\begin{cases} xy = 120 \\ y = 4x - 4 \end{cases} \qquad x(4x-4) = 120 \qquad 4x^2 - 4x - 120 = 0 \qquad x^2 - x - 30 = 0 \qquad \begin{cases} x = 6 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۶۰۰۰ قیمت قبل تخفیف

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ بالای صفحه

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رودخانه اروند (استان خوزستان)

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{18}$

$18(x-15) + 18x = x(x-15)$

$x^2 - 51x + 270 = 0$

$(x-45)(x-6) = 0$ → $\begin{cases} x = 45 \\ x = 6 \end{cases}$ $x - 15 = 30$ ، $x - 15 = -9$ غ ق ق (۱۰

1) $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x}{x+1} \xrightarrow{x(x+1)} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x)$

$6x + 6 = 2x^2 + 2x + x^2 \rightarrow 3x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad \Delta = 16 + 72 = 88$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2\sqrt{22}}{6}$ $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{22}}{3} & \text{ق ق} \\ x = \frac{2-\sqrt{22}}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

2) $\frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = 5 \xrightarrow{p(2-p)} p(p) + 2(2-p) = 5p(2-p)$

$\rightarrow p^2 + 4 - 2p = 10p - 5p^2 \rightarrow 6p^2 - 12p + 4 = 0 \rightarrow 3p^2 - 6p + 2 = 0$

$\Delta = 36 - 24 = 12 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$ $\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} & \text{ق ق} \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

3) $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

$\xrightarrow{y(y+5)} 3y + 5 + y(y+4) = (y+1)(y+5)$

$3y + 5 + y^2 + 4y = y^2 + 6y + 5 \longrightarrow y = 0$ غ ق ق

4) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \rightarrow 4x = 3x + 4 \quad x = 4$ ق ق

$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - x \rightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = 1 - \sqrt{x}$

$(1-x) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$

$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = 0$

$(1-\sqrt{x})\left[(1+\sqrt{x})^2 - 1\right] = 0$ $\begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 0 & \sqrt{x} = 1 & x = 1 \text{ ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = 0 & (1+\sqrt{x})^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + \sqrt{x} = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \quad x = 0 \\ 1 + \sqrt{x} = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \end{cases}$ جواب حقیقی ندارد

6) $\frac{1}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$\cancel{\sqrt{x}} - 2 = 2(x-4) + \cancel{\sqrt{x}} + 2 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$ ق ق

1) $3\sqrt{3x+1} = 8 - \sqrt{x+3} \qquad (3\sqrt{3x+1})^2 = (8 - \sqrt{x+3})^2$

$9(3x+1) = 64 - 16\sqrt{x+3} + x + 3 \rightarrow 16\sqrt{x+3} = 58 - 26x$

$8\sqrt{x+3} = 29 - 13x \longrightarrow (8\sqrt{x+3})^2 = (29 - 13x)^2 \qquad 64(x+3) = 841 - 754x + 169x^2$

$169x^2 - 818x + 649 = 0$ $\begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = \frac{649}{169} = 3.84 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

درس ۴

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq ۰ \\ -a & , \quad a < ۰ \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-۵-(-۳)| = |-۲| = ۲$

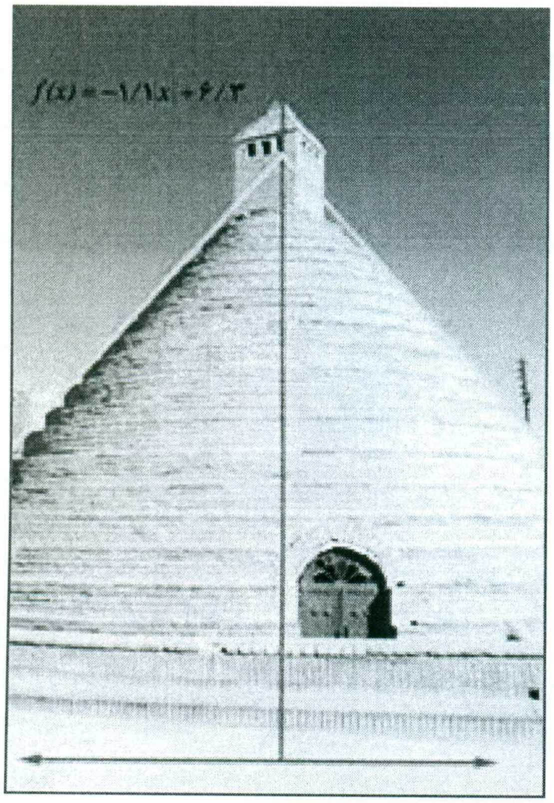
ب) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| = -(\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

پ) $\left|۱/۵-۱\frac{۱}{۲}\right| = |۰| = ۰$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱} = \sqrt{(a^۲+۱)^۲} = |a^۲+۱| = a^۲+۱$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^۲} = |\sqrt{۳}-۲| = -(\sqrt{۳}-۲) = ۲-\sqrt{۳}$

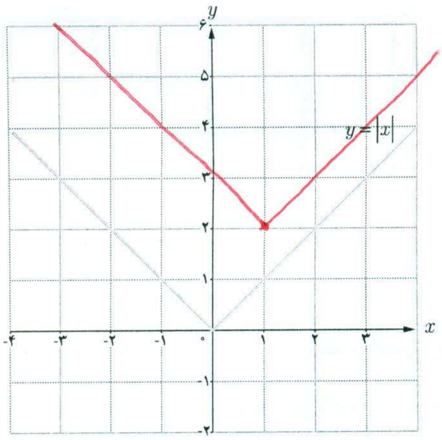


آب انبار - روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلقی

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-۱|+۲$ را رسم کنیم.



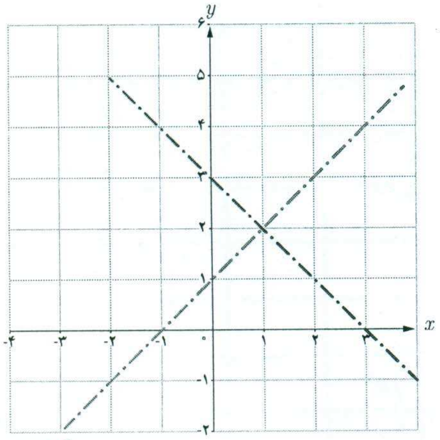
شکل (۱)

روش اول : با توجه به نمودار $y=|x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

روش دوم : گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|x-۱|+۲=\begin{cases} x-1+2 & , \; x\geq ۱ \\ -x+1+2 & , \; x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ -x+3 & x<1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.


شکل (۲)

✤ **مثال :** نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$ را رسم کنید.

✤ **حل :** در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y=|x|$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-۲		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$x+۲$	$-$	$\circ$	$+$		$+$

$f(x)=(x-۱)+(x+۲)=۲x+۱$

$f(x)=-(x-۱)+(x+۲)=۳$

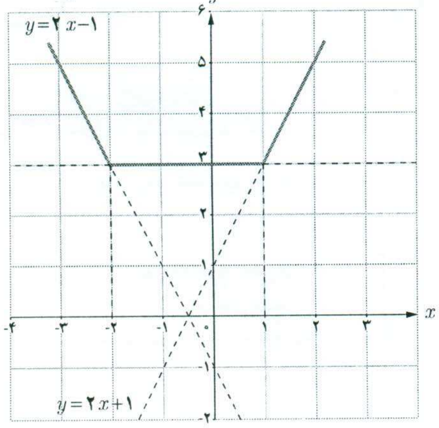
$f(x)=-(x-۱)-(x+۲)=-۲x-۱$

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۱ & , \; x<-۲ \\ ۳ & , \; -۲\leq x\leq ۱ \\ ۲x+۱ & , \; x>۱ \end{cases}$$

$\begin{array}{c|cc} & -2 & -3 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$

$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$

نمودار تابع از سه قسمت که هریک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).



شکل (۳)

ویژگی‌های قدر مطلق

در سال‌های قبل با برخی از ویژگی‌های قدر مطلق آشنا شده‌اید که عبارت‌اند از :

الف) $|x| \geq 0$ ‏ ‏ ‏ ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \iff x = a$ یا $x = -a$ ‏ $(a \geq 0)$ ‏ ‏ ت) $|x| = |a| \iff x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$ ‏ ‏ ‏ ج) $|x|^2 = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که : $|ab| = |a|\,|b|$

$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

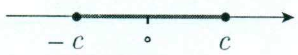
$|a| = \left|\frac{a}{b} \times b\right| = \left|\frac{a}{b}\right||b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

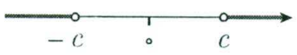
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, \ (c \neq 0)$ ‏ ‏ (۱)



ب) $|x| > c$ ‏ ‏ (۲)

پ) $|x| \leq c$ ‏ ‏ (۳)



ت) $|x| \geq c$ ‏ ‏ (۴)

۲

$\begin{cases} x \geq 0 \to |x| = x \to -|x| \leq x \\ x < 0 \to |x| = -x \to x \leq |x| \end{cases} \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که : $-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$

۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a| + |b|$

۳

۴

$$\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \quad + \\ \hline -|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b| \end{cases}$$

۴

$$\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \quad + \\ \hline -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \end{array}$$

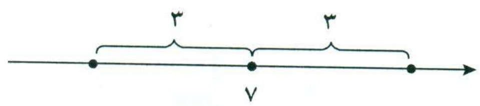
$\rightarrow |a+b| \leq ||a|+|b||$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

معادلات قدر مطلقی

حل یک مسئله

بر روی محور اعداد حقیقی فاصلهٔ چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟



برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.

اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-۳|=۷$. با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق خواهیم دانست $x-۳=\pm۷$، و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=-۴$؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

> جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

مثال: معادله $|x-۴|=|۳x-۲|$ را حل کنید.

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق: جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادلهٔ $۳x-۲=x-۴$ و $۳x-۲=-(x-۴)$ هستند که، به ترتیب، عبارت‌اند از:

$x=-۱$ و $x=\frac{۳}{۲}$

روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^۲-۸x+۱۶=۹x^۲-۱۲x+۴$؛ و از آنجا $۲x^۲-x-۳=۰$. جواب‌های این معادله -۱ و $\frac{۳}{۲}$ هستند.

کار در کلاس

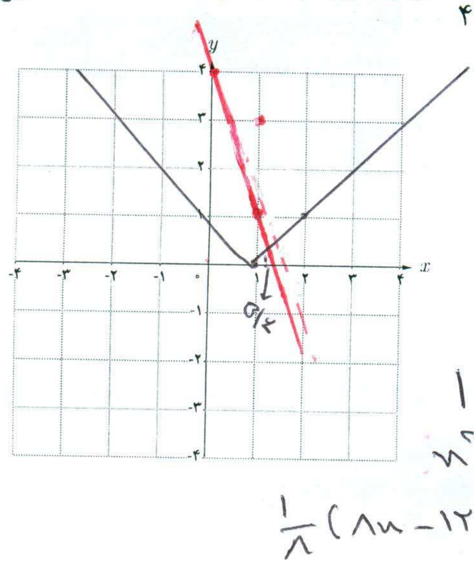
معادله قدر مطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را به سه روش زیر حل کنید.

۱ **روش اول:** (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-۱|=\begin{cases} x-1, & x\geq ۱ \\ -x+1, & x<۱ \end{cases}$$

حالت اول: $x\geq۱ \Rightarrow x-۱=۴-۳x \Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$ ، حالت دوم: $x<۱ \Rightarrow$ .... ، مجموعه جواب = $\{\frac{۵}{۴}\}$

$-x+1=۴-۳x$ $۲x=۳$ $x=\frac{۳}{۲}$ غ‌ق‌ق



۲ **روش دوم:** (روش هندسی)

الف) توابع $y=|x-۱|$ و $y=۴-۳x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x=\frac{۵}{۴}$

پ) جواب‌های معادله را به‌دست آورید. $x=\frac{۵}{۴}$

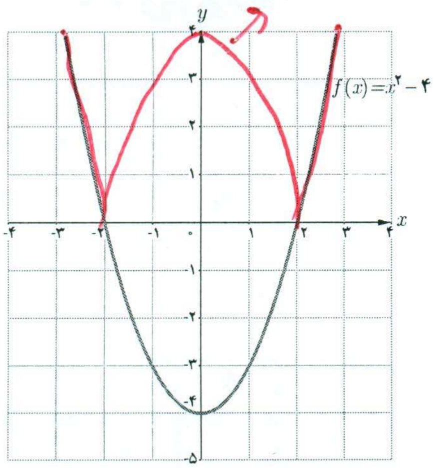
۳ **روش سوم:** (به توان رساندن طرفین)

$|x-1|=\underbrace{۴-۳x}_{\geq ۰}$ $|x-1|^2=(۴-۳x)^2$

$x^2-2x+1=16-24x+9x^2 \rightarrow 8x^2-22x+15=0$

$\frac{1}{8}(8x-12)(8x-10)=0 \begin{cases} 8x=12 & x=\frac{3}{2} \text{ غ‌ق‌ق} \\ 8x=10 & x=\frac{5}{4} \text{ ق‌ق} \end{cases}$

فعالیت



در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x)=x^2-4$ آمده است.

۱ با توجه به علامت عبارت x^2-4 و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y=|x^2-4|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۲ نمودار $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.

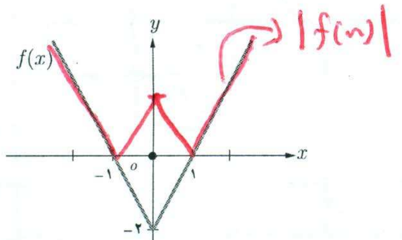
۳ تابع $y=|f(x)|$ را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} x^2-4 & , f(x)\geq 0 \\ 4-x^2 & , f(x)<0 \end{cases}$$

۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$ بیان کنید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

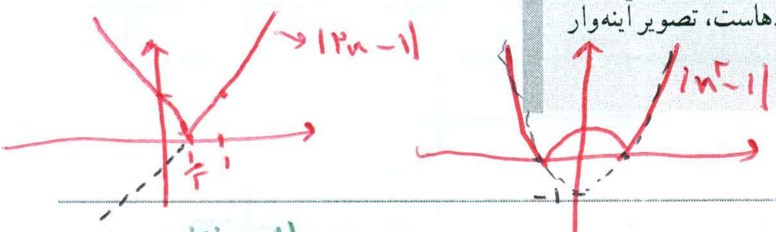
۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y=|f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنید.



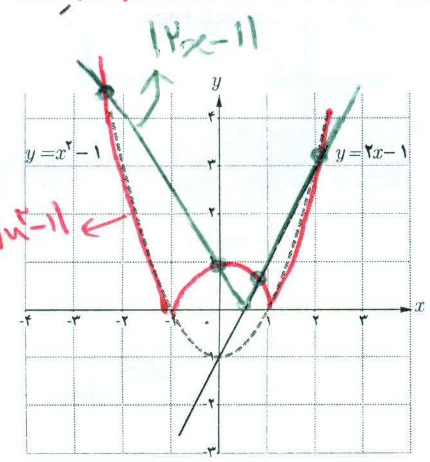
با توجه به فعالیت بالا :

۱ نمودار $y=-f(x)$ قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها‌ست.

۲ برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xهاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.



کار در کلاس



۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y=|2x-1|$ و $y=|x^2-1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x^2-1|=|2x-1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادلهٔ $|x^2-1|=|2x-1|$ را حل کنید.

$|x^2-1|=|2x-1|=$

حالت اول: $x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

حالت دوم: $x^2-1=-(2x-1) \Rightarrow ... x^2+2x-2=0 \quad \Delta=12$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}\rightarrow\begin{cases} x=-1+\sqrt{3}\simeq 0/73 \\ x=-1-\sqrt{3}\simeq -2/73 \end{cases}$$

۳) الف) $|x-3|=7$

$x=3-7=-4 \qquad x=3+7=10$

$|x-3|=7 \begin{cases} x-3=7 & x=10 \\ x-3=-7 & x=-4 \end{cases}$

ب) $x=6-2=4 \qquad x=6+2=8$

$2|x-6|=4 \rightarrow |x-6|=2$

$|x-6|=2 \begin{cases} x-6=2 & x=8 \\ x-6=-2 & x=4 \end{cases}$

ج) $x<-5 \qquad x>-1$

$|x+3|>2$

$\begin{cases} x+3>2 \rightarrow x>-1 \\ x+3<-2 \rightarrow x<-5 \end{cases}$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$ $= \begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

ب) $g(x)=|x^2-1|$ $= \begin{cases} x^2-1 & x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1<x<1 \end{cases}$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$ $\begin{cases} -x+(-x-1)=-2x & x\leq -1 \\ -x+1+x+1=2 & -1<x<1 \\ x-1+x+1=2x & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x & x\leq -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

$|x+1|+|x-3|=6 \qquad x=-1,\ x=3$

$\begin{cases} -2x+2 & x\leq -1 \rightarrow -2x+2=6 \quad -2x=4 \rightarrow x=-2 \text{ ق ق} \\ 4 & -1<x<3 \\ 2x-2 & x\geq 3 \rightarrow 2x-2=6 \quad 2x=8 \quad x=4 \text{ ق ق} \end{cases}$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. بالای صفحه

ب) دو برابر فاصله بین x و۶ برابر ۴ است. بالای صفحه

پ) فاصله بین x و ۳− بزرگ‌تر از ۲ است. بالای صفحه

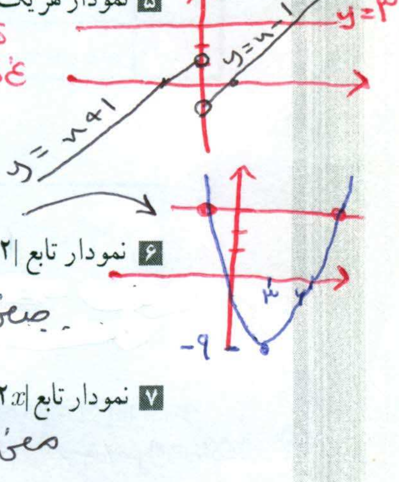
۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{2-x}{|x-3|}=1$ $\xrightarrow{x\neq 3} |x-3|=2-x \begin{cases} x-3=2-x \rightarrow 2x=5 \quad x=\frac{5}{2} \text{ غ ق ق} \\ x-3=x-2 \rightarrow -3=-2 \text{ غ ممکن} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$ $\quad \sqrt{(x-1)^2}=2x+1 \quad |x-1|=2x+1$

$\begin{cases} x-1=2x+1 \rightarrow x=-2 \text{ غ ق ق} \\ x-1=-2x-1 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0 \text{ ق ق} \end{cases}$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.



الف) $y=x-\dfrac{x}{|x|}$ $\begin{cases} x-\frac{x}{x}=3 & x>0 \\ x-\frac{x}{-x}=3 & x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \text{ ق ق} \\ x+1=3 \rightarrow x=2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

ب) $y=x^2-6x$ $\quad x^2-6x=3 \quad x^2-6x-3=0 \quad \Delta=48$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6\pm4\sqrt{3}}{2}=3\pm2\sqrt{3} \begin{cases} x=3+2\sqrt{3}\simeq 6{,}46 \\ x=3-2\sqrt{3}\simeq -0{,}46 \end{cases}$

۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

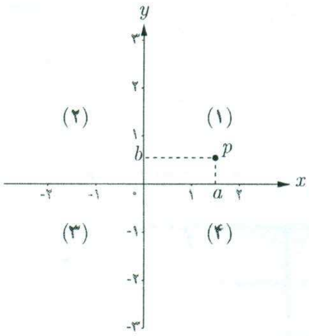
صفحه بعد

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید.

صفحه بعد

درس ۵

آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

به هر نقطه P در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب $(a\ ,b)$ نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم.

در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

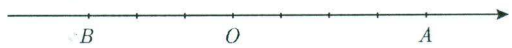
فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O، نقطهٔ متناظر ۴ را با A و نقطهٔ متناظر ۳- را با B مشخص کرده‌ایم؛

خواندنی

هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به‌وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند.
بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند.
این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

۱ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟ $|OA|=۴$ $|OB|=۳$



۲ طول پاره‌خط BA چقدر است؟ $|AB|=۷$

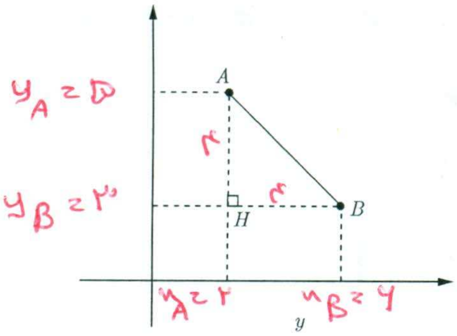
۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با ۴ و (۳-) از یکدیگر چقدر است؟ ۷

۴ بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟

$|AB|=|x_B-x_A|=|x_A-x_B|$

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به‌صورت $|AB|=|x_B-x_A|$ تعریف می‌کنیم.

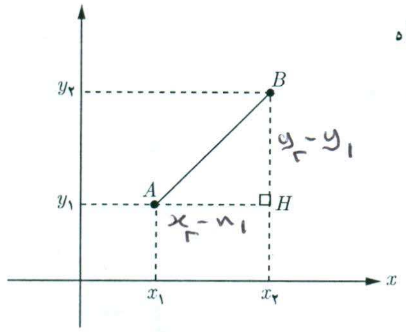
فعالیت



۱ دو نقطه $A(2,5)$ و $B(6,3)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید :

الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه AHB ($\hat{H}=90^\circ$) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.



۲ در شکل روبه‌رو، اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

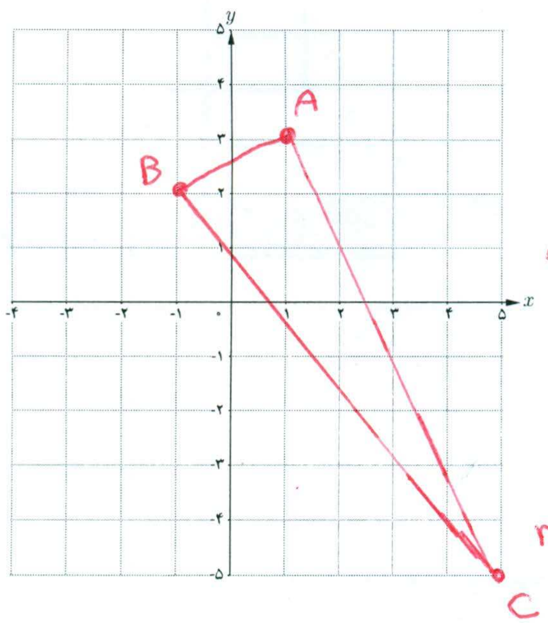
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

کار در کلاس



سه نقطهٔ $A(1,3)$، $B(-1,2)$ و $C(5,-5)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $\quad AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$

$BC = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$BC^2 = AC^2 + BC^2 \quad 85 = 80 + 5$ ✓

رابطه فیثاغورث برقرار مثلث قائم الزاویه است

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.

چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-3}{-1-1} = \dfrac{1}{2}$

$m_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-5-3}{5-1} = -2$

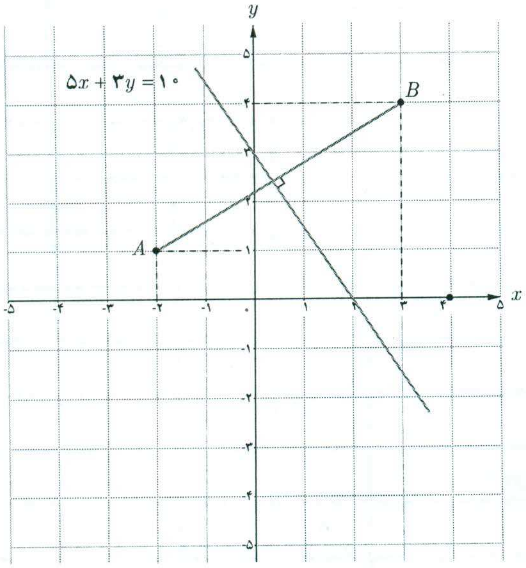
$m_{AB} \times m_{AC} = \dfrac{1}{2} \times -2 = -1$

شیبها معکوس و قرینه یکدیگرند دو خط بر هم عمودند

✤ **مثال :** در شکل زیر، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.

✤ **حل :** عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x,y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت :

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۴)^۲}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم :

$$5x+3y=10$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم‌فاصله‌اند برقرار است، بنابراین، معادلهٔ عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{۳}{۵}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $\frac{-۵}{۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

شیب‌ها قرینه و معکوس یکدیگرند

به‌طور کلی :
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm'=-1$ و برعکس.

کار در کلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

روش اول

$PA=\sqrt{۱۸^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۴۰}$ → $PA=PB$

$PB=\sqrt{۱۲^۲+۱۴^۲}=\sqrt{۳۴۰}$

چون فاصله P از دو سر A و B به یک فاصله است بنابراین P روی عمودمنصف AB قرار دارد

روش دوم

M وسط AB $\left|\begin{array}{l}\frac{۶+۰}{۲}=۳\\ \frac{۱۵-۳}{۲}=۶\end{array}\right.$ $m_{AB}=\frac{۱۸}{۶}=۳$ $\quad m_{\text{عمودمنصف}}=-\frac{۱}{۳}$

$y-۶=-\frac{۱}{۳}(x-۳) \rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+۷$

$P\left|\begin{array}{l}-۱۲=x\\ ۱۱=y\end{array}\right.$ $\quad ۱۱=-\frac{۱}{۳}(-۱۲)+۷ \rightarrow ۱۱=۴+۷$ ✓ P روی عمودمنصف AB است

روش سوم

$m_{PM}=\frac{۶-۱۱}{۳-(-۱۲)}=-\frac{۱}{۳}$ $\quad m_{AB}=\frac{۱۵-(-۳)}{۶}=۳$

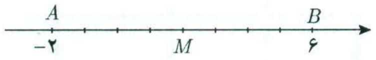
$m_{AB}\times m_{PM}=-1 \longrightarrow PM \perp AB$

PM عمودمنصف AB است

مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره‌خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟ $x_M = ۲$



۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟ طول نقطه M میانگین طول نقطه‌های A و B است

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول‌های نقاط A و B به‌دست آورید.

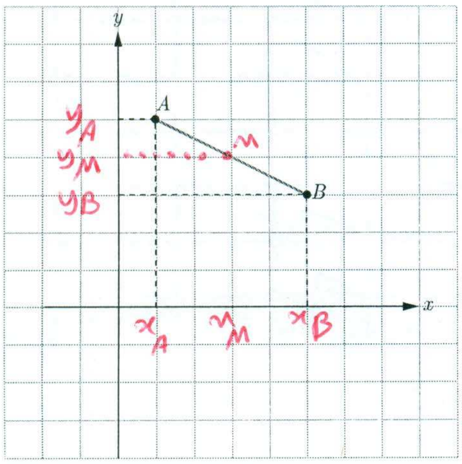
$AM=MB$

$x_M - x_A = x_B - x_M$ $\quad 2x_M = x_A + x_B \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$

۴ اگر A و B روی محور yها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می‌توان بیان کرد؟

$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$

کار در کلاس



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط این پاره‌خط باشد :

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

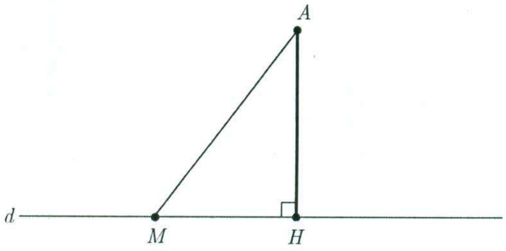
$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۵}{۲} = ۳$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴$

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

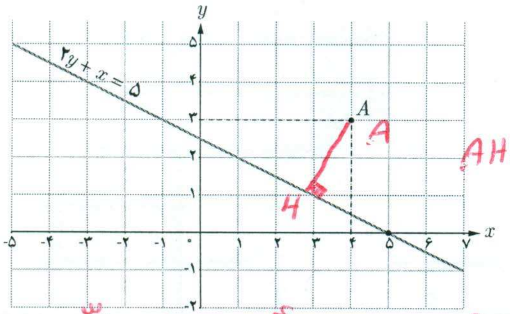


اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.

بنابراین برای به‌دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $۲y+x=۵$ و نقطه $A(۴,۳)$ داده شده است.



۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به‌دست آورید. $AH \perp d \rightarrow m_d \times m_{AH} = -1$

۳ شیب AH را به‌دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به‌دست آورید.

$m_d = -\frac{۳}{۴}$ $\quad m_{AH} = \frac{۴}{۳}$ $\quad y - ۵ = \frac{۴}{۳}(x-۲)$ $\quad ۳y - ۱۵ = ۴x - ۸$

۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.

$\rightarrow ۴x - ۳y = -۷$ معادله AH

به‌طورکلی اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ را به‌دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با :

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.[1]

۱ــ از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱۲ \\ ۴x - ۳y = -۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{۸}{۲۵} \\ y = \frac{۴۹}{۲۵} \end{cases}$$

$$AH = \sqrt{(۴ - \frac{۸}{۲۵})^۲ + (۵ - \frac{۴۹}{۲۵})^۲} = \sqrt{\frac{۱۷۶۴ + ۳۱۳۶}{۲۵^۲}} = \frac{۷۰}{۲۵} = ۲٫۸$$

مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۴)$ از خط $y=\frac{۴}{۳}x+۴$ را به‌دست آورید.

حل : ابتدا معادله خط را به‌صورت $۴x-۳y+۱۲=۰$ می‌نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطهٔ A تا خط d را AH فرض می‌کنیم و داریم :

$$AH=\frac{|۴(-۲)-۳(۴)+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸|}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

مثال : فاصله نقطه $A(۱,-۴)$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل : ابتدا معادله خط را به‌صورت $۸x+۶y-k=۰$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم :

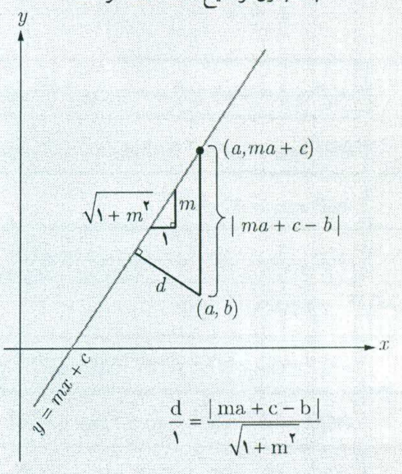
$$AH=\frac{|۸(۱)+۶(-۴)-k|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}\Rightarrow ۴=\frac{|-۱۶-k|}{۱۰}\Rightarrow |-۱۶-k|=۴۰$$

$$-۱۶-k=۴۰\Rightarrow k=-۵۶$$

$$-۱۶-k=-۴۰\Rightarrow k=۲۴$$

خواندنی

اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط

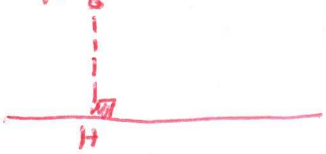


$$\frac{d}{1}=\frac{|ma+c-b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

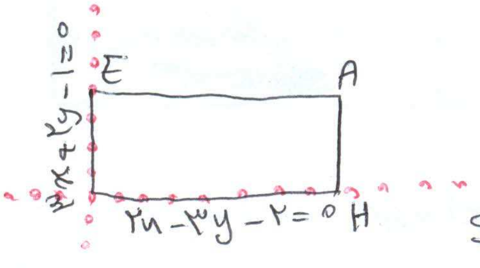
کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$AH: \frac{|۳(۲)-۴(۳)-۹|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}}\Rightarrow ۳ \quad S=۳\times۳=۹$



۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟



$AH=\frac{|۲(۲)-۳(۵)-۳|}{\sqrt{۲^۲+۵^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}$

$AE=\frac{|۳(۲)-۲(۵)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}$

$S=AH\times AE=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}=۱۵$

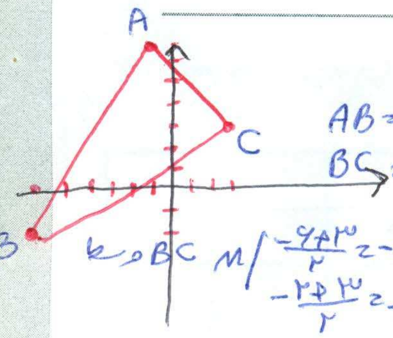
ت)

$m_{BC}=\frac{5}{9}$ $C\begin{vmatrix}3\\3\end{vmatrix}$ $y-3=\frac{5}{9}(x-3)$ $9y-27=5x-15$

معادله BC $5x-9y+12=0$

$AH=\frac{|5(-1)-9(7)+12|}{\sqrt{5^2+9^2}}=\frac{56}{\sqrt{106}}$

تمرین



۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1,7)$ و $B(-6,-2)$ و $C(3,3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

$AB=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$

$BC=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}$ $\rightarrow AB=BC$

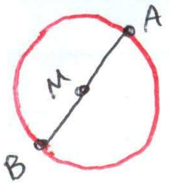
ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

وسط BC $M\left|\begin{array}{l}\frac{-6+3}{2}=-\frac{3}{2}\\ \frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $m_{BC}=\frac{-2-3}{-6-3}=\frac{5}{9}$ $m_{عمود}=-\frac{9}{5}$ $y-\frac{1}{2}=-\frac{9}{5}(x+\frac{3}{2})$

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

بالای صفحه



۲ $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

وسط AB $M\left|\begin{array}{l}\frac{0+8}{2}=4\\ \frac{6+(-8)}{2}=-1\end{array}\right.$ $\rightarrow M\begin{vmatrix}4\\-1\end{vmatrix}$ مرکز دایره $MA=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$ شعاع دایره

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^2-8x-20$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

$x^2-8x-20=0$ $(x-10)(x+2)=0$ $\begin{cases}x=10\\x=-2\end{cases}$ $A(-2,0)$ $B(10,0)$

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

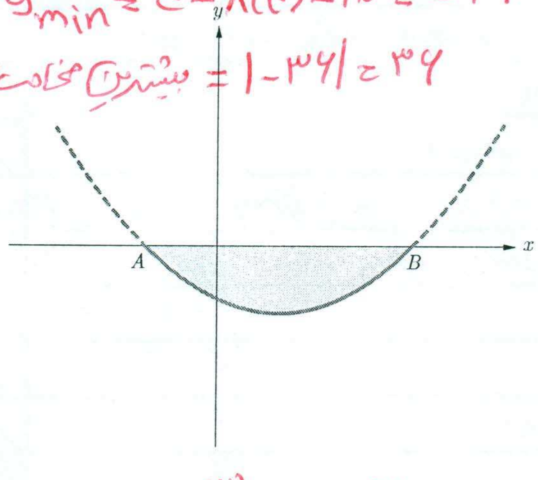
$AB=|10-(-2)|=12$

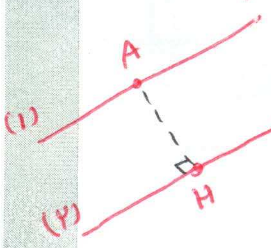
پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{2}=4$ $\rightarrow y_{min}=4^2-8(4)-20=-36$

رأس سهمی

بیشترین ضخامت عدسی $=|-36|=36$





۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ (۱) و $ax+by+c'=0$ (۲) برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

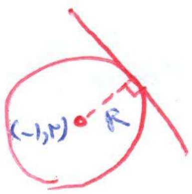
نقطه $A(x_0,y_0)$ روی خط شماره (۱) قرار دارد

$A(x_0,y_0)\rightarrow ax_0+by_0=-c$

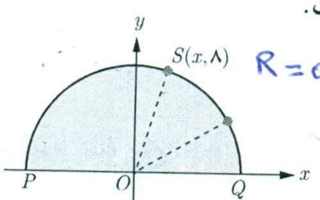
$AH=\frac{|ax_0+by_0+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۵ خط $4x+3y=5$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$R=\frac{|4(-1)+3(2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}$



۶ نقطهٔ $S(x,8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) مقدار x را به‌دست آورید. $R=OS=\sqrt{x^2+8^2}=10 \quad x^2=36 \quad x=6$

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.

$S\begin{vmatrix}6\\8\end{vmatrix} \quad P\begin{vmatrix}-10\\0\end{vmatrix} \rightarrow m_{PS}=\dfrac{0-8}{-10-6}=\dfrac{1}{2}$

$S\begin{vmatrix}6\\8\end{vmatrix} \quad Q\begin{vmatrix}10\\0\end{vmatrix} \rightarrow m_{SQ}=\dfrac{0-8}{10-6}=-2$

$m_{PS}\times m_{QS}=\dfrac{1}{2}\times -2=-1 \quad PS\perp QS$

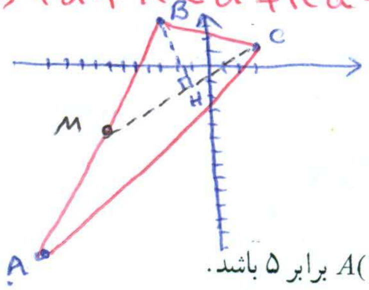
$P\hat{S}Q=90$ می

۷ اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$AH=\dfrac{|a(1)+4(2)-1|}{\sqrt{a^2+4^2}}=\dfrac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}}=2 \quad 2\sqrt{a^2+16}=|a+7| \quad (2\sqrt{a^2+16})^2=|a+7|^2$

$\rightarrow 4a^2+64=a^2+14a+49 \rightarrow 3a^2-14a+15=0 \quad \dfrac{1}{3}(3a-9)(3a+5) \quad a=3, \ a=\dfrac{5}{3}$

۸ سه رأس مثلث ABC، $C(3,1)$، $B(-3,3)$، $A(-11,-13)$ می‌باشند.



الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.

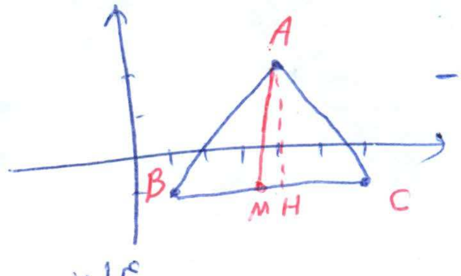
ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

جواب پایین صفحه

۹ نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.

جواب پایین صفحه

۱۰ نقاط $A(4,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(8,-2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید. جواب پایین صفحه



-۱۰

$H\begin{vmatrix}4\\-1\end{vmatrix}$

$M\begin{vmatrix}\dfrac{6+1}{2}=\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{-1+(-1)}{2}=-1\end{vmatrix} \rightarrow M\begin{vmatrix}\dfrac{7}{2}\\-1\end{vmatrix}$

$\rightarrow MH=\left|4-\dfrac{7}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

M وسط BC است

۹- نقطه M روی $y=2x$

$M\begin{vmatrix}x\\2x\end{vmatrix} \quad MO+MA=5$

$\sqrt{x^2+4x^2}+\sqrt{(x-2)^2+(2x-4)^2}=5$

$\sqrt{5x^2}+\sqrt{5(x-2)^2}=5$

$|x|+|x-2|=\sqrt{5}$

$x<0 \quad -x-x+2=\sqrt{5}$

$2x=2-\sqrt{5}$

$x=1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ق ق

$0\leq x<2 \quad x-x+2=\sqrt{5}$

$2=\sqrt{5}$ غیرممکن

$x\geq 2 \quad x+x-2=\sqrt{5}$

$\rightarrow 2x=2+\sqrt{5}$

$x=1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ق ق

$M\begin{vmatrix}1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\2-\sqrt{5}\end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix}1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\2+\sqrt{5}\end{vmatrix}$

-۸

وسط AB: $M\begin{vmatrix}\dfrac{-10-3}{2}=-\dfrac{13}{2}\\ \dfrac{-13+3}{2}=-5\end{vmatrix}$

$m_{MC}=\dfrac{1-(-5)}{3-(-\frac{13}{2})}=\dfrac{6}{\frac{19}{2}}=\dfrac{12}{19}$

$y-1=\dfrac{12}{19}(x-3)\rightarrow 19y-19=12x-36$

$\longrightarrow 12x-19y-17=0$

معادله میانه CM

$BH=\dfrac{|12(-3)-19(3)-17|}{\sqrt{12^2+19^2}}=\dfrac{110}{\sqrt{505}}$

ب) در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف هم‌اند

$\begin{cases}\dfrac{-3+x_D}{2}=\dfrac{-10+3}{2}\\ \dfrac{3+y_D}{2}=\dfrac{-13+1}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}-3+x_D=-7 & x_D=-4\\ 3+y_D=-12 & y_D=-15\end{cases}$

تابع

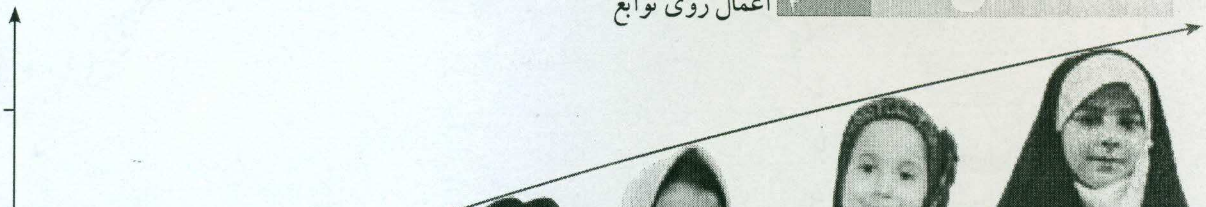
فصل ۲

۱ آشنایی بیشتر با تابع

۲ انواع توابع

۳ وارون تابع

۴ اعمال روی توابع



مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x)=7\sqrt{x}+50$ نمایش داد.

