گام به گام ریاضی

پایه: یازدهم تجربی

با تشکر از زحمات سرکار خانم عطیه تبریزی و
گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تهیه شده توسط کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

منحنی مسیر حرکت بسیاری از اشیا را به کمک یک معادلهٔ درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید :

الف) $L_۱: y=۲x+۱$

x	۰	۱-
y	۱	۱-

ب) $L_۲: y=۲x-۳$

x	۲	۰
y	۱	۳-

پ) $L_۳: y=۱$

این خط خاص است محور عرض ها را در نقطه ی (۰,۱)قطع می کند و موازی محور x ها است

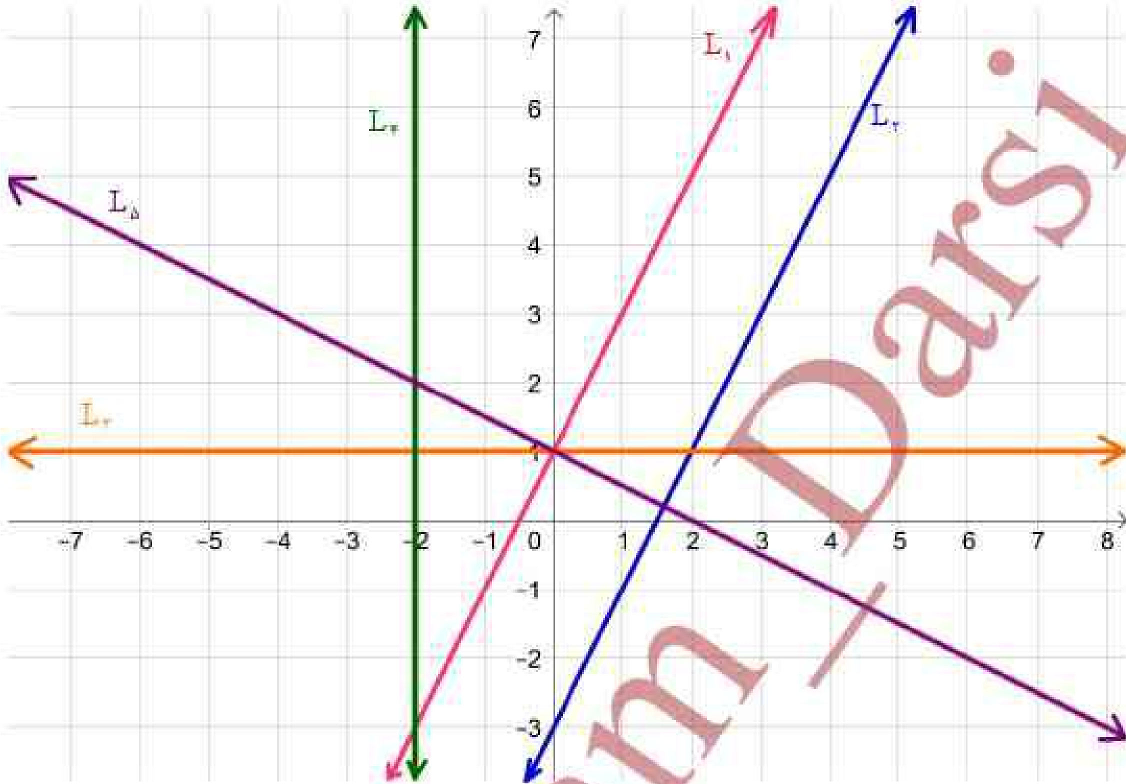
ت) $L_۴: x=-۲$

این خط خاص است محور طول ها را در نقطه ی (۲,۰-)قطع می کند و موازی محور y ها است.

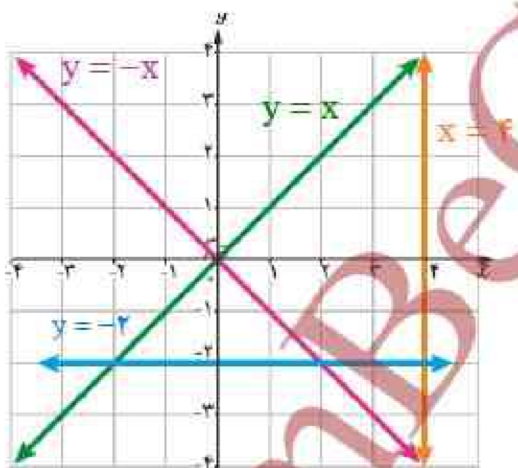
ث) $L_۵: x+۲y=۲$

x	۲	۰
y	۰	۱

«رسم نمودار ها در صفحهٔ بعد»



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های مقابل را روی شکل بنویسید



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با $m_{AB} = \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای **شیب های** برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، ... عرض از مبدأ ... خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

الف) $L_1: y=2x+1$
$m=2 \ , \ h=1$

ب) $L_2: y=2x-3$
$m=2 \ , \ h=-3$

پ) $L_3: y=1$
$m=0 \ , \ h=1$

ت) $L_4: x=-2$
شیب این خط تعریف نشده است و عرض از مبدأ هم ندارد.

ث) $L_5: x+2y=2$

$2y=-x+2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2} \ , \ h=1$

خط های L_1 و L_2 با هم موازی هستند.

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=mx+h$ دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(0,7)$ و $B(3,1)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-7}{3-0}=-2$

معادلهٔ خط: $y=-2x+h$

$B(3,1)$ روی خط L واقع است: $1=-2(3)+h \Rightarrow h=7$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(0,7)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=7$ است. پس:

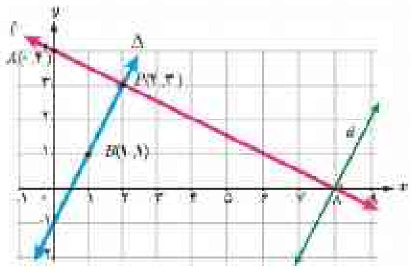
معادلهٔ خط L: $y=-2x+7$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P(2,-1)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=3x-4$ موازی باشد.

خط گذرنده از نقطه $P(2,-1)$ با خط $y=3x-4$ موازی است پس $m=3$ همچنین $P(2,-1)$ روی خط است پس داریم:

$-1=3\times 2+h \Rightarrow h=-7 \Rightarrow y=3x-7$

فعالیت کلاسی



۱ دو خط l و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

P و A شیب خط l گذرا از نقاط : $m=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{۳-۴}{۲-۰}=\dfrac{-۱}{۲}$

P و B شیب خط Δ گذرا از نقاط : $m'=\dfrac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\dfrac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

۲ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم : $mm'=(\dfrac{-۱}{۲})(۲)=-۱$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوسِ یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد ۲ خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر L برابر قرینهٔ معکوس شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[۱]؛ یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (۱−) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

کار در کلاس ص ۴

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L: y=۵x-۲$ $\quad m=۵$ $\qquad T: y=\dfrac{-۱}{۵}x+۳$ $\quad m'=\dfrac{-۱}{۵}\Rightarrow mm'=-۱$

ب) $L: y=\dfrac{۱}{۲}x+۷$ $\quad m=\dfrac{۱}{۲}$ $\qquad T: x-۲y=۱$ $\quad x-۲y=۱\Rightarrow y=\dfrac{۱}{۲}x-\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow m'=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow m=m'$

پ) $L: ۲x-۳y+۳=۰$ $\quad m=\dfrac{-a}{b}\Rightarrow m=\dfrac{۲}{۳}$ $\qquad T: ۳x+۲y=۰$ $\quad m'=\dfrac{-a}{b}\Rightarrow m'=\dfrac{-۳}{۲}\Rightarrow mm'=-۱$

ت) $L: x=۱$ این خط عمودی است $\qquad T: y=-۳$ خط d افقی است بنا براین دوخط بر هم عمود هستند.

ث) $L: y=۳x+۱$ $\quad m=۳$ $\qquad T: x=۳y-۱$ پس در قسمت (ث) دو خط فقط متقاطع هستند.

$x=۳y-۱\Rightarrow y=\dfrac{۱}{۳}x+\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow m'=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow m\neq m',\ mm'\neq -۱$

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

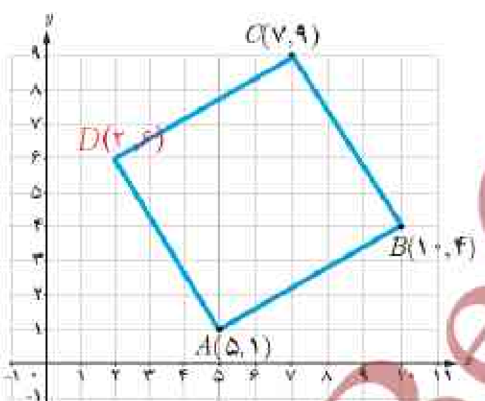
$$۲y-۳x=۱ \Rightarrow -۳x+۲y-۱=۰ \Rightarrow m'=\frac{-a}{b} \Rightarrow m'=\frac{۳}{۲}$$

$$y=mx+۵ \Rightarrow m=m'=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۵$$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$$y=mx+۵ \Rightarrow mm'=-۱ \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+۵$$

۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$$m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow m_{AB}=\frac{۳}{۵}$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

می دانیم که ضلع **AB** بر ضلع **AD** عمود است پس : $m_{AD}=\frac{-۵}{۳}$

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

نقطهٔ **D** محل برخورد دوپاره خط **AD** و **CD** است اگر معادله ی خط ها گذرنده از این دو خط را به دست آوریم و نقطه ی برخورد آن ها را بیابیم مختصات **D** به دست می آید.