درس ۱

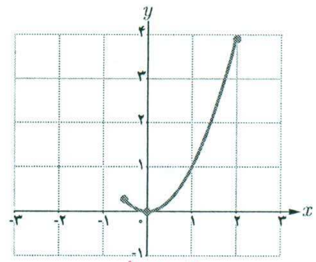
آشنایی بیشتر با تابع

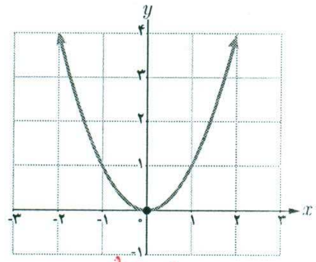
یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

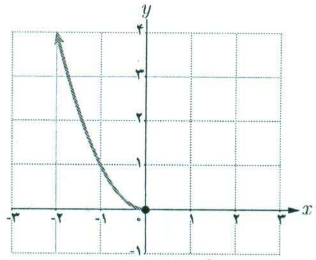
کار در کلاس

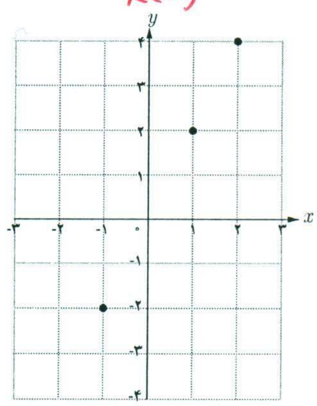
الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

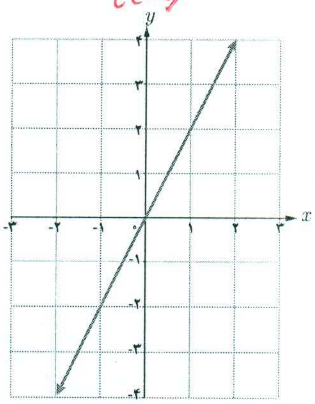
تابع	$k(x) = x^۲$	$s(x) = x^۲$	$t(x) = x^۲$	$h(x) = ۲x$	$g(x) = ۲x$	$f(x) = ۲x$
دامنه تابع	$[-\frac{۱}{۲}, ۲]$	$(-\infty, ۰]$	$\mathbb{R}$	$(-۲, ۲]$	$\{-۱, ۱, ۲\}$	$\mathbb{R}$
برد تابع	$[0, 4]$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$(-4, 4]$	$\{-2, 2, 4\}$	$\mathbb{R}$

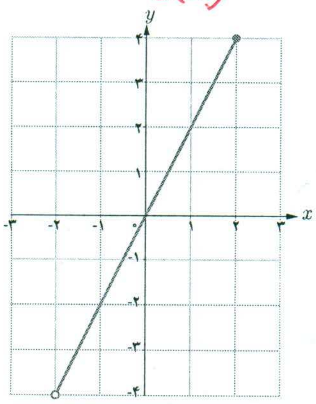

k(x)


t(x)


s(x)

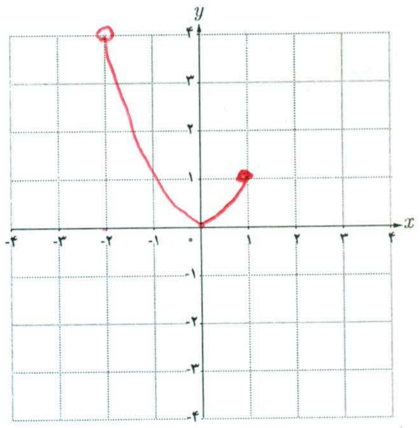

g(x)

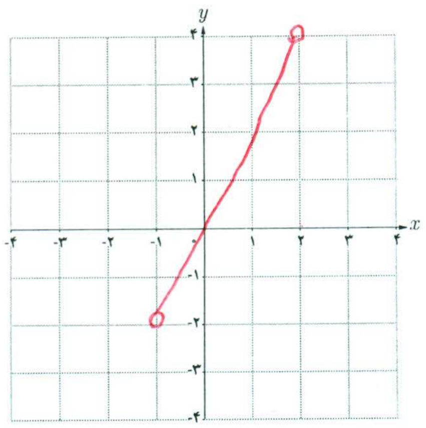

f(x)


h(x)

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟ بی‌شمار

تابع	$f(x) = ۲x$	$g(x) = x^۲$
دامنه	(۱- , ۲)	(۲- , ۱]
برد	(۲- , ۴)	(۴ , ۱]





برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الفِ کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و هم‌دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطه آن نیز $f(x)=۲x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند :

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲x \end{cases}$$

(f تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است.)

به همین ترتیب تابع h قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.

$$\begin{cases} h:(-۲,۲]\to(-۴,۴] \\ h(x)=۲x \end{cases}$$

تابع h را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.

$$\begin{cases} h:(-۲,۲]\to\mathbb{R} \\ h(x)=۲x \end{cases}$$

در هر دو نمایشِ اخیرِ تابعِ h، دامنه مجموعه $[-۲,۲)$ و ضابطه آن $h(x) = ۲x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $[-۴,۴)$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h، هم‌دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $[-۴,۴)$ است.

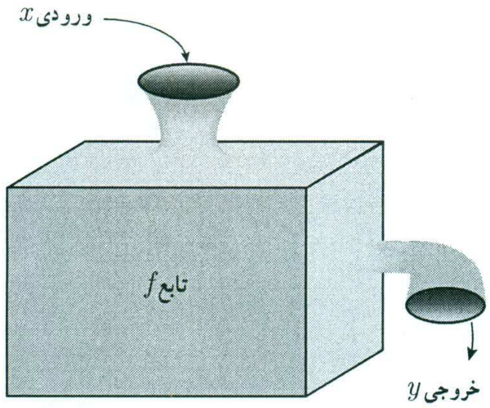
هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

کار در کلاس

برای تابع $\begin{cases} f:[\circ ,\frac{1}{3}]\to[\circ,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ ب و ت

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
$\begin{cases} f:[\circ,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ✓	$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[\circ,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$ ✗	$\begin{cases} f:[\circ,\frac{1}{3}]\to[\circ,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ✓	$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ✗

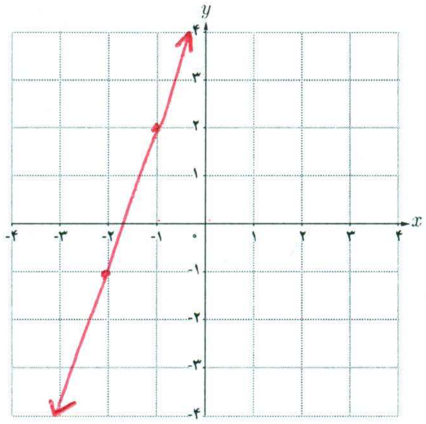
تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنهٔ f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.

در این صورت می‌نویسیم : $y=f(x)$

کار در کلاس



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی ۱۰، خروجی ۳۵ را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) ماشین به ازای ورودی ۲−، چه خروجی خواهد داشت؟ ۱−

ب) اگر خروجی ماشین ۴ باشد ورودی آن چقدر بوده است؟

$3x+5=4 \quad 3x=-1 \quad x=-\frac{1}{3}$

پ) نمایش تابع به صورت $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3x+5 \end{cases}$ است.

ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

$D=R$ برد: R

تساوی دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ‌کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند.

اگر دو تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

> دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :
>
> الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.
>
> ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

مثال : تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^{2}}$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند ولی تابع‌های $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ برابر نیستند. چرا؟ $D_f \neq D_g$

$D_g = R$ $D_f = R - \{0\}$

کار در کلاس

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f = \{(1,2), (5,7)\}$	$g = \{(1,7), (5,2)\}$	$\to f(1) \neq g(1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۲	$f = \{(a,b), (c,d)\}$	$g = \{(c,d), (a,b)\}$	$\to$ f دو برابرند
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{cases}$	$\begin{cases} g = \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 3x \end{cases}$	$\to D_f \neq D_g$
۴	$f(x) = x\|x\|$	$g(x) = x^{2}$	$\to f(-1) \neq g(-1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{8x}{2}$	$\to$ f دو برابرند

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t \in [4,12]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$4\frac{1}{2}$	۵	۶	۸	۹	$10\frac{1}{5}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	۲	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{51}{15} = \frac{17}{5}$	$\frac{11}{3}$	۴

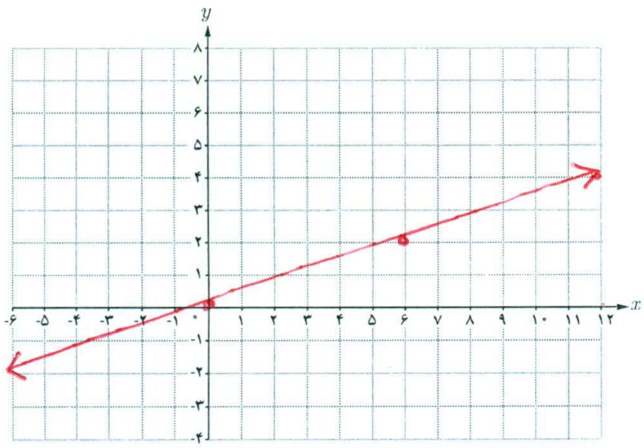
ب) چرا h تابعی از t است؟ برای هر زمان t فقط یک مقدار h وجود دارد

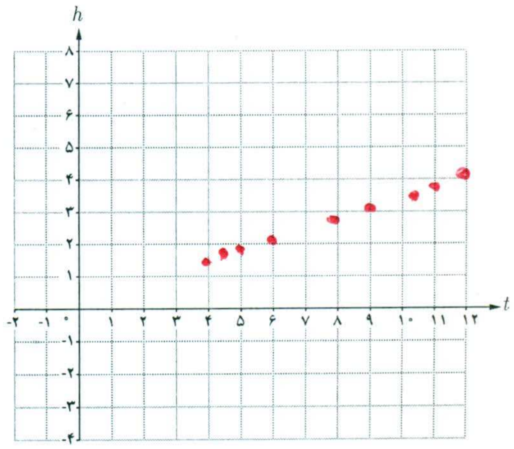
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h: [4 \quad 12] \to [\frac{4}{3} \quad 4] \\ h(t) = \frac{1}{3}t \end{cases}$$

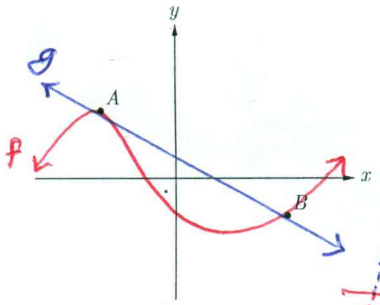
ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y=\frac{1}{3}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید. $D_h \neq D_y$ h





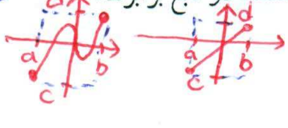
تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی‌شمار



۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. ✗ خیر مانند شکل روبرو



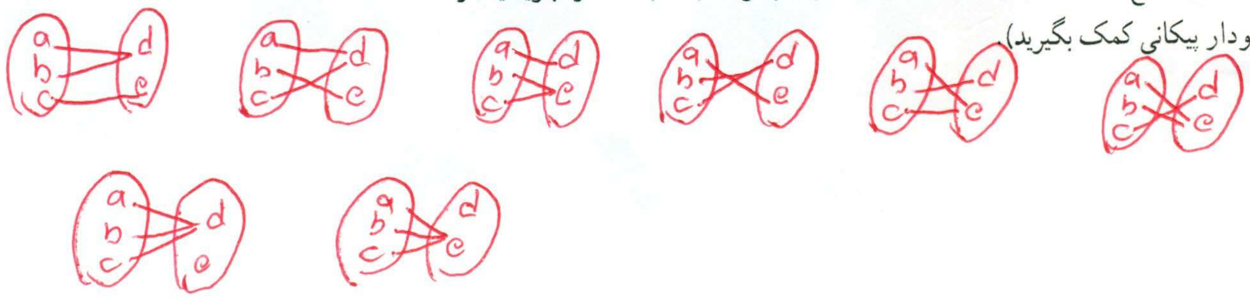
ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند. ✓

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است. ✗

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[0,3]$ است. ✓

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ بی‌شمار

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید)



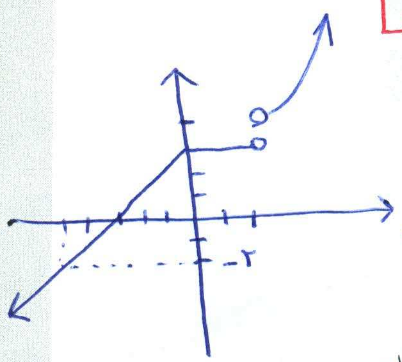
۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases} \qquad \begin{cases} r:\ [\circ, +\infty) \to \mathbb{R} \\ r(a) = ۵a \end{cases}$$

$$\begin{cases} g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = ۵x \end{cases} \qquad \begin{cases} s:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s(a) = ۵a \end{cases}$$

$$h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{cases} t:\ \mathbb{R} - \{\circ\} \to \mathbb{R} \\ t(x) = ۵x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \geq \circ \\ -x & x < \circ \end{cases}$$



۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و ۳ = $f(۲)$ و ۲- = $f(-۵)$

ب) f در بازه $[\circ, ۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۲ \\ ۳ & \circ \leq x \leq ۲ \\ x + ۳ & x < \circ \end{cases}$$

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد :

الف) $M(۳۵) = ۲/۸ \times ۳۵ + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹$

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

ب) $۱۸۵ = ۲/۸۹ \times x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

$x = \dfrac{۱۸۵ - ۷۰/۶۴}{۲/۸۹} = \dfrac{۱۱۴/۳۶}{۲/۸۹} \simeq ۳۹/۵۷\ cm$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

درس ۲

انواع توابع

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x)=\frac{5}{x+2} \qquad g(x)=\frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-7x+1} \qquad h(x)=\frac{\sqrt{5}x+2}{x^3+1}$$

خواندنی

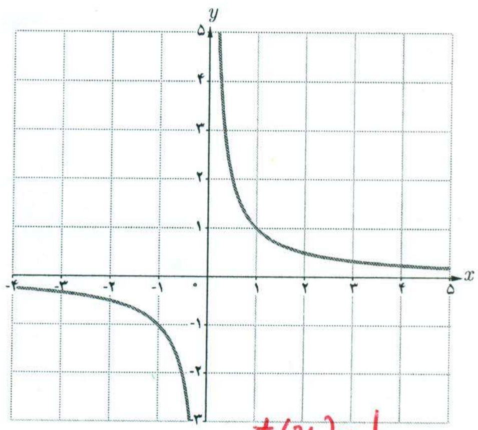
توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فرودگاه امام خمینی(ره)

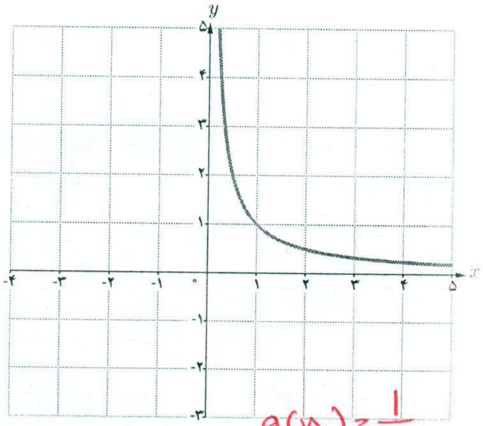
کار در کلاس

مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

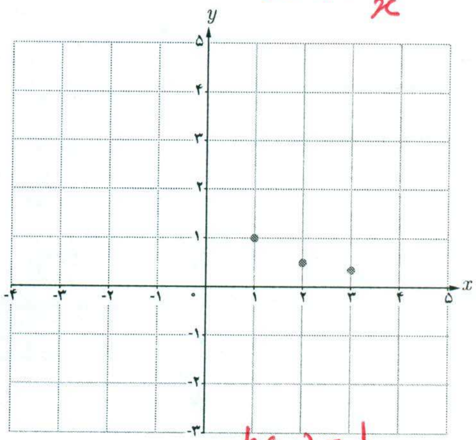
(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$	$\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$	$\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$	$\begin{cases} f \\ \; \end{cases}$



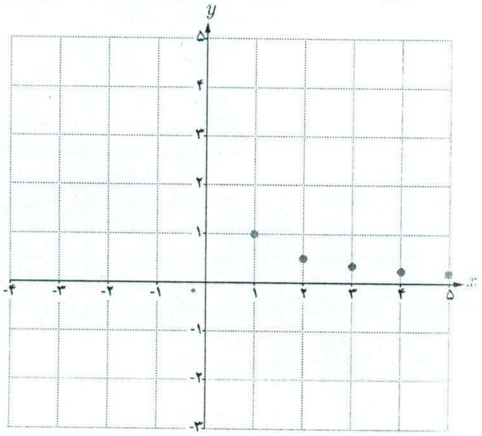
$t(x)=\frac{1}{x}$



$g(x)=\frac{1}{x}$



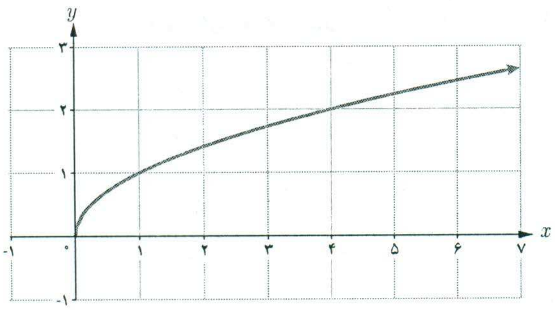
$h(x)=\frac{1}{x}$



$f(x)$

دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنهٔ f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعهٔ همهٔ مقادیری است که به‌ازای آنها، عبارت جبریِ گویایِ نمایش دهندهٔ ضابطهٔ تابع، تعریف‌شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۵}{x+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)



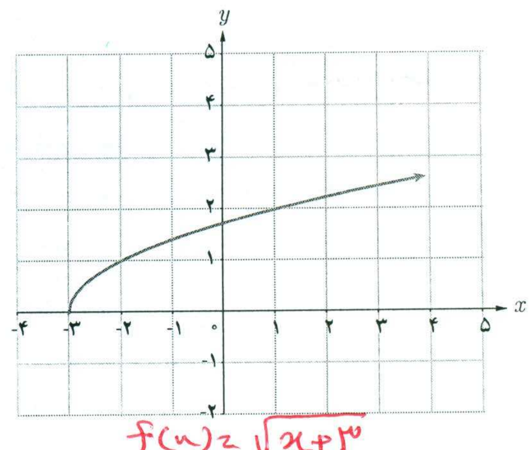
تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[\circ, +\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

کار در کلاس

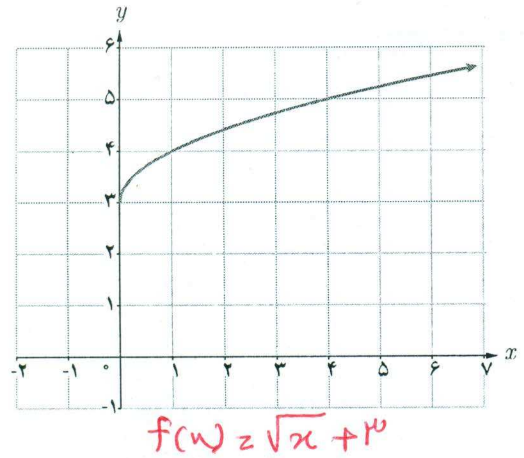
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$, پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

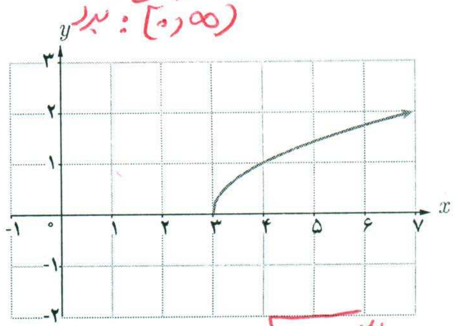
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



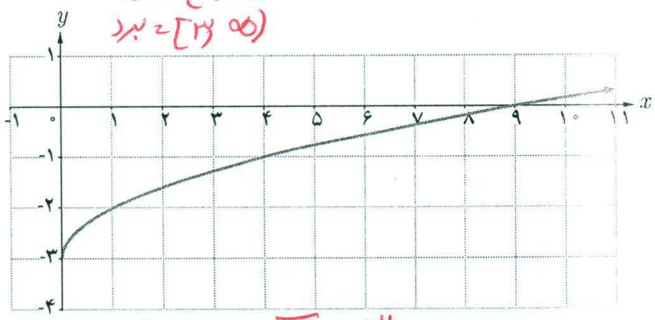
$f(x) = \sqrt{x+۳}$
$D = [-۳, \infty)$
برد : $[\circ, \infty)$



$f(x) = \sqrt{x} + ۳$
$D = [\circ, \infty)$
برد $= [۳, \infty)$



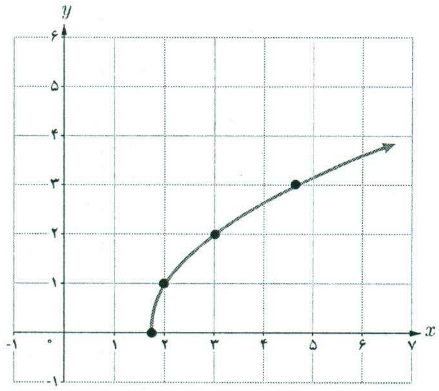
$g(x) = \sqrt{x-۳}$
$D = [۳, \infty)$
برد $= [\circ, \infty)$



$h(x) = \sqrt{x} - ۳$
$D = [\circ, \infty)$
برد $= [-۳, \infty)$

مثال : دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۵}$ برابر مجموعهٔ همه اعدادی است که برای آنها $۳x-۵ \geq ۰$ و یا $x \geq \frac{۵}{۳}$
پس : $D_f=[\frac{۵}{۳},+\infty)$.
برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است
یعنی : $R_f=[۰,+\infty)$
در جدول، مقادیر تابع f به‌ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

x	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	$\frac{۱۴}{۳}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{۷}$	۳

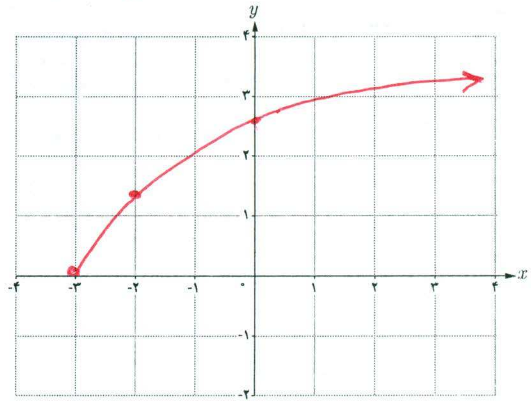


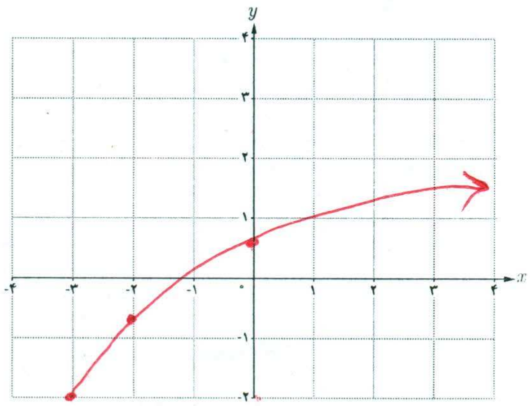
کار در کلاس

$2x+6 \geq 0 \quad 2x \geq -6 \quad x \geq -3 \quad D_f=[-3,\infty)$

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ را به‌دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۲x+۶}-۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.





D: [-3, ∞) ب
برد [-2, ∞)

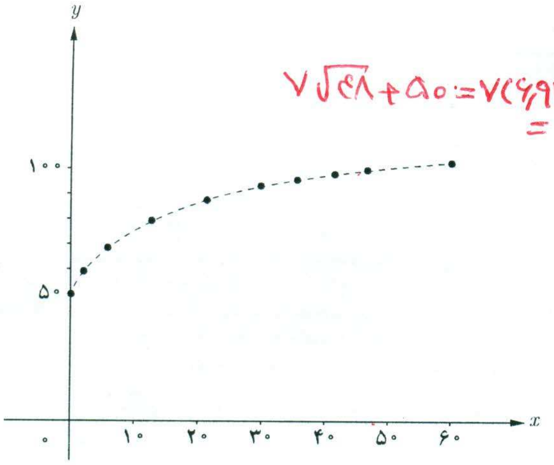
D: [-3, ∞) الف
برد [0, ∞)

فعالیت

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازهٔ $[۰,\infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازهٔ $[۰,۶۰]$ می‌باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟ [۵۰, ∞)

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

$۷\sqrt{۴۸} + ۵۰ = ۷(۶/۹۲)+۵۰$ cm $= ۹۸/۴۴$

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.

$۷۵ = ۷\sqrt{x} + ۵۰$

$۲۵ = ۷\sqrt{x}$

$\frac{۲۵}{۷} = \sqrt{x}$

$۳/۵۷ = \sqrt{x}$ $\quad x = ۱۲/۷۴$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادلهٔ $x+y=۲$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر۲است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y = -x + ۲$ یا $f(x) = -x + ۲$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $-x^۲ + y = ۴$، y را برحسب x به‌دست آورید. آیا y تابعی از x است؟ بله $y = x^۲ + ۴$

حل: داریم $y = x^۲ + ۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x) = x^۲ + ۴$ است.

ب) آیا در معادله $x - y^۲ = ۴$، y تابعی از x است؟

حل: اگر y را برحسب x به‌دست آوریم داریم: $y = \pm\sqrt{x-۴}$ به‌ازای $x=۵$ داریم: $y = \pm۱$. یعنی فقط نقاط $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کار در کلاس

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x|+1$ تابع هست

ب) $x = |y|+1$ تابع نیست چون نقاط $(5,4)$ و $(5,-4)$ هر دو روی نمودار این تابع قرار دارند

$x=5 \rightarrow y=\pm 4$

تابع پله‌ای ـ تابع جزء صحیح

هزینهٔ ارسال بسته‌های پستی به‌طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینهٔ توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید:

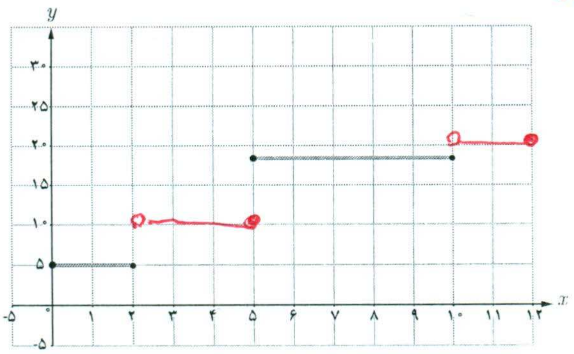
$D = (0, 12]$

برد $= \{5, 10, 17, 20\}$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟ $17 + 20 = 37$

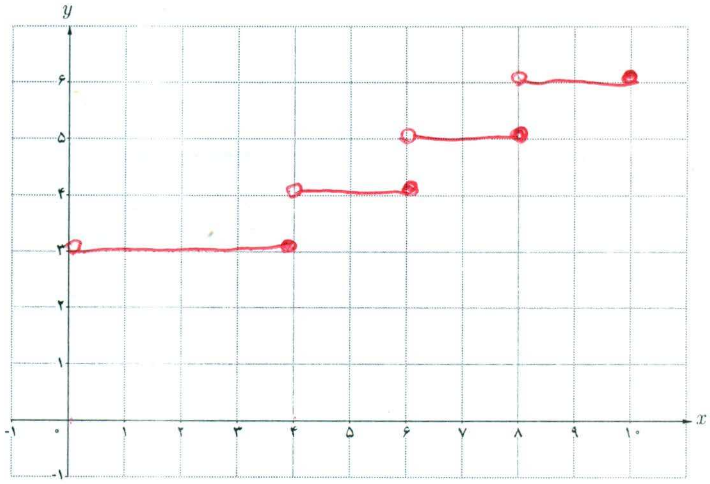
پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.



توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

کار در کلاس

۱ پارکینگ یک مجتمع تفریحی ـ ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به‌ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

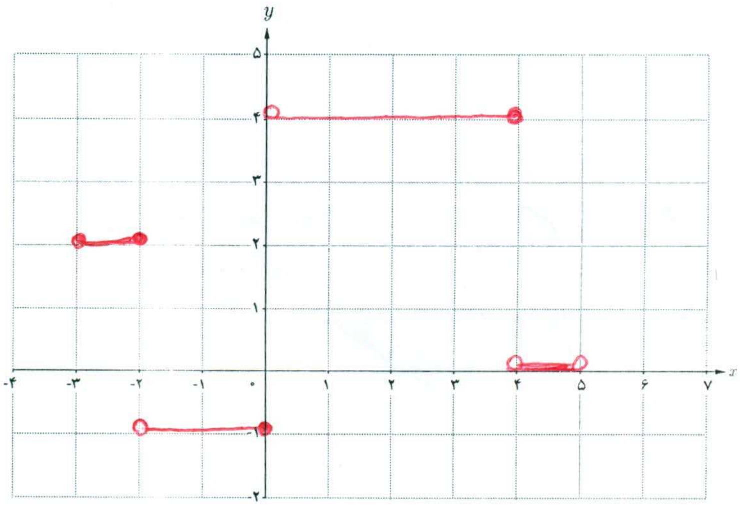


$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰<x\leq ۴ \\ ۴ & ۴<x\leq ۶ \\ ۵ & ۶<x\leq ۸ \\ ۶ & ۸<x\leq ۱۰ \end{cases}$$

$D=(۰,۱۰]$

برد : $\{۳,۴,۵,۶\}$

۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید :



$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۳\leq x\leq -۲ \\ -۱ & -۲<x\leq ۰ \\ ۴ & ۰<x\leq ۴ \\ ۰ & ۴<x<۵ \end{cases}$$

گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

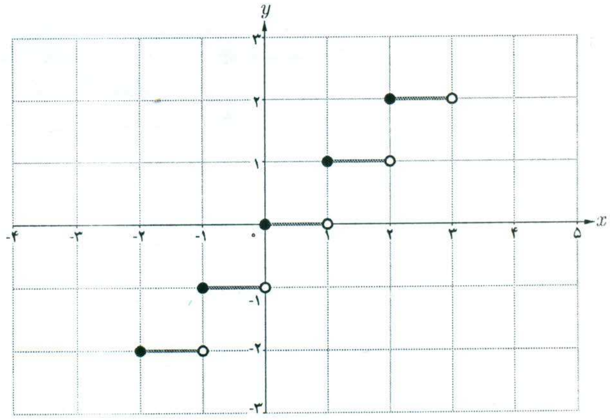
برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌طور مثال $۳ = [۳/۴۹]$ و $-۳ = [-۲/۸]$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره : $[x] \leq x$. اگر x یک

عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.

$[-۴/۵] =$ $\quad \left[\frac{۱}{۳}\right] =$ $\quad [\sqrt{۳}] =$ $\quad [۵/۹] =$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x)= [x]$ نمایش می‌دهند. $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $(۲,۳-]$ رسم شده است.

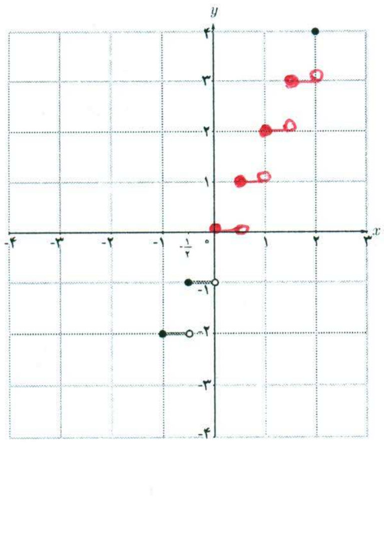
x	$y= [x]$
$-۲ \le x < -۱$	$y= -۲$
$-۱ \le x < ۰$	
$۰ \le x < ۱$	
$۱ \le x < ۲$	
$۲ \le x < ۳$	



کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x) = [۲x]$ را در بازهٔ $[۲,۱-]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$-۱ \le x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۴$

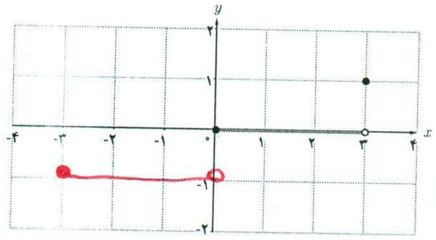


$۲x$	$-۲ \le ۲x < -۱$	$-۱ \le ۲x < ۰$	$۰ \le ۲x < ۱$	$۱ \le ۲x < ۲$	$۲ \le ۲x < ۳$	$۳ \le ۲x < ۴$
$[۲x]$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰$	$۰ \le x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} \le x < ۱$	$۱ \le x < \frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \le x < ۲$

۴ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ [۳ , ۳-] رسم کنید (کامل کنید).

$$\circ\le\frac{۱}{۳}x<۱ \quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=\circ\\ \circ\le x<۳\end{cases}$$

$$-۱\le\frac{۱}{۳}x<\circ \quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=-۱\\ -۳\le x<\circ\end{cases}$$



تمرین

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\dfrac{x-۱}{۲-x}$

$D_f=R-\{۲\}$

ب) $f(x)=\dfrac{-۳x}{x^۲+۱}$

$D_f=R$

پ) $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

$(x+۴)(x-۳)=0$

$\begin{cases}x=-۴\\ x=۳\end{cases}$

$D_f=R-\{-۴,۳\}$

ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$

$۳x+۱\geq 0 \quad x\geq -\frac{۱}{۳}$

$D_f=[-\frac{۱}{۳},\infty)$

ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$

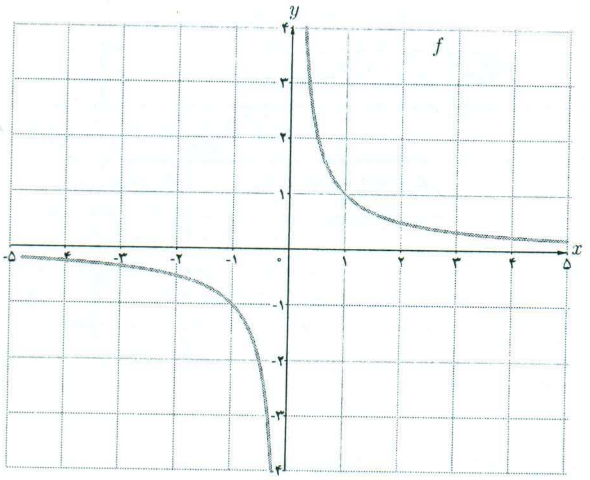
$D_f=[0,\infty)$

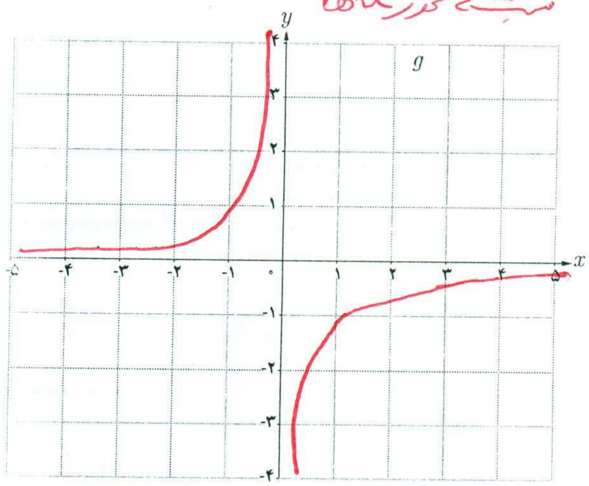
ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

$D_f=(-\infty,۸]$

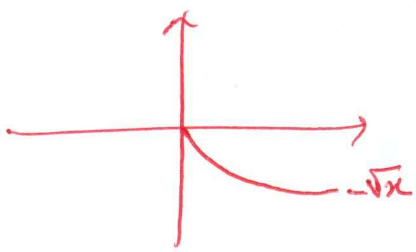
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.

نمودار g از قرینه کردن نمودار f نسبت به محور x ها بدست می آید چون مقادیر تابع در نمودار g قرینه هستند نسبت به محور x ها





۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

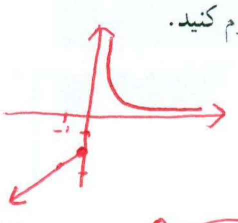


۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

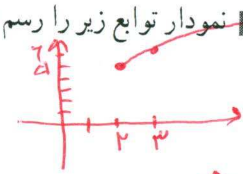
$D=R$

برد $(-\infty,-2] \cup (0,\infty)$

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\leq 0\end{cases}$



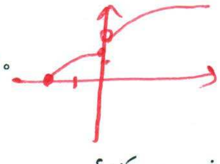
ب) $f(x)=\sqrt{x-2}+5$



$D=[2,\infty)$

برد $[5,\infty)$

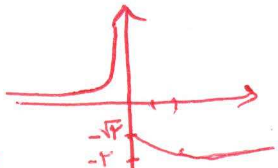
پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2 & x>0\\ \sqrt{x+2} & -2\leq x\leq 0\end{cases}$



$D=[-2,\infty)$

برد $[0,\sqrt{2}] \cup (2,\infty)$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & x<0\\ -\sqrt{x+2} & x\geq 0\end{cases}$



$D=R$

برد $(0,\infty) \cup (-\infty,-\sqrt{2}]$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $3x+2y=12$ تابع ✓

ب) $x=1$ تابع ✗ $(1,0)$ $(1,1)$

پ) $y=-2$ تابع ✓

ت) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\leq 0\\ x-1 & x\geq 0\end{cases}$ تابع ✗ $(0,-1)$ $(0,3)$

ث) $y^2=x^2$ ✗ $(1,1)$ $(1,-1)$

ج) $y=|x|$ تابع ✗

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\dfrac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$100-x>0$ $\quad x<100$ $\quad (-\infty,100)$

الف)

$\dfrac{255\times 50}{100-50}=255$ میلیون

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+1 \quad , \quad -2\leq x<3$

ب) $f(x)=[\frac{1}{2}x] \quad , \quad -4\leq x<4$

صفحه بعد

۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-3]$ و $y=[x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

صفحه بعد

۹ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\dfrac{9500t-2000}{4+t}$ به‌دست آید که در آن $t>0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

صفحه بعد

سوال ۷-

$f(x) = [x] + 1 \qquad -2 \leq x < 3$

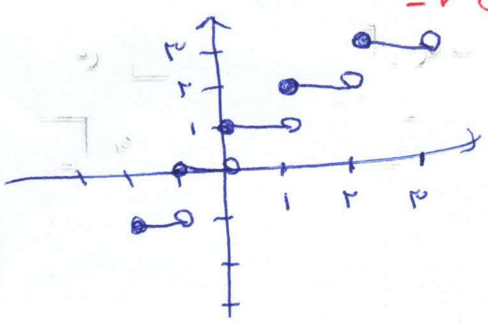
$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -1$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = 0$

$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 1$

$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 2$

$2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 3$



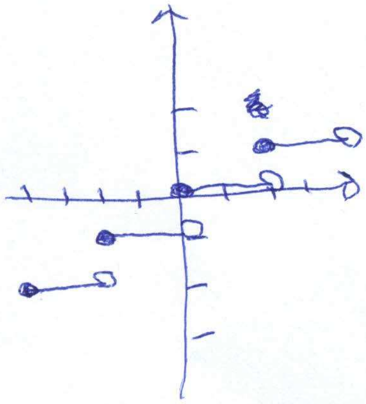
$f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] \qquad -4 \leq x < 4$

$-4 \leq x < -2 \qquad -2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \rightarrow f(x) = -2$

$-2 \leq x < 0 \qquad -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \rightarrow f(x) = -1$

$0 \leq x < 2 \qquad 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \rightarrow f(x) = 0$

$2 \leq x < 4 \qquad 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \rightarrow f(x) = 1$



سوال ۸-

$y = [x] - 3$

$-2 \leq x < -1 \rightarrow y = -5$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = -4$

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = -3$

$1 \leq x < 2 \rightarrow y = -2$

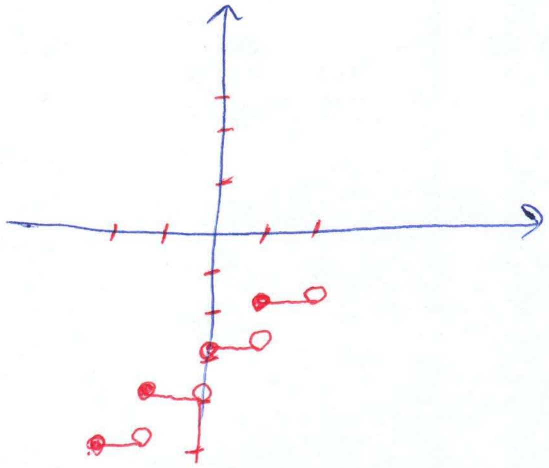
$y = [x - 3]$

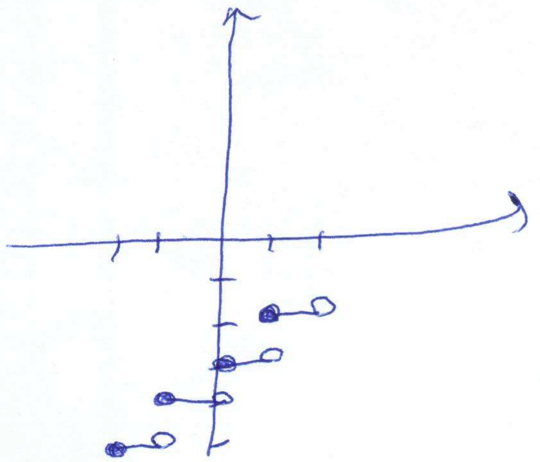
$-5 \leq x - 3 < -4 \qquad y = -5$

$-4 \leq x - 3 < -3 \qquad y = -4$

$-3 \leq x - 3 < -2 \qquad y = -3$

$-2 \leq x - 3 < -1 \qquad y = -2$





هر دو تابع نمودار یکسانی دارند

سوال ۹- الف)

$n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = \frac{47500 - 2000}{9} = \frac{45500}{9} = 5055$ نفر

ب)

$5500 = \frac{9500t - 2000}{4 + t} \rightarrow 22000 + 5500t = 9500t - 2000$

$20000 = 4000t$

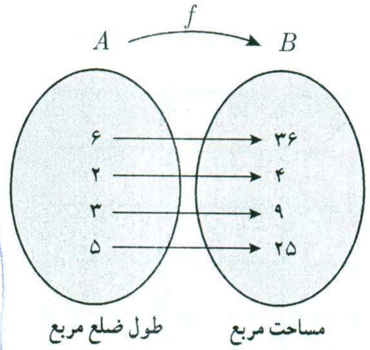
$t = 5$ ماه

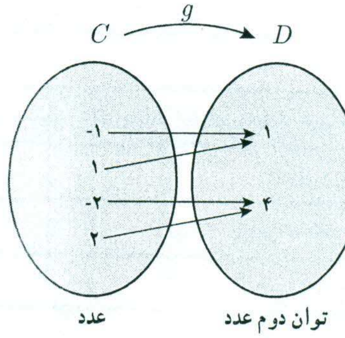
درس ۳

وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$f=\{(6,36)(2,4)(3,9)(5,25)\}$

$g=\{(-1,1)(1,1)(-2,4)(2,4)\}$

$D_f=\{6,2,3,5\}$ $\qquad$ $D_g=\{-1,1,2,-2\}$

$R_f=\{36,4,9,25\}$ $\qquad$ $R_g=\{1,4\}$

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$h=\{(36,6)(4,2)(9,3)(25,5)\}$

$k=\{(1,-1)(1,1)(4,-2)(4,2)\}$

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید. h تابع ولی k تابع نیست معکوس رابطه‌ای یک تابع می‌باشد که آن رابطه به هر عضو ... یک عضو مجزا نظیر کند و نیز ... از برد متعلق به چند x از دامنه نباشد

اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به‌دست می‌آید وارونِ آن رابطه می‌نامیم.

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

اگر f^{-1} تابع باشد آن‌گاه f را وارون‌پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

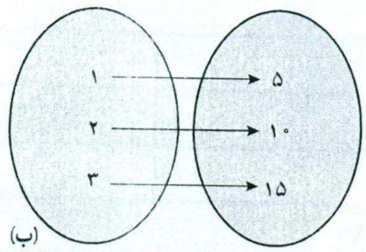
توابع یک به یک

چه توابعی وارون‌پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون‌پذیر بود ولی تابع g وارون‌پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون‌پذیر باشد؟ به طور کلی توابعی که در برد برای هر عضو از برد تابع فقط یک عضو از دامنه نظیر شده باشد

فعالیت

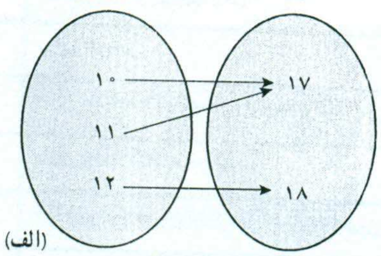
توابع زیر را در نظر بگیرید :

الف) کدام‌یک از آنها وارون‌پذیرند؟



(ب)

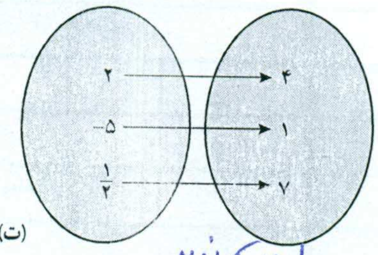
وارون پذیر



(الف)

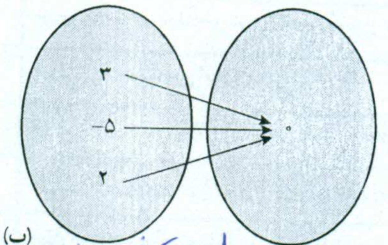
وارون پذیر نیست

ب) ویژگی مشترک توابع وارون‌پذیر چیست؟



(ت)

وارون پذیر

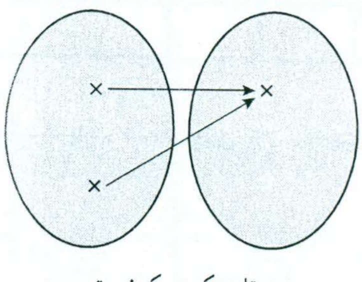


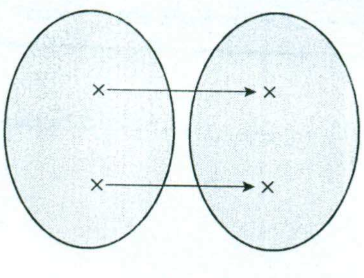
(پ)

وارون پذیر نیست

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون‌پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

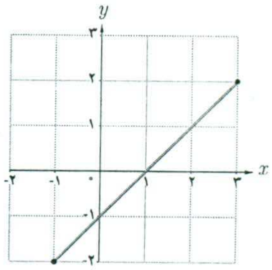
همان‌گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک‌به‌یک باشد آن‌گاه وارون‌پذیر است.


تابع یک به یک نیست.


تابع یک به یک است.

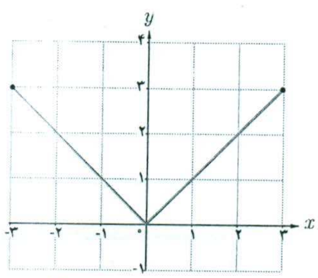
فعالیت

توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



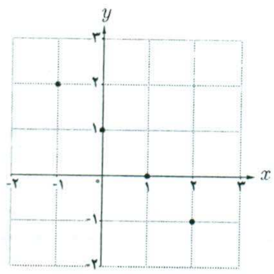
(الف)

یک به یک است چون هر عضو برد دقیقاً یک عضو از دامنه نظیر می‌شود



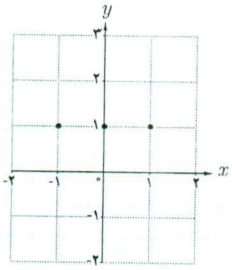
(ب)

یک به یک نیست مثلاً به عضو ۲ از برد ۲ ، -۲ هر دو نظیر شده



(پ)

یک به یک است هر عضو برد یک عضو دامنه نظیر شده



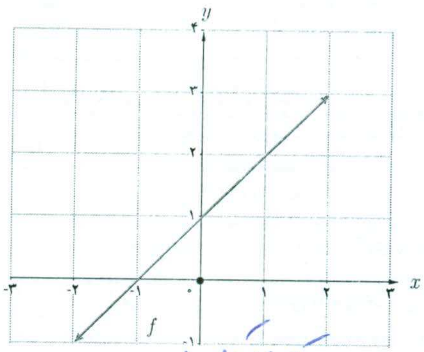
(ت)

یک به یک نیست چون عضو ۱ از برد سه عضو از دامنه نظیر شده

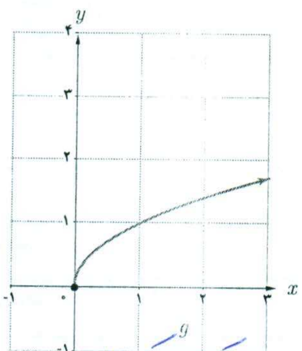
به‌طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کار در کلاس

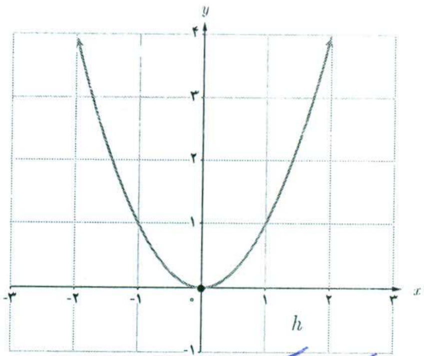
۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



یک به یک



یک به یک



یک به یک ×

$k = \{(۱,۲), (۳,۴), (۸,۹)\}$

یک به یک

$l = \{(۳,۷), (۲,۵), (۱,۵)\}$

یک به یک ×

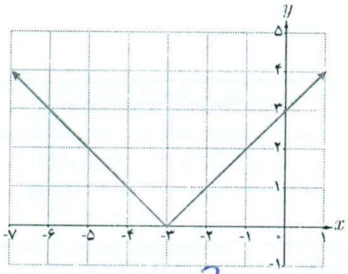
۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند. چون کد ملی‌ها اعضای برد محسوب می‌شوند و امکان ندارد یک کد ملی متعلق به دو نفر یا بیشتر باشد یعنی کد ملی هر فرد منحصر به فرد می‌باشد

نکته ← وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد ولی تابع وارون همش تابع هست

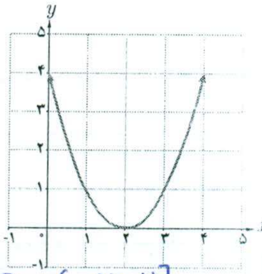
کار در کلاس

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

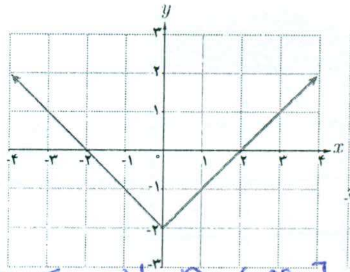
الف) $y = |x+3|$ ب) $y = (x-2)^2$ پ) $y = |x|-2$ ت) $y = x^2-1$



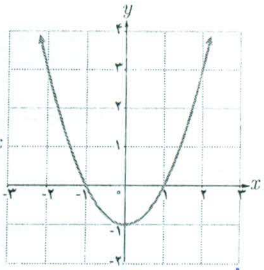
$D = (-\infty, 3]$ یا $D = [3, \infty)$ دامنه محدود



$D = (-\infty, 2]$ یا $D = [2, \infty)$ دامنه محدود



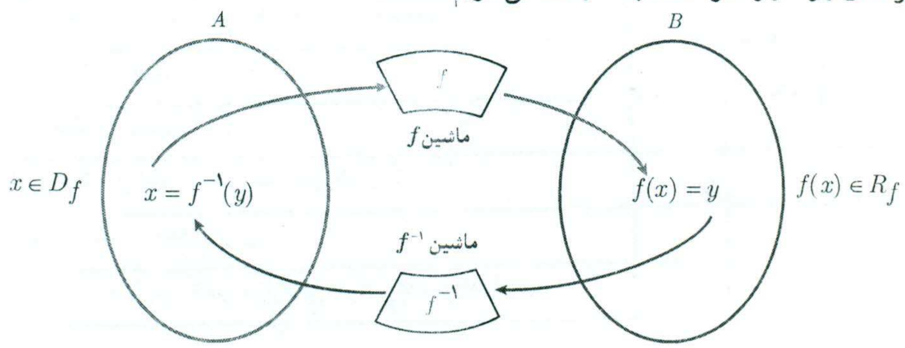
$D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$ دامنه محدود



$D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$ دامنه محدود

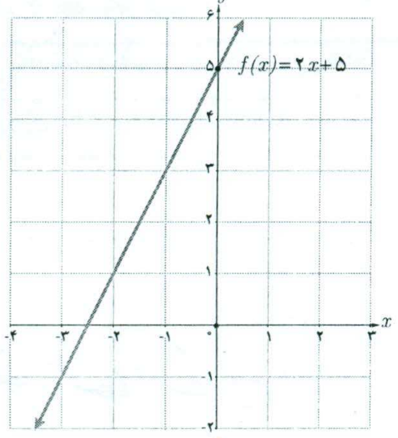
محاسبهٔ وارون یک تابع

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به‌صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوهٔ محاسبهٔ f^{-1} آشنا می‌شویم.



فعالیت

تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 2x+5 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.



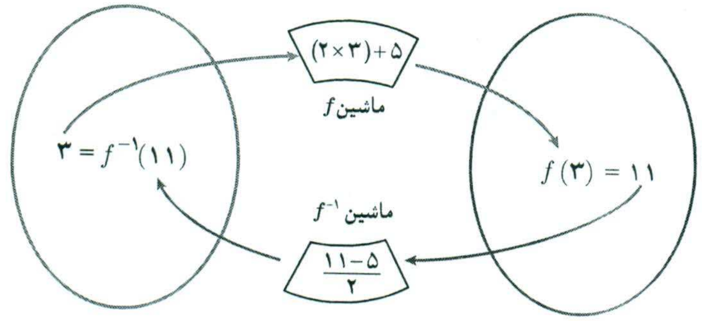
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

چون هر خط افقی آن را در یک نقطه قطع می‌کند در هر عضو برد دقیقاً یک عضو از دامنه تطبیق شده است

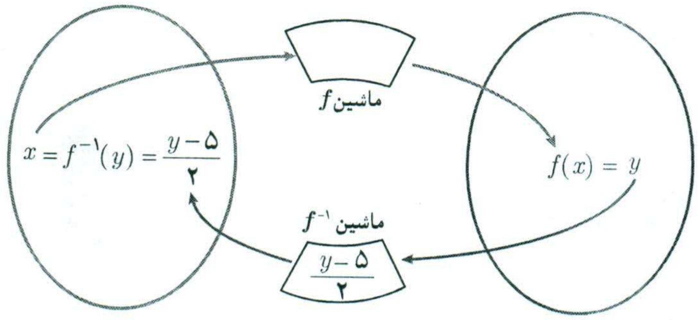
ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۱۱,۳) \in f^{-1}$ و $(۳,۱۱) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-1}(۱۱) = ۳$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x + ۵ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-۵}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

f^{-1} را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \dfrac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(h) = \dfrac{h-۵}{۲} \end{cases}$$

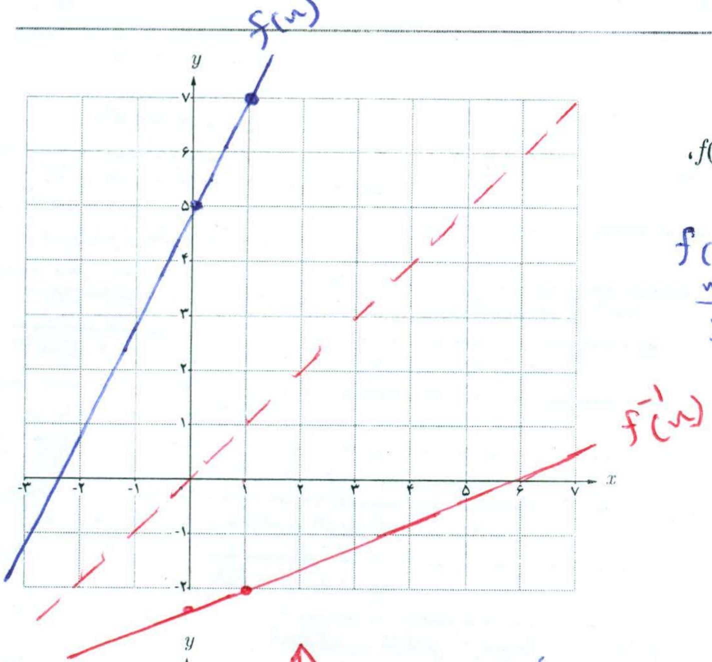
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=۲x+۵ \Rightarrow y=۲x+۵$$
$$\Rightarrow ۲x=y-۵$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

کار در کلاس



۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x)=۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$f(x)=۲x+۵$

x	۰	۱
y	۵	۷

$y=۲x+۵$

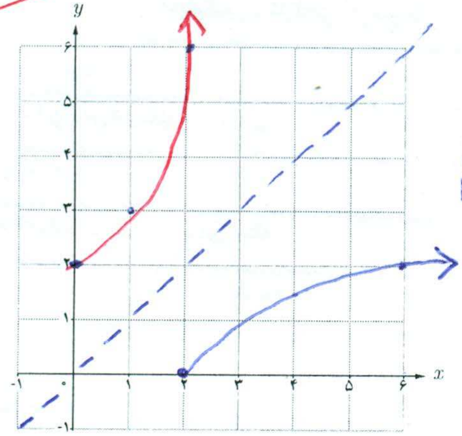
$y-۵=۲x$

$x=\frac{y-۵}{۲}$

$f^{-1}(y)=\frac{y-۵}{۲}$

$f^{-1}(x)=\frac{x-۵}{۲}$

x	۰	۱
y	-۲/۵	-۲



۲ اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

$D=[۲,\infty)$

$R_f=[۰,\infty)$

در معادلهٔ $y=\sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

$y=\sqrt{x-۲}$

$y^۲=x-۲$

$y^۲+۲=x \Rightarrow f^{-1}(y)=y^۲+۲$

$f^{-1}(x)=x^۲+۲$

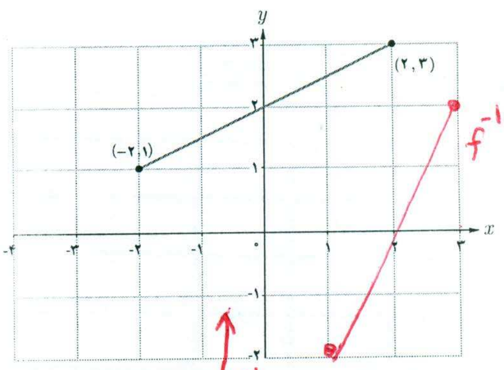
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینهٔ f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

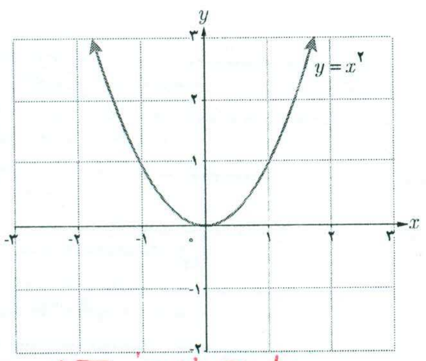
$D_{f^{-1}}=[۰,\infty)$

$R_{f^{-1}}=[۲,\infty)$

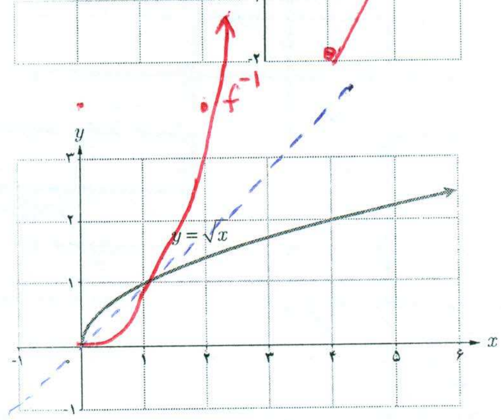
کار در کلاس

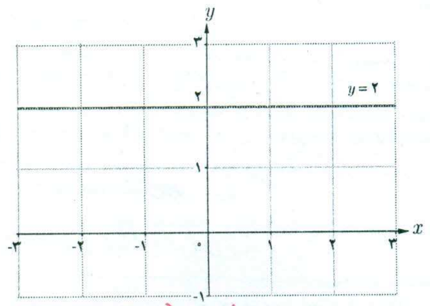
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.





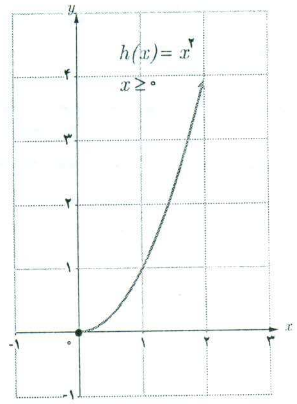
وارون پذیر نیست



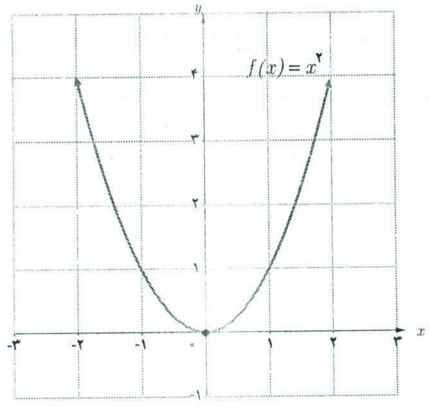


وارون پذیر نیست

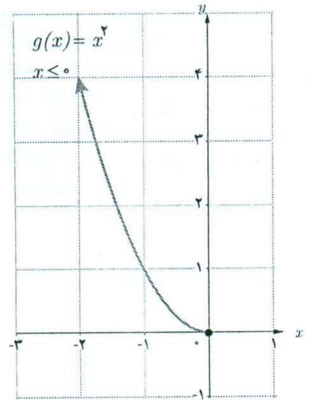
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازهٔ $[0, \infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ تابعی یک به یک به‌دست می‌آید.



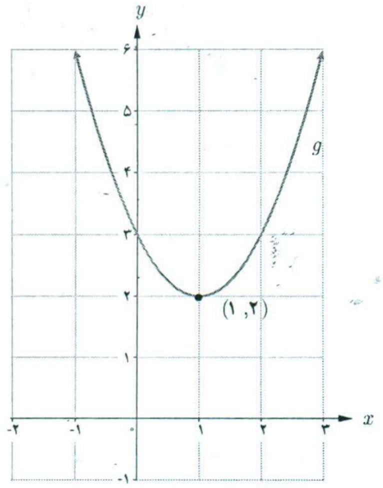
h یک به یک و وارون‌پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون‌پذیر هم نیست.



g یک به یک و وارون‌پذیر است.



✤ **مثال :** نمودار تابع $g(x) = x^۲-۲x+۳$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. به‌طور مثال $g(۲) = g(۰)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به‌دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.

در مورد تابع g داریم :

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R} \text{ و } R_g=[۲,+\infty)$$

$$g(x) = x^۲-۲x+۳ = (x-۱)^۲+۲$$

دامنه f را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.

بنابراین تابع جدید به‌صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} f:[۱,+\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = (x-۱)^۲+۲ \end{cases} \qquad D_f=[۱,+\infty) \quad , \quad R_f=[۲,+\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را برحسب y به‌دست آوریم :

$$y=(x-۱)^۲+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲=y-۲ \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

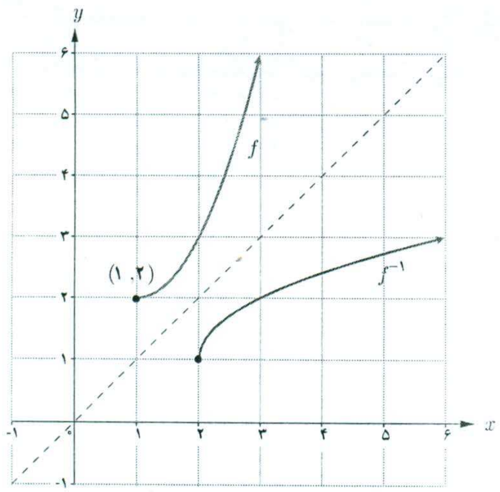
جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین :

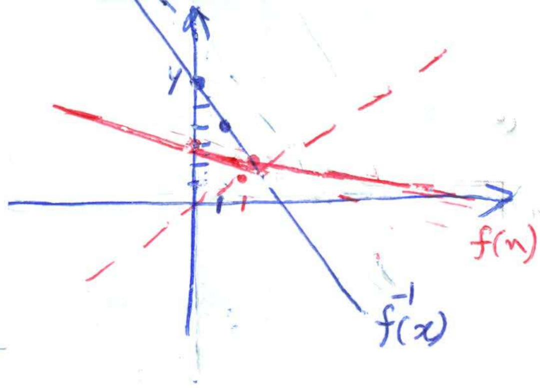
$$x-۱=\sqrt{y-۲} \Rightarrow x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

در حقیقت داریم :

$$\begin{cases} f^{-۱}:[۲,\infty) \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \sqrt{x-۲}+۱ \end{cases} \qquad D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty) \qquad R_{f^{-۱}}=[۱,+\infty)$$

نمودار f و $f^{-۱}$ در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.





نقطه برخورد f و f^{-1}

$[2]$

تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد. ارتباط بین معلم و شاگردان تمام شاگردان یک کلاس یک معلم ریاضی دارند

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟ خیر چون $(\frac{2}{5},0)\notin g$ ولی $(0,\frac{2}{5})\in f$ و نقاط تابع f و g به خاطر یک شدن وارون همدیگر نمی باشند

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید:

پاسخ ها در صفحه بعد

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید. $D_h=[0,\sqrt{20}]$, $R_h=[0,100]$

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟ چون هر ارتفاع از سنگ در زمان منحصر به فردی از دامنه حاصل می شود

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

$y=100-5x^2 \to y-100=5x^2 \quad \frac{y-100}{5}=x^2 \quad x=+\sqrt{\frac{y-100}{5}}$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

$f:[0,\infty)\to R$

$f(x)=x^2+1$

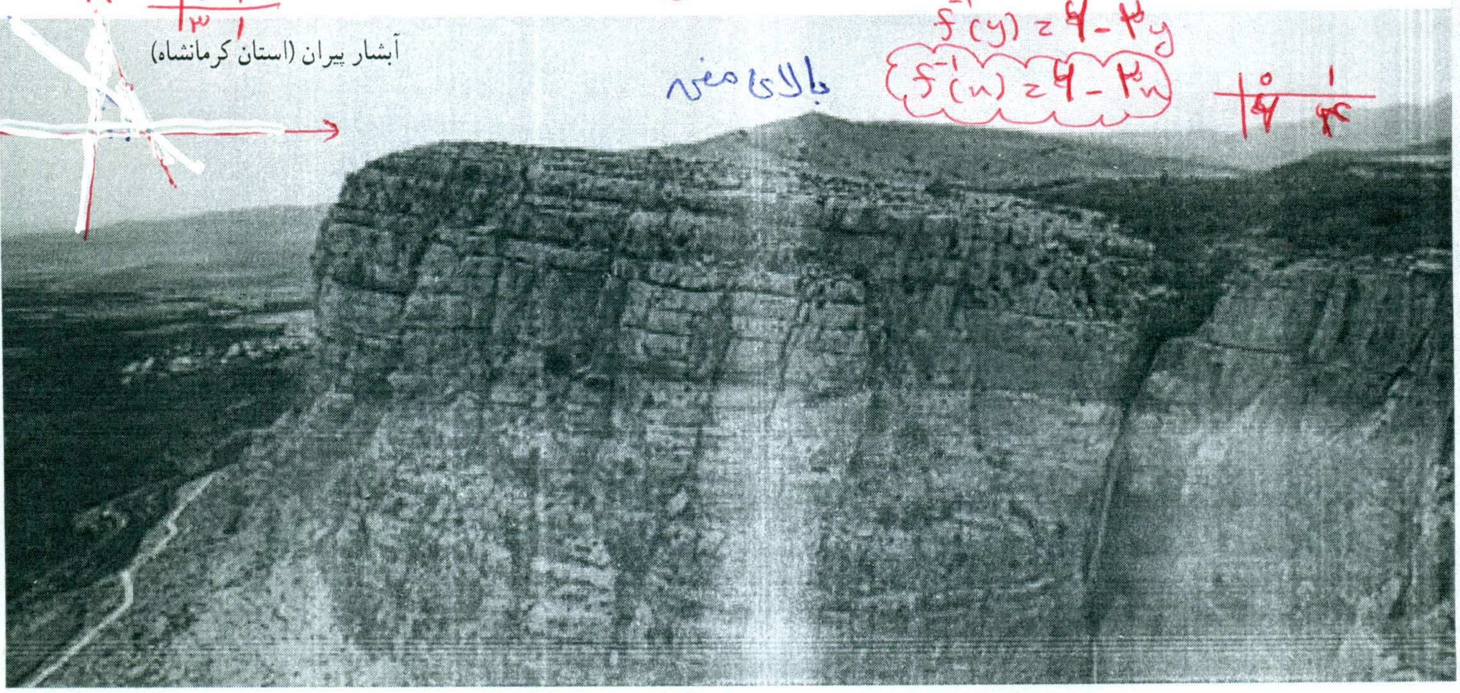
۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$y=-\frac{1}{2}x+3 \to y-3=-\frac{1}{2}x \quad 2y-6=-x \quad x=6-2y$

$f^{-1}(y)=6-2y$

$f^{-1}(x)=6-2x$

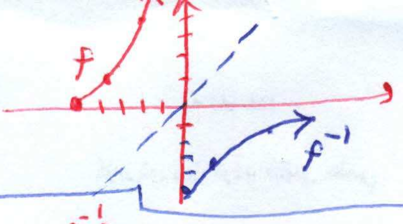
بالای صفحه



آبشار پیران (استان کرمانشاه)

الف) $f(x) = (x+5)^2$

−۵	−۴	−۳
۰	۱	۴



$y = (x+5)^2$

$y^2 = x+5$

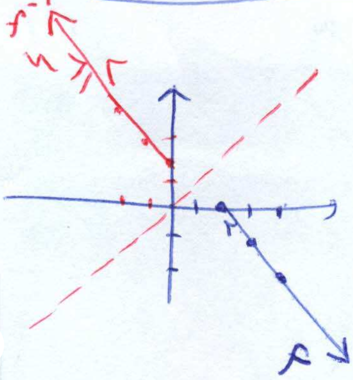
$y^2 - 5 = x$

$f^{-1}(y) = y^2 - 5$

$\boxed{f^{-1}(x) = x^2 - 5}$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$

۲	۳	۴
۰	−۱	−۲



$y = -|x-1| + 1$

$y - 1 = -|x-1|$

$1 - y = |x-1|$

$1 - y = x - 1$

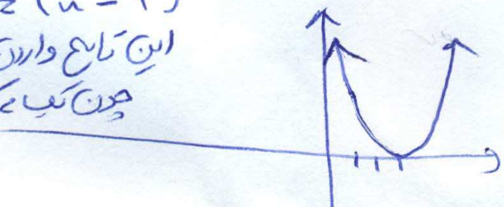
$2 - y = x$

$f^{-1}(y) = 2 - y$

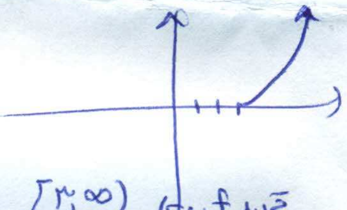
$\boxed{f^{-1}(x) = 2 - x}$

پ) $f(x) = (x-3)^2$

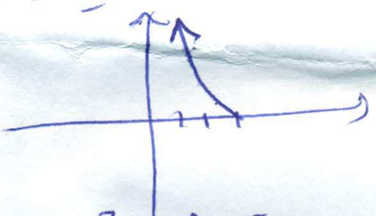
این تابع وارون پذیر نمی باشد
چون یک به یک نیست



این نمودار وارون پذیر نمی باشد ولی با تحدید دامنه



تحدید f روی $[3, \infty)$
وارون پذیر

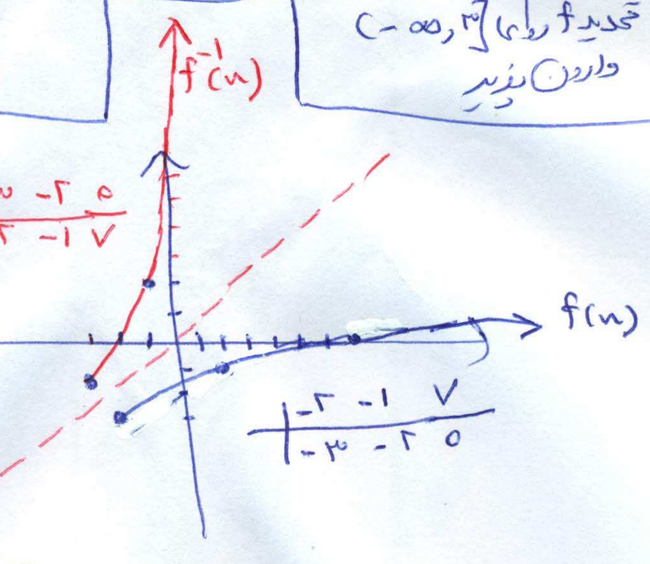


تحدید f روی $(-\infty, 3]$
وارون پذیر

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

−۳	−۲	۰
−۲	−۱	۷

تابع یک به یک و وارون پذیر
می باشد



−۲	−۱	۷
−۳	−۲	۰

$y = \sqrt{x+2} - 3$

$y + 3 = \sqrt{x+2} \rightarrow (y+3)^2 = x + 2 \qquad x = (y+3)^2 - 2$

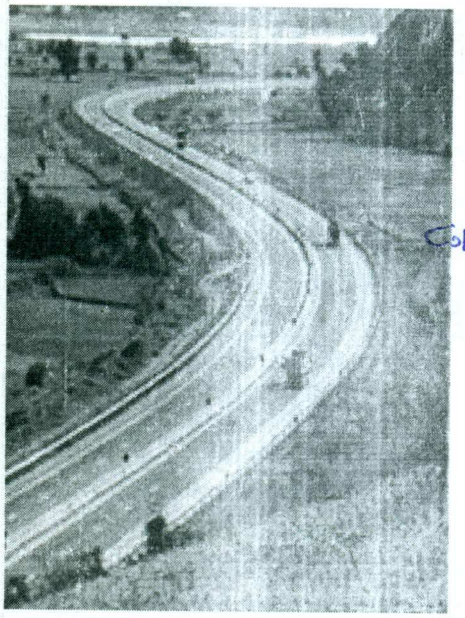
$f^{-1}(y) = (y+3)^2 - 2$

$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$

درس ۴

همان‌گونه که عمل‌های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چندجمله‌ای انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می‌شود.

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل» می‌نامند.



مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{7}{10}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{1}{100}x^2$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟ مسافت زمان عکس‌العمل + مسافت طی شده پس از فشار پدال $= f(x)+g(x)$

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

$h(x) = f(x) + g(x)$

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

$60 = \frac{7}{10}x + \frac{1}{100}x^2$

$6000 = 70x + x^2 \rightarrow x^2 + 70x - 6000 = 0$

$\Delta = 4900 + 24000 = 28900$

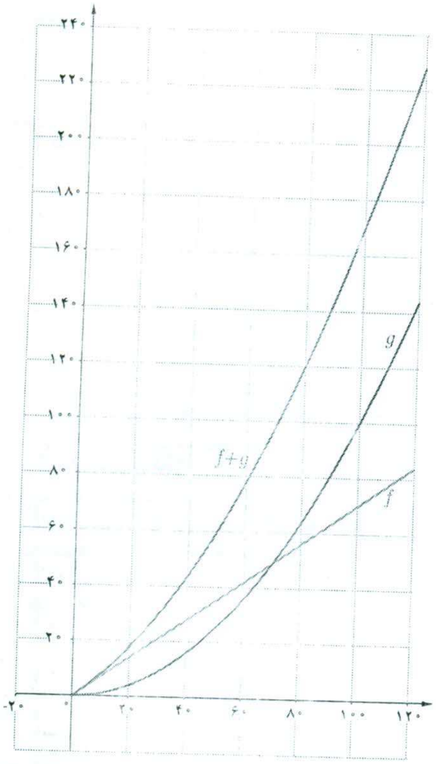
$x_1 = \frac{-70 + \sqrt{28900}}{2} \simeq \frac{-70 + 170}{2} = 50\ m/s$

$x_2 = \frac{-70 - \sqrt{28900}}{2} \simeq \frac{-70 - 170}{2} = -120\ m/s$

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ $D_f \cap D_g$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g درحالت کلی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، ولی در این مسئلهٔ واقعی دامنهٔ تابع مجموعه‌ای مانند $[۰،۱۲۰]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است.

نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است.

رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کار در کلاس

$(f+g)(x) = x + ۲ + \sqrt{x-1}$

$D_{f+g} = R \cap [1,\infty) = [1,\infty)$

۱ اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \sqrt{x - ۱}$ ، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنهٔ تابع $f+g$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $f = \{(۱,۲), (-۲,۵), (۰,۷)\}$ و $g = \{(۱,۵), (۲,۴), (۰,-۱)\}$

ابتدا دامنهٔ $f+g$ را به‌دست آورید و سپس $f+g$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$D_{f+g} = \{0, 1\}$ $\qquad f+g = \{(0,۶)(1,۷)\}$

به‌طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$ و $h(x)=\dfrac{x+۲}{۲x+۱}$ توابع $f+g$ ، $g-h$ ، gh و $\dfrac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنهٔ آنها را به‌دست آورید. کدام‌یک از مقادیر $(f+g)(۲)$ و $(f+g)(۵)$ وجود دارند؟

حل : ابتدا دامنه هریک از توابع را به‌دست می‌آوریم :

$D_f=[-۲,\infty)$ $\qquad D_g=(-\infty,۳]$ $\qquad D_h=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{۱}{۲}\right\}$

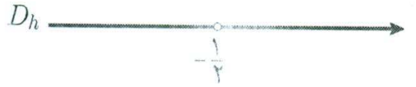
$(f+g)(۲)=۳$ ولی $(f+g)(۵)$ وجود ندارد.