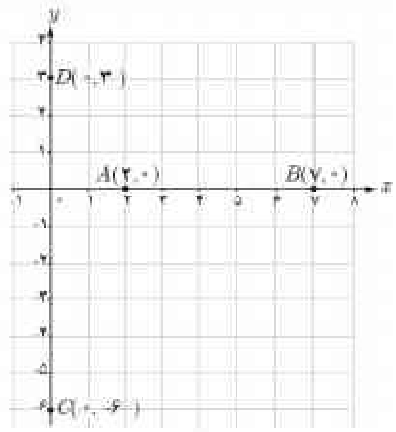
$$m_{CD}=\frac{۳}{۵}\,,\ ۹=\frac{۳}{۵}\times ۷+h \xrightarrow{\times ۵} ۴۵=۲۱+۵h \Rightarrow h=\frac{۲۴}{۵} \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵} \xrightarrow{\times ۵} ۳x-۵y=-۲۴$$

$$m_{AD}=\frac{-۵}{۳}\,,\ ۱=\frac{-۵}{۳}\times ۵+h \xrightarrow{\times ۳} ۳=-۲۵+۳h \Rightarrow h=\frac{۲۸}{۳} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۵x+۳y=۲۸$$

$$\begin{cases} ۵x+۳y=۲۸ \\ ۳x-۵y=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵x+۱۵y=۱۴۰ \\ ۹x-۱۵y=-۷۲ \end{cases} \Rightarrow ۳۴x=۶۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow ۵\times ۲+۳y=۲۸ \Rightarrow y=۶ \Rightarrow D(۲,۶)$$

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

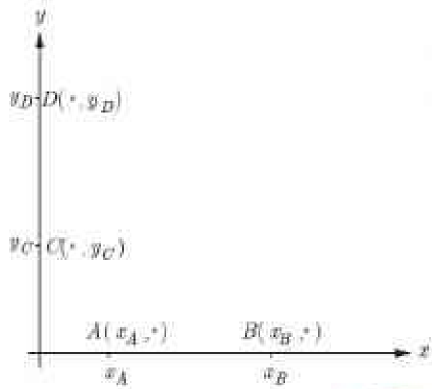
$AB = |x_B - x_A| = |۷ - ۲| = |۵| = ۵$

$BA = |x_A - x_B| = |۲ - ۷| = |-۵| = ۵$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$DC = |y_D - y_C| = |۳ - (-۶)| = |۹| = ۹$

$CD = |y_C - y_D| = |-۶ - ۳| = |-۹| = ۹$



پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.

$$AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$
$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

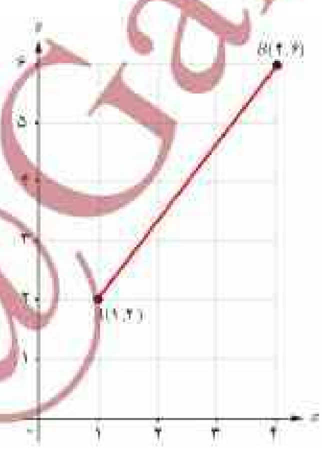
در حالت کلی می‌توان گفت:

۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

چون طول پاره خط AB با طول پاره خط BA برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم (برای پاره خط CD هم همینطور)

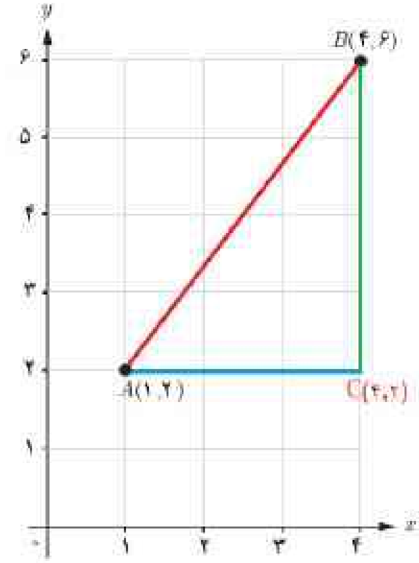
فعالیت کلاسی



۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.

طول پاره خط مساوی ۵ سانتی متر است.

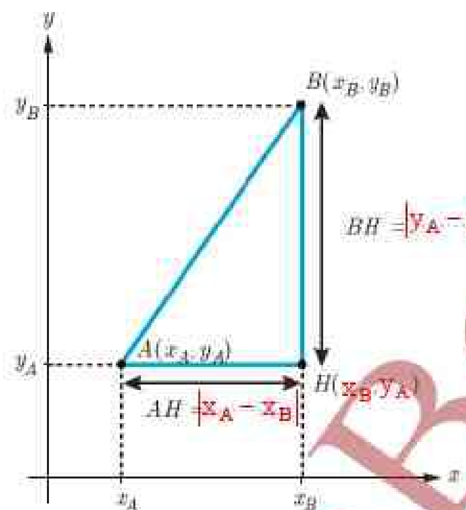
۲ بدون استفاده از خط‌کش و تنها با محاسبه، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟



از نقطهٔ B بر محور x ها و از نقطهٔ A بر محور y ها عمود می کنیم تا نقطهٔ C به دست آید . سپس به کمک قضیه فیثاغورس داریم

$$AB=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۳ در شکل مقابل :



الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

$H(x_B,y_A)$

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

$BH=|y_A-y_B|$

پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.

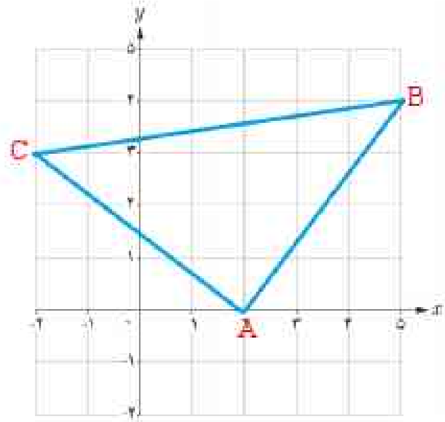
$$B=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{|x_A-x_B|^2+|y_A-y_B|^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.

کار در کلاس

۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۵+۲)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

محیط: $P=۵+۵+۵\sqrt{۲}=۱۰+۵\sqrt{۲}$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

مثلث متساوی الساقین است.

پ) به دو روش نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

الف) طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می کند:

$$۵^۲+۵^۲=۲۵ \Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

ب) دو خط گذرنده از پاره خط های **AB** و **AC** بر هم عمود هستند زیرا حاصل ضرب شیب این خط ها برابر با **۱-** است.

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳},\ m_{AC}=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=\frac{۴}{۳}\times\frac{-۳}{۴}=-۱$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times AC\times AB \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵=۱۲/۵$$

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. نزدیک‌ترین پایگاه‌های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$$\left.\begin{array}{l} PA=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۱۰)^۲+(۳۰-(-۲۰))^۲}=\sqrt{۱۶۰۰+۲۵۰۰}=\sqrt{۴۱۰۰}=۱۰\sqrt{۴۱} \\ PB=\sqrt{(x_B-x_P)^۲+(y_B-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۸۰)^۲+(۳۰-۹۰)^۲}=\sqrt{۹۰۰+۳۶۰۰}=\sqrt{۴۵۰۰}=۱۰\sqrt{۴۵} \end{array}\right\} \Rightarrow PB>PA$$

پایگاه **A** را پیشنهاد می دهم زیرا به محل نزدیک تر حادثه است.

۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

$$ON=\sqrt{(x_N-x_O)^۲+(y_N-y_O)^۲}=\sqrt{(-۶-۰)^۲+(۸-۰)^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$OE=\sqrt{(x_E-x_O)^۲+(y_E-y_O)^۲}=\sqrt{(x_E-۰)^۲+(y_E-۰)^۲}=\sqrt{x_E^۲+y_E^۲}\Rightarrow OE=\sqrt{x_E^۲+y_E^۲}$$

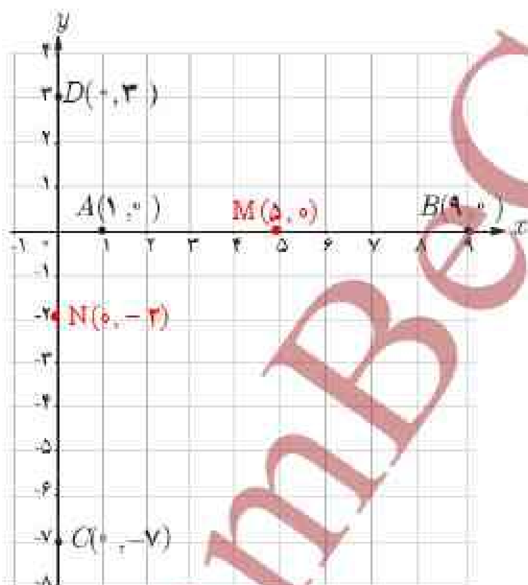
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

فعالیت

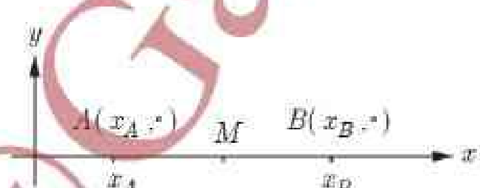
این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



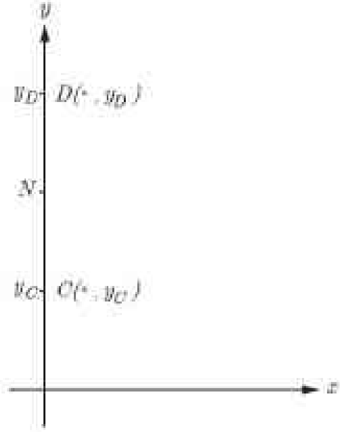
پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.



$$M \text{ وسط } AB \Longrightarrow AM=MB$$

$$\Longrightarrow x_M-x_A=x_B-x_M$$

$$\Longrightarrow ۲x_M=x_A+x_B \Longrightarrow \boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}}$$

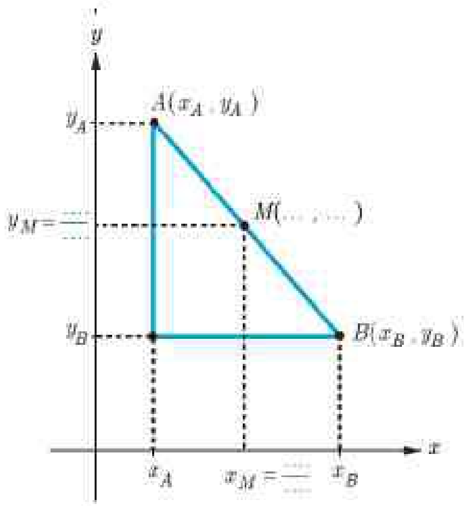


ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

$$CD \text{ وسط } N \Longrightarrow CN = ND$$

$$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

$$\Rightarrow ۲y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$



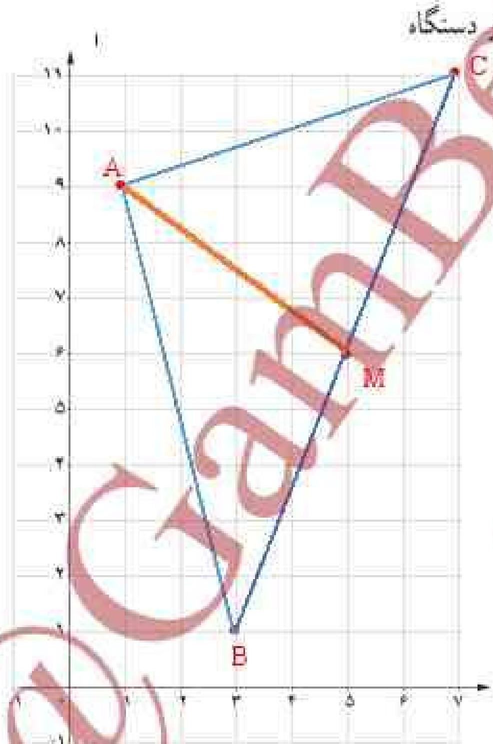
ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد :

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

کار در کلاس

۱ مثلث با رئوس $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.



الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

$$M = (\frac{۳+۷}{۲}, \frac{۱+۱۱}{۲}) = (۵, ۶)$$

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

در این قسمت یاد آوری میانه مثلث ضروری به نظر می رسد.

(پاره خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می کند.)

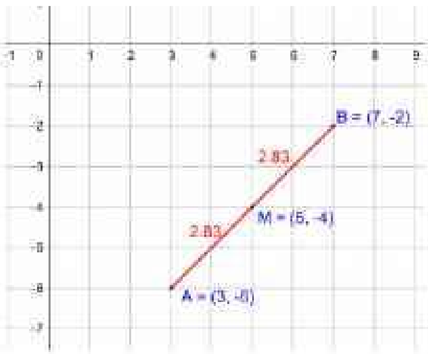
$$AM = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۶-۹)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

$$m_{AM} = \frac{۹-۶}{۱-۵} = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow y - ۶ = \frac{-۳}{۴}(x-۵)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳۹}{۴} \quad , \quad ۳x + ۴y = ۳۹$$

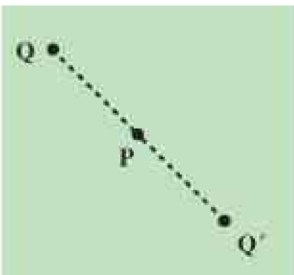
۲ الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.



چون N وسط پاره خط AB است پس داریم :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{x_A + ۷}{۲} \Rightarrow x_A = ۳$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow -۴ = \frac{y_A + (-۲)}{۲} \Rightarrow y_A = -۶$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.



یاد آوری قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه :

در شکل مقابل نقطه ی Q' قرینه ی نقطه ی Q نسبت به نقطه ی P است به شرطی

که PQ=PQ' در نتیجه می بینیم که نقطه ی P وسط دو نقطه ی Q و Q' است .

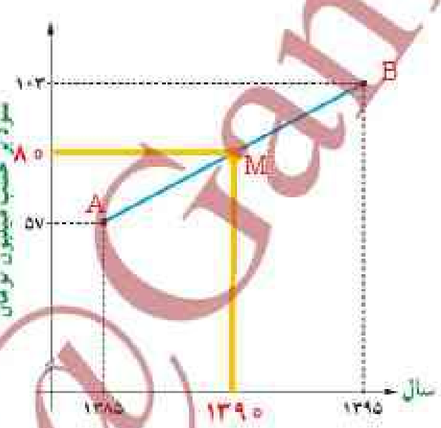
قرینه ی نقطه ی A را A' می نامیم و با توجه به مطالب فوق داریم :

AM=A'M پس M وسط AA' در نتیجه

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow -۱ = \frac{x_A + ۱}{۲} \Rightarrow x_A = -۳$$
$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{y_A + ۲}{۲} \Rightarrow y_A = ۶$$

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha , \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} x_O = \frac{x_P + x_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{\alpha + x_{P'}}{۲} \Rightarrow x_{P'} = -\alpha \\ y_O = \frac{y_P + y_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{\beta + y_{P'}}{۲} \Rightarrow y_{P'} = -\beta \end{array}\right\} \Rightarrow P'(-\alpha, -\beta)$$



۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط آبی رنگ را به دست آوریم

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow y_M = \frac{۵۷ + ۱۰۳}{۲} \Rightarrow y_M = ۸۰$$

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

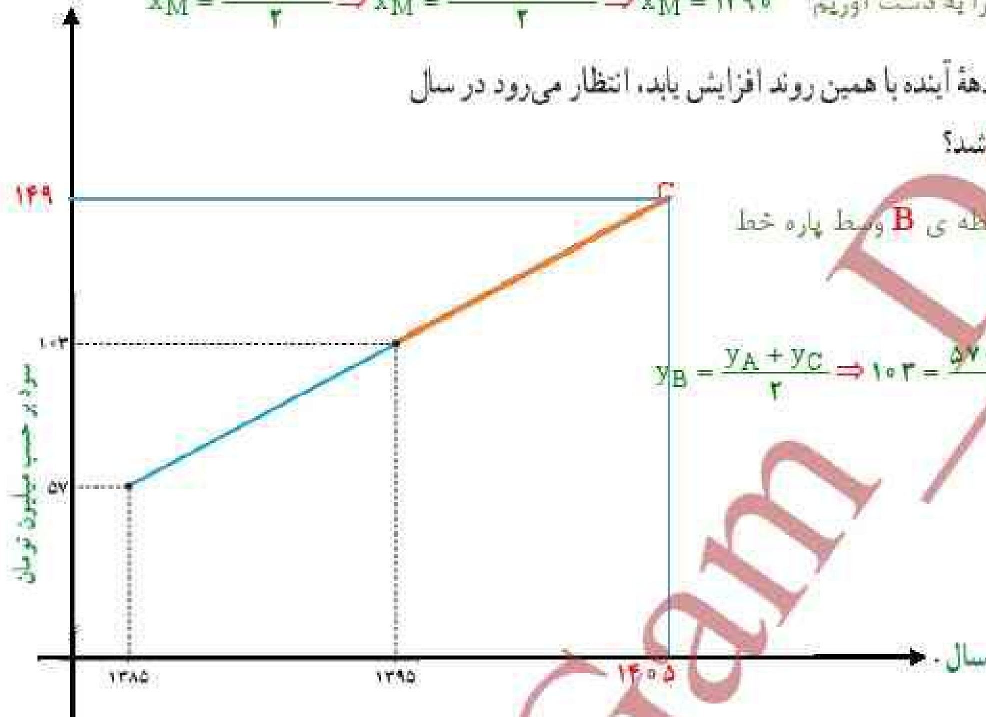
برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه با این میانگین برابر بوده باید

طول نقطه ی وسط پاره خط آبی را به دست آوریم $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} \Rightarrow x_M = ۱۳۹۰$

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهۀ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

با توجه به شکل واضح است که نقطه ی **B** وسط پاره خط **AC** است .

$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۱۰۳ = \frac{۵۷ + y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۲۰۶ - ۵۷ = ۱۴۹$

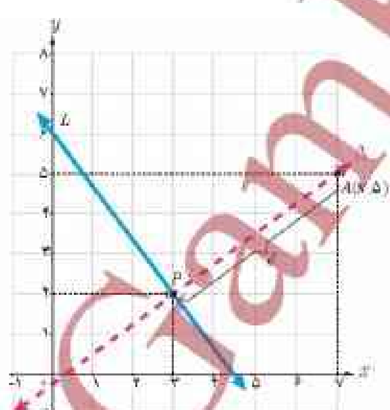


فاصلۀ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلۀ نقطۀ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطۀ A و معادلۀ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.

مثال : فاصلۀ نقطۀ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلۀ $۴x + ۳y = ۱۸$ به دست آورید.

حل : چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلۀ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.



$$\Delta : y = \frac{۳}{۴}x + h$$

$A(۷,۵)$ روی Δ است: $۵ = \frac{۳}{۴}(۷) + h \Rightarrow h = \frac{-۱}{۴}$

معادله Δ: $y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta : ۳x - ۴y = ۱$

اگر معادلۀ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطۀ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L: ۴x + ۳y = ۱۸ \\ \Delta: ۳x - ۴y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۳ \quad , \quad y = ۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^{۲}+(y_A-y_P)^{۲}}=\sqrt{(۷-۳)^{۲}+(۵-۲)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

با به‌کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[1] :

> فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_{\circ},y_{\circ})$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ برابر است با :
>
> $$d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=\circ$ به دست می‌آوریم :

$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

کار در کلاس

۱) فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷\,,-۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x+y=۵$

$۲x+y-۵=\circ \Rightarrow a=۲\,,\ b=۱\,,\ c=-۵\,,\ d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$

$$d=\frac{|۲(۷)+۱(-۴)-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\Rightarrow d=\sqrt{۵}$$

ب) $T: x=۵$

$x-۵=\circ \Rightarrow a=۱\,,\ b=\circ\,,\ c=-۵\,,\ d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$

$$d=\frac{|۱(۷)+\circ\times(-۴)-۵|}{\sqrt{۱+\circ}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

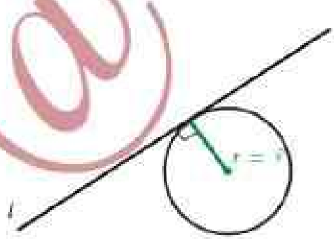
پ) $\Delta: y=\circ$

$\Rightarrow a=\circ\,,\ b=۱\,,\ c=\circ\,,\ d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$

$$d=\frac{|\circ\times(۷)+۱(-۴)+\circ|}{\sqrt{\circ+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

۲) خط $L: ۳x-۴y=\circ$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).



پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی نقطه ی مرکز را از خط l به دست آوریم.

$$r=\frac{|۳\times۲+(-۴)\times(-۱)+\circ|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}\Rightarrow r=۲$$

حل تمرینات صفحه ی ۹

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: ۲x - y = ۱ \quad m_L = ۲$

$T: y = ۲x - ۳ \quad m_T = ۲$

$\Delta: x + ۲y = ۰ \quad m_\Delta = -\frac{۱}{۲}$

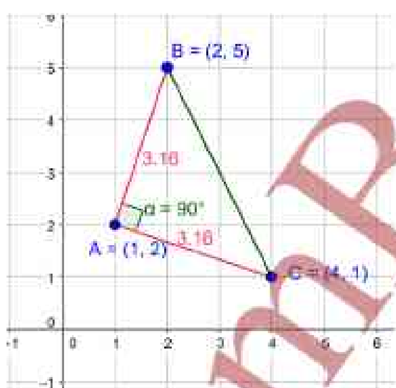
با توجه به شیب های خط ها : خط L موازی خط T است و خط Δ بر دو خط L و T عمود است.