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۲,۳]$ $\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳-x}$

$D_{g.h}=D_g\cap D_h=(-\infty,۳]$ $\qquad (g.h)(x)=g(x)h(x)=(\sqrt{۳-x})(\dfrac{x+۲}{۲x+۱})$

$D_{g-h}=D_g\cap D_h=(-\infty,-\dfrac{۱}{۲})\cup(-\dfrac{۱}{۲},۳]$ $\qquad (g-h)(x)=g(x)-h(x)=\sqrt{۳-x}-\dfrac{x+۲}{۲x+۱}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=[-۲,۳]-\{۳\}$ $\qquad (\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$



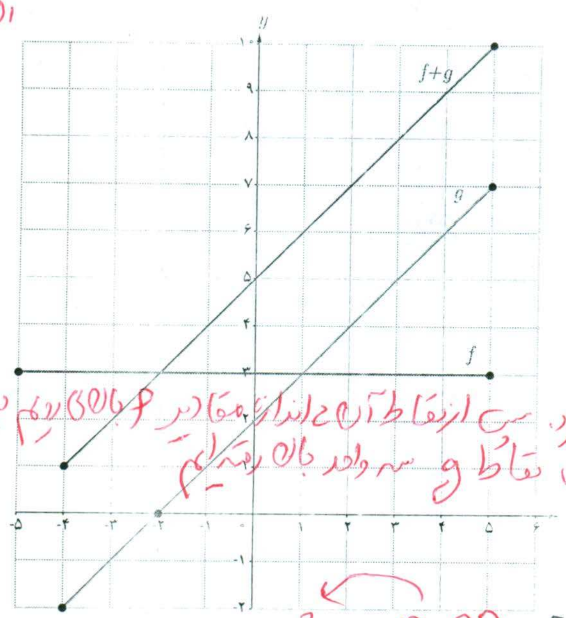
$\underset{x_2\ y_2}{(۰,-۱)}$ $\quad m=\dfrac{-۱-۰}{۰-(-۲)}=-\dfrac{۱}{۲}$

$\underset{x_1\ y_1}{(-۲,۰)}$

فعالیت

$D_f=[-۴,۵]$ $\quad f(x)=۳$

$D_g=[-۴,۵]$ $\quad g(x)\Rightarrow g=-\frac{۱}{۲}(x+۲)$



– در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم. ابتدا تابع g را رسم کرده سپس از نقاط آن به اندازه مقادیر f بالا رفتیم یعنی از تک تک نقاط g سه واحد بالا رفته‌ایم

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

$f(x)+g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۱+۳=-\frac{۱}{۲}x+۲$

$f(x)-g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۱-۳=-\frac{۱}{۲}x-۴$

$f(x)\times g(x)=۳(-\frac{۱}{۲}x-۱)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{۳}{-\frac{۱}{۲}x-۱}$

$D_f\cap D_g=[-۴,۵]$

$D_{f+g}=[-۴,۵]$

$D_{f-g}=[-۴,۵]$

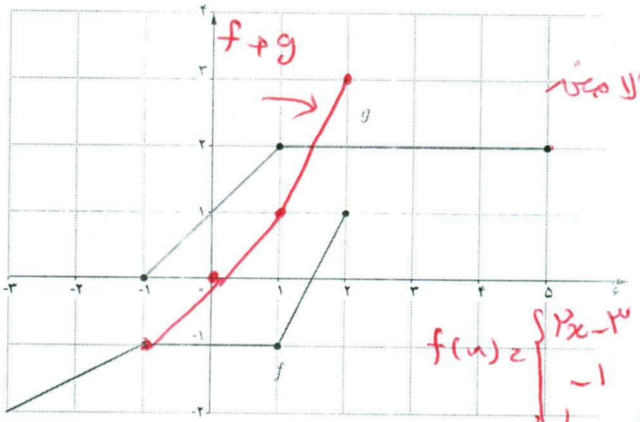
$D_{f.g}=[-۴,۵]$

$D_{\frac{f}{g}}=[-۴,۵]-\{-۲\}$

$(D_f\cap D_g)-\{x\mid g(x)=۰\}$

$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = -1+2 = 1$
$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = -1+0 = -1$

کار در کلاس



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید. بالا صفحه

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع f ، g و $f+g$ را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

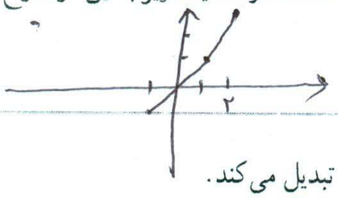
$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ x+1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

ترکیب توابع

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

نمودار به کمک ضابطه



دقیقا نمودار صحیح با کمک نمودارها یا نمودار ضابطه $f+g$ یکی می‌شود

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(32)=0$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ $f(50) = \frac{5}{9}(50-32) = 10\,C^\circ$

یعنی ۳۲ درجه فارنهایت صفر درجه سانتی‌گراد می‌شود

ب) تابع $g(x)=x+273$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(0)=273$ به چه معنی است؟ یعنی ۰ درجه سانتی‌گراد برابر ۲۷۳ درجه کلوین می‌باشد

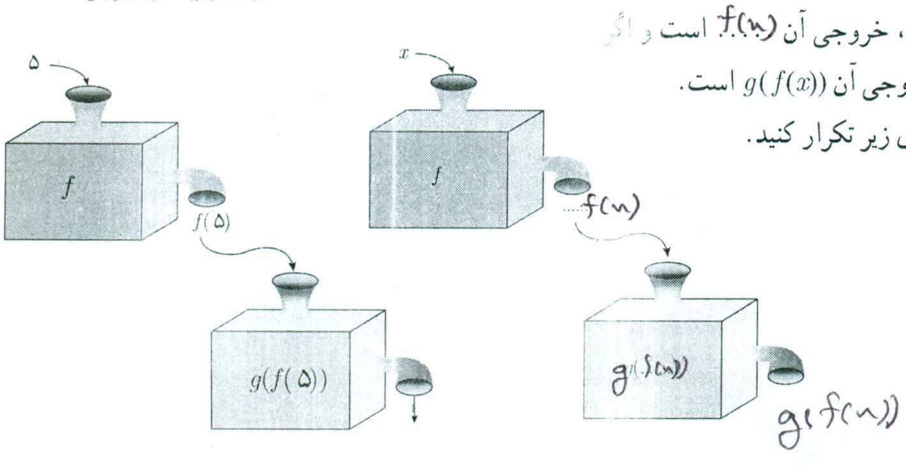
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که ۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$f(5) = -15^\circ$

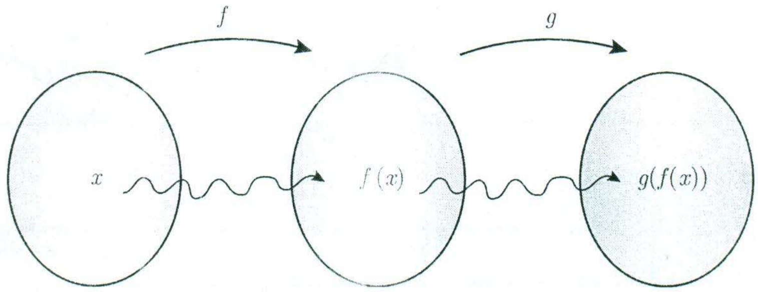
$g(f(5)) = g(-15^\circ)$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر $f(x)$ ورودی تابع g باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نمودارهای صفحه قبل را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))$$

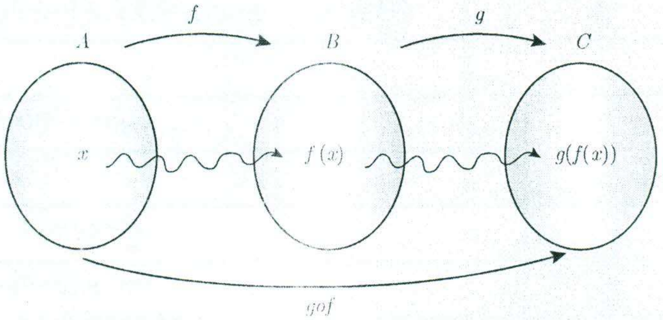
و می‌دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می‌کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{۵}{۹}(x-۳۲)+۲۷۳$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کند و به دلیل شیوهٔ محاسبه آن با gof (بخوانید جی‌اواف) نمایش داده می‌شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می‌کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم : به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



به عبارت دیگر اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ آن‌گاه :

$$gof: A \to C$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) \qquad D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

$D_f = R \quad D_g = R$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid 2x+3 \in R\} = R$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid x^2+1 \in R\} = R$

$gof(x) = 2(x^2+1)+3 = 2x^2+5$

$fog(x) = (2x+3)^2+1 = 4x^2+12x+10$

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = 2x + 3$

الف) دامنه و ضابطه تابع های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع های gof و fog مساوی‌اند؟ خیر چون $D_f = D_g$ ولی $f(x) \neq g(x)$ $\forall x$

مثال : اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل : داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [1,\infty)$$

$$(fog)(x) = f(x^2+3) = \sqrt{x^2+3-1} = \sqrt{x^2+2}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [1,\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+3 \geq 1\} = \{x \mid x^2 \geq -2\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1,\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1,\infty)$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 3$$

توجه کنید که gof برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به‌طور مثال $(gof)(\frac{1}{2})$ یا $(gof)(0)$ معنی ندارد. با این شرط $(gof)(x)$ را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$(gof)(x) = x - 1 + 3$$

$$(gof)(x) = x + 2 \quad x \in [1,\infty)$$

کار در کلاس

اگر $f = \{(11,7), (-2,4), (3,-5), (2,-5)\}$ و $g = \{(2,11), (4,-2), (6,3), (3,2)\}$ ، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

$D_{fog} = \{2, 4, 6, 3\}$ $\quad fog(x) = \{(2,7)(4,4)(6,-5)(3,-5)\}$

$D_{gof} = \{-2\}$ $\quad gof(x) = \{(-2,-2)\}$

(1)

$\frac{f}{g}(x) = \frac{4x}{2-x}$ $\quad (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x)=0\} = R-\{2\}$

$(f-g)(x) = 4x-(2-x) = 5x-2$ $\quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = R$

$fog(x) = 4(2-x) = 8-4x$ $\quad D_{fog} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in R \mid 2-x \in R\} = R$

(2) $fog(x) = \frac{1}{\frac{4}{x}-3} = \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$ $\quad D_{fog} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in R-\{0\} \mid \frac{4}{x} \in R-\{3\}\}$

$\frac{4}{x} \neq 3 \quad x \neq \frac{4}{3}$

$\to D_{fog} = R-\{0, \frac{4}{3}\}$

تمرین

۱ اگر $f(x)=4x$ و $g(x)=2-x$، توابع $\frac{f}{g}$، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید. بالای صفحه

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $g(x)=\frac{4}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید. بالای صفحه

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$fog(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

الف) اگر $g(4)=7$ و $f(7)=5$ آن‌گاه $(fog)(4)=35$ ← درست

$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{6}{6} = 1$

ب) اگر $f(x)=x+4$ و $g(x)=3x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(2)=1$ ← درست

$fog(5) = f(g(5)) = f(9) = 3 = g(2)$ درست

پ) اگر $g(x)=2x-1$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(5)=g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$ نادرست

$fog(x) = (\sqrt{x^2-4})^2-4 = x^2-8$ نادرست

ث) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$، آن‌گاه $(fog)(5)=-25$ و $(fog)(x)=-x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$ درست

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=2n \end{cases}$ و $f: A \to \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ که در آن: $A=\{1,2,3,4\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(1,4)(2,7)(3,11)(4,15)\}$

$gof(x) = \{(1,4)(2,6)(3,10)(4,14)\}$

۵ اگر $f=\{(-4,13),(-1,7),(0,5),(\frac{5}{2},0),(3,-5)\}$ و $g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$ توابع $f+g$، $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(-4,6)(0,2)(3,-5)\}$

$(f-g)(x) = \{(-4,20)(0,8)(3,-5)\}$

$\frac{f}{g}(x) = \{(-4,-\frac{13}{7})(0,-\frac{5}{3})\}$

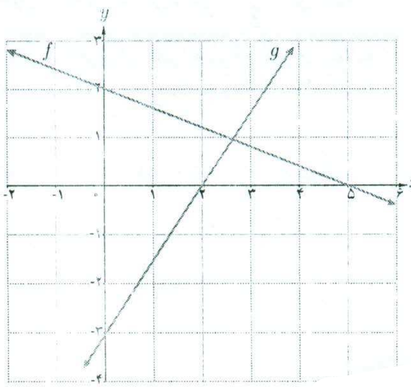
۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید. صفحه بعد

۷ اگر $f(x)=x^2-9$ و $g(x)=x+3$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

دامنه تقسیم قبل از ساده شدن محاسبه می شود

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3 \;, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x)=2x+5$، $f^{-1}(x)$، fof^{-1} و $f^{-1}of$ را به‌دست آورید.



۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

(۴)

$D_f = R$ $\qquad 4 - x^2 \geq 0 \qquad D_g = [-2,2]$

$fog(x) = \sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$

$D_{fog(x)} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in [-2,2] \mid \sqrt{4-x^2} \in R\} = [-2,2]$

$gof(x) = \sqrt{4 - (\sqrt{x^2+5})^2} = \sqrt{4 - x^2 - 5} = \sqrt{-x^2 - 1}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x^2+5} \in [-2,2]\} = \emptyset$

چون اگر $-2 \leq \sqrt{x^2+5} \leq 2 \Longrightarrow 0 < x^2 + 5 \leq 4$ که درست نمی‌باشد

(۸)

$f(x) = 2x + 5 \qquad y = 2x + 5 \rightarrow y - 5 = 2x$

$x = \dfrac{y-5}{2} \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

$fof^{-1} = 2\left(\dfrac{x-5}{2}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x$

$f^{-1}of = \dfrac{(2x+5) - 5}{2} = x$

(۹)

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \qquad m = \dfrac{-2}{5} \qquad y - 2 = -\dfrac{2}{5}x \qquad y = -\dfrac{2}{5}x + 2$

ضابطه f

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \qquad m = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \qquad y - 0 = \dfrac{3}{2}(x-2) \qquad y = \dfrac{3}{2}x - 3$

ضابطه g

$(f+g)(x) = -\dfrac{2}{5}x + 2 + \dfrac{3}{2}x - 3 = \dfrac{11}{10}x - 1$

$(f-g)(x) = \dfrac{2}{5}x + 2 - \dfrac{3}{2}x + 3 = -\dfrac{11}{10}x + 5$

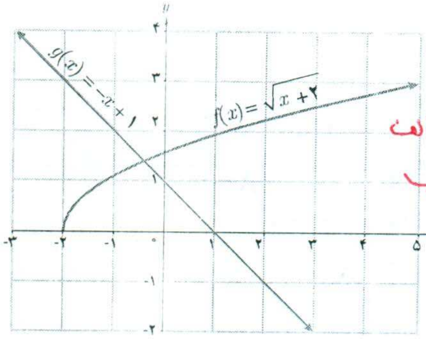
$(f \times g)(x) = \left(-\dfrac{2}{5}x + 2\right)\left(\dfrac{3}{2}x - 3\right)$

$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = x \quad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ ۱۱-

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$ ب) $(f+g)(-۳)$ پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$ ث) $(\frac{f}{g})(۰)$ ج) $(gof)(-۱)$



الف) $f(۲) + g(۲) = ۲ - ۱ = ۱$

ب) $f(-۳) + g(-۳) =$ تعریف نشده وجود ندارد

پ) $f(\frac{۱}{۲}) \times g(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $f(g(-۴)) = f(۵) = \sqrt{۷}$

ث) $\frac{f(۰)}{g(۰)} = \frac{\sqrt{۲}}{۱}$

ج) $g(f(-۱)) = g(۱) = ۰$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ $(a \neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است. بالای صفحه

۱۲ تابع $f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$\frac{۹}{۵}F = x - ۳۲ \Rightarrow x = \frac{۹}{۵}F + ۳۲$

$g(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲$

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

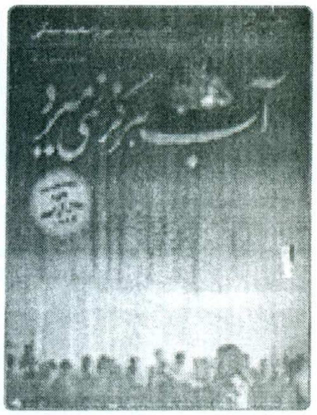
یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

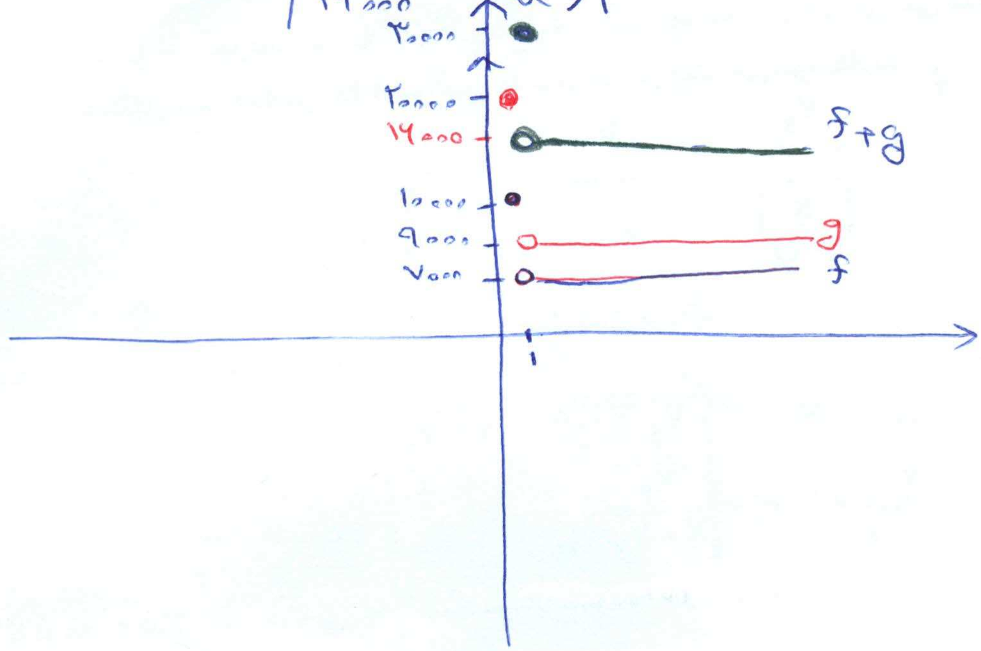
ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد. صفحه بعد

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



$$f(n)=\begin{cases}10000 & n=1\\ 7000 & n>1\end{cases}\qquad g(n)=\begin{cases}20000 & n=1\\ 9000 & n>1\end{cases}$$

$$f(n)+g(n)=\begin{cases}30000 & n=1\\ 16000 & n>1\end{cases}$$



۱
درس

تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی‌مانده، می‌توان سن آن شئ یا موجود را پیدا کرد. در حل این‌گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(\circ)=1$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

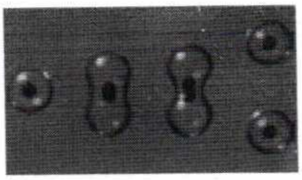
جدول (۱)

$m(t)$ جرم باکتری‌ها	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	?۴
۳۲?	۵
۶۴?	۶
۱۲۸:	۷
۱۰۲۴	۱۰?

الف) در زمان‌های $t=۶$ و $t=۵$ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.
۳۲ گرم ۶۴ گرم

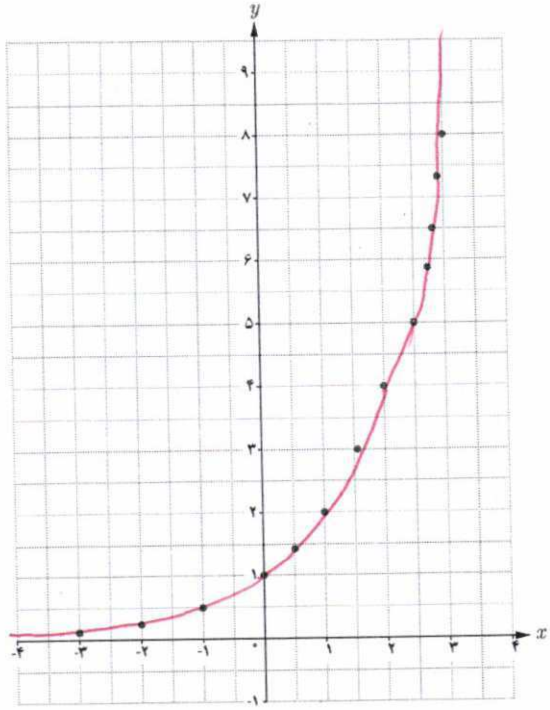
ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟ $t=۸$ و $t=۱۰$

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟ بله
$m(t)=۲^t$ یا ۲^n

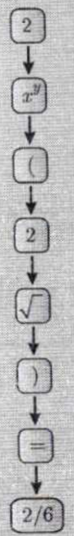


تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



خواندنی

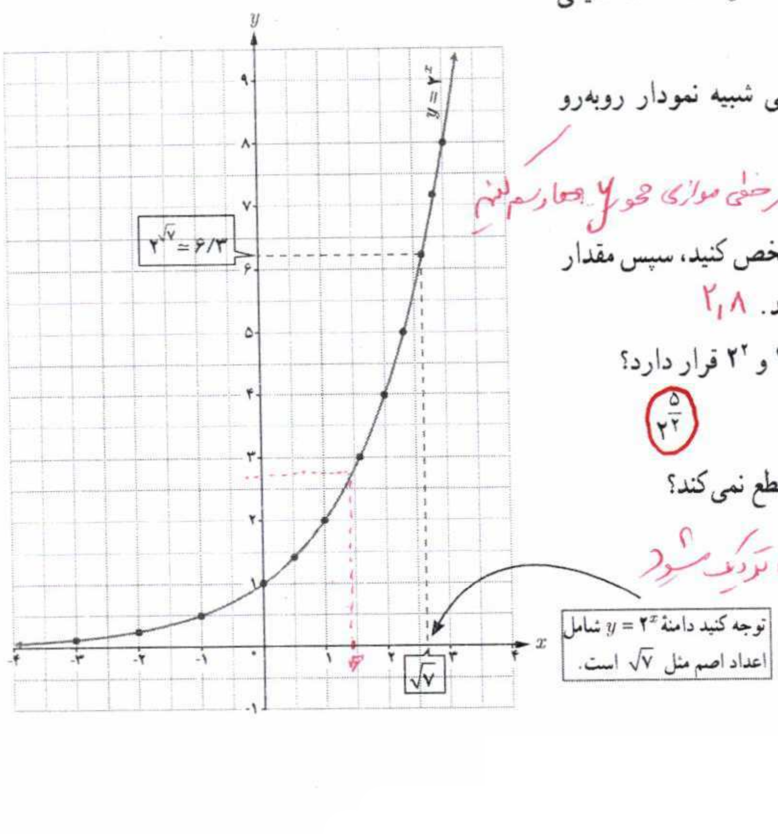


به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیازمندیم. برای محاسبه $۲^{\sqrt{۲}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:

اکنون مقادیر $۲^{۰/۵}$، $۳^{\sqrt{۵}}$، $۳^{۱+\sqrt{۲}}$ و $۳^{۱-\sqrt{۵}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به‌دست آورید.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.



پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟ اگر خطی موازی محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید. ۲٫۸

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$۲^{\frac{۵}{۲}}$ $۲^{\frac{۳}{۲}}$ $۲^۵$ $۲^{-۱}$

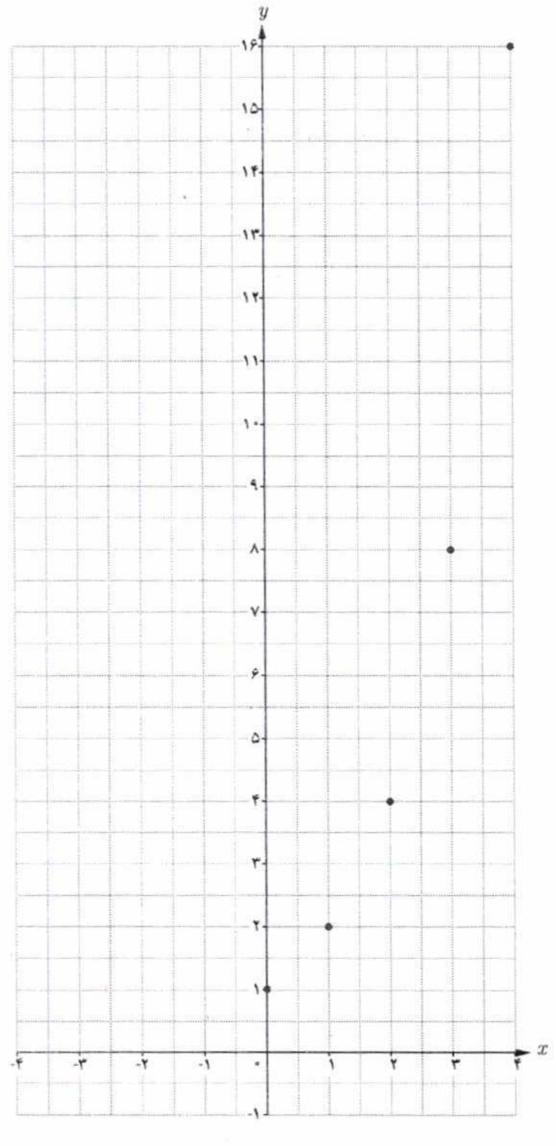
ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

با کاهش نقاط فقط به محور xها نزدیک می‌شود

اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحلهٔ یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$۲^۰ = ۱$
۱	$۲^۱ = ۲$
۲	$۲^۲ = ۴$
۳	$۲^۳ = ۸$?
۴ :	$۲^۴ = ۱۶$
۹ ?	$۲^۹ = ?$ ۵۱۲



نمودار روبه‌رو رابطهٔ بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد.
با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و nام از دنباله زیر به‌دست می‌آید :

$$۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \dots, ۲^n.$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t، از رابطه $m(t)=۲^t$ به‌دست می‌آید.

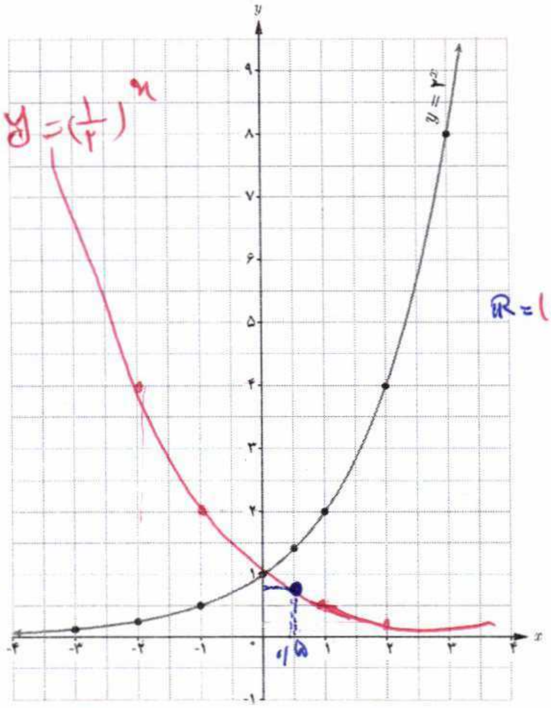
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^x	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^۰$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}}$	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	$۲^۱$	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	$۲^۲$	$۲^۳$
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\sqrt[۳]{۲}=۱/۲۶$	$\sqrt{۲}=۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴}=۱/۵۶$	۲	$\sqrt{۸}=۲/۸۳$	۴	۸

کار در کلاس



الف) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y = 2^x$ مقایسه کنید. نسبت به محور y ها تقارن دارند

ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید. دامنه هر ۲ تابع $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ و برد آنها $(0, +\infty)$ است.

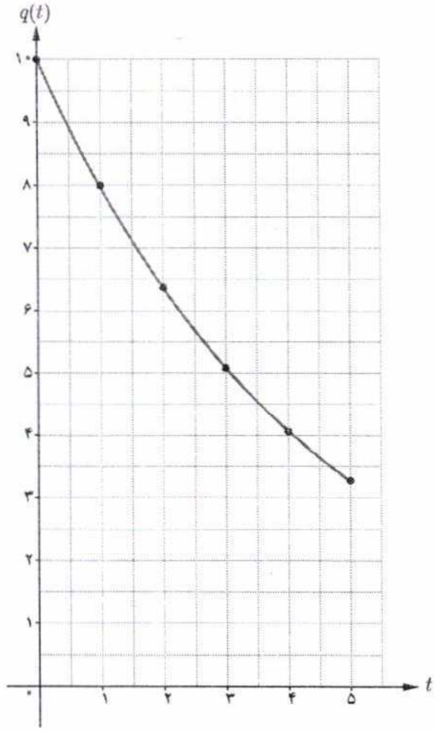
هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

پ) نقطه $\left(0/5, (\frac{1}{2})^{0/5}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

❖ **مثال :** توابع زیر همگی نمایی هستند :

$$g(x) = (\frac{1}{2})^x \ , \ h(x) = (\frac{3}{2})^x \ , \ f(x) = (3/14)^x$$

❖ **تذکر :** در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x) = ka^x$ $(k \neq 0 , a > 0 , a \neq 1)$ **رفتار نمایی** دارد. به‌عنوان مثال، توابع $f(x) = 3 \times 2^x$ یا $g(x) = (\frac{2}{5})^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.



❖ **مثال :** اگر ۱۰ گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t) = 10\left(\frac{4}{5}\right)^t$ به‌دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً ۴ دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با :

$$q(4) = 10\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4/096gr$$

نمودار این تابع برای $0 \leq t \leq 5$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

✤ **مثال** : فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر ۵۷۳۰ سال باشد (یعنی پس از ۵۷۳۰ سال نصف مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به‌دست می‌آید.

الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0)=10\,gr$ و بعد از ۲۰۰۰ سال داریم

$$Q(2000)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}}\simeq 7/85\,gr$$

ب) اگر $t=5730$، آن‌گاه $Q(5730)=10\times\frac{1}{2}=5\,gr$ یعنی بعد از ۵۷۳۰ سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

کار در کلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=2^x$، $g(x)=3^x$ و $h(x)=5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید. $D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,\infty)$

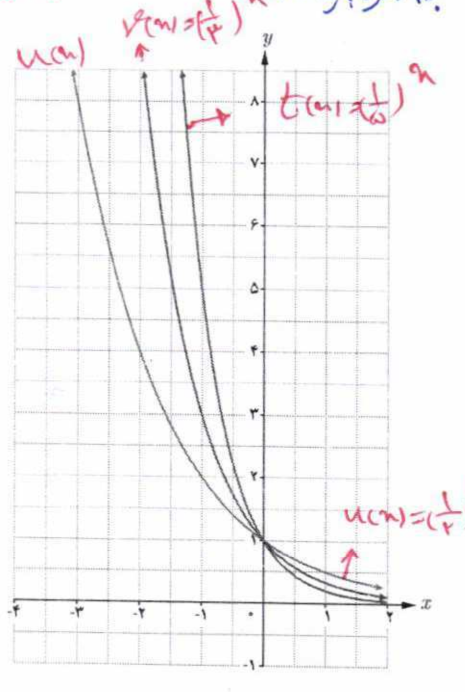
۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟ بله زیرا هر خطی موازی محور xها رسم شود شکل را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟

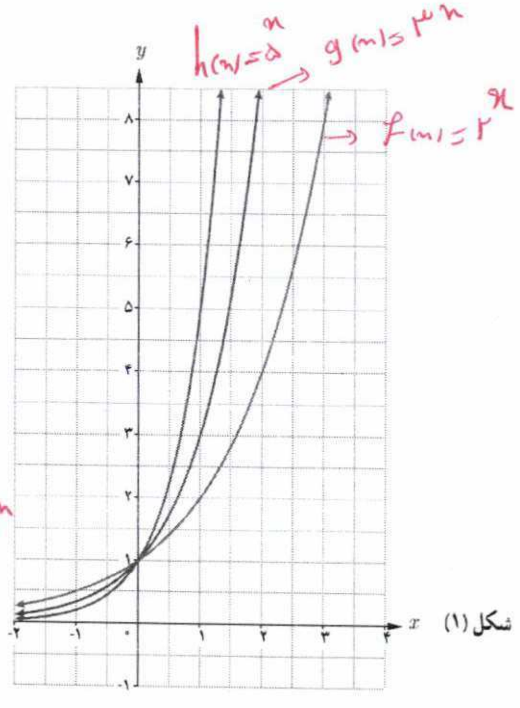
$D=(-\infty,+\infty)$

$R=(0,+\infty)$

بله هر یک به یک هستند



شکل (۲)



شکل (۱)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$۲^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۲}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, (\frac{۱}{۲})^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۳}$

$(\frac{۱}{۲})^{۴} < (\frac{۱}{۲})^{۳} < (\frac{۱}{۲})^{۲} < ۲^{۲} < ۲^{۳} < ۲^{۴}$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ـ اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f ...افزایش... می‌یابند.

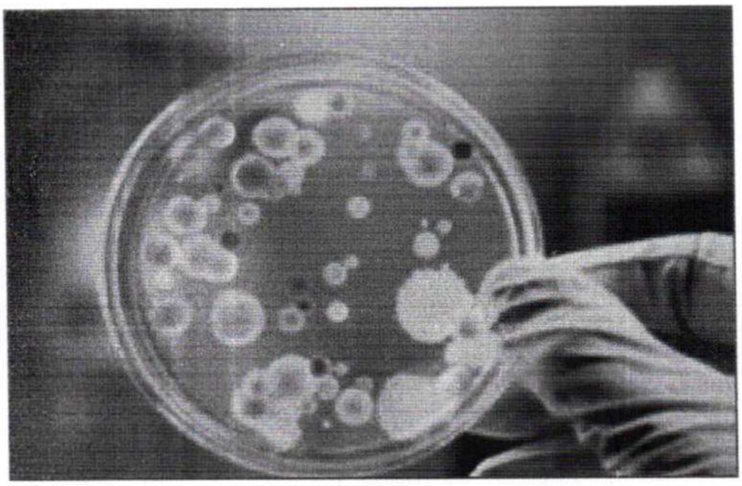
ـ اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f ...کاهش... می‌یابند.

در سال‌های قبل، توان‌های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی‌های مقدماتی آنها آشنا شده‌ایم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم :

۱) $a^{0}=۱$ ۲) $a^{-x}=\frac{۱}{a^{x}}$ ۳) $a^{x} . a^{y}=a^{x+y}$ ۴) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

۵) $(ab)^{x}=a^{x}b^{x}$ ۶) $(\frac{a}{b})^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$ ۷) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

تمرین



۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

$m(t) = ۲^{t/۱۰۰}$

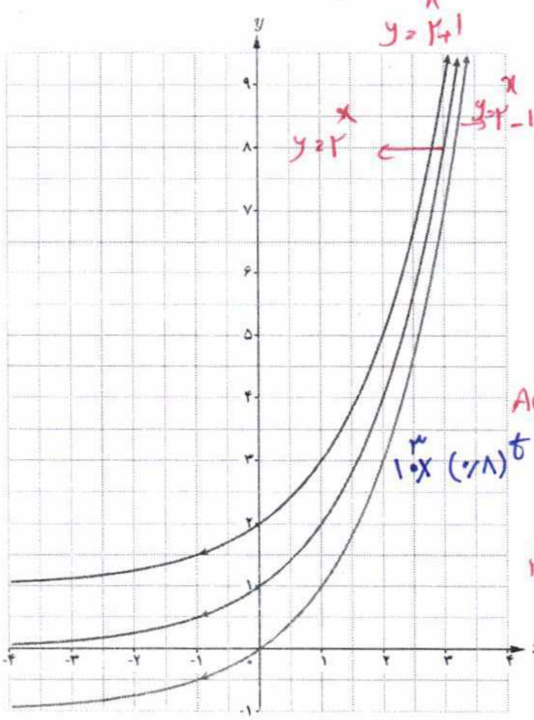
الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$m(t) = ۲^{t/۱۰۰}$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$m(۲۰) = ۲^{۲۰/۱۰۰} = ۲^{\frac{۲}{۱۰}}$

ابتدا نمودار $y=a^x$ را رسم میکنیم ۲ واحد روی محور y ها بالا می بریم آن را $y=a^x+2$ می نامیم
و اگر ۲ واحد نسبت به نمودار $y=a^x$ پایین ببریم آن را $y=a^x-2$ می نامیم



۲ نمودار توابع $y=2^x$ ، $y=2^x+1$ و $y=2^x-1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^x$ ، $y=a^x+2$ و $y=a^x-2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a>1)$.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=10(0/8)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟ $A(8)=10(0/8)^8$

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟ $10^3\times(0/8)^t$

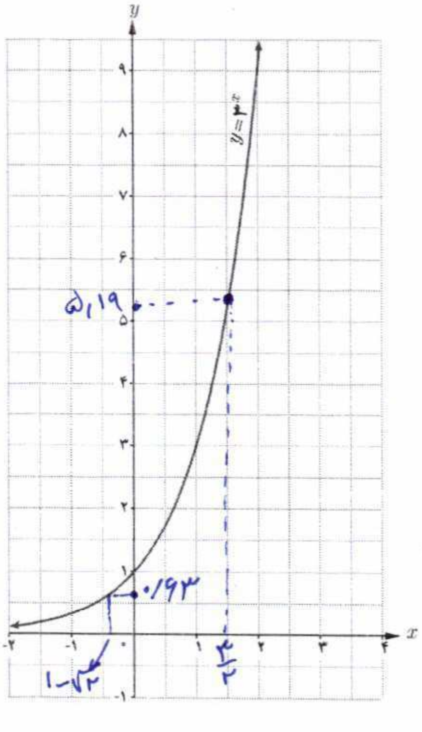
۴ الف) سه عدد بین اعداد $3^{2/5}$ و $3^{\sqrt{10}}$ پیدا کنید. $3^{\sqrt{8}}$ و $3^{\sqrt{7}}$ و $3^{\sqrt{6}}$

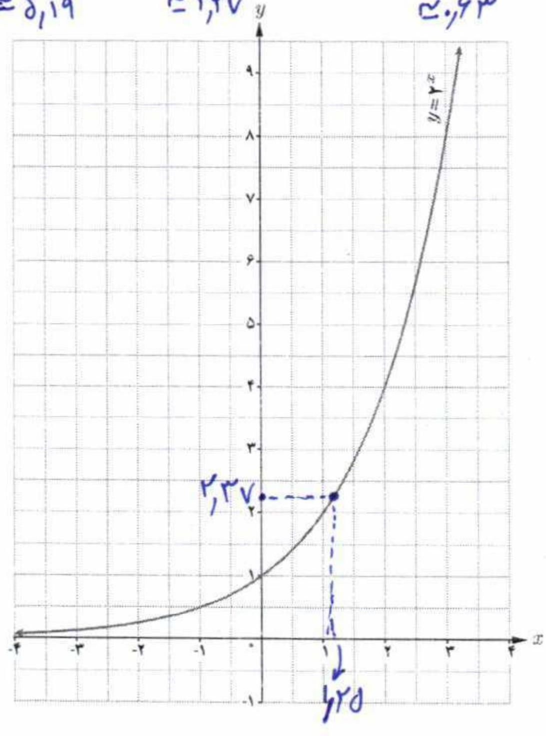
ب) نامعادلهٔ توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید. $2^{4x-2}>2^{-10} \rightarrow x>-2$

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>1)$. $x>y>z$

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

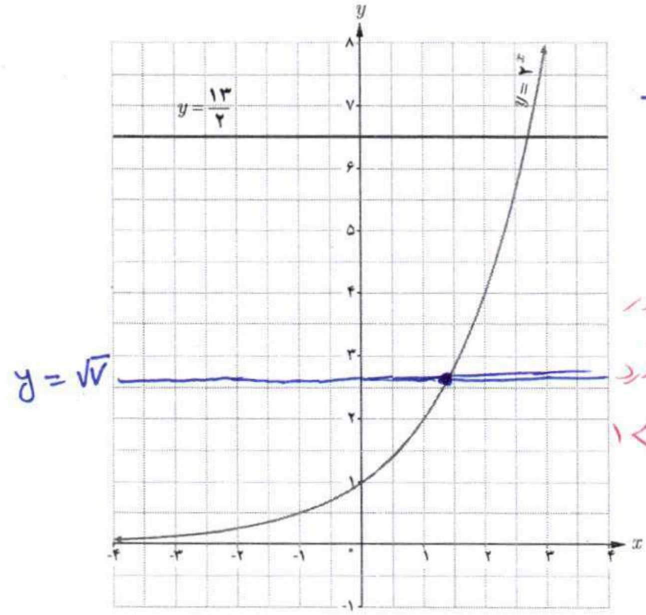
الف) $3^{1-\sqrt{2}}$ $\simeq 0/63$ ب) $2^{1/25}$ $\simeq 2/37$ پ) $3^{\frac{3}{2}}$ $\simeq 5/19$





۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $۲ < x < ۳$

$\rightarrow ۲^۲ < y < ۲^۳$

ب) $\sqrt{۴} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹}$

$۲ < \sqrt{۷} < ۳$

بین $\sqrt{۷}$ بین ۲ و ۳ روی محور y هاست و طول نقطه برخورد خط و منحنی بین $۱ < x < ۲$ است.

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

لایه ۱ $\quad ۰/۷ \rightarrow$ ۷۰٪ درصد

لایه ۲ $\quad (۰/۷)^۲ \rightarrow ۴۹٪$

لایه n $\quad (۰/۷)^n \rightarrow \frac{۷^n}{۱۰^n}$

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ $= \frac{۷^n}{۱۰۰ \times ۱۰^{n-۲}} = \frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}٪$

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

$\frac{۷^n}{۱۰۰ \times ۱۰^{n-۲}} < \frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow$

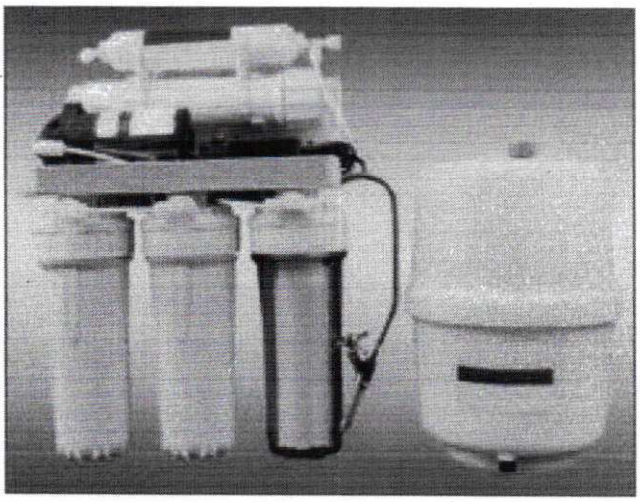
$۰/۷^{n-۲} \times ۷^۲ < ۴ \rightarrow$

$۰/۷^{n-۲} < \frac{۴}{۴۹} \xrightarrow{\log_{۰/۷} \text{طرفین}}$

$\log_{۰/۷} ۰/۷^{n-۲} > \log_{۰/۷} \frac{۴}{۴۹}$

$n-۲ > \log_{۰/۷} \frac{۴}{۴۹} \rightarrow$

$n > \log_{۰/۷} \frac{۴}{۴۹} + ۲ \rightarrow n > ۲ + ۲\log_{۰/۷} \frac{۲}{۷}$



درس ۲
تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t) = ۵۱۲$، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t) = ۲^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون‌پذیر است و از این رو $t = m^{-1}(۵۱۲)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

خواندنی

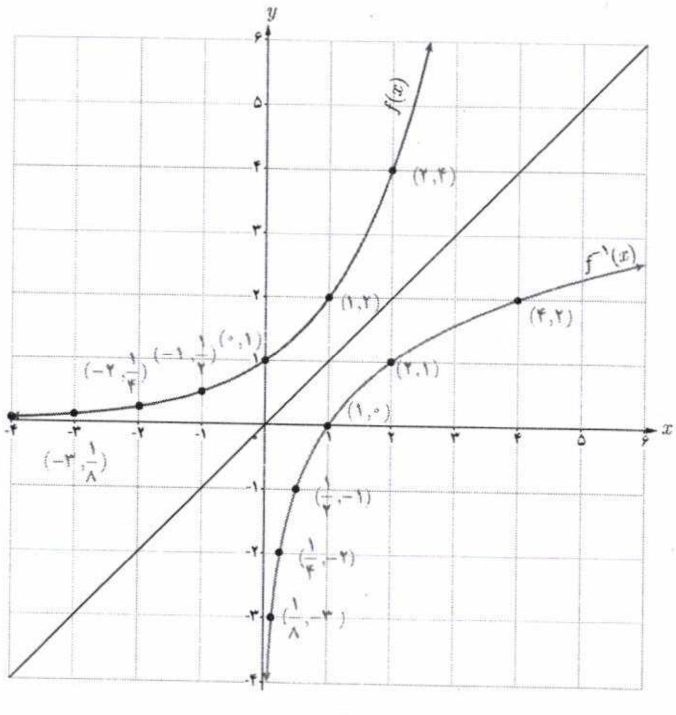
جان نپر (John Napier)

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

t (زمان)	$m(t) = p$، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

$\Rightarrow$

$m^{-1}(p)$، زمان رسیدن به جرم p	t (زمان)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵



نمودارهای تابع $y = f(x) = ۲^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y = ۲^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y = x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه (۲,۴) روی تابع نمایی $y = ۲^x$ و نقطه (۴,۲) که قرینه آن نسبت به خط $y = x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

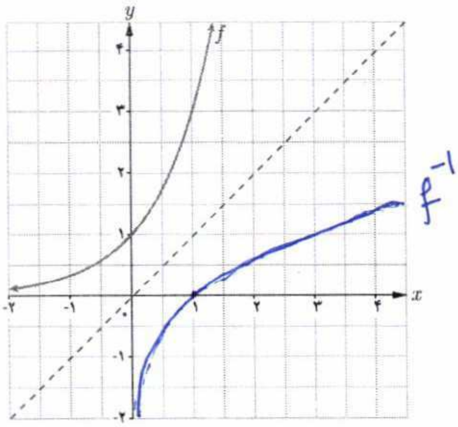
$D_f = (-\infty, +\infty)$ ، $R_f = (۰, +\infty)$

$D_{f^{-1}} = (۰, +\infty)$ ، $R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

توجه کنید که دامنه f با برد f^{-1} برابر است و برد f با دامنه f^{-1}.

فعالیت

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x)=3^x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$	⇔	$f^{-1}(\frac{1}{9})=-2$
$f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$	⇔	$f^{-1}(\frac{1}{3})=-1$
$f(0)=3^{0}=1$	⇔	$f^{-1}(1)=0$
$f(1)=3^{1}=3$	⇔	$f^{-1}(3)=1$
$f(\frac{3}{2})=3^{\frac{3}{2}}$	⇔	$f^{-1}(3^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}$
$f(2)=3^{2}=9$	⇔	$f^{-1}(9)=2$

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ ($\frac{1}{9}$ و ۲−) روی نمودار f قرار دارد. ✓

ـ نقطه ($\frac{1}{3}$ و ۱−) روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ✗

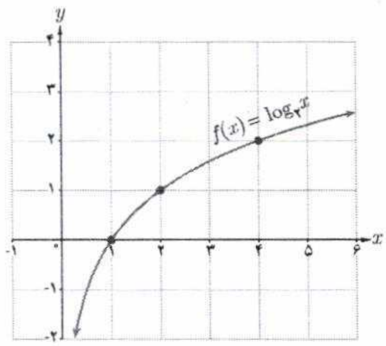
ـ نقطهٔ (۰ و ۱) روی نمودار f قرار دارد. ✗

ـ نقطه (۲− و $\frac{1}{9}$) روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ✓

ـ تابع f^{-1} یک به یک است. ✓

فرض کنید داریم $f(x)=3^x$ و $y=f^{-1}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y=\log_3 x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

> اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y=\log_a x$ نشان داده می‌شود.



✤ مثال : وارون تابع $f(x)=5^x$ تابع $f^{-1}(x)=\log_5 x$ است.

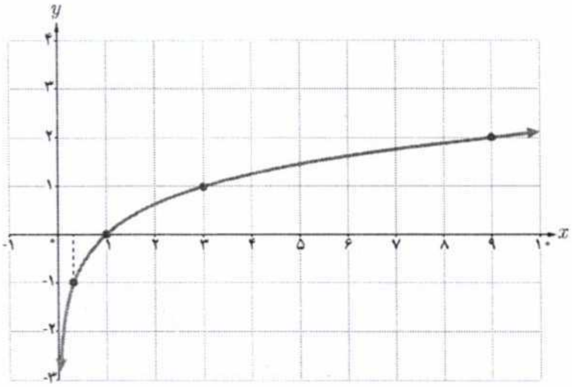
همچنین وارون تابع $g(x)=(\frac{1}{3})^x$ تابع $g^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ است.

✤ مثال : با توجه به نمودار $f(x)=\log_2 x$ ، می‌توان دید :

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(4)=2$



✤ مثال : مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_3 x$ به‌دست آمده‌اند.

$f(1) = 0$

$f(3) = 1$

$f(\frac{1}{3}) = -1$

$f(9) = 2$

به‌طور کلی

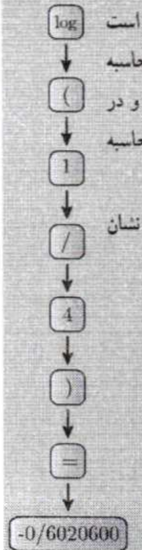
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

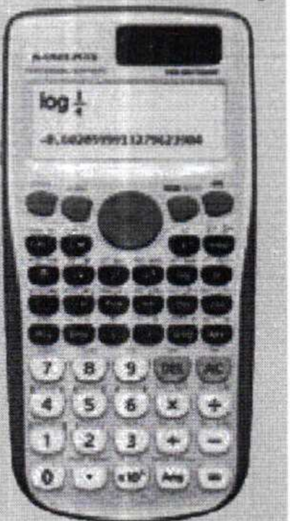
به عنوان مثال، $\log_2 8 = 3$ زیرا $8=2^3$ و یا $\log_{10} 1000 = 3$، زیرا $10^3=1000$.

همچنین $\log_{10}\frac{1}{100} = -2$ ، زیرا $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین‌حساب کافی است از دگمه log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{10} 10$ ابتدا دگمه log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دگمه = را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{10}\frac{1}{4}$ به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:
و ماشین‌حساب مقدار آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهد.





✤ مثال : فرض کنید $f(x) = \log_{10} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x=10$ ب) $x=100$

پ) $x=-2$ ت) $x=1000$

✤ حل :

الف) $f(10) = \log_{10} 10 = 1$، زیرا $10^1=10$.

ب) $f(100) = \log_{10} 100 = 2$، زیرا $10^2=100$.

پ) $f(-10)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(1000) = \log_{10} 1000 = 3$، زیرا $10^3=1000$.

❖ **مثال :** با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم :

$3^4=81$	$2^{10}=1024$	$5^3=125$	$6^2=36$	$2^5=32$
$\log_3 81=4$	$\log_2 1024=10$	$\log_5 125=3$	$\log_6 36=2$	$\log_2 32=5$

❖ **مثال :** تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_7 1=0$ ب) $\log_3 \frac{1}{27}=-3$

❖ **حل :**

الف) اگر $\log_7 1=0$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $7^0=1$.

ب) اگر $\log_3 \frac{1}{27}=-3$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $3^{-3}=\frac{1}{27}$.

❖ **مثال :** مقادیر زیر را محاسبه کنید :

الف) $\log_2 8$ ب) $\log_6 6$ پ) $\log_4 1$

❖ **حل :**

الف) اگر $a=\log_2 32$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $32=2^a$ و از این رو $a=5$.

ب) اگر $b=\log_6 6$ ، آن‌گاه $6=6^b$ و در نتیجه $b=1$.

پ) اگر $c=\log_4 1$ ، آن‌گاه $4^c=1$ و در نتیجه $c=0$.

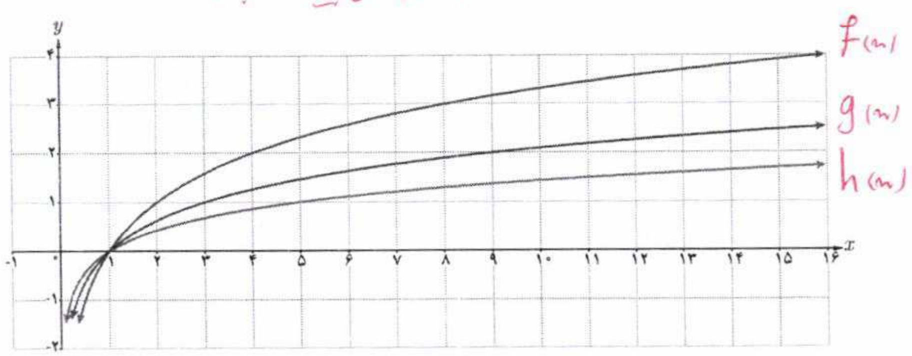
کار در کلاس

۱ الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_2 x$ ، $g(x)=\log_3 x$ و $h(x)=\log_5 x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

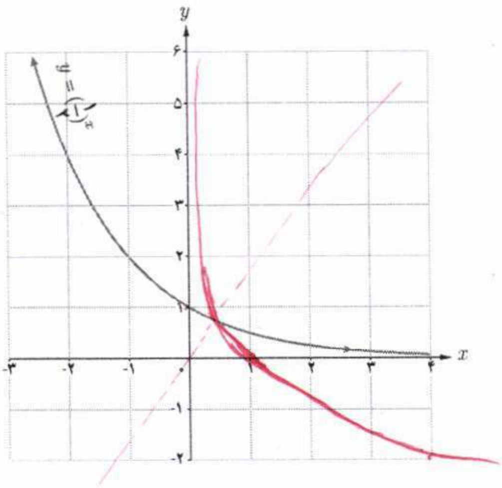
ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

$(16,4)$ و $(9,2)$ و $(5,1)$

$\in f(x)$ متعلق به $g(x)$ متعلق به $h(x)$



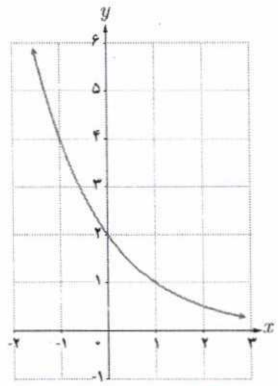
پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. نسبت به خط $y=x$ قرینه هم‌اند

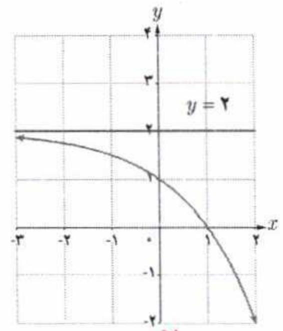


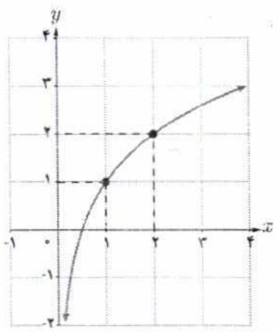
۲ مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

با بررسی نقاط کار تشخیص ضابطه و نمودار ساده‌تر است.

الف) $y=-۲^x+۲$ ب) $y=\log_۲(x+۱)$ پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$







پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$

الف) $y=-۲^x+۲$

شکل ب را نمی‌دهد زیرا جواب‌ها تا آن باید $x=-۱$ باشد نه $x=۰$

مفهوم مجانب قائم جزو اهداف نیست.

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۳ ۸۱$ ب) $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$ پ) $\log_۲ ۸$

$\log_۳ ۳^۴ = ۴\log_۳ ۳ = ۴$

$=۱$

$\log_۲ ۲^۳ = ۳\log_۲ ۲ = ۱$

تمرین

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$$\log_{۱۰} ۰/۰۱ \quad , \quad \log_{۶} \frac{۱}{۶} \quad , \quad \log_{۲} \sqrt{۲} \quad , \quad \log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

ـ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. ✗ مبنا را معلوم نکرده است

ـ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓

ـ تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. ✓

ـ تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند. ✗

ـ اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d,b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. ✓

ـ اگر $a>b>۰$ آنگاه $\log_{۱۰} a < \log_{۱۰} b$. ✗ در مبنای بیشتر از ۱ تابع لگاریتم صعودی است.

$a>b \rightarrow \log_{10} a > \log_{10} b$

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۱+\log_{۲} x$ ب) $y=-۳^x-۲$ پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$

۳
درس

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به‌کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های سادهٔ لگاریتم به‌صورت زیر هستند :

✤ مثال :

الف) $\log_a ۱ = ۰$، زیرا $a^۰ = ۱$

ب) $\log_a a = ۱$، زیرا $a^۱ = a$

✤ **مثال :** نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a، b و c، که $c \neq ۱$، همواره داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

✤ **حل :** فرض کنیم $x = \log_c a$ و $y = \log_c b$. پس طبق تعریف، $a = c^x$ و $b = c^y$. از این رو $ab = c^x \cdot c^y = c^{x+y}$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab = x + y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

✤ **مثال :** با توجه به مثال قبل، $\log_a b^۲ = \log_a (b \times b) = \log_a b + \log_a b = ۲\log_a b$. به‌طور مشابه $\log_a b^۳ = \log_a (b^۲ \times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = ۳\log_a b$ و به‌طور کلی اگر $a, b > ۰$ ، $a \neq ۱$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n = n$.

قرار داد : همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{۱۰} a$. همچنین، لگاریتم در پایه ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

✤ **مثال :** فرض کنیم $a = \log ۲$. نشان دهید $\log ۵ = ۱ - a$.

✤ **حل :** می‌دانیم $\log_{۱۰} ۱۰ = ۱$، پس طبق مثال بالا، $۱ = \log ۱۰ = \log ۲ + \log ۵$ و در نتیجه $\log ۵ = ۱ - \log ۲ = ۱ - a$.

$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a \times \frac{1}{b} = \log_c a + \log_c \frac{1}{b} = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a - \log_c b$ سوال ۱

الف) $\log 0/75 = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2 = \log 3 - 2\log 2 = b - 2a$ سوال ۲

ب) $3\log (2^2)^{\frac{1}{3}} - \log \frac{1000}{4} = 3(\frac{1}{3}) \log 2^2 - \log 1000 + \log 4 = 2\log 2 - 3 + 2\log 2 = 4a - 3$

پ) $\log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000 = \log \frac{10}{2} - \log 10^3 = \log 10 - \log 2 - 3 = 1 - a - 3 = -2 - a$

کار در کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a = \log 2$ و $b = \log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75$ ب) $3\log \sqrt[3]{4} - \log 250$ پ) $\log 0/005$

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادلهٔ شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به‌دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می‌گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند. تساوی‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند :

$$\log (x+1) = 3 \quad , \quad \log_2 x = \log_3 r \quad , \quad \log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$$

در حالت کلی داریم :

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و بالعکس، اگر $x, y > 0$ و $x = y$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

مثال : معادلهٔ لگاریتمی $\log_5 (x^2 - 2) = \log_5 x$ را حل کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید $x = 2 - x^2$ و از این‌رو $x^2 - x - 2 = 0$. از طرفی $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$ و در نتیجه ریشه‌های معادله اخیر برابر است با ۲ و ۱-. قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی **آزمایش کردن جواب‌هاست**. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول $x = 2$ است (چرا؟).

مثال : معادله لگاریتمی $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

حل : می‌دانیم $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 \left(\frac{x^3}{4}\right)$، بنابراین $\log_5 \left(\frac{x^3}{4}\right) = \log_5 16$ و در نتیجه $\frac{x^3}{4} = 16$. از این رو $x^3 = 16 \times 4 = 64$. بنابراین $x = 4$. با جای‌گذاری $x = 4$ در معادله بالا می‌توان دید این جواب قابل قبول است.

الف) $\log_{5}^{2x-1} = \log_{5}^{x}$ ابتدا دامنه را تعریف می‌کنیم $2x-1>0$ ، $x>\frac{1}{2}$ و $x>0$ $\xrightarrow[\text{آن}]{\text{اشتراک}}$ $x>\frac{1}{2}$

حل $2x-1=x \to x=1$ در دامنه برقرار است

ب) $\log_{3} (x-1)(\frac{x}{2}+1) = 2 \to (x-1)(\frac{x}{2}+1)=9 \xrightarrow{\text{در ۲ ضرب}} (x-1)(x+2)=18 \to x^2+x-2-18=0 \to$

$x^2+x-20=0 \to (x+5)(x-4)=0$ $\begin{cases} x=-5 & \text{غ ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$

پ) $x(x+3)=10 \to x^2+3x-10=0 \to (x+5)(x-2)=0$ $\begin{cases} x=-5 & ✗ \\ x=2 & ✓ \end{cases}$

فعالیت

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

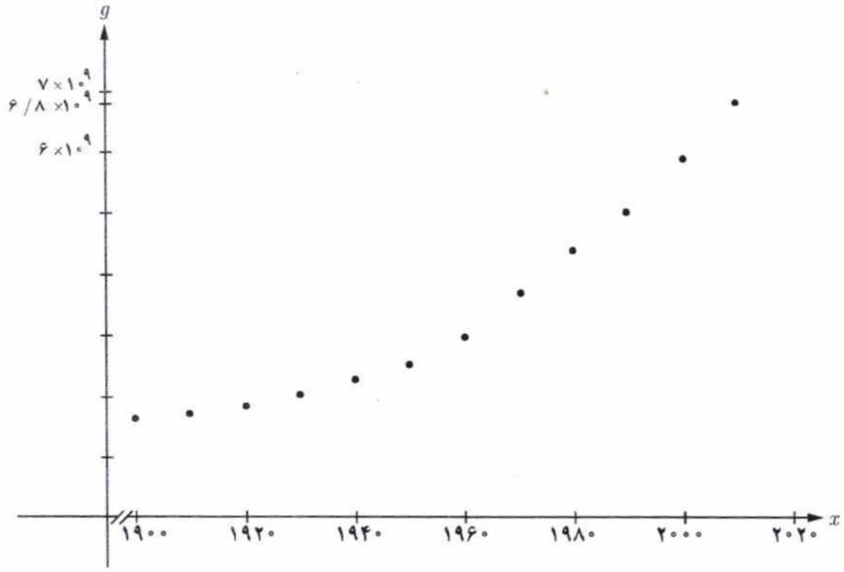
الف) $\log_{5}(2x-1) = \log_{5}x$ ب) $\log_{3}(x-1) + \log_{3}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$ پ) $\log x + \log(x+3) = 1$

کاربردهای لگاریتم

مثال : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست‌ویکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰

الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است :



ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور gها بیانگر جمعیت باشد[1]، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x)=0/008(1/01376)^x$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$g(2016)=0/008\,(1/01376)^{2016} \simeq 7{,}385{,}074{,}512$.

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x)= 8\times10^{-3}\,(1/01376)^x = 8\times10^9$$

$$\Rightarrow (1/01376)^x = 10^{12} \Rightarrow x\log 1/01376 = \log 10^{12} \Rightarrow x = \frac{12}{\log 1/01376} \simeq 2021$$

$(\log 1/01376 \simeq 0/005935)$

۱ــ دقت کنید که نقطه ابتدایی دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

✤ مثال : ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

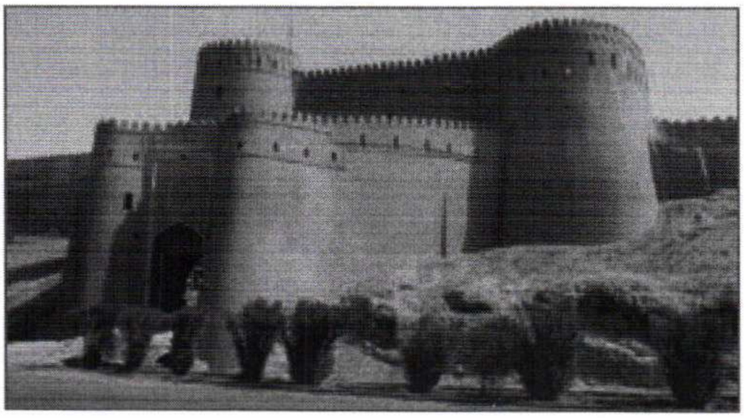
$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشتری برابر است با :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,(۶/۶) = ۲۱/۷ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg.$$

خواندنی

جالب است بدانید که :
در زلزله ۶/۶ ریشتری بم (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که بیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت از بین رفت. با توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ۸ ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد شده در زلزله بم معادل انفجار $\frac{۶/۶\times۱۰^{۹}}{۸} = ۸۲۵\times۱۰^{۶}$ (۸۲۵ میلیون) تن TNT بوده است.



✤ مثال : نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴\times ۲^{\frac{-t}{۲۵}}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، به‌عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰سال برابر است با :

$$m(۴۰) = ۲۴\left(۲^{-\frac{۴۰}{۲۵}}\right) \approx ۷/۹۰ \text{ میلی‌گرم}$$

$m(t)$(جرم برحسب میلی‌گرم)	t (زمان برحسب سال)
۲۴	۰
$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$	۲۵
$\frac{۱}{۲^{۲}}\times ۲۴ = ۶$	۵۰
$\frac{۱}{۲^{۳}}\times ۲۴ = ۳$	۷۵
$\frac{۱}{۲^{۴}}\times ۲۴ = ۱/۵$	۱۰۰

سوال ۱

الف) $۲\log_۴ m - \log_۴ m - ۳ = ۰ \to \log_۴ m = ۳ \to m = ۴^۳ = ۶۴$

ب) $\log_۲ \frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳} = ۲ \to \frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳} = ۴ \to ۱۲b - ۲۱ = ۴b^۲ - ۱۲ \to ۴b^۲ - ۱۲b + ۹ = ۰ \to (۲b-۳)^۲ = ۰$
$\Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$ غ ق ق

پ) $x^۲ - ۱ = ۱۰ \to x^۲ = ۱۱ \to x = \pm\sqrt{۱۱}$ ✓

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۴ m^۲ - \log_۴ m - ۳ = ۰$

ب) $\log_۲ (۱۲b - ۲۱) - \log_۲ (b^۲ - ۳) = ۲$

پ) $\log_{\frac{۱}{۱۰}} (x^۲ - ۱) = -۱$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$y = m(t) = ۲^t \to \log_۲ y = t$

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$m(t) = ۲^t = ۵۰۰۰ \to$

$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$

$\log_۲ ۵۰۰۰ = t \Rightarrow \log_۲ ۵^۴ \times ۲^۳ = ۴\log_۲ ۵ + ۳\log_۲ ۲ = ۴\log_۲ \frac{۱۰}{۲} + ۳ = ۴(\log_۲ ۱۰ - \log_۲ ۲) + ۳ =$
$۴ \times \frac{۱}{\log_{۱۰} ۲} - ۱ \times ۴ + ۳ = \frac{۴}{۰/۳۰۱} - ۱$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱, a, b > ۰)$ ✗

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱, a, b, c, d > ۰)$ ✓

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$ ✗

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. ✗

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

$m(t) = ۱ \times ۲^{-\frac{t}{۴}} = ۲^{-\frac{t}{۴}}$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

ب) $۲^{-\frac{t}{۴}} = ۰/۰۱ \to \log ۲^{-\frac{t}{۴}} = \log ۱۰^{-۲} \to -\frac{t}{۴}\log ۲ = -۲ \to$
$-\frac{t}{۴} = \frac{-۲}{\log ۲} \to t = \frac{۸}{\log ۲} = \frac{۸}{۰/۳۰۱} \sim ۲۶$ سال

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱ , \log ۲ \simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log (۱۸ \times ۳۷۵)$

تجزیه کنیم

$\log ۲ \times ۳^۳ \times ۵^۳ = \log ۲ + ۳\log ۳ + ۳\log ۵$
$۰/۳۰۱ + ۳(۰/۴۷۷۱) + ۳(۱ - ۰/۳۰۱)$

$\log ۱۰ - \log ۲$

ب) $\log \sqrt{۰/۷۵}$

$\log (\frac{۳}{۴})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}(\log ۳ - \log ۲^۲) = \frac{۱}{۲}(۰/۴۷۷۱ - ۲(۰/۳۰۱))$

پ) $\log_۲ \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}$

$= \log_۲ ۸^{\frac{۱}{۲}} - \log_۲ ۲^{\frac{۱}{۴}} = \log_۲ ۲^{\frac{۳}{۲}} - \log_۲ ۲^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۲} \times ۱ - \frac{۱}{۴} \times ۱ = \frac{۵}{۴}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

■ $\log_b a \times \log_a b = ۱$ ✓

■ $\log ۵ = \log ۳ + \log ۲$ ✗

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$m(t) = ۱۲۸ \times ۲^{-\frac{t}{۳۰}} \qquad t = ۳۰۰$

$m(۳۰۰) = ۱۲۸ \times ۲^{-\frac{۳۰۰}{۳۰}} = ۱۲۸ \times ۲^{-۱۰} = ۲^۷ \times ۲^{-۱۰} = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$ جرم باقی مانده بعد از ۳۰۰ سال

مثلثات

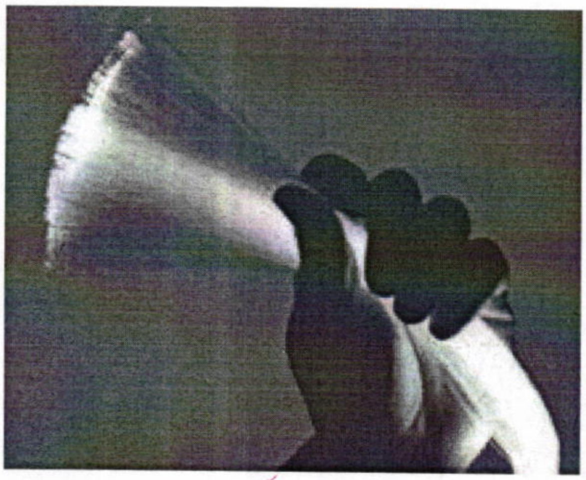
فصل ۴

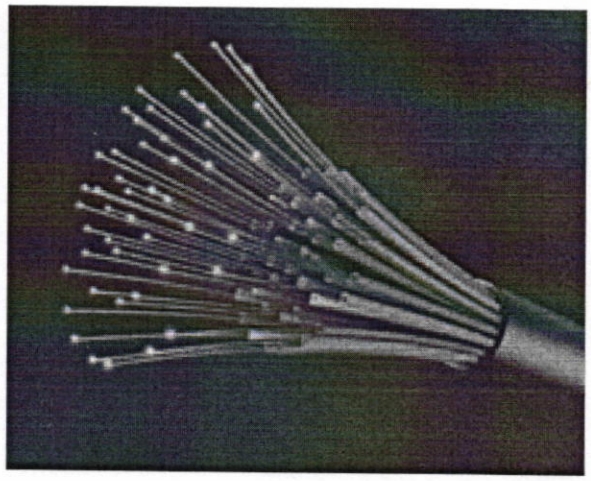
۱ رادیان

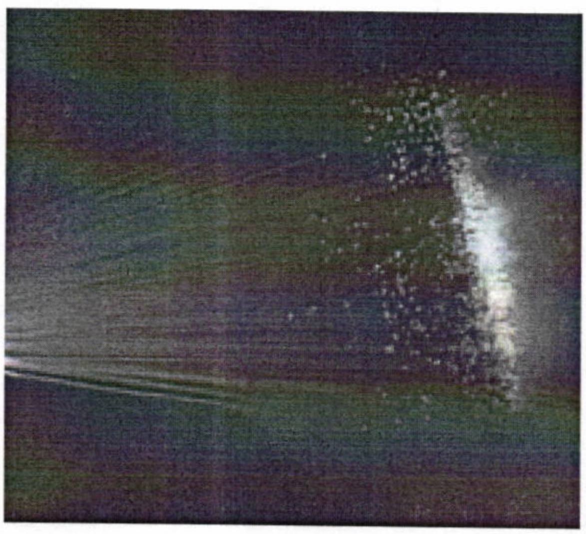
۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا







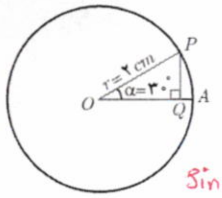
فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند.
معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

درس ۱

رادیان

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱ دایرهٔ مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

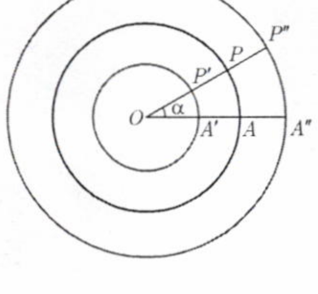
اندازه ضلع PQ در مثلث $\overset{\Delta}{OPQ}$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سال گذشته به‌دست آورید.

$\sin\alpha = \frac{PQ}{OP} \rightarrow \sin 30 = \frac{PQ}{2} \rightarrow PQ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

۲ باتوجه به اینکه کمان °۳۰ برابر $\frac{۱}{۱۲}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی $\widehat{PA}$) را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$\frac{1}{360} \times 30 = \frac{1}{12}$

$$\widehat{PA} = \frac{۱}{۱۲} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۱۲} \times ۲\pi \times ۲ = \frac{۴}{۱۲}\pi = \frac{\pi}{۳}\ cm$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را که روبه‌رو به زاویه $\alpha=۳۰°$ هستند به‌دست آورید.

$\widehat{P'A'} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{6}$ cm

$\widehat{P''A''} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 3 = \frac{\pi}{2}$ cm

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

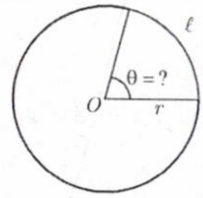
پ) اگر در شکل صفحهٔ قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12}\times 2\pi\times r}{r}=\dots\frac{\pi}{6}\dots$$

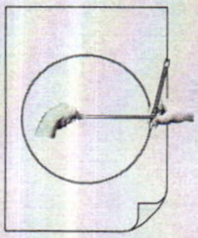
در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت $\frac{\pi}{6}$ ... است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۳ در یک دایره به شعاع r، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازهٔ زاویهٔ θ تقریباً چند درجه است؟ (از نقاله استفاده کنید)

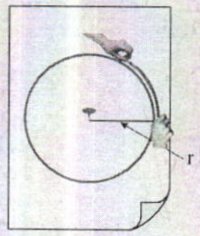
$\frac{L}{r}=1$ Rad



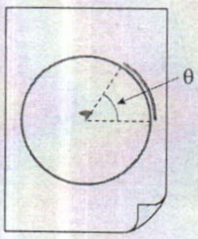
$1_{Rad}=۵۷,۳$ deg



به کمک یک تکه نخ یک دایره رسم کنید.



نخ را بر روی محیط دایره قرار دهید.

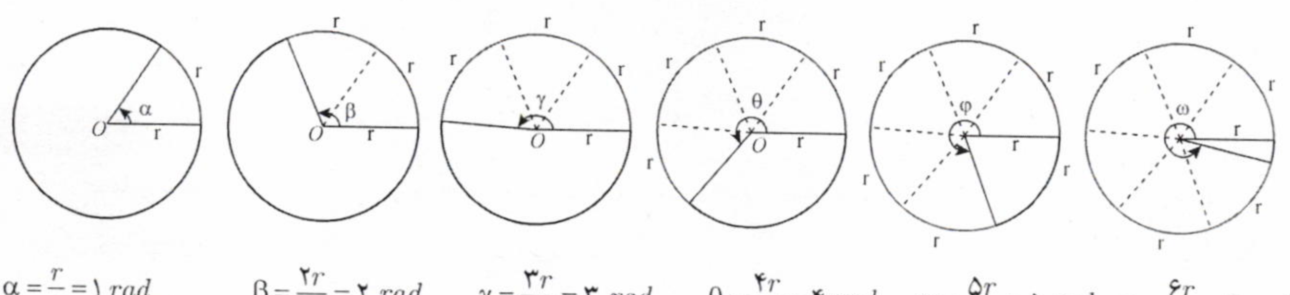


ابتدا و انتهای نخ را به مرکز وصل کنید تا زاویه‌ای مرکزی به‌وجود آید. توضیح دهید چرا این زاویه یک رادیان است.

همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازهٔ زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازهٔ زاویهٔ θ برابر ۱ **رادیان** است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



$\alpha=\frac{r}{r}=1\ rad$ $\beta=\frac{2r}{r}=2\ rad$ $\gamma=\frac{3r}{r}=3\ rad$ $\theta=\frac{4r}{r}=4\ rad$ $\varphi=\frac{5r}{r}=5\ rad$ $\omega=\frac{6r}{r}=6\ rad$

✤ **مثال** : اندازهٔ یک زاویهٔ نیم صفحه (۱۸۰°) و نیز یک زاویه قائمه (۹۰°) برحسب رادیان چقدر است؟

✤ **حل** : می‌دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم :

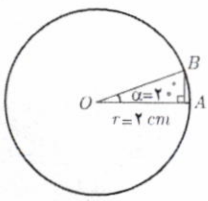
$$\frac{\frac{۲\pi r}{۲}}{r}=\frac{\pi r}{r}=\pi\ rad$$

پس یک زاویه ۱۸۰° برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس :

$$\frac{\frac{۲\pi r}{۴}}{r}=\frac{\frac{\pi}{۲}r}{r}=\frac{\pi}{۲}\ rad$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta=\frac{l}{r}$$



✤ **مثال** : در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را برحسب رادیان به‌دست آورید، سپس طول $\widehat{AB}$ را پیدا کنید.

✤ **حل** : از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویهٔ ۱۸۰° برابر π رادیان است. بنابراین داریم :

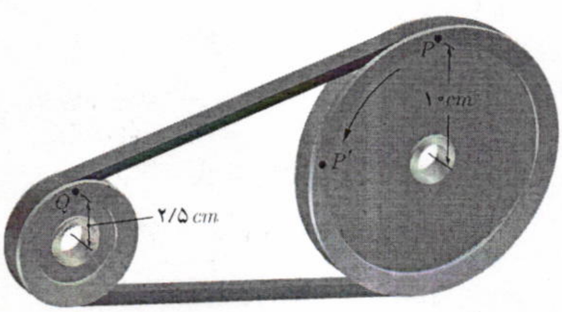
$$\frac{۲۰}{\alpha\ (\text{برحسب رادیان})}=\frac{۱۸۰}{\pi}\Rightarrow \alpha=\frac{۲۰\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۹}\ rad$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{۹}$ رادیان است. اکنون برای به‌دست آوردن طول $\widehat{AB}$ داریم :

$$\alpha=\frac{\widehat{AB}}{r}\Rightarrow \frac{\pi}{۹}=\frac{\widehat{AB}}{۲}\Rightarrow \widehat{AB}=\frac{۲\pi}{۹}cm$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$



✤ **مثال** : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $۱۰\ cm$ و $۲/۵cm$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطهٔ P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi rad \simeq ۳/۱۴ rad$)

✤ **حل** : ابتدا مسافتی را که نقطهٔ P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی می‌کند به‌دست می‌آوریم.

$$\theta=\frac{\widehat{PP'}}{r}\Rightarrow \widehat{PP'}=r\theta=۱۰\times\frac{\pi}{۲}=۵\pi\ \ cm\simeq ۱۵/۷cm$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقرهٔ کوچک‌تر نیز $5\pi\ cm$ حرکت می‌کند. برای این قرقره داریم :

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = \frac{۵\pi}{\frac{۵}{۲}} = ۲\pi\ rad$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی‌گردد.

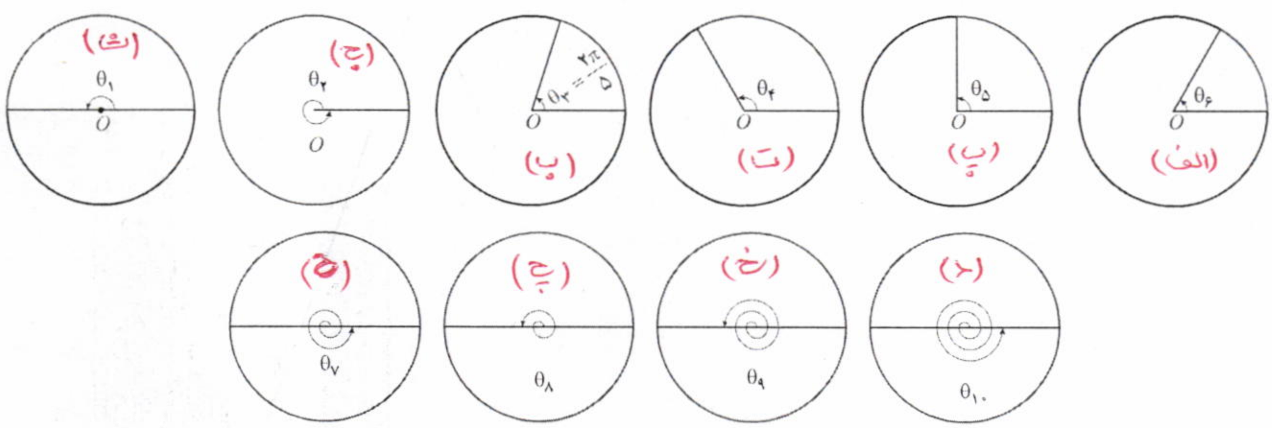
کار در کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

زاویه برحسب درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	۳۹۰°	۴۲۰°
زاویه برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	$\frac{۱۳\pi}{۶}$	$\frac{۷\pi}{۳}$

۲ در زیر، اندازهٔ برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{۲\pi}{۶}$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}$ پ) $\frac{۲\pi}{۴}$ ت) $\frac{۲\pi}{۳}$ ث) $\frac{۲\pi}{۲}$ ج) ۲π چ) ۳π ح) ۴π خ) ۵π د) ۶π



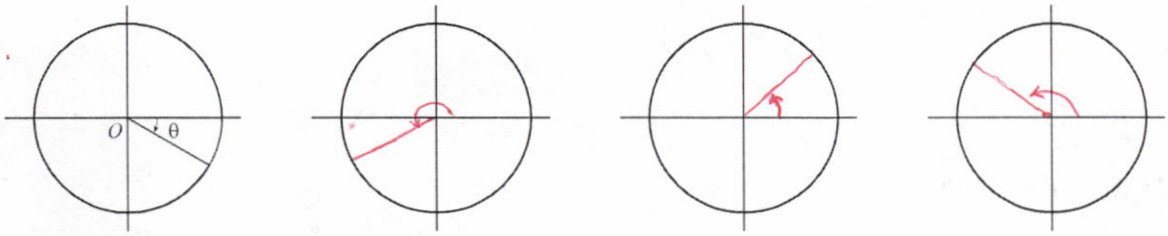
۳ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته‌شده را در جاهای خالی بنویسید.