۲ دو نقطهٔ $A(۱۴ , ۳)$ و $B(۱۰ , -۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

اگر نقطه ی M وسط پاره خط AB باشد ، پس : $M(\frac{۱۴+۱۰}{۲} , \frac{۳-۱۳}{۲}) \Rightarrow M(۱۲ , -۵)$

فاصله ی مبدأ از نقطه ی M : $OM = \sqrt{۱۲^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = ۱۳$

۳ نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱ , ۲)$، $B(۲ , ۵)$ و $C(۴ , ۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.



$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \\ AC &= \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = AC$$

راه اول :

$$m_{AB} = \frac{۵-۲}{۲-۱} = ۳ \ , \ m_{AC} = \frac{۱-۲}{۴-۱} = -\frac{۱}{۳}$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = ۳ \times -\frac{۱}{۳} = -۱$$

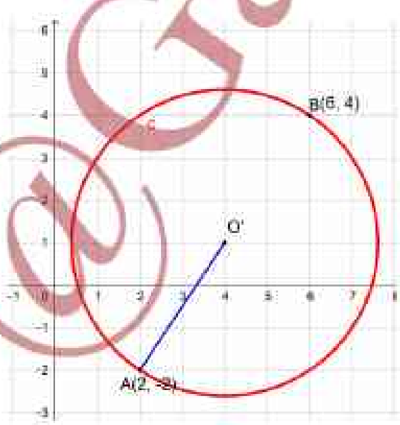
راه دوم :

$$BC = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰}$$

$$(\sqrt{۱۰})^۲ + (\sqrt{۱۰})^۲ = (\sqrt{۲۰})^۲ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲ , -۲)$ و $B(۶ , ۴)$ هستند.

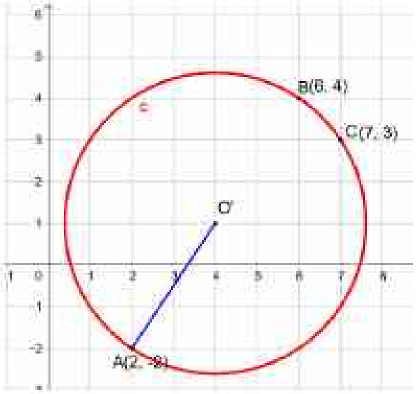
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.



مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط AB است :

$$O'(\frac{۲+۶}{۲} , \frac{۴-۲}{۲}) \Rightarrow O'(۴ , ۱) \quad ,$$

$$O'A = \sqrt{(x_A - x_{O'})^۲ + (y_A - y_{O'})^۲} \Rightarrow O'A = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$



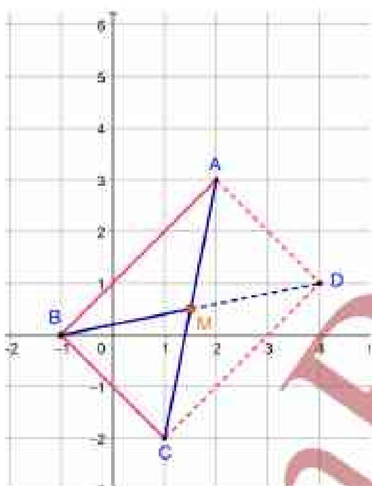
ب) آیا نقطهٔ $C(۷\,,\,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

C روی دایره باشد باید **OC** نیز برابر با طول شعاع دایره باشد :

$$O'C=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

۵ نقاط $A(۲\,,\,۳)$، $B(-۱\,,\,۰)$ و $C(۱\,,\,-۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

محل برخورد قطر ها را **M** می نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط **AC** به دست می آوریم. حالا می دانیم که نقطه ی **M** وسط قطر دیگر هم هست بار به کمک فرمول می توانیم مختصات رأس چهارم **D** را بیابیم.



$$MA=MC \Rightarrow M\left(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۳+(-۲)}{۲}\right)\Rightarrow M\left(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

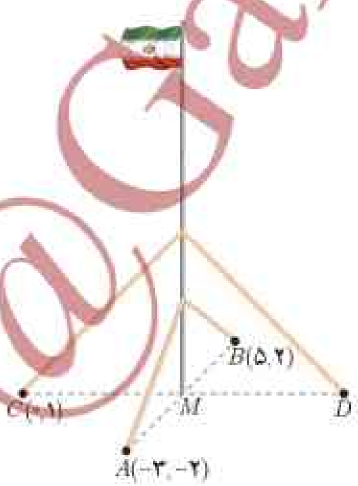
$$MB=MD \Rightarrow x_D=۲x_M-x_B \Rightarrow x_D=۲\times\frac{۳}{۲}-(-۱)=۴$$

$$\Rightarrow y_D=۲y_M-y_B \Rightarrow y_D=۲\times\frac{۱}{۲}-۰=۱\Rightarrow D(۴,۱)$$

راه کوتاه تر :

$$\overline{AD}=\overline{BC}\Rightarrow\begin{cases}x_D-x_A=x_C-x_B\\ y_D-y_A=y_C-y_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D-۲=۲\Rightarrow x_D=۴\\ y_D-۳=-۲\Rightarrow y_D=۱\end{cases}\Rightarrow D(۴\,,\,۱)$$

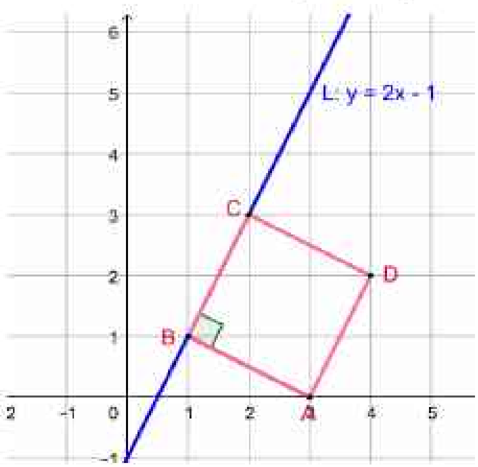
۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.



$$MA=MB\Rightarrow M\left(\frac{-۳+۵}{۲},\frac{۲-۲}{۲}\right)\Rightarrow M(۱,۰)$$

$$\left.\begin{aligned}MC=MD\Rightarrow x_D=۲x_M-x_C\Rightarrow x_D=۲-۰=۲\\ MC=MD\Rightarrow y_D=۲y_M-y_C\Rightarrow y_D=۰-۱=-۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow D(۲,-۱)$$

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳, ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



نقطه ی **A** روی خط قرار ندارد بنا براین از **A** بر خط **L** عمود می کنیم .

فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

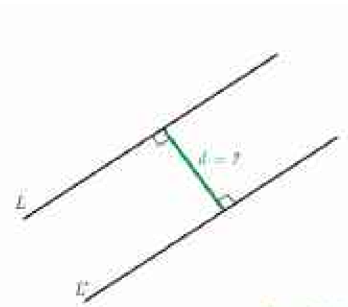
$A(۳,۰)=(x_۰,y_۰)\ ,\ ۲x-y-۱=۰$

$$AB=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow AB=\frac{|۲\times۳+(-۱)\times۰+(-۱)|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow d=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$S=AB^۲ \Rightarrow S=۵$

۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.)

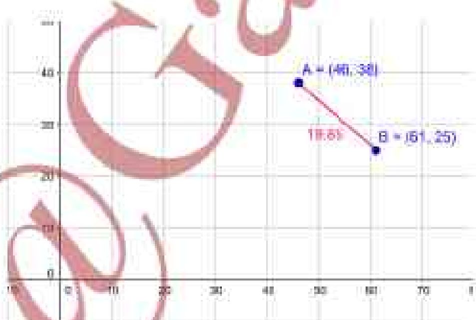


$$\left.\begin{array}{l} ۵x-۱۲y+۸=۰ \Rightarrow -۱۲y=-۵x-۸ \xrightarrow{\div -۱۲} y=\frac{۵}{۱۲}x+\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow m=\frac{۵}{۱۲} \\ -۱۰x+۲۴y+۱۰=۰ \Rightarrow ۲۴y=۱۰x-۱۰ \xrightarrow{\div ۲۴} y=\frac{۱۰}{۲۴}x-\frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow m'=\frac{۵}{۱۲} \end{array}\right\} \Rightarrow m=m'$$

$x=۱ \Rightarrow -۱۰\times۱+۲۴y+۱۰=۰ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow A(۱,۰)$

$$d=\frac{|۵(۱)-۱۲(۰)+۸|}{\sqrt{۱+۰}}=۱$$

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



$AB=\sqrt{(۶۱-۴۶)^۲+(۲۵-۳۸)^۲}=\sqrt{۲۲۵+۱۶۹}=\sqrt{۳۹۴}=۱۹/۸۵$

$۱۱۰\times۱۹/۸۵=۲۱۸۳/۵$

$$AB=\sqrt{(۶۱\times۱۱۰-۴۶\times۱۱۰)^۲+(۲۵\times۱۱۰-۳۸\times۱۱۰)^۲}$$

$$=\sqrt{(۱۱۰)^۲\times۲۲۵+(۱۱۰)^۲\times۱۶۹}=۱۱۰\times\sqrt{۳۹۴}=۱۱۰\times۱۹/۸۵=۲۱۸۳/۵$$

درس دوم

تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجه دوم

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیّت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصی از معادله‌ها[۱] آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^4-10x^2+9=0$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت x^2، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$x^2=u \Rightarrow u^2-10u+9=0$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-10)^2-4(1)(9)=64$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2(1)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

$2x^4-7x^2-4=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow 2u^2-7u-4=0$

$\Rightarrow \Delta=(-7)^2-4(2)(-4)=81 \Rightarrow u=\frac{-(-7)\pm 9}{4} \Rightarrow u_1=4\ ,\ u_2=\frac{-1}{2}$

$x^2=u \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \quad , \quad x^2 \neq \frac{-1}{2}$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

$x^4+3x^2+2=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow u^2+3u+2=0$

$\Rightarrow (u+1)(u+2)=0 \Rightarrow u_1=-1\ ,\ u_2=-2$

$x^2=-1 \quad , \quad x^2=-2$ معادله ریشه ندارد

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[1]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند: $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است: $(1)\ ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟

چون **a** و **c** مختلف العلامه هستند بنا براین حاصل ضرب آن ها منفی است در نتیجه در فرمول دلتا مقدار $4ac$ منفی است یعنی $-4ac$ مثبت است و b^2 هم که همواره مثبت است پس مجموع دو عبارت مثبت، مثبت می شود، در نتیجه Δ مثبت است. $ac<0 \Rightarrow 4ac<0 \Rightarrow -4ac>0 \Rightarrow b^2-4ac>b^2>0 \Rightarrow \Delta>0$

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم: $3x^2+5x-1=0$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

$a=3$ و $c=-1$ پس با توجه به بند ۱ قسمت (ب) فعالیت Δ بزرگ تر از صفر است پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=37$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}\\[2ex]\beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{6}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}+\frac{-5-\sqrt{37}}{6}=\frac{-5}{3}$$

ملاحظه می‌شود که: $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم :

$$۳x^{۲}-۷x=۰ \Rightarrow x(۳x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha= ۰ \\ \beta= \frac{۷}{۳} \end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta= ۰ + \frac{۷}{۳} =\frac{۷}{۳}=-\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد.