θ(رادیان) / نسبت	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	π
sinθ	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	-۱	۰	۰
cosθ	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	-۱
tanθ	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	تعریف نشده	۰	۰
cotθ	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	۰	تعریف نشده	تعریف نشده

شایسته است به این جدول زاویه‌ی π رادیان هم اضافه شود.

تمرین

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.

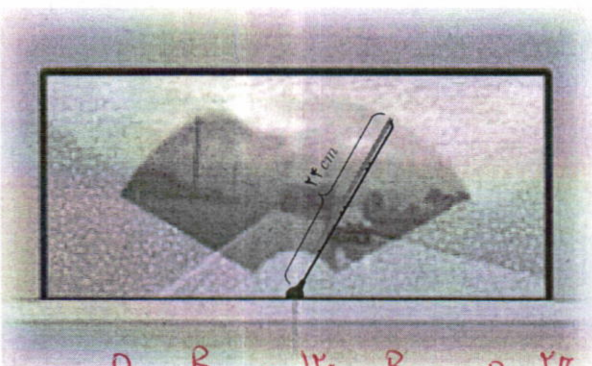


$\gamma = \pi - \frac{\pi}{۶} =$ انتهای کمان در ربع دوم است.

$\beta = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} =$ انتهای کمان در ربع اول است.

$\alpha = \pi + \frac{\pi}{۳} =$ انتهای کمان در ربع سوم است.

$\theta = -\frac{\pi}{۶}$ انتهای کمان در ربع چهارم است.



۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲۰° طی می‌کند. $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

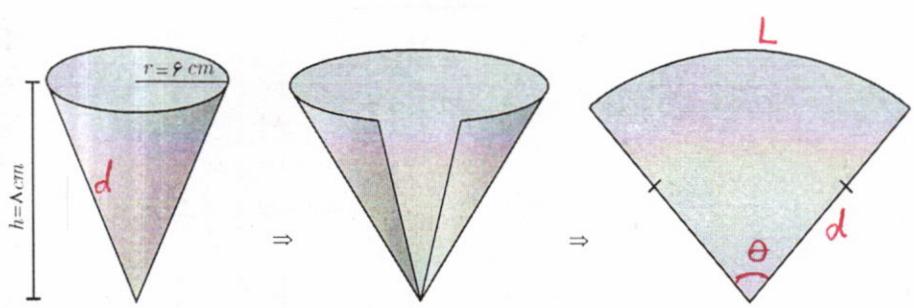
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

الف) $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to \frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{۲\pi}{۳}$

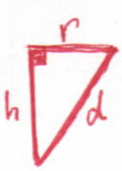
ب) $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{L}{۲۴}$ $\quad \theta = \frac{L}{r}$

$\to L = \frac{۲\pi \times ۲۴}{۳} = ۱۶\pi \approx ۵۰,۲۴$ cm

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=۶\ cm$ و ارتفاع آن $h=۸cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[۱] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۱ـ به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.



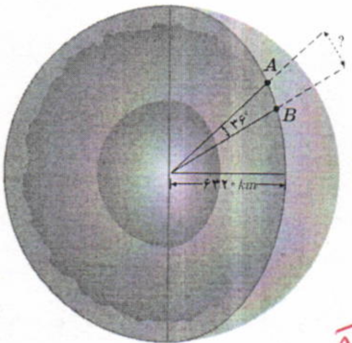
$d^۲ = r^۲ + h^۲$

$\to d^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$

$\to d = ۱۰$

طول کمان = محیط قاعده مخروط $= ۲\pi r = ۱۲\pi$

$\theta = \frac{L}{d} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶}{۵}\pi$ Rad



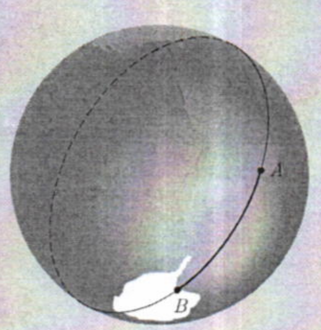
۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۳۶}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۱}{۵} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{۵}\ rad$$

اندازه زاویه برحسب رادیان

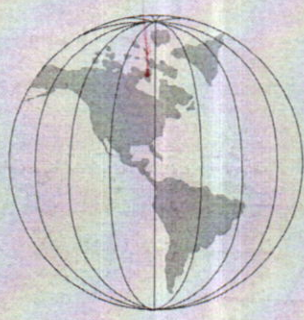
$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} \rightarrow \frac{\pi}{۵} = \frac{\widehat{AB}}{۶۳۲۰} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{۵} \times ۶۳۲۰ = ۳۹۶۸,۹۶ \simeq ۳۹۶۹\ Km$$

خواندنی

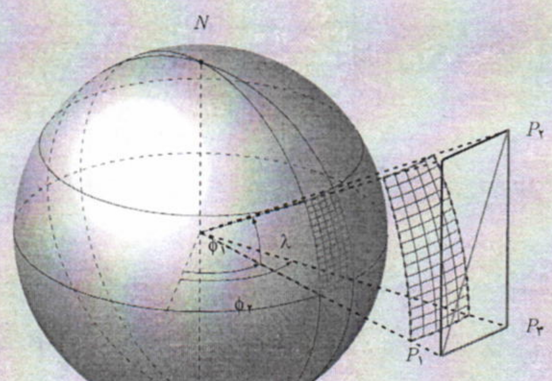


فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کرهٔ زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف‌النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به‌دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این‌صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایرهٔ عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف‌النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف‌النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



نصف‌النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

درس ۲

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

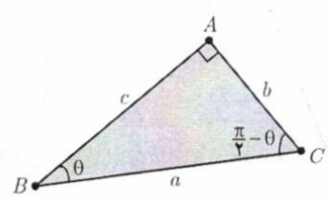
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°) و نیز زوایای مرزی (۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطهٔ بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمّم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازهٔ آنها ۹۰° باشد زاویه‌های متمّم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

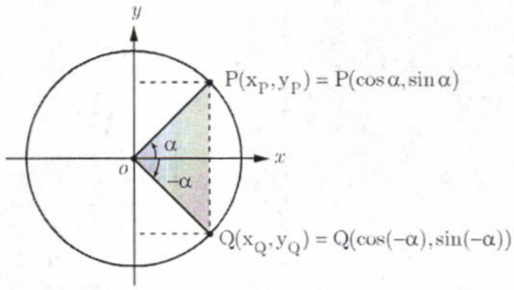
$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{c}{a}$	$\sin\theta=\frac{b}{a}$
$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{b}{a}$	$\cos\theta=\frac{c}{a}$
$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{c}{b}$	$\tan\theta=\frac{b}{c}$
$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{b}{c}$	$\cot\theta=\frac{c}{b}$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{۲}-\theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می باشد.

الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$\tan(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$

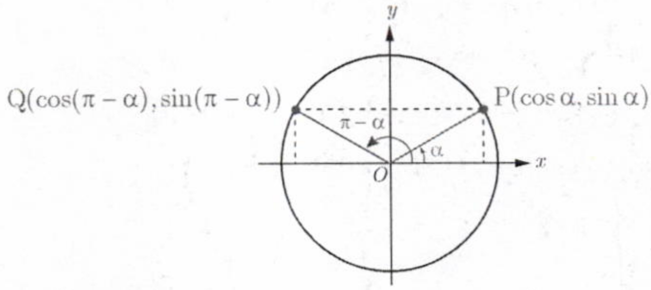
دو زاویهٔ α و $-\alpha$ قرینهٔ یکدیگرند. برای دو زاویهٔ قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوییم اگر مجموع آنها $180°$ باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.

فعالیت



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, \cancel{-}y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور yها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$y_Q = y_P \Rightarrow \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$\tan(\pi-\alpha) = \dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha) = \dfrac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و π−α روابط زیر برقرار است.

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

زوایای α و π+α را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است.

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

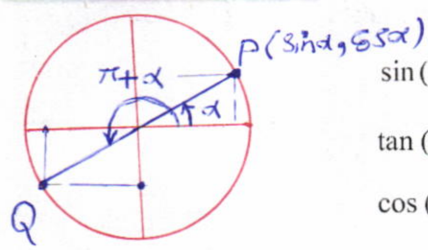
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

$\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$

$\tan(۲۲۵^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$

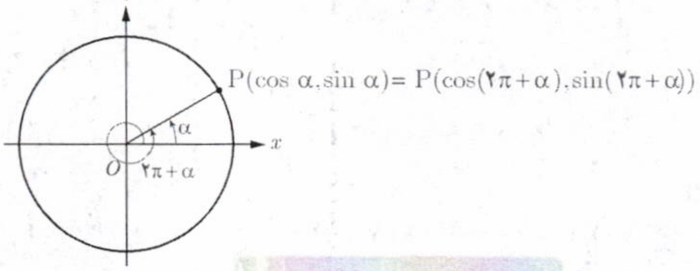
$\cos(۱۲۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\cos(۶۰^\circ) = -\frac{۱}{۲}$



Q(− Cosα , − Sinα)

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $۲\pi+\alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



$\sin(۲\pi+\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(۲\pi+\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\cot(۲\pi+\alpha) = \cot\alpha$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به‌صورت $۲k\pi+\alpha$، نیز برقرار است. ($k\in\mathbb{Z}$)

$\sin(۲k\pi+\alpha) = \sin\alpha$

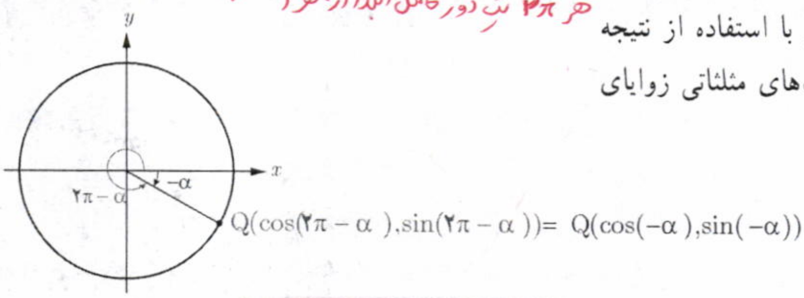
$\cos(۲k\pi+\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲k\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\cot(۲k\pi+\alpha) = \cot\alpha$

هر ۲π یک دور کامل ابتدا از صفر است.

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $۲k\pi-\alpha$ ($k\in\mathbb{Z}$) نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $۲k\pi-\alpha$ به‌صورت زیر برقرارند.



$\sin(۲k\pi-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲k\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan(\frac{۵\pi}{۳}) = \tan(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan(\frac{\pi}{۳}) = -\sqrt{۳}$

ب) $\sin(۴۰۵^\circ) = \sin(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ) = \sin(۴۵^\circ) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کار در کلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(۲۱۰^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$

ب) $\tan(-\frac{۷\pi}{۴}) = \tan(-۲\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$

پ) $\cot(۱۳۵^\circ) = \cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱$

ت) $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(۰ < \theta < \frac{\pi}{۲})$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = ۲k\pi - \theta$	$\alpha = ۲k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	سوم.	چهارم	اول.
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 sinα: + ✓; cosα: − ✓; tanα: − ✓	 sinα: − ✓; cosα: − ✓; tanα: + ✓	 sinα: − ✓; cosα: + ✓; tanα: − ✓	 sinα: − ✓; cosα: − ✓; tanα: − ✓
sinα	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(۲k\pi-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(۲k\pi+\theta) = \sin\theta$
cosα	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(۲k\pi-\theta) = \cos\theta$	$\cos(۲k\pi+\theta) = \cos\theta$
tanα	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$	$\tan(۲k\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(۲k\pi+\theta) = \tan\theta$
cotα	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$	$\cot(۲k\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(۲k\pi+\theta) = \cot\theta$

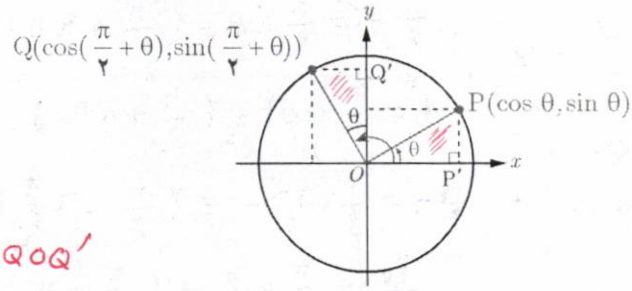
۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

$\alpha = ۲k\pi - \theta \xrightarrow{k=۰} \alpha = -\theta$

ستون سوم

فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ رسم شده‌اند.



$$\begin{cases} OP = OQ \\ \angle POP' = \angle QOQ' \end{cases}$$

به حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند.

الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $\overset{\Delta}{OPP'}$ و $\overset{\Delta}{OQQ'}$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\sin\theta$$

$$y_Q = x_p \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \cos\theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

به‌طور کلی برای دو زاویهٔ θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\tan\theta$$

تمرین

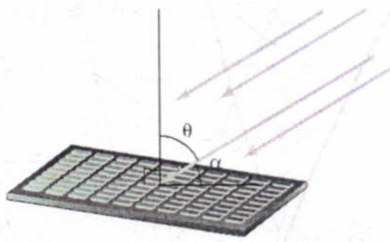
۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) =$ ‏ ب) $\cot(750^\circ) =$ ‏ پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$ ‏ ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) =$ ‏ ج) $\tan(-840^\circ) =$

چ) $\tan(-150^\circ) =$ ‏ ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) =$ ‏ خ) $\tan(\frac{10\pi}{3}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به‌دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos\theta = 1$

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta$

حل کار در کلاس صفحه ی ۹ (حسابان ۱)

۱ :

الف) $\sin(۳۰۰^\circ) = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\cot(۷۵۰^\circ) = \cot(۲\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cot(۴\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cot(\frac{\pi}{۶}) = \sqrt{۳}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{۶}) = \cos(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۲۳\pi}{۴}) = \cos(۶\pi - \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\sin(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\tan(-۸۴۰^\circ) = -\tan(۸۴۰^\circ) = -\tan(۵\pi - \frac{\pi}{۳}) = \tan(\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}$

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ) = -\tan(۱۵۰^\circ) = -\tan(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = \tan(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

خ) $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$

***

۲:

الف) $I = k\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = k\cos\alpha = k\sin\theta$

ب) $$I = k\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = k\sin\theta \to \begin{cases} \theta = ۰ \to I = ۰ \\ \theta = \frac{\pi}{۶} \to I = \frac{k}{۲} \\ \theta = \frac{\pi}{۳} \to I = \frac{k\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

پ) $I = k \xrightarrow{I = k\sin\theta} \sin\theta = ۱ \to \theta = \frac{\pi}{۲}$

۳: الف) درست　　ب) نادرست　　ج) درست　　د) درست

۱۰۴,۱

درس ۳

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به‌دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات $\sin ۳$ یا $\cos ۳$ چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

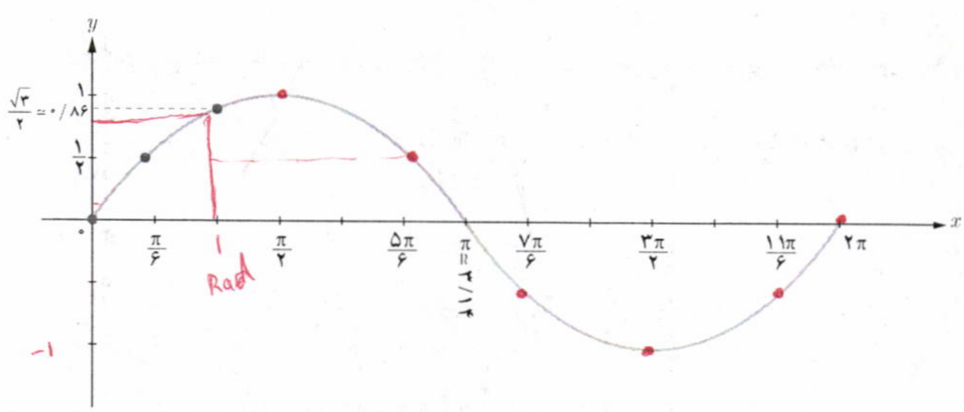
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[۰,۲\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y=\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\simeq ۰/۸۶$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰

۲ جدول بالا به‌صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. باتوجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به‌دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور yها بررسی کنید).

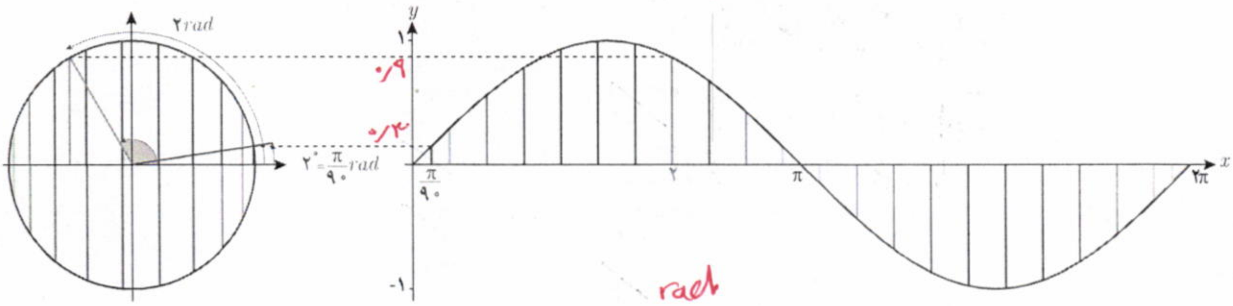
$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\pi,۰),(\frac{۷\pi}{۶},\frac{-۱}{۲}),(\frac{۳\pi}{۲},-۱),(\frac{۱۱\pi}{۶},\frac{-۱}{۲}),(۲\pi,۰)\right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin ۱$ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟ بالای محور طولها در قسمت مثبت بین صفر و یک و نزدیک به یک

$\sin ۱ \approx ۰/۸۴$

۴ در تابع $y=\sin x$، همیشه x را برحسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود. باتوجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin ۲$ و $\sin ۲^\circ$ را بیان کنید.

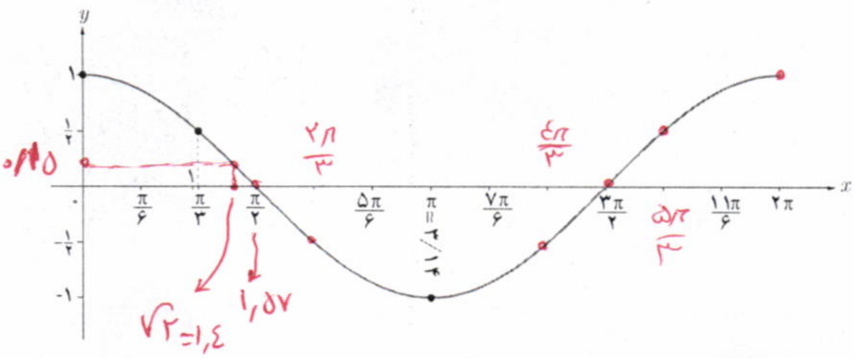


$\sin(۲_{rad}) = ۰/۹$ $\quad$ $\sin(۲^\circ) = \sin(\frac{\pi}{۹۰}) = ۰/۰۳$

فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y=\cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به‌دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$f=\left\{(۰,۱), (\frac{\pi}{۳}, \frac{۱}{۲}), (\frac{\pi}{۲}, ۰), (\frac{۲\pi}{۳}, -\frac{۱}{۲}), (\pi, -۱), (\frac{۴\pi}{۳}, -\frac{۱}{۲}), (\frac{۳\pi}{۲}, ۰), (\frac{۵\pi}{۳}, \frac{۱}{۲}), (۲\pi, ۱)\right\}$$



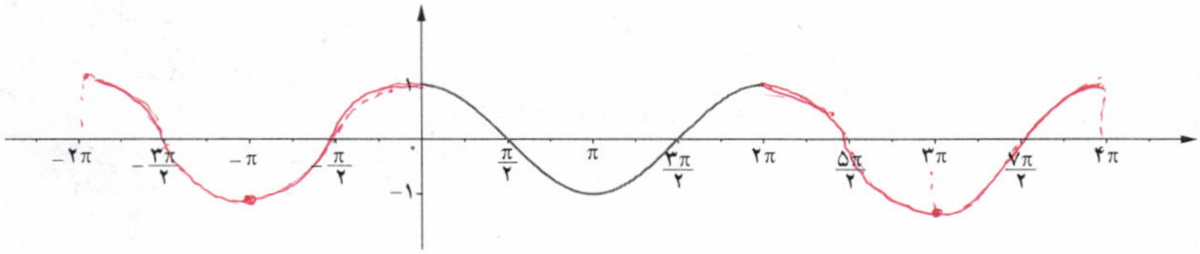
خواندنی

در همهٔ ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری برحسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین‌حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos\sqrt{۲}$ را حساب کرده‌اند.

۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها بیابید و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

$\cos(\sqrt{۲}_{Rad}) = \cos(۱,۴_{Rad}) = ۰/۱۵۵۹$

۳ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ و نیز $\cos(-x) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y=\cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور xها به‌دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[-2\pi\ ,\ 0]$ و $[0\ ,\ 2\pi]$ و $[2\pi\ ,\ 4\pi]$ با هم متفاوت هستند؟ خیر، مقادیر برابر هستند.



۴ باتوجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه $[-2\pi,\ 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟ بله که وجود دارد.

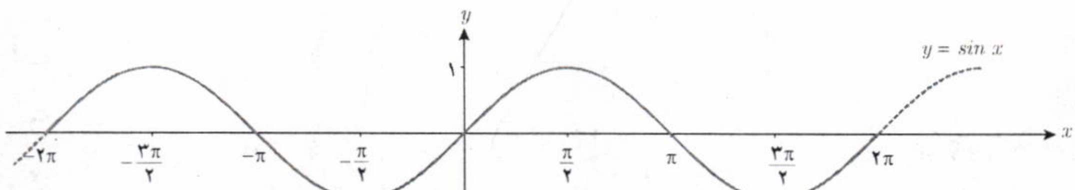
ب) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟ خیر

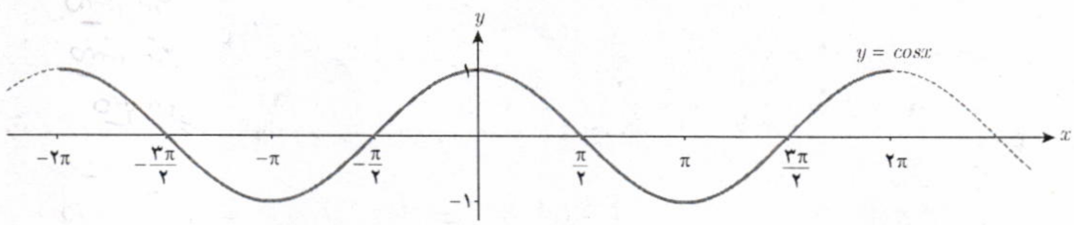
پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ در این بازه چقدر است؟ $y_{Max}=1$ $y_{Min}=-1$

> تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1,1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y=\sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y=\cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y=\cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y=\sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به‌صورت زیر رسم کرد.

زیرا $\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$





کار در کلاس

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

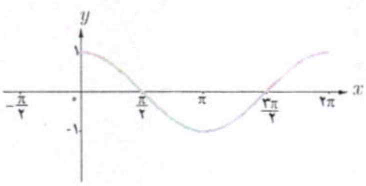
الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. نادرست

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است. درست .   پ) $\cos ۳ = \cos ۳^{\circ}$. نادرست

ت) اگر $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$ آنگاه $۰ > \cos x > ۱-$ است. نادرست .   ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. نادرست .

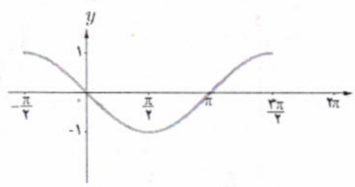
ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. نادرست .

✤ **مثال** : با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$، نمودار توابع $y = -\cos(x + \frac{\pi}{۲})$ و $y = |\sin x|$ در زیر رسم شده است.



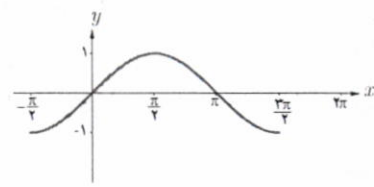
$y = \cos x$

⇒

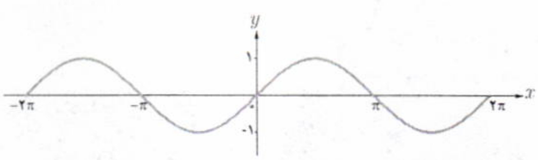


$y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$

⇒

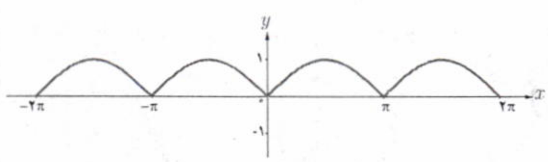


$y = -\cos(x + \frac{\pi}{۲})$



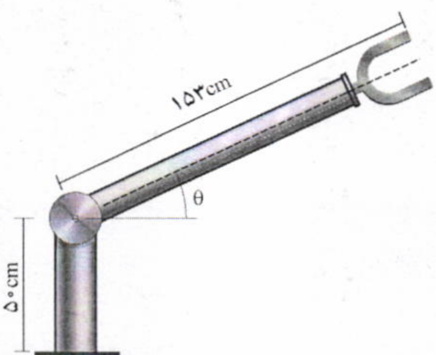
$y = \sin x$

⇒

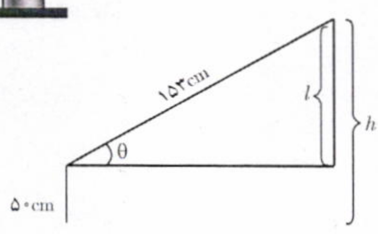


$y = |\sin x|$

✤ **مثال** : روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. باتوجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$



✤ **حل** :کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



$$\sin\theta = \frac{l}{۱۵۳} \to l = ۱۵۳\sin\theta$$

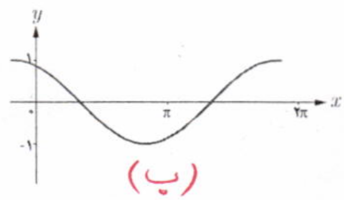
$$\Rightarrow h = ۵۰ + l = ۵۰ + ۱۵۳\sin\theta$$

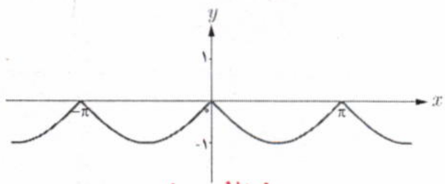
sin

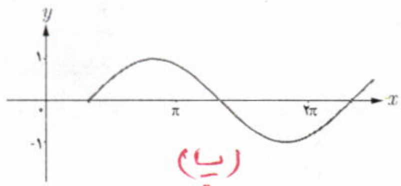
تمرین

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ پ) $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

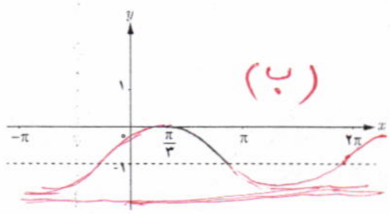

(ب)

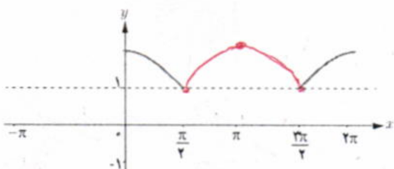

(الف)

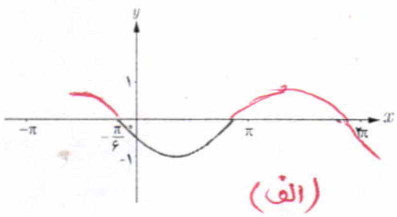

(پ)

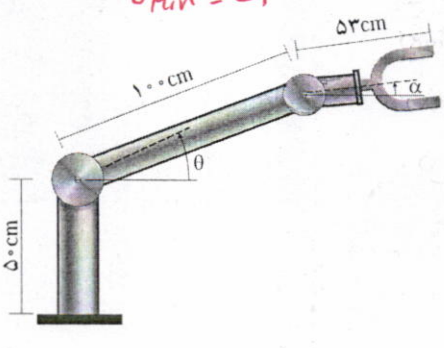
۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})-1$ پ) $y=1+|\cos x|$


(ب)
$y_{Max}=0$
$y_{Min}=-2$


(پ)
$y_{Max}=2$
$y_{Min}=0$


(الف)
$y_{Max}=1$
$y_{Min}=-1$



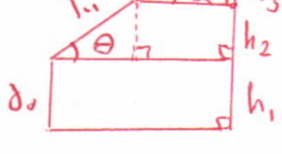
۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(0,\pi)$ یک به یک است؟ ؟ (پ) $(\frac{\pi}{3}, \pi)$

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5\ cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha=-30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



(الف)
$\sin\theta=\frac{h_2}{100}\to h_2=100\sin\theta$
$\sin\alpha=\frac{h_3}{53}\to h_3=53\sin\alpha$
$h=h_1+h_2+h_3=50+100\sin\theta+53\sin\alpha$

(ب)
$23/5=50+100\sin\theta+53(-\frac{1}{2})$
$\to 23/5=50+100\sin\theta-26/5\to\sin\theta=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\to\theta=30^\circ$

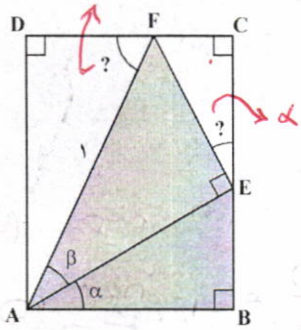
درس ۴

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ ($\cos\alpha\neq 0$) آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به‌کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت

$\alpha+\beta$



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$F\hat{E}C+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ$: زاویه E نیم صفحه است.

$\alpha+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ$: مجموع زوایای داخلی ABE

$\Rightarrow F\hat{E}C=\alpha$

اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Rightarrow A\hat{F}D=\alpha+\beta$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\overset{\Delta}{ADF}$ را با توجه به اینکه $AF=1$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

$\sin(\alpha+\beta)=AD$

$\cos(\alpha+\beta)=DF$

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$\sin\beta=EF$

$\cos\beta=AE$

ت) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$\overset{\Delta}{ABE}:\begin{cases}\sin\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{BE}{\cos\beta}\rightarrow BE=\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{\cos\beta}\rightarrow AB=\cos\alpha\cos\beta\end{cases}$

$\overset{\Delta}{ECF}:\begin{cases}\sin\alpha=\frac{FC}{EF}=\frac{FC}{\sin\beta}\rightarrow FC=\sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha=\frac{EC}{EF}=\frac{EC}{\sin\beta}\rightarrow EC=\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

ت

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحهٔ قبل روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

$$AD = BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$DF = AB\text{-}FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. باز نسبت‌ها برقرار هستند.

در فعالیت فوق زوایای به‌کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

پس همواره داریم :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

✤ **مثال :** مقدار $\sin ۷۵^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin ۷۵^\circ=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ+\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

✤ **مثال :** درستی رابطهٔ $\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\cot\theta$ را نشان دهید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{\overset{۱}{\overbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}}\cos\theta+\cancel{\cos\frac{\pi}{۲}\sin\theta}^{\,۰}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{۲}\cos\theta}_{\,۰}-\underset{۱}{\underbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$\sin 105 = \sin(60+45) = \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرین

$\tan 105 = \frac{\sin 105}{\cos 105} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ = \cos(60-45) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$

۲) $\tan 105^\circ =$ حل .

۳) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin\beta = \frac{5}{13}$

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$
$= \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$
$= 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)$
$= \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

ادامه حل تمرین ۲

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$= \frac{3}{5} \times (\frac{-12}{13}) + \frac{4}{5} \times (\frac{5}{13}) = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$= \frac{4}{5}(-\frac{12}{13}) + \frac{3}{5}(\frac{5}{13})$

$= \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65}$

حد و پیوستگی

فصل ۵

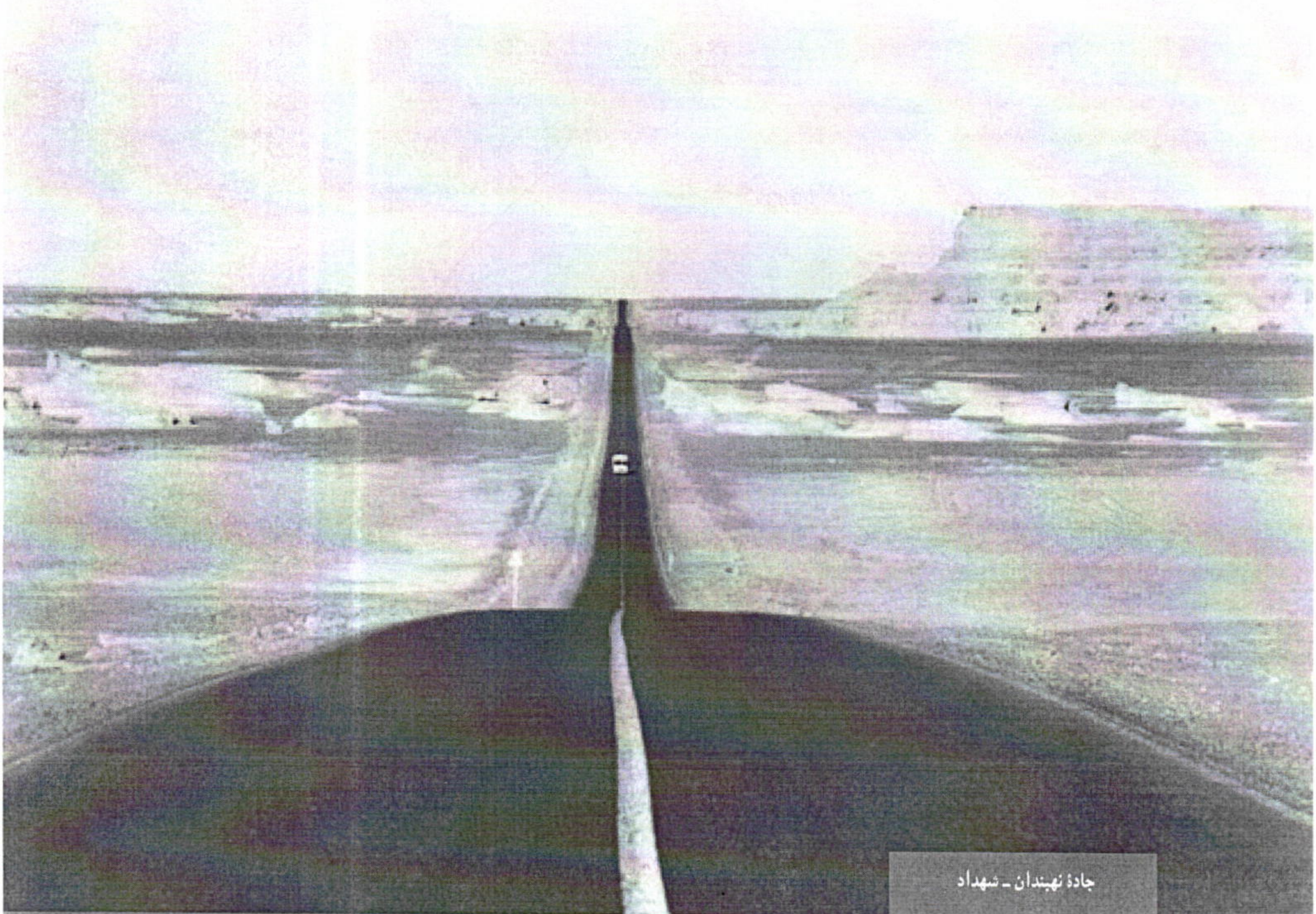
۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی

۲ حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

۳ قضایای حد

۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

۵ پیوستگی



جادهٔ نهبندان ـ شهداد

درس ۱

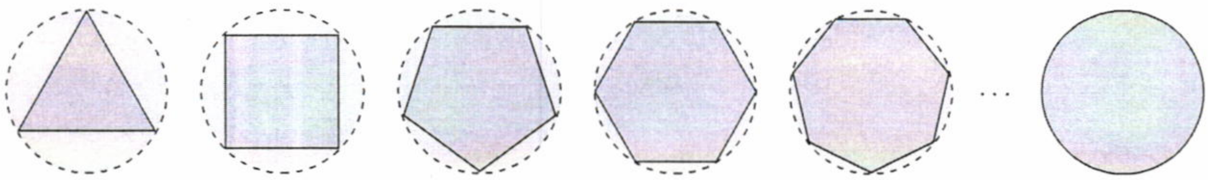
مفهوم حد و فرایندهای حدی

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به‌صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟ $\pi(1)^2 = \pi$

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر π=۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n\in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد π . که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هراندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (پی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. پی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبهٔ به‌دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پاپیروسی نوشته شده است که درحال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را با تقریب بسیار خوبی ($۳/۲۱۵۰ > \pi > ۳/۱۰۵۸$) به‌دست آورد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطیه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد:

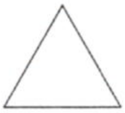
گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π — پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد

خرد و دانش و آگاهی دانشمندان — ره سرمنزل مقصود بما آموزد

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹ — ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ \ldots$

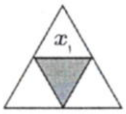
فعالیت



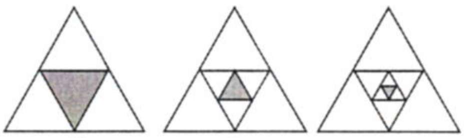
یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم: $x_1 = \frac{۲}{۲} = ۱$ و $P_1 = \frac{۶}{۲} = ۳$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$			…	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$			…	$\frac{۳}{۲^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = ۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

✤ **مثال** : رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

✤ **حل** : تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq ۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود — x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

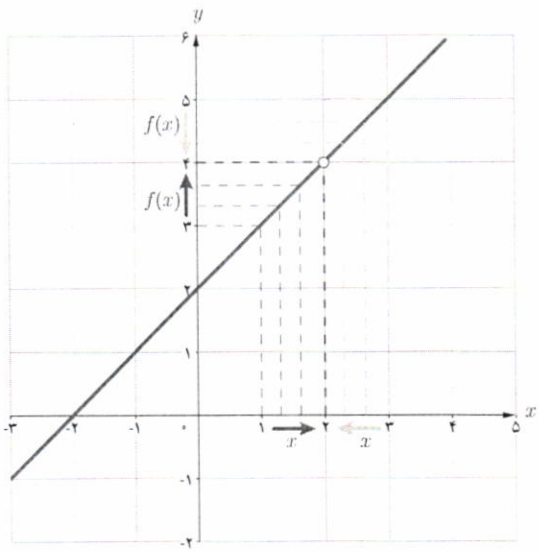
x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید :

نمودار تابع f، خط راست $y=x+۲$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(۲,۴)$ حذف شده است.



با وجود اینکه مقدار تابع در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x\rightarrow ۲$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\rightarrow ۲} f(x)=۴$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کار در کلاس

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x) = x+۳$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ و $h(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \neq ۳ \\ ۴ & x = ۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

$f(۳) =$ ...۶ $\qquad g(۳) =$ ...تعریف نشده $\qquad h(۳) =$ ...۴

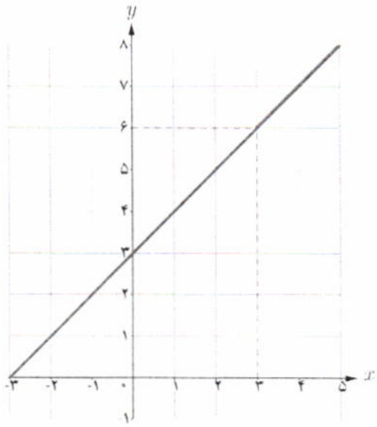
۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

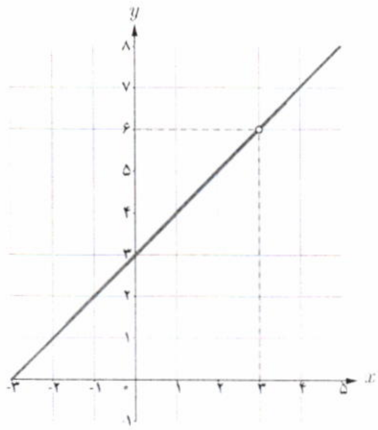
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow$	۳	$\leftarrow$	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱
$h(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

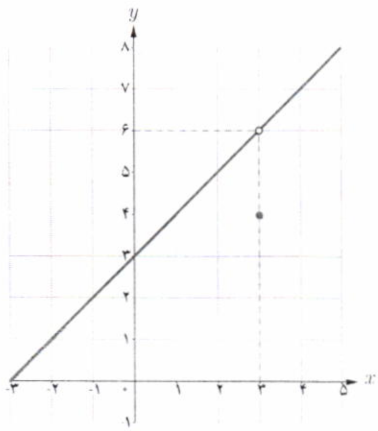
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار f



نمودار g



نمودار h

هر سه تابع به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$\lim\limits_{x \to ۳} h(x) = ۶$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to ۳} g(x) = ۶$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = ۶$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت در مقدار در نقطه $x=۳$ و شباهت در برابر بودن حدهای آنها در $x=۳$

تفاوت در برابر بودن یا نبودن مقدار تابع با حد تابع در $x=۳$

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

ب) ممکن است یک تابع درنقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

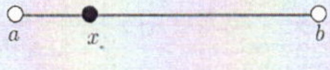
در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازهٔ باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

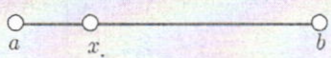
تعریف

اگر $x_۰$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_۰ \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_۰$ است.



اگر نقطه $x_۰$ را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_۰\}$ را همسایگی محذوف $x_۰$ می‌نامیم.



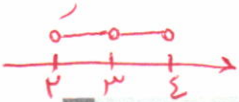
به همین ترتیب :

اگر $r>۰$، در این صورت بازه $(x_۰, x_۰+r)$ را یک همسایگی راست و بازهٔ $(x_۰-r, x_۰)$ را یک همسایگی چپ $x_۰$ می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

همسایگی ۳ (۲و۴)-{۳}   (۳و۴) همسایگی راست ۳   (۲و۳) همسایگی چپ ۳



۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

طبق تعریف بازه (۲و۳) همسایگی راست ۲ می‌باشد.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم :
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

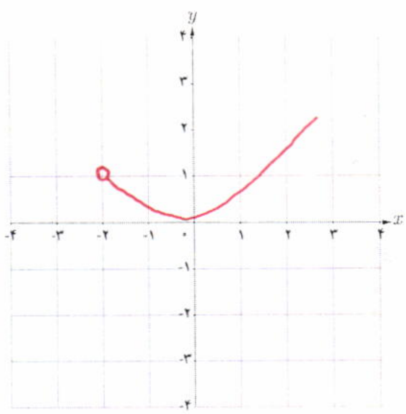
کار در کلاس

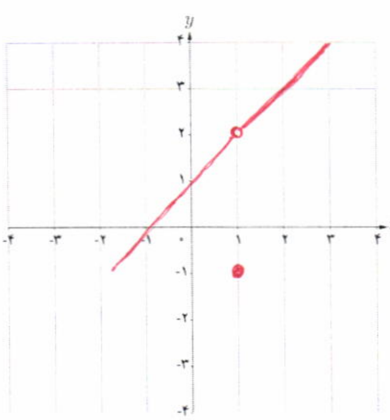
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

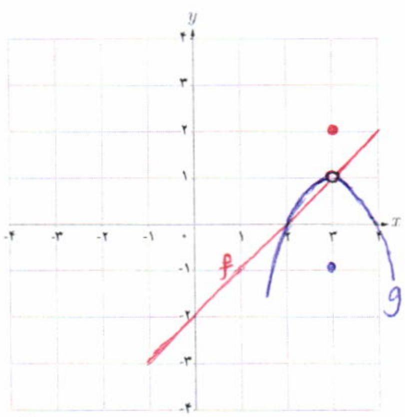
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.

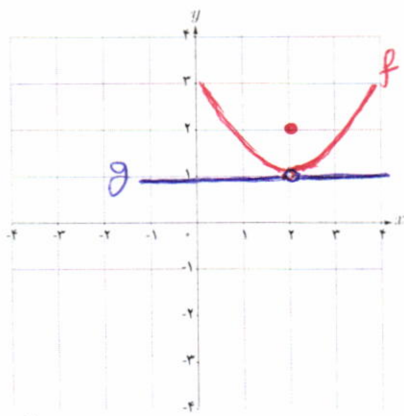
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.


(۱)


(۲)



(۳)

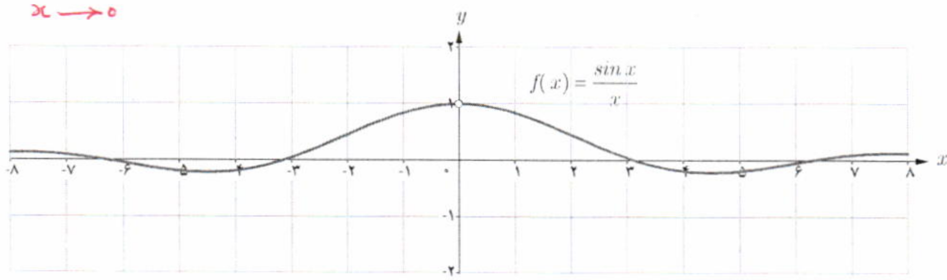


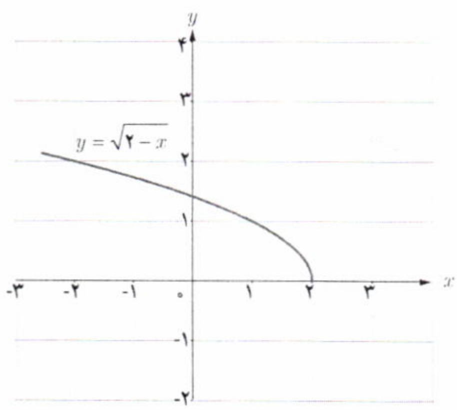
(۴)

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



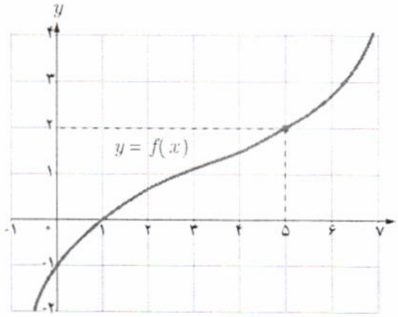


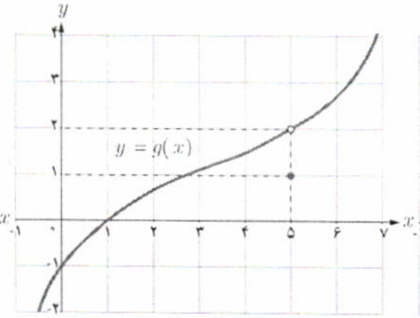
✤ **مثال :** آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

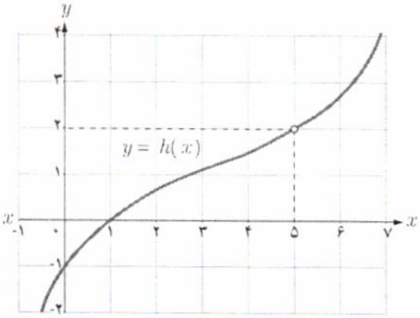
✤ **حل :** می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=۲$ حد ندارد.

تمرین

۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید.





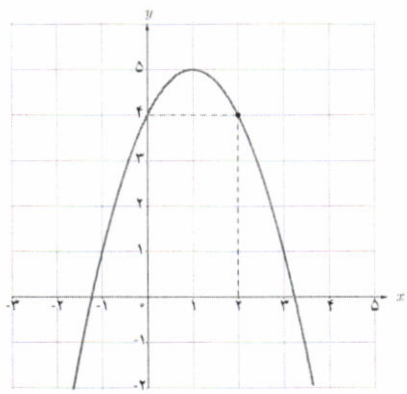


$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=$ ...۲...

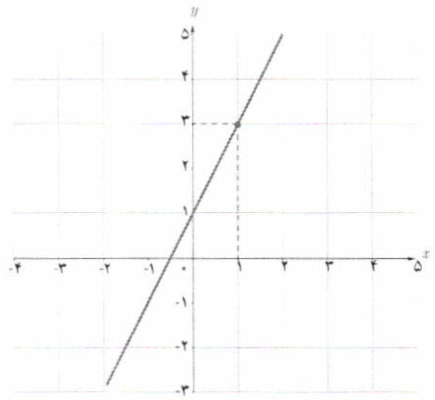
$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=$ ...۲...

$\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=$ ...۲...

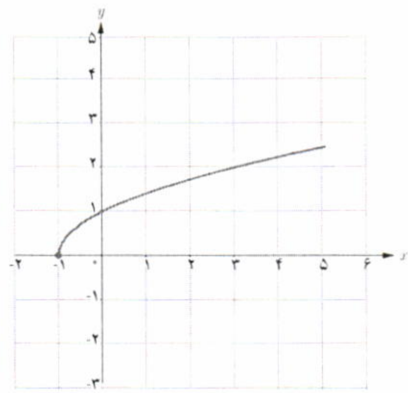
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



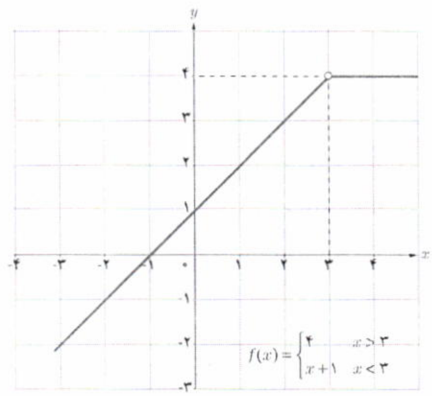
$\lim_{x\to ۲}(-x^۲+۲x+۴)=$ ٤



$\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=$ ۳



$\lim_{x\to -۱}\sqrt{x+۱}=$ حد ندارده



$\lim_{x\to ۳}f(x)=$ ۴

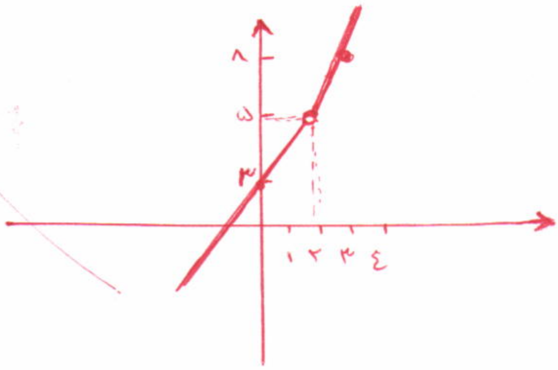
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim_{x\to ۰}(-۳x+۴)=$..۴.

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶٫۷	۴٫۳	۴٫۰۳	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۳٫۹۹۷	۳٫۹۷	۳٫۷	۲٫۵	۱

ب) $\lim_{x\to -۱}f(x)=$ -۵ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	-۵٫۵	-۵٫۱	-۵٫۰۱	-۵٫۰۰۱	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	-۴٫۹۹۹	-۴٫۹۹	-۴٫۹	-۴٫۸

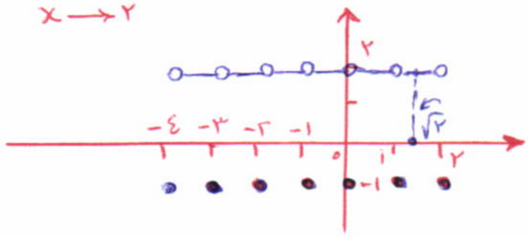


۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$



۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

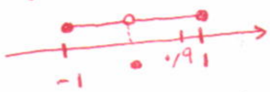
$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

(الف $\quad 1-x^2\geq 0 \longrightarrow x^2\leq 1 \longrightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,1]-\{0\}$



ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ صفر

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟

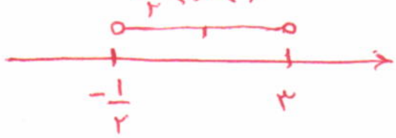
بله $\qquad$ خیر

۷ اگر بازهٔ $(x-1,2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$x-1<2 \longrightarrow x<3$

$2x+3>2 \longrightarrow 2x>-1 \longrightarrow x>\dfrac{-1}{2}$

$-\dfrac{1}{2}<x<3$

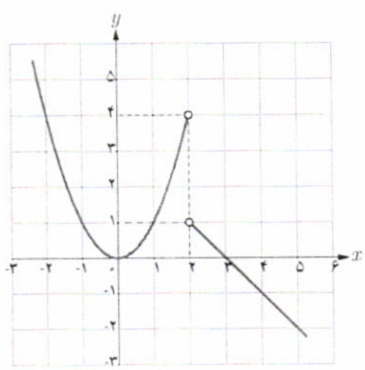


درس ۲

حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در نقطهٔ ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع بازهٔ $(-\infty,2]$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت



نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+3 & x>2\\ x^2 & x<2\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :

الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد؟ خیر حد ندارد. زیرا رفتار تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ ۲ متفاوت است.

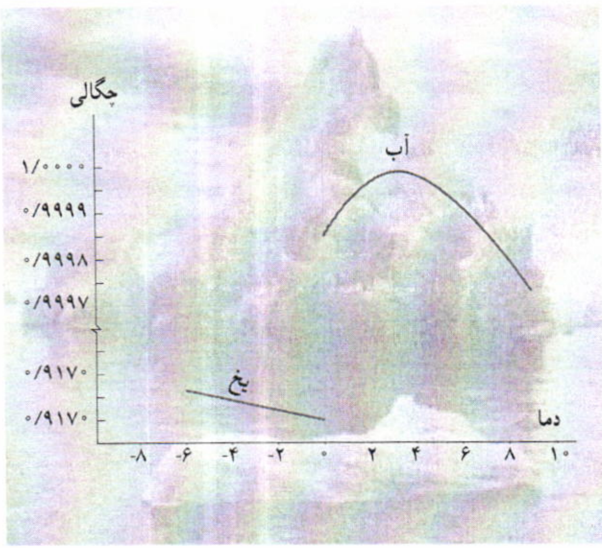
خواندنی

حتماً متوجه شده‌اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوه‌های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید چرا یخ در آب غرق نمی‌شود؟

به‌طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.

ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به‌دست می‌آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می‌گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می‌رود و ۰/۱ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.

نمودار چگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه‌رو است :



در فعالیت صفحهٔ قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیرکمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

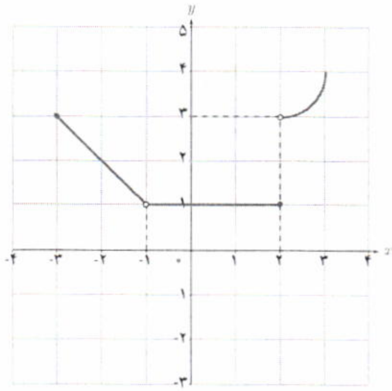
حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \ldots$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \ldots 3$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \ldots$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \ldots 3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ldots 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ldots 1$

$x \to (-1)^+$

$x \to (-1)^-$

$x \to (-3)^+$

$x \to (-3)^-$

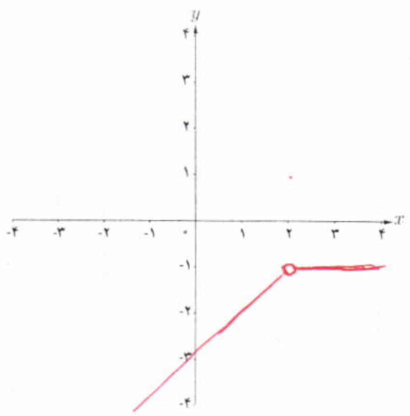
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

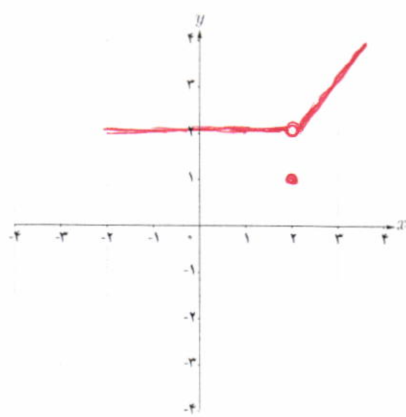
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

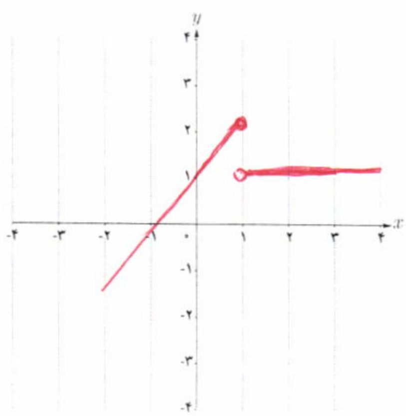
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



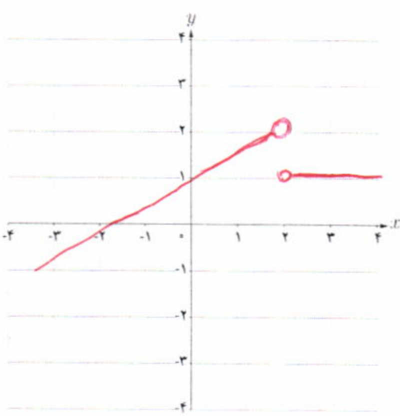
(الف)



(ب)

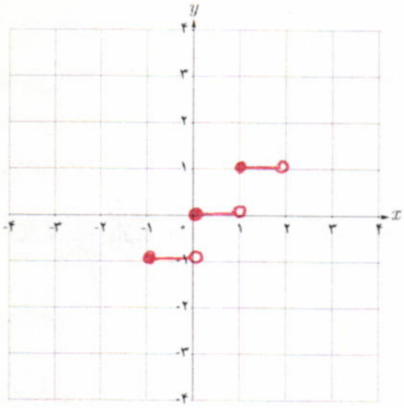


(پ)



(ت)

فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ..0.. نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ..0..$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید. $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟ خیر، زیرا $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^+}[x]=\lim_{x\to ۱^+} g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^-}[x]=\lim_{x\to ۱^-} h(x)=۰$.

اگر دوتابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

✤ مثال : مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

✤ حل : می‌دانیم روی بازهٔ $(۰,۱)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(۰,۱)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=۰$ برابر است بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰$$

کار در کلاس

۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید :

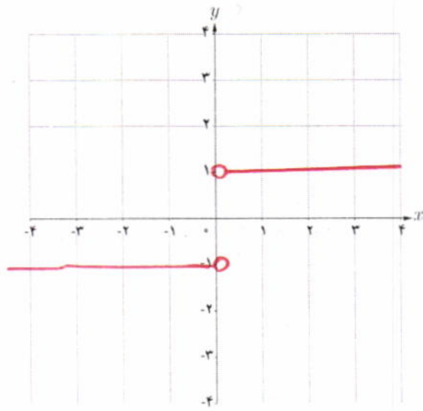
الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید .

ب) نمودار تابع f را رسم کنید .

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید .

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



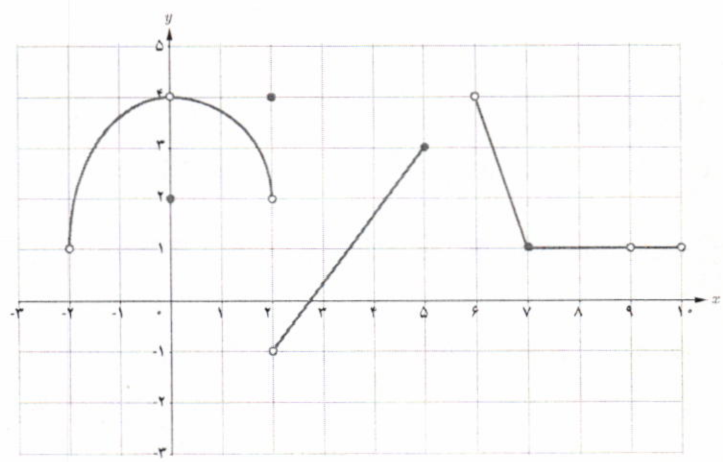
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

زیرا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد.

پ) $\lim_{x\to 5} f(x) =$ وجود ندارد.

ت) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = 4$

ث) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$

$x\to (-2)^+$

ج) $\lim_{x\to 8} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x\to 9} f(x) = 1$

۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

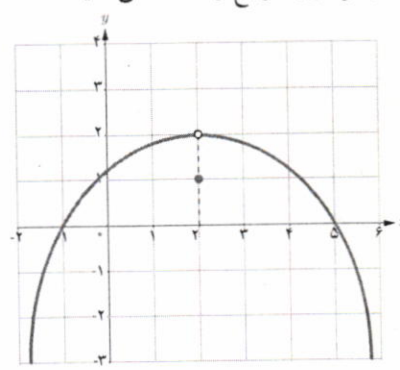
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۰ نزدیک می‌شوند، بنابراین :

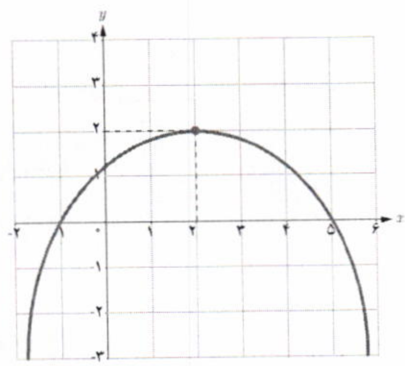
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = (0)^2+2(0) = 0$

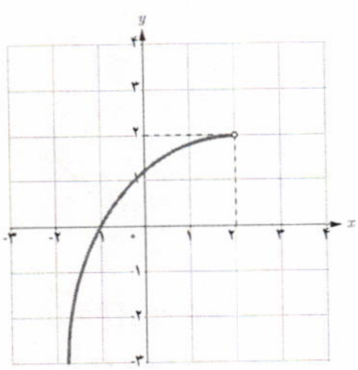
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2(0)+1 = 1$

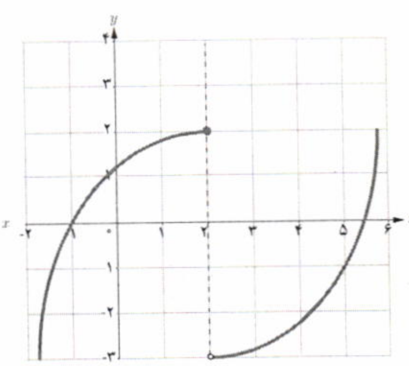
پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ خیر، زیرا $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

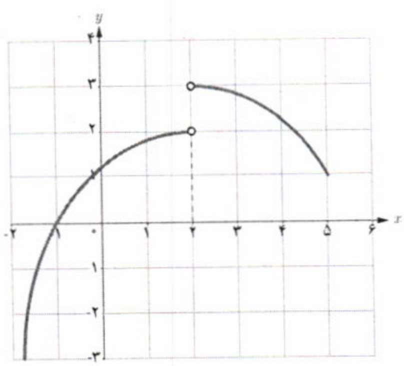
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.

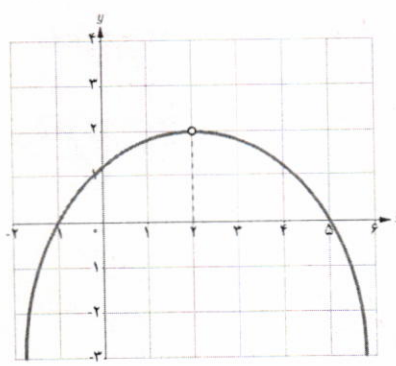

(الف)


(ب)


(پ)


(ت)


(ث)


(ج)

ـ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

ـ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

ـ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

ـ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

$x^2-x \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \geq x \leq 1 \Rightarrow$ تابع در همسایگی چپ یک تعریف نشده است $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{(1)^2-(1)} = 0$

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می‌توان گفت؟

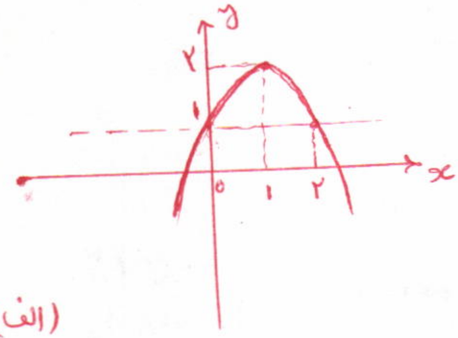
$x \to 2^+ \Rightarrow [x]=2$

$\Rightarrow [x]-2=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x}{[x]-2} =$ وجود ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}[f(x)]$ ب) $\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)



(الف)

$\lim_{x\to 1} [f(x)] = 1$

در همسایگی ۱ و نه در خود یک

$1 < f(x) < 2$

$\to [f(x)] = 1$

(ب)

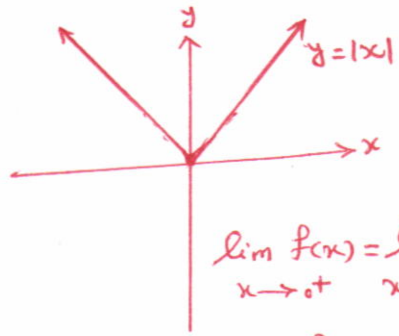
$\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right] = [2^-] = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ عدد نزدیک به ۲ است.

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟



(الف)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\to \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(ب) $f(x) = |x|$

$\begin{cases} a \geq 0 \to |a| = a \\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = a = |a| \end{cases}$

$\begin{cases} a < 0 \to |a| = -a \\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = -a = |a| \end{cases}$

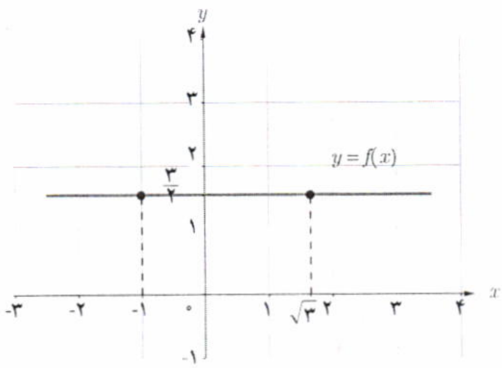
درس ۳

قضایای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

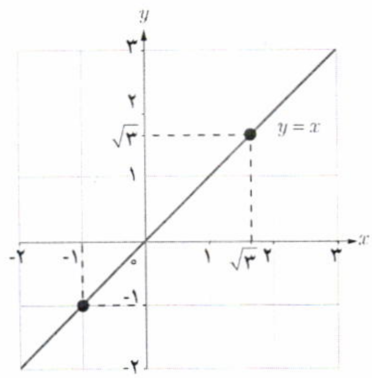
فعالیت

الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{۳}{۲}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}} f(x) = \frac{۳}{۲}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = \frac{۳}{۲}$

ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}} g(x) = \sqrt{۳}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱} g(x) = -۱$

قضیه:

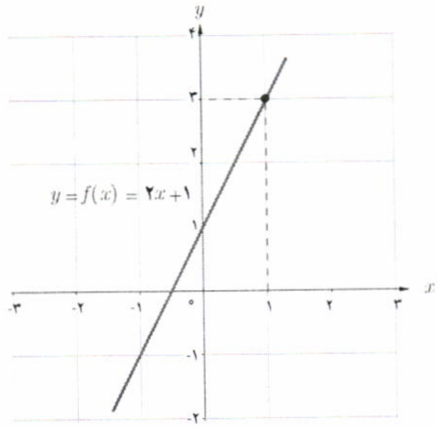
الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی، $\lim\limits_{x\to a} c = c$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی، $\lim\limits_{x\to a} x = a$

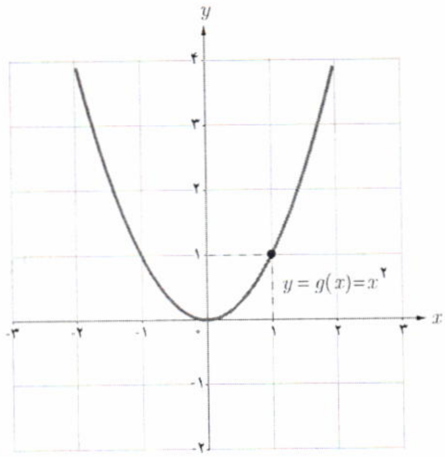
فعالیت

توابع $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x^2$ را در نظر بگیرید.

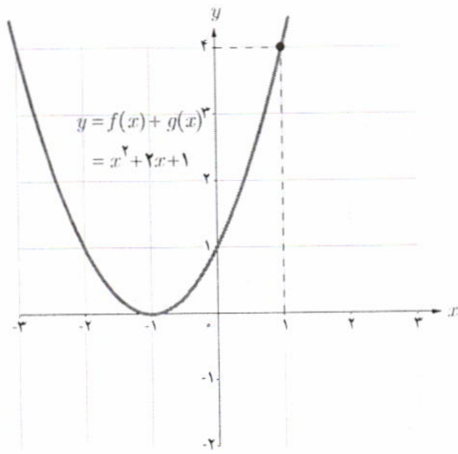
الف) با توجه به نمودار توابع f، g، $f+g$ و $f-g$، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



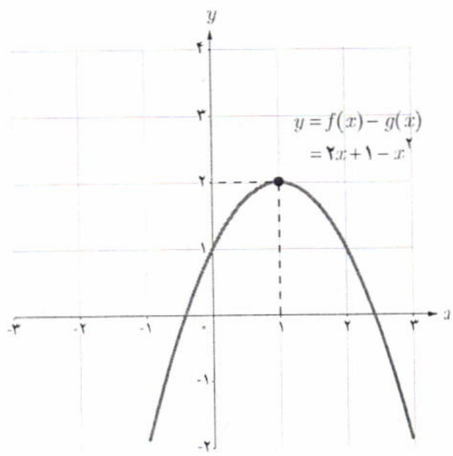
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dots$ ۳



$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \dots$ ۱



$\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x)+g(x)\big) = \dots$ ۴



$\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x)-g(x)\big) = \dots$ ۲

ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$)

الف) $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x)=\lim\limits_{x\to a} c \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$

$= c\times \lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times f(x)\right)$

$=\lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} f(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left((-1)\,f(x)\right) = -1 \times \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

✤ تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1، ...، f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a}f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

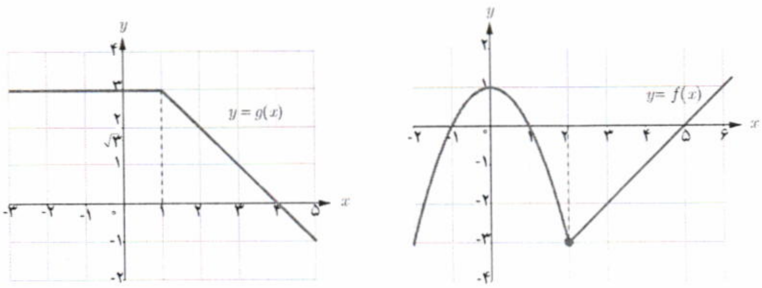
که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

✤ مثال : دو تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^۲ & x<۲\\ x-۵ & x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x<۱\\ ۴-x & x\geq ۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حد توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را در نقطه $x=۲$ به‌دست آورید.

✤ حل : ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=۲$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها داریم : $\lim_{x\to ۲}f(x)=-۳$ و $\lim_{x\to ۲}g(x)=۲$.

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم :

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳+۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)-\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳-۲=-۵$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to ۲}f(x)\right)\left(\lim_{x\to ۲}g(x)\right)=(-۳)(۲)=-۶$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to ۲}f(x)}{\lim_{x\to ۲}g(x)}=\frac{-۳}{۲}$$

✤ مثال :

$$1)\ \lim_{x\to\sqrt{۲}}(x^{۴}+۳x-۱)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}x^{۴}+\lim_{x\to\sqrt{۲}}۳x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=(\lim_{x\to\sqrt{۲}}x)^{۴}+۳\lim_{x\to\sqrt{۲}}x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=\left(\sqrt{۲}\right)^{۴}+۳\left(\sqrt{۲}\right)-۱=۴+۳\sqrt{۲}-۱=۳+۳\sqrt{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to۳}x|x|=\left(\lim_{x\to۳}x\right)\times\left(\lim_{x\to۳}|x|\right)=۳\times|۳|=۹$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}+۷}{۱-x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^{۲}+۷)}{\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱-x)}=\frac{۴\left(\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}x\right)^{۲}+۷}{۱-\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}x}=\frac{۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۱x+b_۰$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۰)=b_na^n+b_{n-۱}a^{n-۱}+\cdots+b_۰$$

کار در کلاس

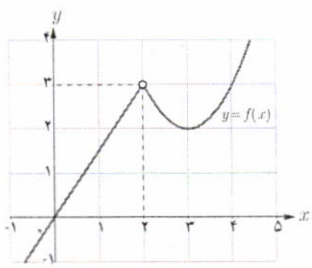
الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to-۱}x^{۴}=(-۱)^{۴}=۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to۱۰}(۵x^{۳}-۶|x|+۱)=۵(۱۰)^{۳}-۶|۱۰|+۱=۴۹۴۱$$

$$۳)\ \lim_{x\to۲}\frac{x^{۲}+۴x+۴}{۴x^{۳}-۷x+۱}=\frac{(۲)^{۲}+۴(۲)+۴}{۴(۲)^{۳}-۷(۲)+۱}=\frac{۱۶}{۵}$$

$$۴)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x-[x]}{۱-x}=\frac{\frac{۱}{۲}-[\frac{۱}{۲}]}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}-۰}{\frac{۱}{۲}}=۱$$



ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim\limits_{x\to۲}xf(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to۲}x=۲$$

$$\lim_{x\to۲}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۲}xf(x)=\lim_{x\to۲}x\times\lim_{x\to۲}f(x)=۲\times۳=۶$$

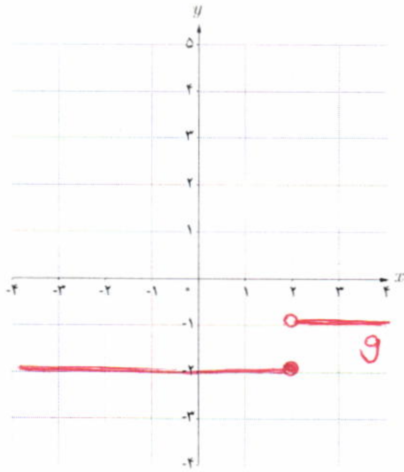
فعالیت

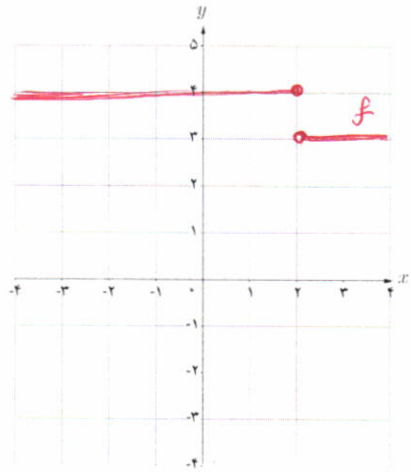
دو تابع $f(x)=\begin{cases}4 & x\le 2\\ 3 & x>2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-2 & x\le 2\\ -1 & x>2\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2 & x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$$

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.





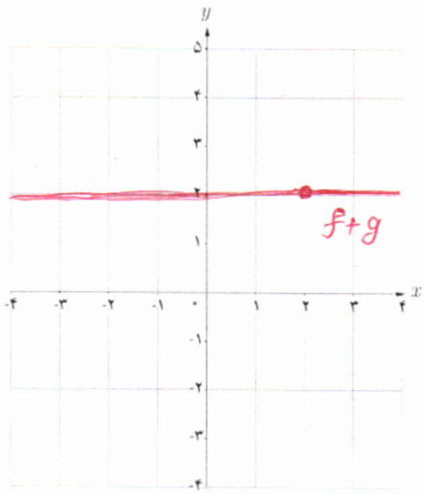
پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟ خیر

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟ بله

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟

خیر

شرط استفاده از این قضیه این است که توابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.



برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

کار در کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

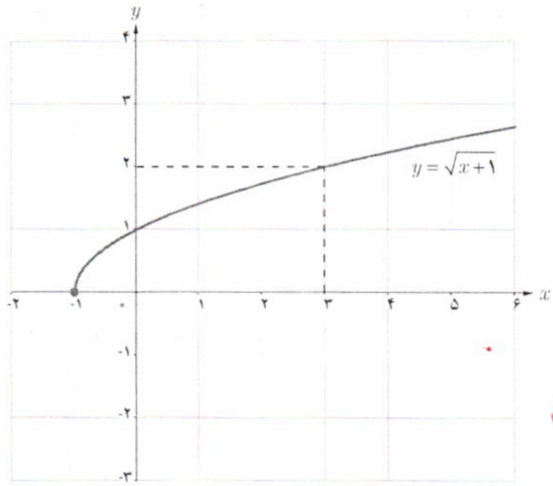
خیر؛ توابع زیر در $x=۳$ حد ندارد ولی $f+g$ در این نقطه حد دارد.

$f(x)=\begin{cases}-1 & x\geq ۳\\ 1 & x<۳\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & x\geq ۳\\ -1 & x<۳\end{cases}$

ب) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

$\overset{\text{موجود}}{\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))} - \overset{\text{موجود}}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)-f(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود

فعالیت



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+1}=۲$

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$ برقرار است؟

$\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+1)}=\sqrt{۴}=۲$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+1)}$

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال :

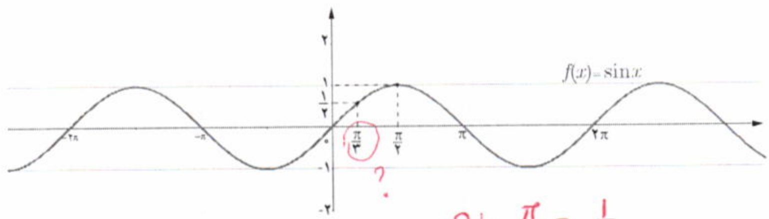
۱) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (برای nهای زوج a باید مثبت باشد)

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۳x-۴}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۲x-۱}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۱)}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\dfrac{\sqrt{۲(۱)-۱}}{۳(۱)-۴}=-۱$

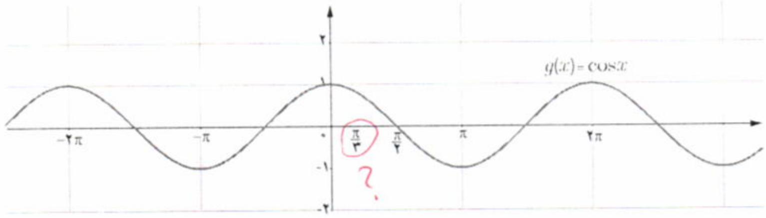
حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



$\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} \sin x = \frac{۱}{۲}$

۲) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = ۰$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -۱$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله $\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله $\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قضیه: برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

✤ مثال:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} (۲\cos^۲ x - \sin x) = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}) - \sin(\frac{\pi}{۶}) = ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} = ۲/۵$$

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$\pi \cos \pi = \pi \times (-1)$

۱) $\lim\limits_{x \to -\pi} \dfrac{\pi \cos x}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -\pi} \pi \cos x}{\lim\limits_{x \to -\pi} x} = \dfrac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \dfrac{-\pi}{-\pi} = 1$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۳}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

✤ تذکر : همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به‌عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x \to a^-} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a^-} f(x) + \lim_{x \to a^-} g(x)$$

✤ مثال :

۱) $\lim\limits_{x \to a^+} x^n = \lim\limits_{x \to a^+} \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{n \text{ بار}} = (\lim\limits_{x \to a^+} x) \times \cdots \times (\lim\limits_{x \to a^+} x) = a \times \cdots \times a = a^n$

۲) $\lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{x - [x]}{x^۲ + ۲} = \dfrac{\lim\limits_{x \to ۱^-} (x - [x])}{\lim\limits_{x \to ۱^-} (x^۲ + ۲)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to ۱^-} x - \lim\limits_{x \to ۱^-} [x]}{\lim\limits_{x \to ۱^-} x^۲ + \lim\limits_{x \to ۱^-} ۲} = \dfrac{۱ - ۰}{\cancel{۳}} = \dfrac{۱}{۳}$

$۱ + ۲$

۳) $\lim\limits_{x \to ۰^+} (\cos x - \sin x) = \cos(۰) - \sin(۰) = ۱$

کار در کلاس

مقدار حد $\lim\limits_{x \to ۲^+} \dfrac{\sqrt{x - ۲}}{[x] + ۲}$ را بیابید.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}}{\lim\limits_{x \to 2^+} [x] + 2} = \dfrac{0}{2+2} = 0$

پ) $= \dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)\,\overbrace{(3(-\frac{5}{3})+5)}^{0}}{(3(-\frac{5}{3})+6)\,((-\frac{5}{3})^3+1)} = 0$

ت) $= \dfrac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \dfrac{1-2}{2-4} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = -6(-1)^7-4(-1)+5 = 15$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}} \dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

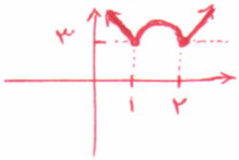
ث) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{\sin 0}{0+\cos 0} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi} = \dfrac{|\cos \frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2}-\pi} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟ خیر

به تابع زیر توجه کنید که شرایط داده شده را دارد، ولی ثابت نیست.