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \beta &=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید : $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\frac{b^{۲}-(b^{۲}-۴ac)}{۴a}=\frac{۴ac}{۴a}=\frac{c}{a}$$

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a\neq ۰)$ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند، آنگاه :

$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}$ و $\alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$

کار در کلاس

در معادلهٔ $-۲x^{۲}+x+۵=۰$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

$a=-۲$, $b=۱$, $c=۵$

$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow s=-\frac{۱}{-۲} \Rightarrow s=\frac{۱}{۲}$

$p=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow p=\frac{۵}{۲}$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-Sx+P=0$$

بنابراین نشان دادیم که :

> معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشند، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

$P=-1/5 \ , \ P=-7$

$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+1/5x-7=0$

$\Delta = 2/25+28=30/25 \Rightarrow x=\dfrac{-1/5\pm 5/5}{2} \Rightarrow x_1=2 \ , \ x_2=-3/5$

۲ آیا مستطیلی با محیط $11cm$ و مساحت $6cm^2$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

$11 =$ محیط $\Rightarrow 2(\alpha+\beta)=11 \Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{11}{2} \Rightarrow \beta=\dfrac{11}{2}-\alpha$

$6 =$ مساحت $\Rightarrow \alpha.\beta=6 \Rightarrow \alpha(\dfrac{11}{2}-\alpha)=6$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و α و β را بیابید.

$\alpha(\dfrac{11}{2}-\alpha)=6 \Rightarrow -\alpha^2+\dfrac{11}{2}\alpha-6=0 \Rightarrow \Delta=\dfrac{25}{4} \Rightarrow \alpha=\dfrac{-\frac{11}{2}\pm\frac{5}{2}}{-2}$

$\Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow \beta=\dfrac{3}{2} \quad , \quad \alpha=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \beta=4$

البته با توجه به شکل : $\alpha=4 \Rightarrow \beta=\dfrac{3}{2}$

ب) با استفاده از S و P این مسئله را حل کنید.

$S=5/5 \quad , \quad P=6 \Rightarrow x^2-5/5x+6=0$

$\Delta=30/25-24=6/25 \Rightarrow x=\dfrac{5/5\pm 2/5}{2} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1/5\end{cases}$

۴ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

$$S=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=۳ \quad , \quad P=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۹-۵}{۴}=۱$$

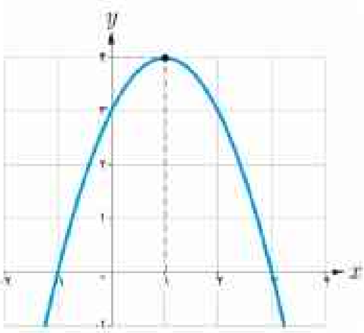
$$\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

الف) اگر $a>۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به‌دست می‌آید.

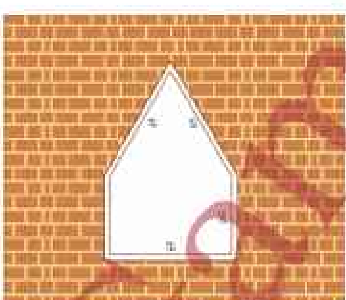
ب) اگر $a<۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.



مثال : ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x)=-x^۲+۲x+۳$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل : چون $a=-۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی روبه پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱)=۴$.

تذکر : همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(۱,۴)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.



مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم : محیط پنجره $=۴ \Rightarrow ۳x+۲y=۴ \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟)، می‌توان نوشت :

مساحت پنجره : $S=x.y+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(۲-\frac{۳}{۲}x)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۲x-\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲+۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود.

$a=\frac{\sqrt{3}-6}{4}<0$ پس این تابع ماکزیمم دارد.

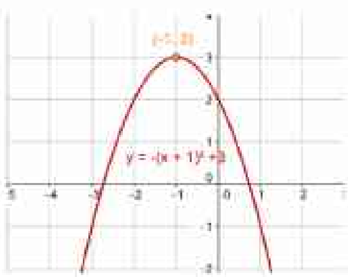
$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}=0/94(m)$$

$$y=2-\frac{3}{2}x\simeq 2-\frac{3}{2}(0/94)=0/59(m)$$

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x)=-(x+1)^2+3$



راه اول: این سهمی در $x=-1$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+1)^2+3\Rightarrow -x^2-2x-1+3=0\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

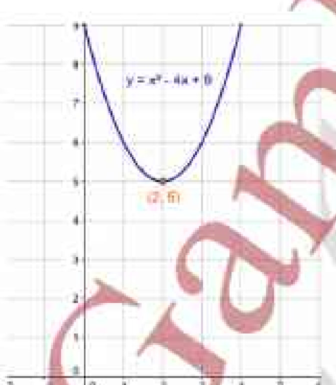
$$\Rightarrow a=-1<0\ ,\ x=\frac{-b}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-2)}{2\times(-1)}=-1\Rightarrow y=g(-1)=3$$

راه دوم: این سهمی در $x=-1$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+1)^2+3\ ,\ y=a(x-h)^2+k\Rightarrow a=-1<0\ ,\ (h,k)=(-1,3)$$

مقدار ماکزیمم ۳ است.

ب) $h(x)=x^2-4x+9$



این سهمی در $x=2$ مینیمم دارد.

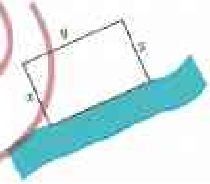
$$y=x^2-4x+9=0\Rightarrow a=1>0\ ,\ x=\frac{-b}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-4)}{2\times1}=2\Rightarrow y=h(2)=5$$

مقدار مینیمم ۵ است.

۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(راهنمایی: $y+2x=100\Rightarrow y=100-2x$

مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



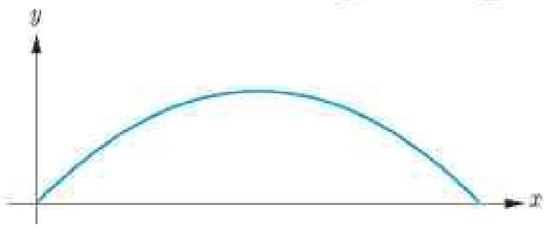
$$S_{\square}=xy\Rightarrow S_{\square}=x(100-2x)=-2x^2+100x$$

$$a=-2<0\ ,\ x=\frac{-b}{2a}\Rightarrow x=\frac{-100}{2\times(-2)}=25\Rightarrow y=100-50=50$$

$$S=25\times50=1250\ m^2$$

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $۲۰\ m/s$ شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-۱}{۴۰}x^۲+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

ارتفاع توپ $x=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x=-\frac{۱}{-\frac{۱}{۴۰}}=۴۰\ m$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=۰$.

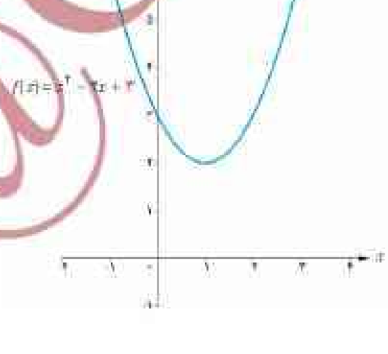
$$y=۰ \Rightarrow x(\frac{-۱}{۴۰}x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۴۰ \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟

طول نقطه ی $(۰,۰)$ زمان شروع پرتاب و طول نقطه ی $(۴۰,۰)$ زمان برخورد گلوله با زمین است.

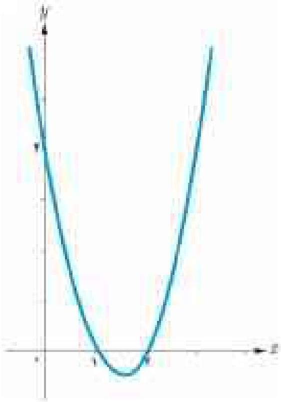
نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(۰)$ است. به‌عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :



$$y = a\,(x-۱)(x-۲)$$

با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید[1].

a \ Δ	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

$\Delta = ۱۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها هم علامت‌اند

$S = -\frac{b}{a} = -۶ < ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند

ب) $y = x^۲+۴x-۵$

$\Delta = ۳۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = -۵ < ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت نیستند

$S = -\frac{b}{a} = -۴ < ۰ \Rightarrow$ قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر از ریشه مثبت است

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

$\Delta = ۳۷ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\frac{b}{a} = \frac{۷}{۳} > ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت اند

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

$\Delta = ۴-۴(-۱)(-۱) = ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد

$P = \frac{c}{a} = ۱ > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\frac{b}{a} = ۲ > ۰ \Rightarrow$ هردو ریشه مثبت اند

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.

به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

ـ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.