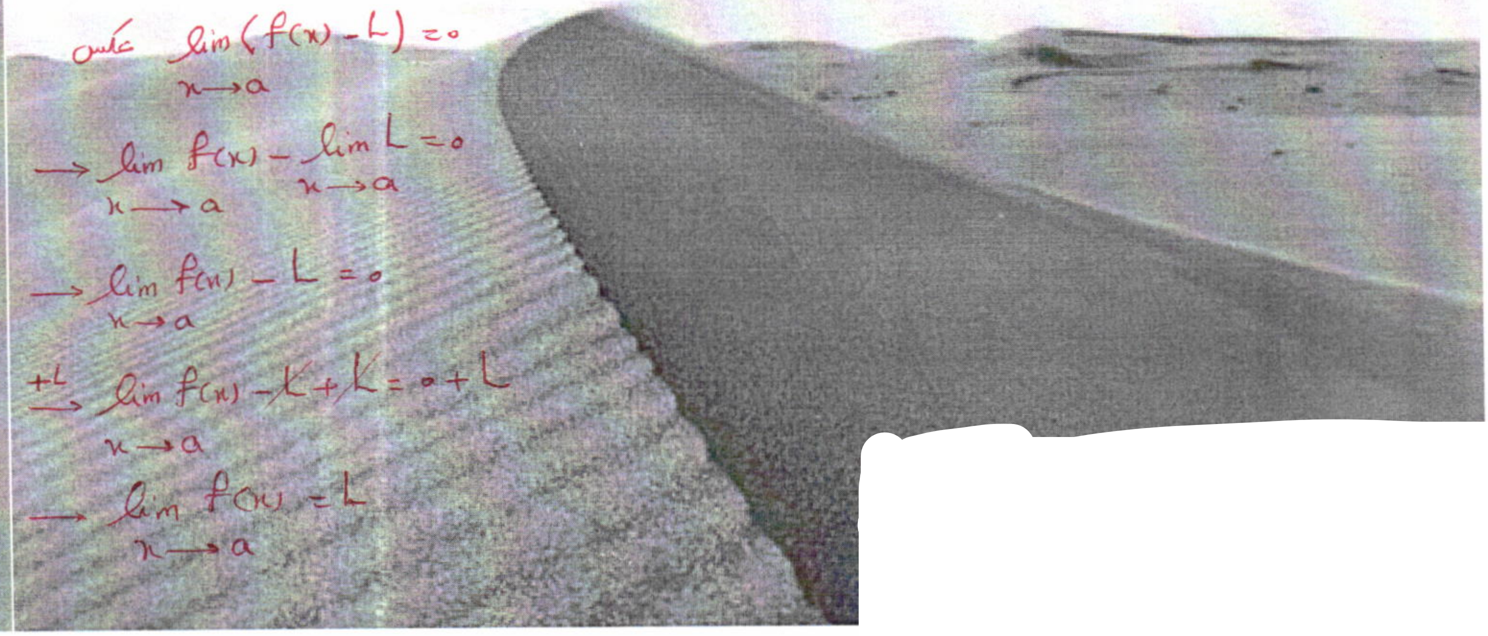


۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{x^2-1} = 4$.

$\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} x^2-1} = 4 \longrightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{3} = 4 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 12$

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = L-L = 0$



عکس $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = 0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - L = 0$

$\xrightarrow{+L} \lim\limits_{x\to a} f(x) - \cancel{L} + \cancel{L} = 0 + L$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

$\lim_{x\to 1} 3x+2 = 5$ / $\lim_{x\to 1} x^2-1 = 0$ / $\lim_{x\to 1} [x]-1 =$ وجود ندارد ، حدچپ $\neq$ حد راست / $y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$ در $x=1$ حد ندارد ، حدچپ $\neq$ حد راست

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=3x+2 \quad , \quad y=x^2-1 \quad , \quad y=[x]-1 \quad\quad y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)+g(x)=\ldots$ x^2+3x+1
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-1$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)\,g(x)=\cdots$ $(x^2-1)([x]-1)$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=[x]-1$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+2}{[x]-1}$
تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$		$f^2(x)=4$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^2-1$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟ حد ندارد.

اثبات: به روش برهان خلف، فرض کنیم که تابع $f+g$ حد دارد. لذا:

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) - \lim_{x\to a} f(x)$
حد دارد ، حد دارد

$=\lim_{x\to a}(\cancel{f(x)}+g(x)-\cancel{f(x)})$

$=\lim_{x\to a} g(x)$ حد دارد ، خلاف فرض

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1\\ 3x+b & x>-1\end{cases}$$

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -3+b$

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)} \frac{x^2-2}{-x} = \frac{1-2}{1} = -1$

$-3+b=-1 \to b=2$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

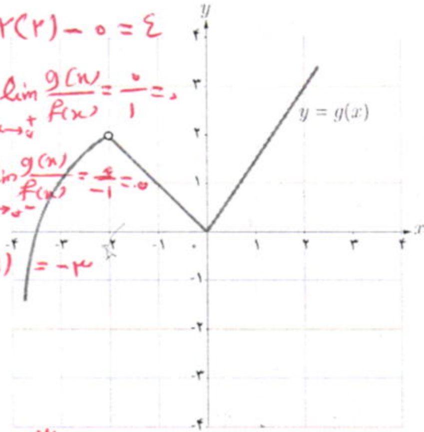
$\lim_{x\to -2}\left(2g(x)-f(x)\right) = 2(2)-0=4$

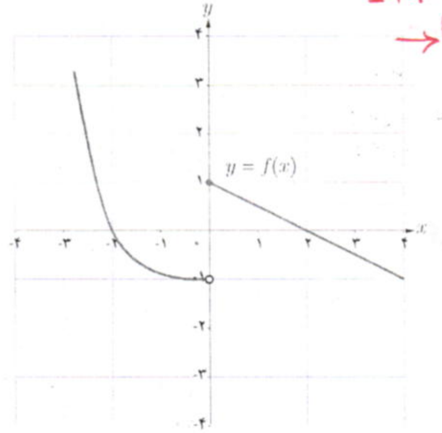
$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{1}=0$; $\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{-1}=0$

$\lim_{x\to -3} -3\sqrt{g(x)} = -3(1) = -3$

$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8g(x)}$

$=\sqrt[3]{8(3)} = 2\sqrt[3]{3}$





درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.[1]

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$، پس نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در واقع از $\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}$ عبارت $\frac{0}{0}$ حاصل می‌شود. در این‌گونه موارد، سعی می‌کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0$$

---

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند بود.

✤ مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$ را بیابید.

✤ حل : حد صورت و مخرج کسر در $x=۱$، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+۸}-۳$ وجود دارد. در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+۸}+۳$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\left(\sqrt{x+۸}\right)^۲-(۳)^۲}{(x-۱)\left(\sqrt{x+۸}+۳\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۸}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۳x-۵}+۲}{\sqrt{۳x-۵}+۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳x-۹}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳\cancel{(x-۳)}}=\frac{۶\times ۴}{۳}=۸$$

✤ مثال :

توجه : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos x}{x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=۱\times ۰=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{3x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

توجه: $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

✣ مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

✣ حل: قرار می‌دهیم: $t=\sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^2-1$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+1)}=\frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

✣ مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

✣ حل: قرار می‌دهیم: $t=x-\frac{\pi}{2}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x=t+\frac{\pi}{2}$.
پس،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t}=-2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-2\times 1=-2$$

کار در کلاس

$x-\frac{\pi}{4}=t \to 2x-\frac{\pi}{2}=2t \to 2x=2t+\frac{\pi}{2}$

$\to 4x-\pi=4t$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{4x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t+\frac{\pi}{2})-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}\times\frac{\cos 2t+1}{\cos 2t+1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{\sin 2t}{\cos 2t+1}\times\frac{-1}{2}=1\times\frac{\sin 2(0)}{\cos 2(0)+1}\times\frac{-1}{2}=0$$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}{(\cancel{x-1})(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(\cancel{x+1})(2x-1)}{3x(\cancel{x+1})} = \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-3}{-3} = 1$

ب) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{2(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = 8$

پ) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{16}$

ت) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{(\cancel{4-x})(3+\sqrt{2x+1})}{2(\cancel{4-x})(2+\sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

ث) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ = بالا

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

۲ اگر $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x}$، حاصل $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = 0$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} =$

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\cos x-\sin x})}{\cancel{\cos x-\sin x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{|1-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{x\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos 2x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-2\cos^2 x+1)}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4(1-\cos^2 x)}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{\sin x} \times 4$

$= 1 \times 1 \times 4 = 4$

ث) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x+1}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}$

ح) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$x<0$ در ربع چهارم x $\rightarrow 0<\cos x<1$

$\rightarrow -1<-\cos x<0 \rightarrow 0<1-\cos x<1 \rightarrow |1-\cos x| = 1-\cos x$

پ) $= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1-\cos^2 x} \times (1+\cos x)$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sin^2 x}(1+\cos x) = 1 \times (1+1) = 2$

ث) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x+1}{x+\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t-\pi)+1}{t} \times \frac{\cos(t-\pi)-1}{\cos(t-\pi)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2(t-\pi)-1}{t} \times \frac{1}{\cos(t-\pi)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin^2 t}{t} \times \frac{1}{\cos(t-\pi)-1}$

$\left.\begin{matrix} t=x+\pi \\ x\to\pi \end{matrix}\right\} \to t\to 0$

$=0$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳:

ث) $$\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi}\ \underset{x+\pi=t}{\overset{\frac{۰}{۰}}{=}}\ \lim_{t\to۰}\frac{\cos(t-\pi)+۱}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi+۱}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\overbrace{\cos t\cos\pi}^{-\cos t}+\overbrace{\sin t\sin\pi}^{۰}+۱}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos t}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos^۲ t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}=۱\times\frac{۰}{۲}=۰$$

ج) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ \underset{x-a=t}{\overset{\frac{۰}{۰}}{=}}\ \lim_{t\to۰}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to۰}\frac{۱-\cos^۲ t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=۱\times\cos a-۱\times\frac{۰}{۱+۱}\times\sin a=\cos a$$

چ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶(x-\frac{\pi}{۳})}\ \underset{x-\frac{\pi}{۳}=t}{\overset{\frac{۰}{۰}}{=}}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۶}\times\frac{\sin t}{t}=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

$$\text{ح)}\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۱-۳\sqrt{x}}{x-۱}\times\frac{۲x+۱+۳\sqrt{x}}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x+۱)^{۲}-(۳\sqrt{x})^{۲}}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۲}+۴x+۱-۹x}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۲}-۵x+۱}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

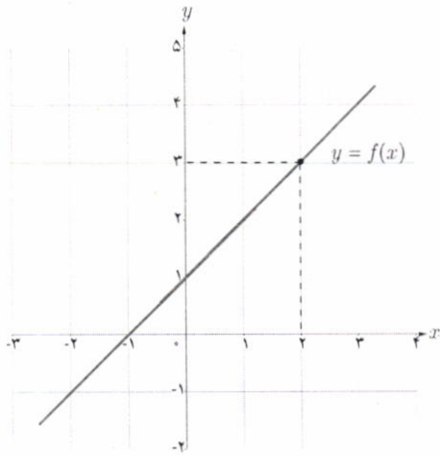
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۴x-۱)}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x-۱}{۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

١٤٤,٢

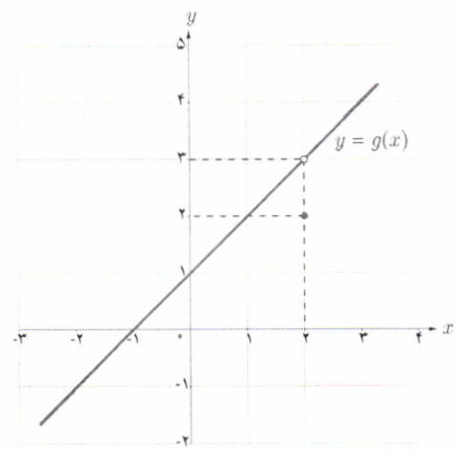
درس ۵
پیوستگی

فعالیت

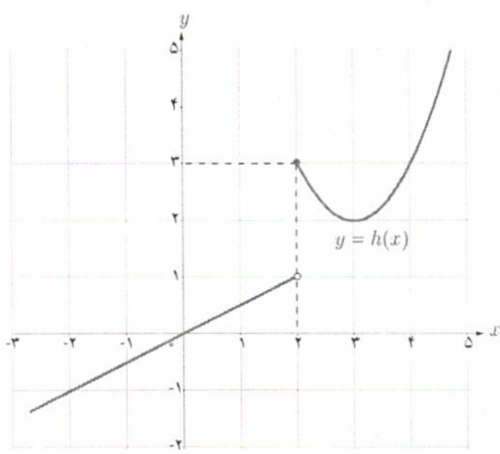
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



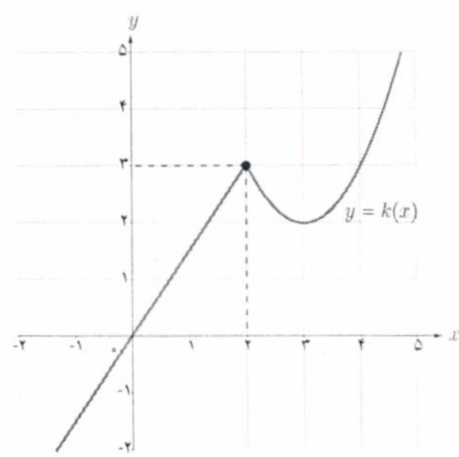
$f(۲)=$ ۳ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ ۳



$g(۲)=$ ۲ $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) =$ ۳



$h(۲)=$ ۳ $\lim\limits_{x\to ۲} h(x) =$ وجود ندارد.



$k(۲)=$ ۳ $\lim\limits_{x\to ۲} k(x) =$ ۳

ب) برای کدام‌یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟ f و k

پ) در نمودار کدام‌یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟ f و k

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=۲$ *پیوسته* است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

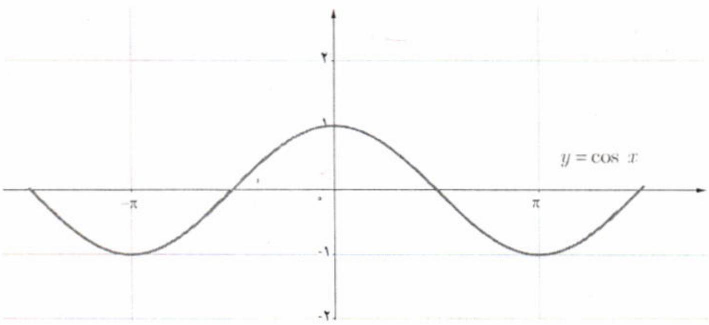
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

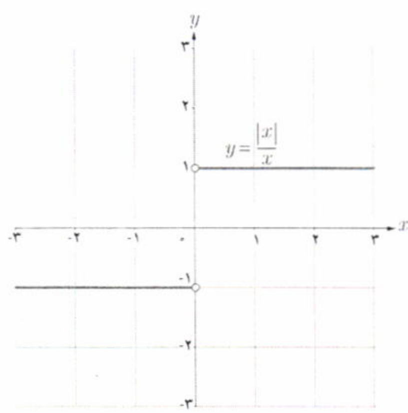
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

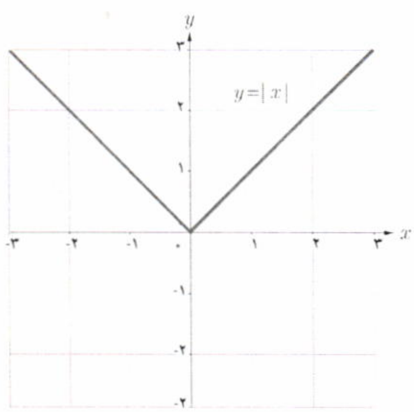
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

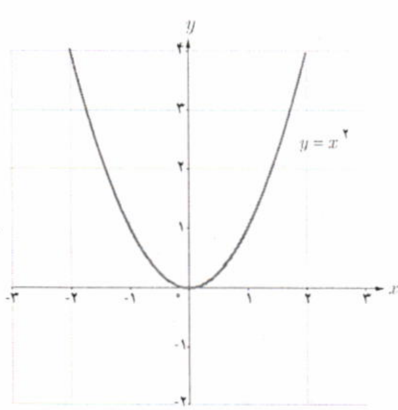
✤ **مثال** : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a، پیوسته‌اند.

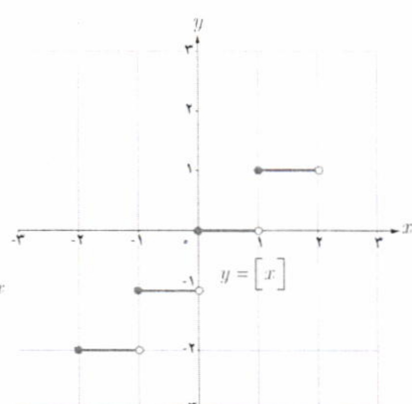
همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^2$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\dfrac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.











مثال : توابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

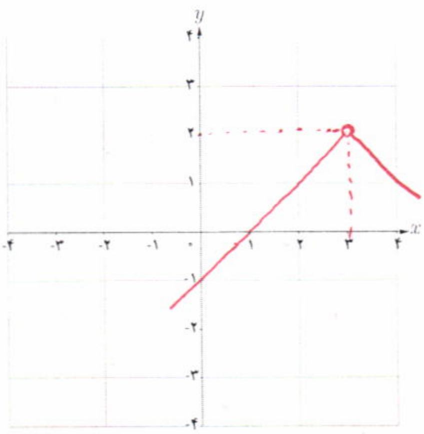
حل : از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.

در مورد تابع g داریم :

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶=g(۳)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

کار در کلاس



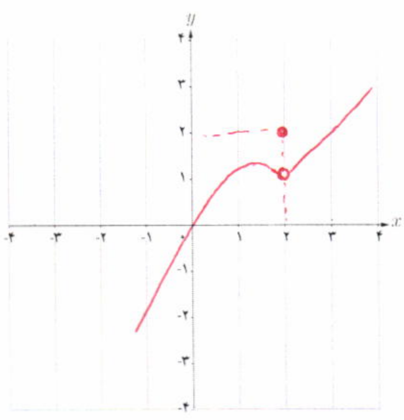
(۱)

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در x=۳ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در x=۳ پیوسته نیست)

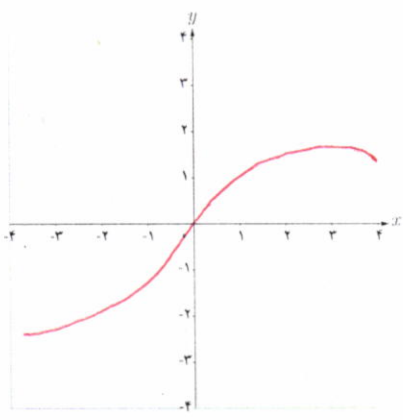
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

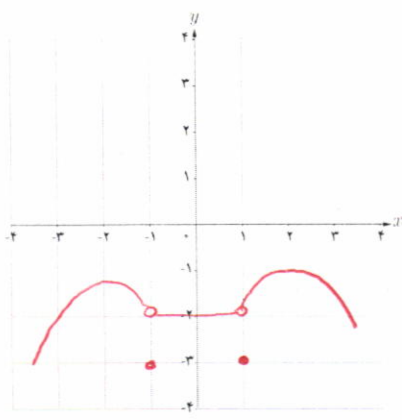
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



(۲)

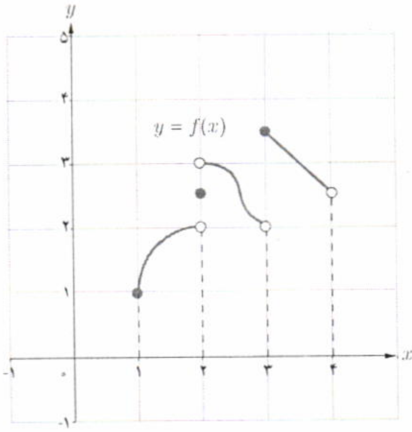


(۳)



(۴)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است. ۲و۳

ب) آیا تساوی $\lim_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟ خیر

پ) آیا تساوی $\lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟ خیر

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

۱و۳

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + x & x < ۰ \\ ۲ & x = ۰ \\ ۲\cos x - \sin x & x > ۰ \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

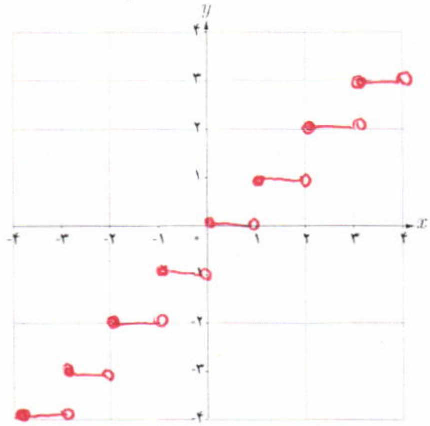
حل : داریم $f(۰)=۲$. همچنین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (۳x^۲ + x) = ۰ \neq f(۰)$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (۲\cos x - \sin x) = ۲\cos(۰) - \sin(۰) = ۲ = f(۰)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۲ , \frac{۱}{۲} , ۰\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است. $\frac{1}{2}$

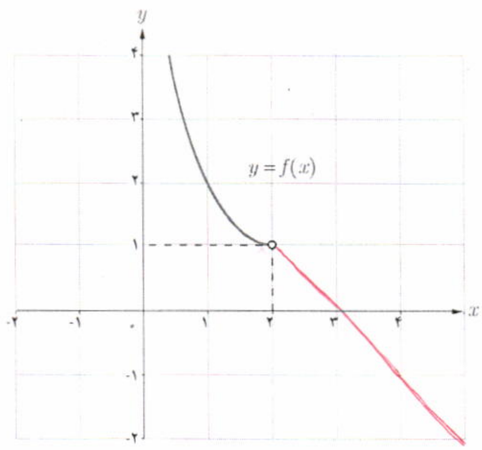
۲ تابع f پیوستگی راست دارد. ۰ و ۲

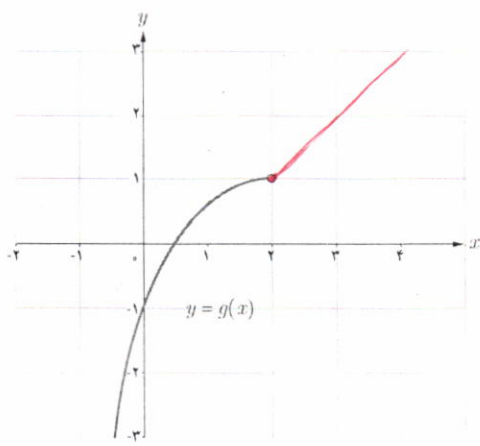
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. هیچکدام

ب) در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $(a\ ,\ b]$ و $[a\ ,\ b)$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد.

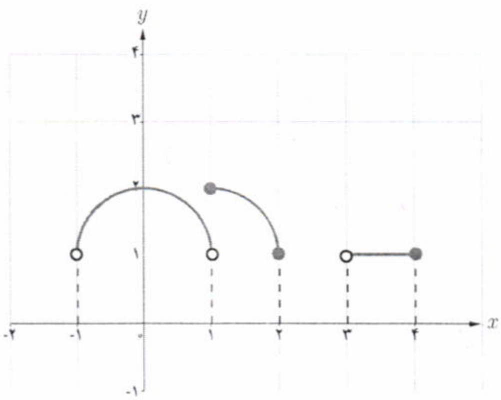
تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

✤ مثال :

۱) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته است.

۲) تابع $f(x)=[x]$ بر بازهٔ $(۰\ ,\ ۱)$ پیوسته است، اما بر بازهٔ بسته $[۰\ ,\ ۱]$ پیوسته نیست.

کار در کلاس



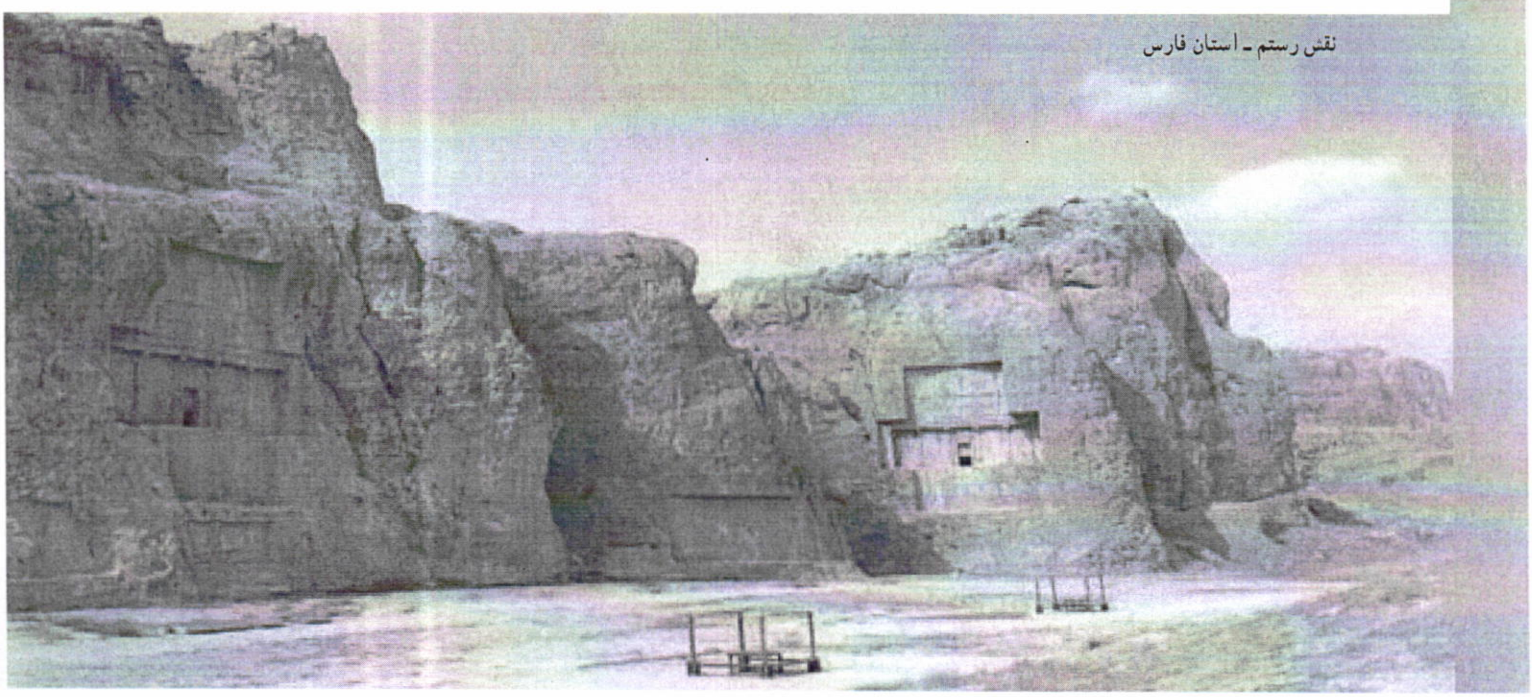
در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[۱\ ,\ ۲]$ پیوسته است. درست

ب) تابع f در هر نقطه از $[۱\ ,\ ۲]$ پیوسته است. نادرست.

پ) تابع f بر بازه $[۳\ ,\ ۴]$ پیوسته است. نادرست

ت) تابع f بر بازه $[۰\ ,\ ۲]$ پیوسته است. نادرست



نقش رستم ـ استان فارس

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-۱|+۲$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+۱ & x>۰ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

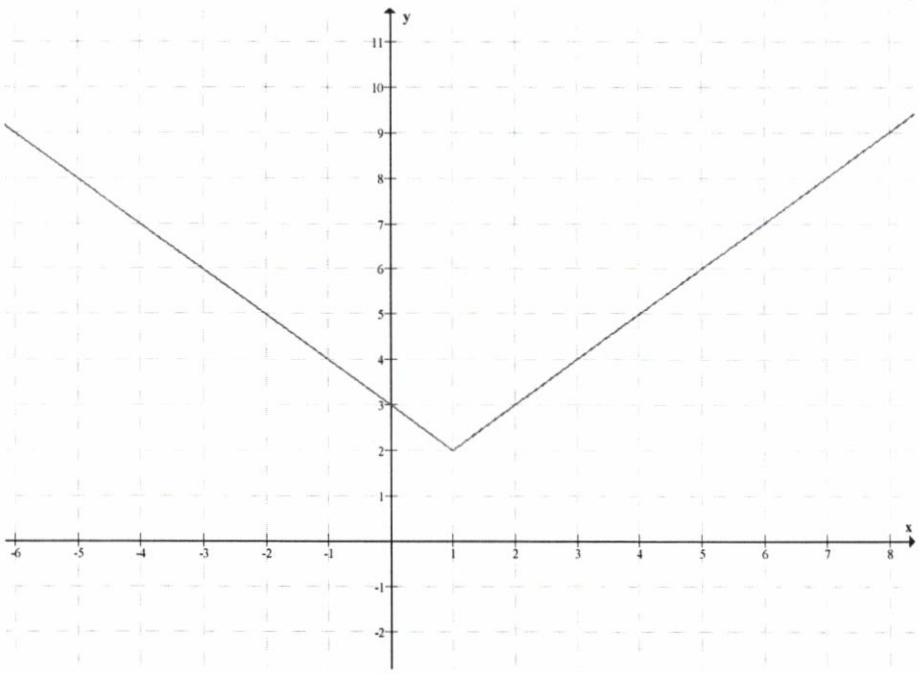
۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & x>۰ \\ b-۱ & x=۰ \\ x-۲a & x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

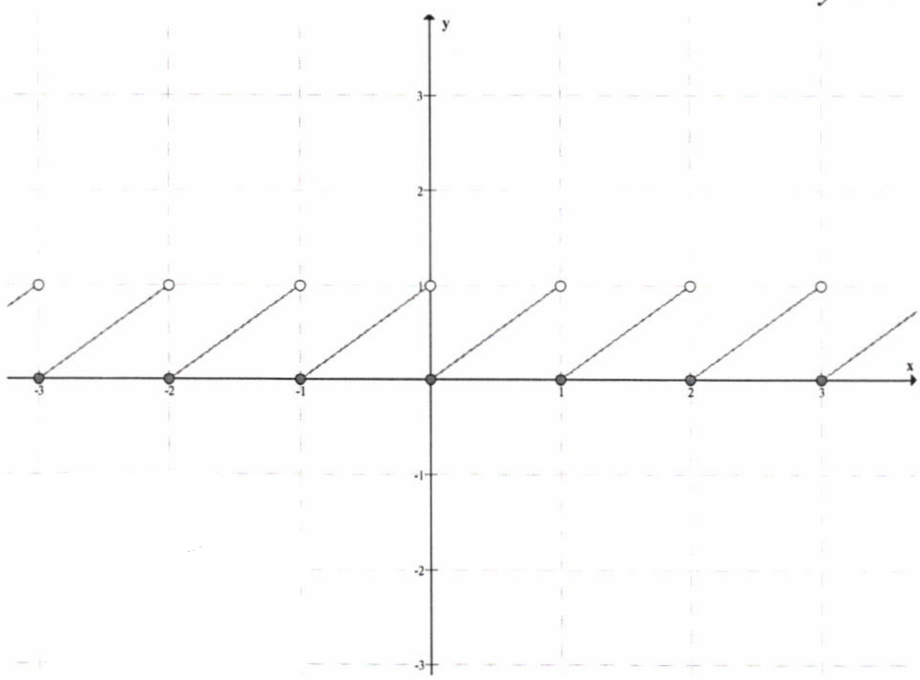
۱ :

الف) $y=|x-1|+2$



تابع در تمام نقاط پیوسته است.

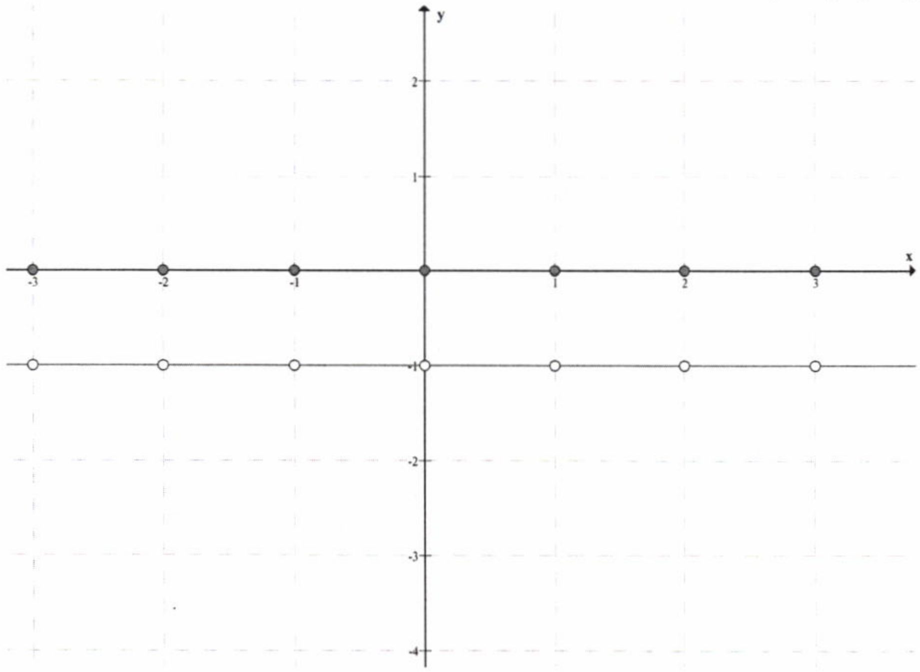
ب) $y=x-[x]$



تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد .

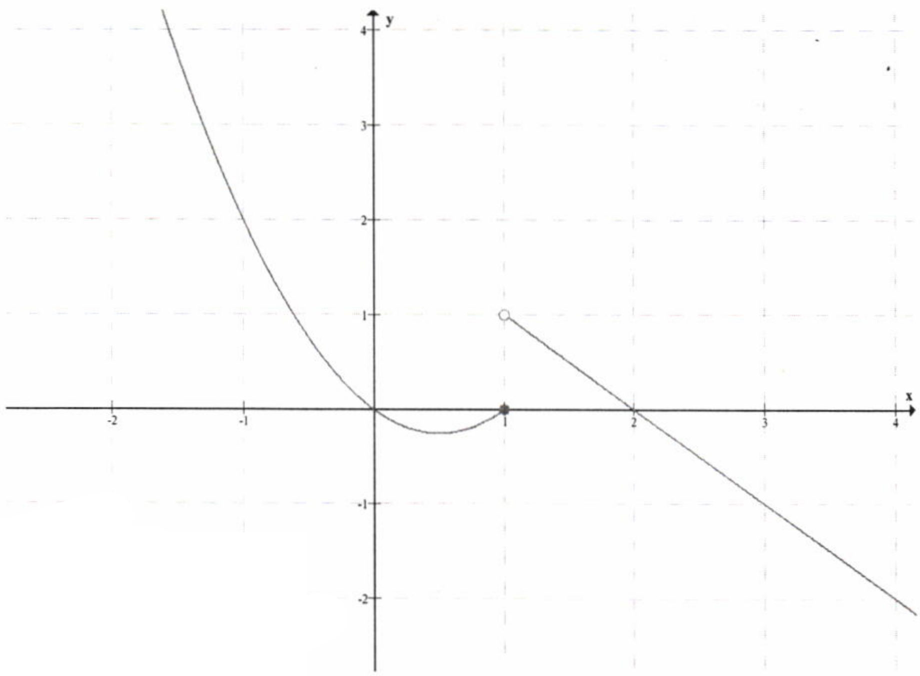
۱۵۱,۱

پ) $y=[x]+[-x]$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$



تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

***

۲:

الف)

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲(۱) - ۱ = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱) + ۲ = ۱$$

$$f(۱) = a$$

$$\to a = ۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} (x+۲) = ۳$$

$$g(۱) = a$$

$$\to a = ۳$$

پ)

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x) = \lim_{x\to ۱^+} [x] + a = ۱ + a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} h(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$h(۱) = ۱ + a$$

$$\to ۱ + a = \frac{۱}{۲} \to a = -\frac{۱}{۲}$$

ت)

$$\lim_{x\to ۱^+} k(x) = \lim_{x\to ۱^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} k(x) = \lim_{x\to ۱^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)[۰] = ۰$$

$$k(۱) = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\to ۱ - a = ۰ \to a = ۱$$

۱۵۱,۳

۳:

الف)

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۲(۰)+۱=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰$$

$$f(۰)=a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکـن نیـست پـس هـر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

ب)

$$\lim_{x\to ۰^+} g(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{ax}{x}=a$$

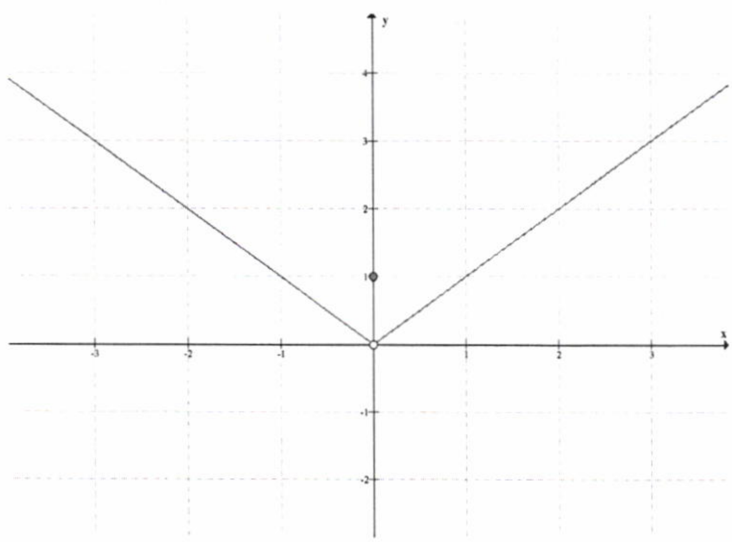
$$\lim_{x\to ۰^-} g(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{ax}{-x}=-a$$

$$g(۰)=۱$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه ی صفر برابر شوند. چون ایـن ممکـن نیـست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

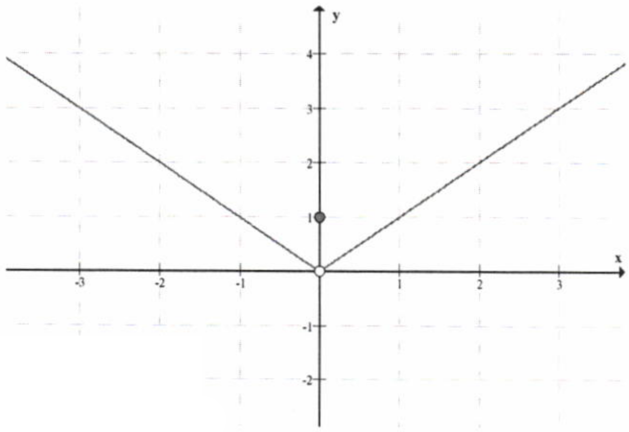
❋❋❋

۴: الف) $f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$



١٥١,٤

ب) $f(x)=\begin{cases} ۲+x^{۲} & x\le ۲ \\ ۳ & ۲<x<۳ \\ x-۲ & x\ge ۳ \end{cases}$



پ) $f(x)=\dfrac{۱}{|x|-۲}$

۵: باید $k<۳$ باشد.

۶:

$۳-x\ge ۰ \to x\le ۳$

تابع در بازه‌ی $(-\infty,۳]$ پیوسته است.

۷:

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱-\cos^{۲}x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\frac{۱}{۱+\cos(۰)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}(x-۲a)=-۲a$$

$f(۰)=b-۱$

$$\to\begin{cases} -۲a=\frac{۱}{۲}\to a=-\frac{۱}{۴} \\ b-۱=\frac{۱}{۲}\to b=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۱۵۱,۵