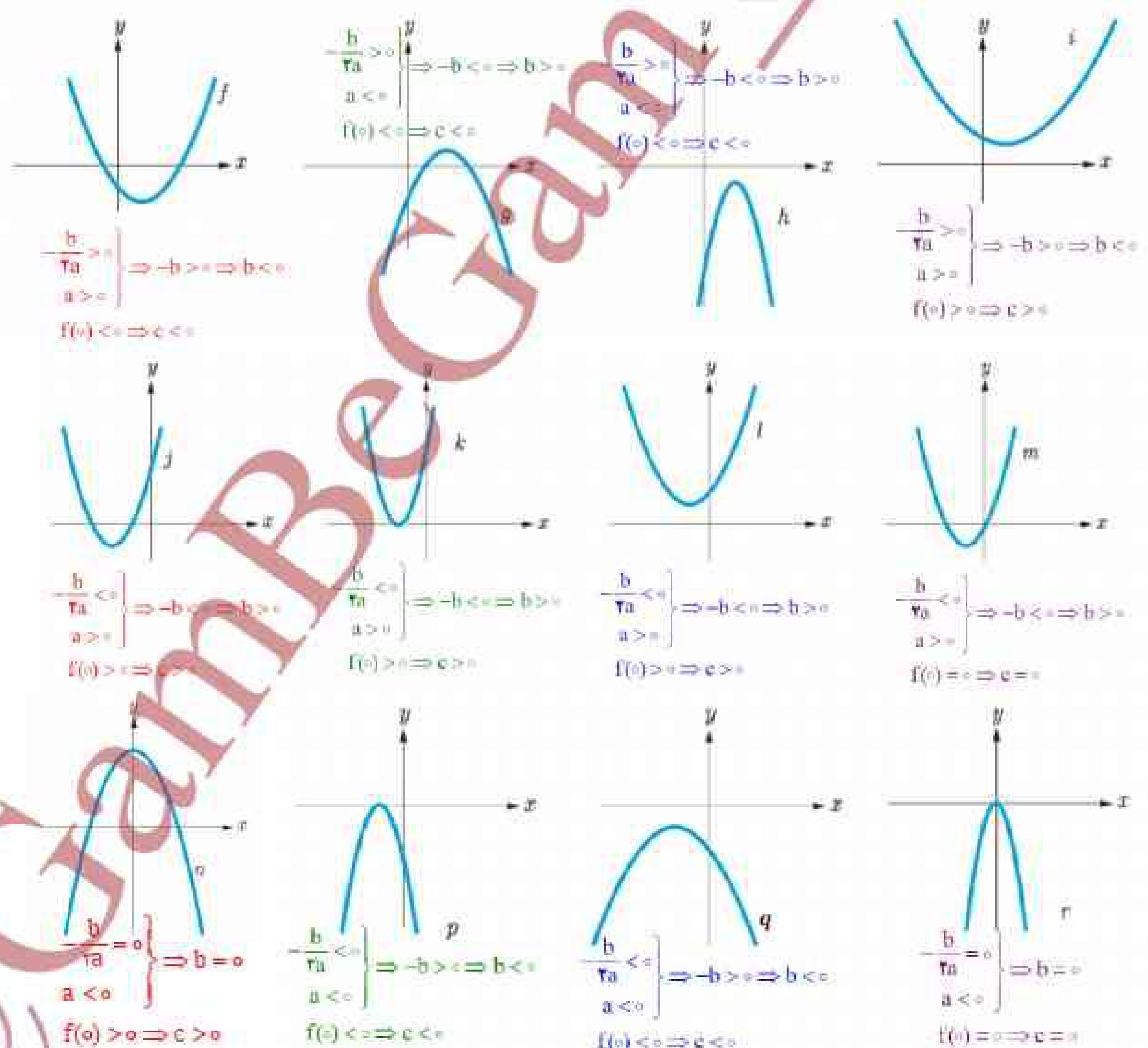
ـ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

ـ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow b<0$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

جواب چرا : زیرا فاصلهٔ ریشهٔ مثبت از مبدأ بیش‌تر از فاصلهٔ ریشهٔ منفی از مبدأ است به عبارتی قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ‌تر از قدر مطلق ریشهٔ منفی است.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



جدول در صفحه بعد

ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	فاقد ریشه	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	دو تا مثبت	ریشه ندارد	ریشه ندارد	دو تا منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی صفر یکی منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یک صفر

تمرین

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 8u + 8 = 0$

$\Delta = 32 \Rightarrow u = \dfrac{8 \mp 4\sqrt{2}}{2}$

$u = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$u = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

$x^3 = u \Rightarrow 4u^2 - 5u + 1 = 0$

$\Delta = 9 \Rightarrow u = \dfrac{5 \pm 3}{8}$

$u = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$u = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

۲ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشند.

$\alpha = 1-\sqrt{2}\ ,\ \beta = 1+\sqrt{2}$

$s = \alpha + \beta \Rightarrow s = 1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2} = 2\ ,\ \ p = \alpha\beta = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

$a = -2 < 0$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x = 2$

$f(2) = -2\times 4 + 8\times 2 - 5 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$a = 3 > 0$ دهانه سهمی رو به بالا و نقطهٔ مینیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x = -1$

$g(-1) = 3\times 1 + 6(-1) + 5 = 2 \Rightarrow f(-1) = 2$

۴ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

$h(t) = -5t^2 + 100t \Rightarrow a = -5 < 0$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$t = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t = -\frac{100}{2(-5)} \Rightarrow t = 10 \quad s$ پس از ۱۰ ثانیه به بالاترین ارتفاع می رسد.

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

$h(10) = -5 \times 100 + 100 \times 10 = 500 \ m$ ارتفاع نقطهٔ اوج

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

$h(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 100t = 0 \Rightarrow t(-5t + 100) = 0 \Rightarrow t = 0\ s \ , \ t = 20\ s$ پس از ۲۰ راکت به زمین بازمی گردد.

نکته: $t = 0$ لحظهٔ شروع پرتاب است.

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.
اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

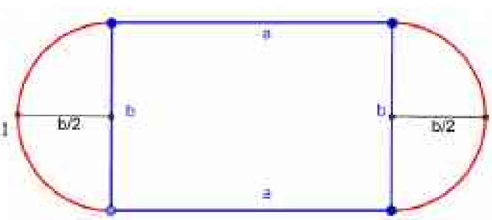
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

$P = P_{\bigcirc} + 2a \Rightarrow P = 2\pi \times \frac{b}{2} + 2a \Rightarrow \pi b + 2a = 1500 \Rightarrow a = 750 - \frac{\pi}{2}b$

$S_{▭} = ab \Rightarrow S_{▭} = (750 - \frac{\pi}{2}b)b \Rightarrow S_{▭} = -\frac{\pi}{2}b^2 + 750b$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{2} < 0$

$\Rightarrow b = -\frac{750}{2(\frac{\pi}{2})} = \frac{750}{\pi} \xrightarrow{\pi = 3} b = 250 \ m \ , \quad a = 750 - \frac{\pi}{2} \times \frac{750}{\pi} = 375 \quad m$

$S_{▭} = 250 \times 375 = 93750 \quad m^2, \ S = S_{▭} + S_{\bigcirc} = 93750 + 3(125)^2 = 140625$ ۱



ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

$a = 750 - \frac{\pi}{2}b$

$S = S_{▭} + S_{\bigcirc} \Rightarrow S = -\frac{\pi}{2}b^2 + 750b + (\frac{b}{2})^2\pi \Rightarrow S = -\frac{\pi}{4}b^2 + 750b$ دهانهٔ سهمی روبه پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{4} < 0$

$b = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{1500}{\pi} \Rightarrow a = 750 - \frac{\pi}{2} \times \frac{1500}{\pi} = 0$

$S = 3 \times (250)^2 = 187500 \quad m^2$

۶ معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.

راه اول:

$f(0)=c \Rightarrow c=0$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0$

$f(0)=0$

با توجه به این که دو نقطهٔ ۰ و ۲ دارای عرض های برابر هستند پس می توانیم طول راس سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$\frac{1+0}{2}=1$

$f(1)=-4 \Rightarrow a+b=-4$

$\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=8 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a=8$

$\Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-8$

$f(x)=4x^2-8x$

راه دوم:

$f(-\frac{b}{2a})=-4 \Rightarrow a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})=-4$

$\Rightarrow \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=-4 \Rightarrow b^2=16a$

$\begin{cases} b^2=16a \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16a \\ 16a+8b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow b^2+8b=0 \Rightarrow b(b+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow a=0 \\ b=-8 \Rightarrow a=4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$

راه سوم:

$y=f(x)=a(x-h)^2+k$

$k=-4$

$f(0)=0 \Rightarrow a(0-h)^2-4=0 \Rightarrow ah^2=4$

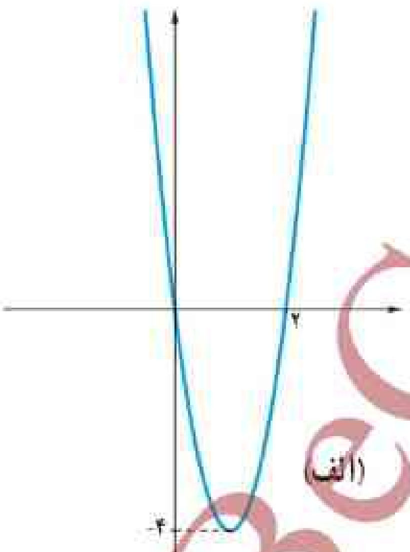
$f(2)=0 \Rightarrow a(2-h)^2-4=0$

$4a-4ah+ah^2-4=0 \xrightarrow{ah^2=4} 4a-4ah+4-4=0$

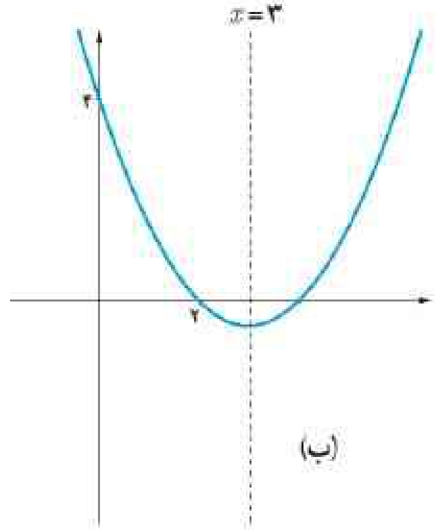
$4a-4ah=0 \Rightarrow 4a(1-h)=0 \xrightarrow{a\neq 0} 1-h=0 \Rightarrow h=1$

$ah^2=4 \xrightarrow{h=1} a=4 \Rightarrow y=f(x)=4(x-1)^2-4$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$



(الف)



(ب)

$x=3 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow b=-6a$

$f(0)=4 \Rightarrow c=4$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+4=0$

$\begin{cases} b=-6a \\ 4a+2b+4=0 \end{cases} \Rightarrow 4a-12a+4=0$

$\Rightarrow -8a+4=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-3$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

$x = ۲ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a} = \Rightarrow b = -۴a$

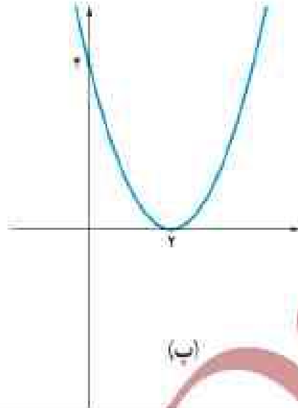
$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴$

$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b + ۴ = ۰$

$\begin{cases} b = -۴a \\ ۴a + ۲b + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۴a - ۸a + ۴ = ۰$

$\Rightarrow -۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۴$

$f(x) = x^۲ - ۴x + ۴$

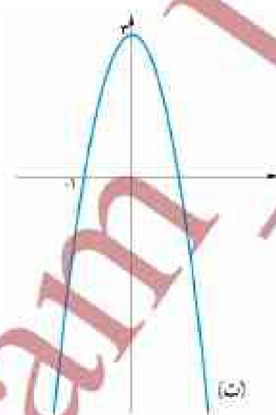


$f(۰) = ۳ \Rightarrow c = ۳$

$x = ۰ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

$f(-۱) = ۰ \Rightarrow a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$

$f(x) = -۳x^۲ + ۳$



راه اول :

$y = f(x) = a(x-h)^۲ + k \ , \ s(۲,۱) \Rightarrow h = ۲ \ , \ k = ۱$

$f(۱) = ۰ \Rightarrow a(۱-۲)^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱$

$f(x) = -(x-۲)^۲ + ۱ = -x^۲ + ۴x - ۳$

راه دوم :

$x = ۲ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a} = \Rightarrow b = -۴a$

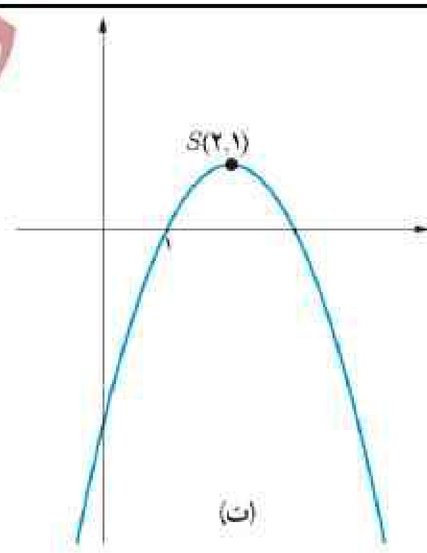
$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۰ \xrightarrow{b=-۴a} -۳a + c = ۰$

$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴a + ۲b + c = ۱ \xrightarrow{b=-۴a} -۴a + c = ۱$

$\begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ -۴a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ ۴a - c = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = -۱$

$\Rightarrow b = ۴ \ , \ c = -۳$

$f(x) = -x^۲ + ۴x - ۳$



راه اول :

$S(1,-1)$

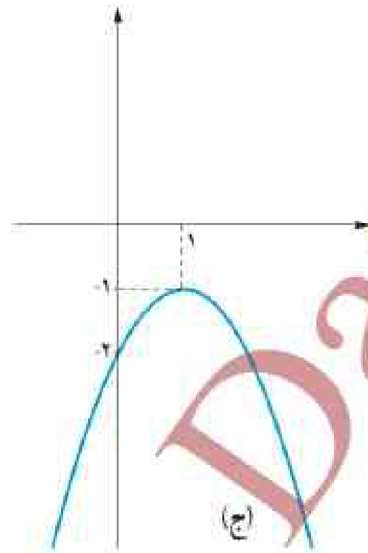
$f(0)=-2 \Rightarrow c=-2$

$f(1)=-1 \Rightarrow a+b-2=-1 \Rightarrow a+b=1$

$x=1 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a}=1 \Rightarrow b=-2a$

$\begin{cases} b=-2a \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a-2a=1 \Rightarrow a=-1\ ,\ b=2$

$f(x)=-x^2+2x-2$



(ج)

راه دوم :

$y=f(x)=a(x-h)^2+k\ ,\ s(1,-1) \Rightarrow h=1\ ,\ k=-1$

$f(0)=-2 \Rightarrow a(0-1)^2-1=-2 \Rightarrow a=-1$

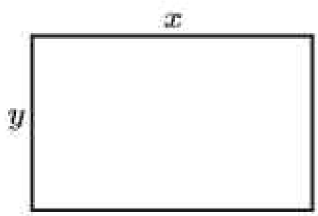
$f(x)=-(x-1)^2-1=-x^2+2x-2$

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند.



مثال : عرض مستطیل را $y=1$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^2=x+1 \Longrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=5 \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن‌را در کلاس ارائه کنید.

ارگ تاریخی بم

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل ۵=۲+□ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

فعالیت

۱) معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$\frac{۲x}{x^{۲}-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^{۲}-x} \qquad (۱)$$

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم :

$$\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)} \qquad (۲)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد x ، $(x+۱)$ و $(x-۱)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ۱ است؛ پس ک.م.م مخرج‌ها عبارت است از $x(x-۱)(x+۱)$

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-۱)(x+۱)$ ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-۱)(x+۱)\left[\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}\right]=x(x-۱)(x+۱)\left[\frac{۲-x}{x(x-۱)}\right]\Rightarrow ۲x^{۲}+۲x(x-۱)=(x+۱)(۲-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $۵x^{۲}-۳x-۲=۰$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

$$۵x^{۲}-۳x-۲=۰\Rightarrow \Delta=۹+۴۰=۴۹\Rightarrow x=\frac{۳\pm ۷}{۱۰}\Rightarrow x=\frac{-۲}{۵}$$ قابل قبول ، $x=۱$ غیر قابل قبول

اگر $x=۱$ آنگاه مخرج کسر برابر صفر می شود و عبارت تعریف نشده خواهد بود.

۲) خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار $۱۰ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{۶۰}{v}$ به‌دست می‌آید؟

می دانیم مسافت طی شده برابر است با سرعت متوسط ضرب در زمان یعنی $x=v.t$ در نتیجه اگر زمان رفت را با $t_۱$ نمایش دهیم داریم :

$$x=v.t_۱\Rightarrow t_۱=\frac{x}{v}\Rightarrow t_۱=\frac{۶۰}{v}$$

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

زمان بازگشت را با $t_۲$ نمایش می دهیم و می دانیم که از سرعت قطار $۱۰\ km/h$ کاسته شده است پس داریم :

$$۶۰=(v-۱۰)\times t_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۶۰}{v-۱۰}$$

پ) معادلهٔ $\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{v}+\frac{۱}{۲}$ را توضیح دهید.

با توجه به این که زمان بازگشت نیم ساعت ($\frac{۱}{۲}$ ساعت) طولانی تر بوده است پس داریم :

$$t_۲=t_۱+\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{v}+\frac{۱}{۲}$$

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ک م م مخرج ها $2v(v-10)$ است . در نتیجه :

$$2v(v-10)\left(\frac{60}{v-10}\right) = 2v(v-10)\times\frac{60}{v} + 2v(v-10)\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 120v = 120v - 1200 + v^2 - 10v$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0 \Rightarrow \Delta = 4900 \Rightarrow v = \frac{10 \pm 70}{2}$$

$$v = 40\ km/h\ , \quad v = -30$$

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

سرعت قطار در مسیر شمال به جنوب رفت $40\ km/h$ است . (البته سرعت برگشت با توجه به علامت منفی $30\ km/h$ است .)

زمان رفت : $t_1 = \frac{60}{40} = 1/5\ h$ و زمان برگشت : $t_2 = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2\ h$

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

$$x^2 \times \frac{3}{x^2} - x^2 \times 12 = x^2 \times 0$$

$$\Rightarrow 3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow k(k+2)\times\frac{2}{k} - k(k+2)\times\frac{3k}{(k+2)} = k(k+2)\times\frac{k}{k(k+2)}$$

$$2k + 4 - 3k^2 = k \Rightarrow -3k^2 + k + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 \Rightarrow k = \frac{4}{3}\ ,\ k = -1$$

ب) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{-(3-x)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{2}{(3-x)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$x(3-x)(3+x)\times\frac{3}{x} + x(3-x)(3+x)\times\frac{2}{(3-x)} = x(3-x)(3+x)\times\frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$27 - 3x^2 + 6x + 2x^2 = 12x \Rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$\Rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \Rightarrow x = -9 \quad , \quad x = 3$ غیر قابل قبول

همانطور می دانیم اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر تعریف نمی شود بنابراین عدد ۳ نمی تواند جواب این معادله باشد زیرا مخرج کسر دوم را صفر می کند.

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود:

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد:

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

تعداد کل آزمون هایی که تا به حال داده است : $۵+n$ و تعداد کل امتیاز های به دست آمده : $۹n+۳۶$

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=۸ \Rightarrow (n+۵)\times\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=(n+۵)\times ۸ \Rightarrow ۹n+۳۶=۸n+۴۰ \Rightarrow n=۴$$

$$\frac{۹\times۴+۳۶}{۴+۵}=\frac{۷۲}{۹}=۸$$

مثال: اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل: ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{۱}{t}$
B	$۲t$	$\frac{۱}{۲t}$
A و B با هم	۴	$\frac{۱}{۴}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}\xRightarrow{\times۲}\frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۶$$ زمان ماشین A

$$\Rightarrow ۲t=۱۲$$ زمان ماشین B

معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصاتِ نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x و ۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \qquad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

> برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت :

$$(x-۲)^۲+۹=۲۵$$

$$(x-۲)^۲=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}(x-۲)=۴ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow A(۶,۰)\\(x-۲)=-۴ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow B(-۲,۰)\end{cases}$$

تذکر : عبارت رادیکالیِ معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصلِ زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty\,,+\infty)$.

مثال : در معادلهٔ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}$، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[۱\,,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم :

$$۴x=۳x-۳ \Rightarrow x=-۳ \text{ (غیر قابل قبول)}$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

الف) $۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$

$$(۲\sqrt{۲t-۱})^۲=(t+۱)^۲ \Rightarrow ۴(۲t-۱)=t^۲+۲t+۱$$

$$\Rightarrow ۸t-۴=t^۲+۲t+۱ \Rightarrow t^۲-۶t+۵=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t-۵)=۰ \Rightarrow t=۱\,,\ t=۵$$

$$t=۵ \Rightarrow ۲\sqrt{۱۰-۱}-۵=۱ \Rightarrow ۶-۵=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

$$t=۱ \Rightarrow ۲\sqrt{۲-۱}-۱=۱ \Rightarrow ۲-۱=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

ب) $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$

$$(\sqrt{۲-x})^۲=(۱-۲x)^۲ \Rightarrow ۲-x=۱-۴x+۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵ \Rightarrow x=۱\,,\ x=\frac{-۱}{۴}$$

$$x=\frac{-۱}{۴} \Rightarrow \frac{-۱}{۲}=۱-\sqrt{۲+\frac{۱}{۴}} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=۱ \Rightarrow ۲=۱-\sqrt{۲-۱} \Rightarrow ۲=۰$$

واضح است که $x=۱$ قابل قبول نیست.

(پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$

$(\sqrt{x+7})^2=(\sqrt{x}+1)^2 \Rightarrow x+7=x+2\sqrt{x}+1$

$\Rightarrow 6=2\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2=3^2 \Rightarrow x=9$

$x=9 \Rightarrow \sqrt{9+7}=\sqrt{9}+1 \Rightarrow 4=4$

(ت) $\dfrac{1}{\sqrt{u-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{u}}=0$

$\dfrac{1}{\sqrt{u-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow (\dfrac{1}{\sqrt{u-3}})^2=(\dfrac{2}{\sqrt{u}})^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u-3}=\dfrac{4}{u} \Rightarrow u(u-3)\times\dfrac{1}{(u-3)}=u(u-3)\times\dfrac{4}{u}$

$\Rightarrow u=4u-12 \Rightarrow 12=3u \Rightarrow u=4$

$u=4 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{4}}=0 \Rightarrow 1-1=0 \Rightarrow 0=0$

(ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

$\sqrt{2x^2-5x+2}=x-2 \Rightarrow (\sqrt{2x^2-5x+2})^2=(x-2)^2 \Rightarrow 2x^2-5x+2=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-1$

$x=2 \Rightarrow 2+\sqrt{8-10+2}=2 \Rightarrow 2+0=2 \Rightarrow 2=2$, $x=-1 \Rightarrow 2+\sqrt{2-5+2}=-1 \Rightarrow 2+\sqrt{-1}=-1$

واضح است که $x=-1$ قابل قبول نیست

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند؟

(الف) $\sqrt{t}+2=0$

در مجموعه ی اعداد حقیقی $\sqrt{t}$ با فرض با معنی بودن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر است . و وقتی این رادیکال با ۲ جمع شود هرگز صفر نمی شود.

(ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

در مجموعه ی عدد های حقیقی (با فرض با معنی بودن) هر کدام از رادیکال ها عددی بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و وقتی با عدد ۱ جمع شوند هرگز صفر نمی شوند.

(پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

روش اول : در مجموعه ی اعداد حقیقی (بافرض با معنی بودن) هر یک از رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و زمانی جمع آن ها صفر است که هردو همزمان صفر باشند ولی این اتفاق نمی افتد.

روش دوم : $\sqrt{1-x}=-\sqrt{x-2}$ ، طرف چپ تساوی عبارت بزرگ تر یا مساوی صفر است و لی طرف دیگر کوچکتریامساوی صفر است و این تساوی فقط زمانی برقرار است که دو طرف صفرباشند.واضح است نمی توانیم عددی مشترک پیدا کنیم که همزمان دو رادیکال را صفر کند. پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

به عبارت دیگر جواب مشترک دو معادله ی زیر در صورت وجود جواب معادله است.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=0 \Rightarrow x=1\\ \sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2\end{array}\right\} \Rightarrow$ جواب مشترک ندارد

پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

تمرین های درس دوم

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$

$x(x-2)\times\frac{1}{x}+x(x-2)\times\frac{1}{(x-2)}=x(x-2)\times 5$

$x-2+x=5x^2-10x \Rightarrow 5x^2-12x+2=0$

$\Delta=104 \Rightarrow x=\frac{12\pm 2\sqrt{26}}{10}$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

(ب) $\frac{10}{r}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3r}-5$

$6r\times\frac{10}{r}-6r\times\frac{15}{2}=6r\times\frac{20}{3r}-6r\times 5$

$60-45r=40-30r \Rightarrow 20=15r \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

$\frac{10}{\frac{4}{3}}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3\times\frac{4}{3}}-5 \Rightarrow \frac{30}{4}-\frac{30}{4}=5-5 \Rightarrow 0=0$

(پ) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$

$(x-3)(x+4)\times\frac{2x}{(x-3)}+(x-3)(x+4)\times\frac{(x+1)}{(x+4)}=(x-3)(x+4)\times\frac{(x-1)}{(x-3)}$

$2x^2+8x+x^2-2x-3=x^2+3x-4 \Rightarrow 2x^2+3x+1=0$

$\Delta=1 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=-\frac{1}{2}$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ یک باعث صفر شدن مخرج ها نمی شوند.

(ت) $\sqrt{t+4}=3$

$(\sqrt{t+4})^2=3^2$

$\Rightarrow t+4=9$

$\Rightarrow t=5$

$\Rightarrow \sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

(ث) $k=\sqrt{6k-8}$

$k^2=(\sqrt{6k-8})^2 \Rightarrow k^2=6k-8$

$\Rightarrow k^2-6k+8=0 \Rightarrow (k-4)(k-2)=0$

$\Rightarrow k=4\ ,\ k=2$

$k=4 \Rightarrow 4=\sqrt{24-8} \Rightarrow 4=4$

$k=2 \Rightarrow 2=\sqrt{12-8} \Rightarrow 2=2$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

(ج) $x+\sqrt{x}=6$

$\sqrt{x}=6-x \Rightarrow (\sqrt{x})^2=(6-x)^2 \Rightarrow x=36-12x+x^2$

$\Rightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow (x-4)(x-9)=0$

$\Rightarrow x=4\quad x=9$

$x=4 \Rightarrow 4+\sqrt{4}=6 \Rightarrow 6=6$

$x=9 \Rightarrow 9+\sqrt{9}=6 \Rightarrow 12=6\ ,\ 12\neq 6$

همانطور که دیده می شود $x=9$ قابل قبول نیست.

(چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{2x-5} \Rightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2=(\sqrt{2x-5})^2$

$\Rightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1=2x-5 \Rightarrow -2\sqrt{x+1}=x-7$

$\Rightarrow (-2\sqrt{x+1})^2=(x-7)^2 \Rightarrow 4x+4=x^2-14x+49$

$\Rightarrow x^2-18x+45=0 \Rightarrow (x-3)(x-15)=0$

$\Rightarrow x=3\ ,\ x=15$

$x=3 \Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{1}=1 \Rightarrow 1=1$

$x=15 \Rightarrow \sqrt{16}-\sqrt{25}=1 \Rightarrow -1=1\ ,\ -1\neq 1$

همانطور که دیده می شود $x=15$ قابل قبول نیست.

(ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

$\sqrt{m}\times\sqrt{m}+\sqrt{m}\times\frac{1}{\sqrt{m}}=\sqrt{m}\times 2 \Rightarrow m+1=2\sqrt{m}$

$\Rightarrow (m+1)^2=(2\sqrt{m})^2 \Rightarrow m^2+2m+1=4m$

$\Rightarrow m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$

$m=1 \Rightarrow \sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}=2 \Rightarrow 2=2$

همانطور که ملاحظه می شود معادله یک جواب قابل قبول دارد.

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می کند : ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{120}$ صفحه ویرایش می کند.

زمانی که علی و رضا باهم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می کنند : ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه باهم $\frac{16}{80}$ صفحه ویرایش می کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می کند x در نظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{16}{x}$ صفحه ویرایش می کند.پس داریم :

$$\frac{16}{120}+\frac{16}{x}=\frac{16}{80}\Rightarrow\frac{1}{120}+\frac{1}{x}=\frac{1}{80}\Rightarrow 240\times x\times\frac{1}{120}+240\times x\times\frac{1}{x}=240\times x\times\frac{1}{80}$$

$$2x+240=3x\Rightarrow x=240$$

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$t=1\Rightarrow 1=\sqrt{10-\frac{h}{5}}\Rightarrow 1^2=\left(\sqrt{10-\frac{h}{5}}\right)^2\Rightarrow 1=10-\frac{h}{5}\Rightarrow\frac{h}{5}=9\Rightarrow h=45\ \text{m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\sqrt{x}-x=\frac{x}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x}-2x=x\Rightarrow 2\sqrt{x}=3x\Rightarrow(2\sqrt{x})^2=(3x)^2\Rightarrow 4x=9x^2\Rightarrow 9x^2-4x=0$$

$$\Rightarrow x(9x-4)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\frac{4}{9}$$

با توجه به این که عدد باید صحیح باشد بنا براین فقط $x=0$ قابل قبول است

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2x-2\sqrt{x}=x\Rightarrow x=2\sqrt{x}\Rightarrow x^2=(2\sqrt{x})^2\Rightarrow x^2=4x\Rightarrow x^2-4x=0$$

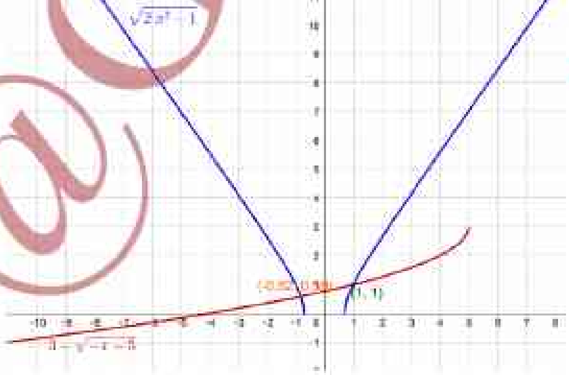
$$\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=4$$

این مسئله دو جواب دارد.

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

۱) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{-x+5}=3$ ، ۲) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3$

جواب های ۱ با نمودار بررسی شده است.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی