

فصل ۱ - آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲

استدلال ریاضی

قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ

(آیه ۱۱۱ بقره)

«بگو اگر راست می‌گویید دلیل خود را بیاورید»

نقشه‌کننده :
گروه ریاضی منطق دوم متوسطه ، استان خوزستان



«نَحْنُ أَبْنَاءُ اللَّهِ، نَمِيلُ حَيْثُ يَمِيلُ» امام صادق (ع)

ما فرزندان دلیلی و برهانییم و در قضاوت به‌سویی که دلایل هدایت‌مان کنند می‌رویم.

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق^۱ در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترین، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی^۲ که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونه منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به‌ویژه صدق و کذب با درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل قرار حضور داشتم.» خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستان مهم است. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی!» یا «شما اهل کجائید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس فیزیکی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست.

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره است (درست).

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره است. (نادرست).

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره است. (نادرست).

ث) $2+3 \times 4 = 20$ ← گزاره است. (نادرست).

ج) عدد (-1) عددی همواره مثبت است. ($n \in N$) ← گزاره است. (درست).

ح) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است. ← گزاره نیست.

ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گزاره های درست : مجموعه زاویه ها داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است / ۹ عدد اول نیست
 گزاره های نادرست : مربع مسطحی است / $\frac{1}{2}$ عدد گنگ است
 دو جمله ای غیر گزاره ای : معادله ای زیر را حل کن / به کدام رشته ای ورزشی علاقه دارید ؟

۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره ای که بیان می کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره ها که به گزاره های ترکیبی معروف اند، باید بیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جمله «۳ عددی فرد است و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزاره ساده «۳ عددی فرد است» و « $\sqrt{2}$ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو گزاره مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می دهید؟ در حالت کلی برای یک گزاره ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده، و نسبت به ارزش های این دو گزاره، چند حالت می توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟ برای پاسخ به سوال های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعه این قراردادهای نمادگذاری ها جبر گزاره ها یا حساب گزاره ها گفته می شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا ... نمایش می دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$$2^1 = 2$$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$$2^2 = 4 = \text{تعداد حالت های ارزشی دو گزاره}$$

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$2^3 = 8 = \text{تعداد حالت های ارزشی سه گزاره}$$

نقیض یک گزاره : نقیض گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می خوانیم. از آنجا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزاره p اگر درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر گزاره ای نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزاره « n مثبت است»، به صورت « n مثبت نیست» بیان می شود. به جدول زیر توجه کنید :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

تهیه کننده :

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

(الف) عدد ۵ زوج است. (نادرستی) نقیض ← عدد ۵ فرد است. (درستی)

(ب) مساوی $4=2 \times 2$ «برقرار است». (درستی) ← مساوی $4=2 \times 2$ «برقرار نیست». (نادرستی)

(ج) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. (درستی) ← عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. (نادرستی)

(د) ارسطو شاگرد افلاطون است. (درستی) ← ارسطو شاگرد افلاطون نیست. (نادرستی)

(ه) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد. (درستی) ← ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. (نادرستی)

(و) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ (نادرستی) ← $(3 \times 7) < (5 \times 4)$ (درستی)

در مثال قبل اگر نقیض گزاره «مثبت است» را به صورت «منفی است» تعبیر کنیم، این دو گزاره نقیض هم نیستند؛ زیرا وقتی «مثبت باشد یا منفی است» یا «صفر است» در صورتی که «منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب، گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید:

(الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است».

(ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا $\sqrt{3}$ مثبت است».

(ج) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوت حضرت رسول اکرم $\text{صلی الله علیه و آله}$ را قبول دارم».

(د) «اگر «عددی زوج باشد، آنگاه ۱» زوج است و اگر «زوج باشد، آنگاه ۱» زوج است».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» یا «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است!

هر گاه بخواهیم دو گزاره مانند « p و q » را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد « $\wedge$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم، « $p \wedge q$ »؛ و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره یا توجه به جدول زیر تعیین می‌شود:

همان طور که ملاحظه می کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		✓
۲	حضرت مهدی علیه السلام امام دوازدهم شیعیان است یا معصوم علیه السلام	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا ۱۰۰ عددی زوج است	✓	
۴	افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است		✓
۵	۱۸ عددی زوج است	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده می کنیم و می نویسیم: $p \Rightarrow q$ و آن را به صورت های زیر می خوانیم:

(اگر p آنگاه q) ، (p نتیجه می دهد q) و (q از p نتیجه می شود)

در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »، p را مقدم و q را نتالی می نامیم.

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که ملاحظه می کنید، گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم: یعنی p درست بوده ولی نتالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزاره درست نتیجه ای نادرست حاصل شود) و در بقیه موارد ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

به ویژه وقتی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی p ، نادرست باشد، همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » ندارد؛ بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتهای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $3^2 = 6$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $2 > 4$ » هر دو به انتقای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر $2^2 = 3^2$ آنگاه $2^2 > 3^2$ » درست است.

تذکره: در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش نالی درست باشد، نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجه شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ایراد را رفع کند؛ و چنانچه ارزش نالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره $p \Rightarrow q$ فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر آنگاه <i>۵، ۶، ۷ ۳، ۴، ۵</i>		✓
۵	اگر آنگاه <i>۵، ۶، ۷ ۳، ۴، ۵</i>	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر ۱۳ مربع کامل است، آنگاه ۹۹ اول است. <i>با منکر</i>	✓	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

- ۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتقای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.)
- ۲) $(p \vee q) \vee r$
- ۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
- ۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$
- ۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$
- ۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- ۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل کاردر کلاس صفحه ۷ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T \text{ و } q \equiv F$$

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv ?$
۲) $(p \vee q) \vee r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \vee q) \equiv T \rightarrow (p \vee q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv F$
۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \vee q \equiv T$
۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv F$
۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv T$
۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F \rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv T$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴. ترکیب دو شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده کرده و می نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت های p نتیجه می دهد q و q نتیجه می دهد p را، «اگر p آنگاه q » و «اگر q آنگاه p » را p آنگاه q و برعکس، شرط لازم و کافی است برای q و p اگر و تنها اگر q می خوانیم. در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

مذکر: هم ارزش بودن دو گزاره p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می دهیم؛ در این صورت:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره های شرطی و عطفی ارزش گزاره های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان طور که در ستون آخر مشاهده می کنید، اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓	
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓
۳	۷. عدد اول ... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب باشد.	✓	
۴	اگر دو عدد ... آنگاه ... و برعکس.		✓
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		✓
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس.	✓	

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل کاردر کلاس صفحہ ۹ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv F$
۲) $(\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$	$\begin{cases} \neg p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \equiv T \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۴) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۵) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv T, (p \vee q) \equiv T$ $\rightarrow (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \equiv F$
۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Leftrightarrow p) \equiv ?, (p \wedge q) \equiv F$ $\rightarrow (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (p \vee q) \equiv T$ $\rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv F$

تہیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطہ، استان خوزستان

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۲) $(\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$ چون $\neg p \equiv q$ پس $(\neg p \Leftrightarrow q) \equiv T$ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۴) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۵) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

♦ مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

ب) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \vee \neg p) \equiv T$ و $(p \wedge \neg p) \equiv F$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف)

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

ب)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

ت- ابتدای کلمه True به معنی راست (درست) و F- ابتدای کلمه False به معنی دروغ (نادرست) است.

تذکر: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می نامیم.

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

تذکر: این قانون یا هم ارزی: یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن: یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف اند.

ن)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

ن)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

تذکر: گزاره هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره های همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می نامیم.

طبق جدول ۱ و ۲ به طور مثال $p \vee (p \wedge q)$ معادل p و $p \wedge (p \vee q)$ معادل p است.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ ترین معجزه پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر $۳^2 = ۹$... آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه اهواز دومین بزرگترین شهر ایران است.		✓
۴	$۴ \times ۲ = ۲^2 \Rightarrow ۸^1 = ۴^2$	✓	
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.	✓	
۸	امام خمینی رحمه الله در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی علیه السلام اولین مردی است که پس از پیامبر اسلام آوردند و اولی	✓	
۱۰	اگر $۳ > ۲$... آنگاه $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$... و برعکس	✓	

حل تمرین صفحه‌ی ۱۱ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۲:

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (p \vee r) \equiv T \rightarrow (p \vee r) \Rightarrow p \equiv T$
ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$	$\begin{cases} q \equiv F \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (q \wedge r) \equiv F \rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow r \equiv T$
پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (\neg p \wedge r) \equiv F$ $\rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \equiv T$
ت) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \equiv T, (p \Leftrightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F$
ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F, (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F$ $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv T$
ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \vee r) \equiv ?, (r \Rightarrow p) \equiv T$ $\rightarrow (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T$
چ) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \equiv T$ $\rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q \equiv T$
ح) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F$ $\rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r \equiv F$
خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge p \equiv T$

تهیه کننده:

۱۱/۱

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \quad \text{الف)}$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{ب)}$$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

تهیه کننده:

۱۱،۲

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$c) (p \Rightarrow p) \equiv T$$

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

$$c) (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

$$c) (p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱۱/۳

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

ب) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$

ت) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

ج) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$

ح) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$

خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

۳. درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

الف) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ب) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فرا گرفتید. در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌هایی از تبدیل عبارت‌های توصیفی به زبان و نمادهای ریاضی آشنا می‌شوید.

مثال ۱: سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گز تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».

اکنون عبارت فوق را به صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به جای «ما» در ابتدای عبارت از x استفاده کنیم.

در این صورت خواهیم داشت:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = 100 \rightarrow 2x + \frac{3}{4}x + 1 = 100 \rightarrow \frac{11}{4}x + 1 = 100$$

$$2x \quad \frac{1}{4}x$$

بنابراین عبارت توصیفی فوق به صورت « $\frac{11}{4}x + 1 = 100$ » بازنویسی شد که به وضوح یک معادله ریاضی است.

مثال ۲: به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصه الحساب انتخاب شده است، توجه کنید:

عَدَدُ ضَرْبٍ فِي نِصْفِهِ وَزَيْدٌ عَلَى الْخَاصِلِ اثْنَا عَشَرَ خَصْلَ خَمْسَةَ أَمْثَالِ الْعَدَدِّ.

«عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد».

برای تبدیل عبارت کلامی بالا به صورت نماد ریاضی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

عدد منظور را x در نظر بگیریم. در نتیجه عبارت بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$x \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

عبارت فوق یک معادله درجه دوم است.

مثال ۳: عبارت «ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم.
کافی است قیمت فروش این کالا را x و قیمت خرید آن را y در نظر بگیریم:

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

کار در کلاس

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است. $\leftarrow x + 5 = 2x$

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است. $\leftarrow xy = x + y$

ج) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳ بزرگ‌تر از خودش است. $\leftarrow x^2 + 3 > x$

خواندنی ۱

کورت گودل (Kurt Gödel) یک ریاضی‌دان برجسته اتریشی است که در زمینه منطق، به‌ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی تلاش‌های بسیاری انجام داد. نتیجه تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به‌ویژه منطق ریاضی شد. قضایای معروف او موسوم به «قضایای ناتمامیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از نارسایی‌های موجود در دستگاه‌های منطقی سازگار^۱ دگرگون کرد. قضایای او به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به عبارات پیچیده ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر دستگاه منطقی سازگار گزاره‌هایی وجود دارند که یا درست هستند یا نادرست؛ ولی ما هرگز نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آنها را ثابت کنیم و لذا همه دستگاه‌های منطقی سازگار، ناقص هستند. وی چنین گزاره‌هایی را «گزاره‌های اثبات ناپذیر» می‌نامد. کارهای او از جمله «کدگذاری که دلی» بعدها در زمینه‌های مختلفی به‌ویژه در علوم رایانه و رمزنگاری استفاده شد. امروزه از تکنیک‌های مشابهی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت توصیفی به عبارت ریاضی (معمولاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را بیابید. در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به‌ویژه استدلال ریاضی هستند.



۱- دستگاه منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست پذیرفته می‌شوند. یک دستگاه منطقی را وقتی سازگار گوئیم که در آن هیچ اصول و قواعدی وجود نداشته باشد که از پارادوکس‌های شناخته شده را اثبات کرده.

یکی از انواع قیاس ها که در استدلالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می کنیم.

مقدمه ۱: اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه: ماه کامل است.

استدلال بالا را می توان به طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

ب

و یا با استفاده از نمادگذاری های درس قبل داریم:

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

که در اینجا سه نقطه ($\therefore$) نماد نتیجه است.

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدلالات مغالطه می گویند. در زیر به مثالی از این نوع پرداخته شده است.

مثال ۱: آرش معتقد است که «هرکس از من متنفر است، پشت سر من حرف می زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است. پس سعید از من متنفر است».

برای بررسی درستی یا نادرستی استدلال آرش ابتدا مقدمات استدلال او را در زیر مرتب کرده ایم:

اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می زند.

q

p

سعید پشت سر من حرف زده است.

q

$$p \rightarrow q$$

$$q$$

$$\therefore p$$

سعید از من متنفر است: p

در واقع استدلال آرش به صورت رویه رو است:

در حالی که در قیاس استثنایی مقدمه دوم باید p باشد و نه q. پس استدلال آرش نادرست است.

با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می توان مسائل زیادی را حل کرد. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف تر شدن مسئله و سهولت در به کارگیری قواعد منطقی می شود. در زیر به نمونه ای از استدلال ریاضی در حل مسائل پرداخته شده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

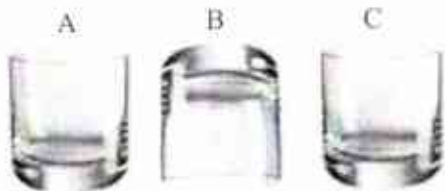
۲. در هر یک از استدلال‌های زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

دو خط هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند: $q \Rightarrow$ دو خط موازی باشند: p
 $x: p > 0 \Rightarrow q: x' > 0$
 $p: 3 > 0$

خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال ۲: سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می‌خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند. ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

پاسخ: به کمک یک استدلال ساده ریاضی که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهیم که این کار امکان‌پذیر نیست. برای این کار داریم:



تعداد لیوان‌های وارونه $= 1$

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است): $= 1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نیست): $= 0$

حرکت مجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.

حالات ممکن در هر حرکت مجاز در حالت کلی

- $1 \rightarrow 2$: تعداد لیوان‌های وارونه دو تا می‌شود $\rightarrow$ دو لیوان درست می‌شود
- $1 \rightarrow 0$: تعداد لیوان‌های وارونه دو تا اضافه می‌شود $\rightarrow$ دو لیوان وارونه می‌شود
- $1 \rightarrow 2$: یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می‌شود

بنابراین همیشه به اندازه عددی زوج (یا ۲ یا ۰ یا ۴) تغییر می‌یابد و حرکت از ۱ به ۰ کاهش نمی‌یابد.

کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟



۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

حل کاردر کلاس اول صفحه ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

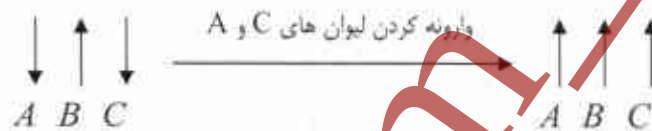
۱:

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

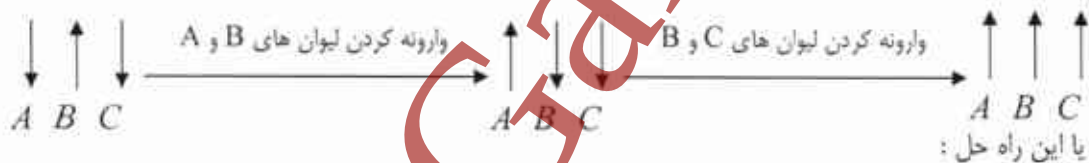
لذا قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ همیشه درست است.

حل کاردر کلاس دوم صفحه ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۱: یک راه حل:

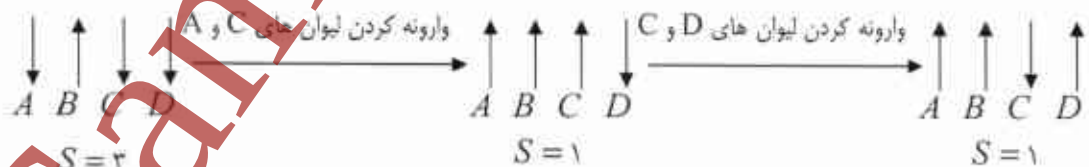


مسئله راه حل های دیگری هم دارد. مثلاً:



۲: مسئله را برای چهار لیوان که سه لیوان از بین آنها وارونه هستند را بررسی می کنیم. (تعداد لیوان های

وارونه را برابر S قرار می دهیم.)



در هر حالت با وارونه کردن دو لیوان مقدار S برابر ۱ باقی می ماند. مطلوب آن است که $S=0$ شود یا این

استدلال معلوم می شود که حالت $S=0$ به دست نمی آید. لذا مسئله جواب ندارد.

تهیه کننده:

تذکر: در درس قبل دیدیم که دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم ارزند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان ثابت کرد $\sim q \Rightarrow \sim p$ درست است. در این حالت می گوییم عکس نقیض گزاره اصلی را ثابت می کنیم.

مثال ۳: ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است» ($n \in \mathbb{Z}$).

اگر فرض کنیم

p : n^2 زوج است

q : n زوج است

و بخواهیم در بررسی گزاره $p \Rightarrow q$ به گزاره q برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این کار از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ استفاده می کنیم. یعنی نشان می دهیم اگر n زوج نباشد (یعنی فرد باشد)، آنگاه n^2 زوج نیست (یعنی n^2 فرد است).

فرد فرد، $(k \in \mathbb{Z})$

$$n \Rightarrow \text{فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\text{زوج}}) + 1 \Rightarrow n^2 = 2m + 1$$

تساوی اخیر نشان می دهد که n^2 فرد است و لذا حکم به دست می آید.

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال ها درست پنداشته می شود تا اینکه دانشمندی به غلط بودن آن پی می برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱: دانش آموزی ادعا می کند که معادله $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

۱) $x^2 - x = 0$

۲) $x(x - 1) = 0$

تجزیه معادله

۳) $\frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x}$

تقسیم طرفین بر x و ساده سازی

۴) $x - 1 = 0$

حاصل ساده سازی و تبدیل به معادله ساده تر

۵) $x = 1$

جواب معادله

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی معنا می شود.

مثال ۲: دانش آموزی گزاره $a < b \Rightarrow ac < bc$ را که a, b و c اعداد حقیقی اند، به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد

این استدلال را پیدا کنید.

۱) $a < b$

۲) $a + c < b + c$

طرفین را با c جمع می کنیم.

۳) $c(a + c) < c(b + c)$

طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می کنیم.

۴) $ac + c^2 < bc + c^2$

c را در برانتزها ضرب می کنیم.

۵) $ac + c^2 < bc + c^2$

چون c عددی همواره مثبت است، می توان آن را از طرفین کم کرد.

۶) $ac < bc$

نتیجه کننده:

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت «معلوم نیست» (ممکن است مثبت یا منفی باشد) پس نمی توان آن را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به عنوان مثال اگر $a=1$ و $b=2$ و $c=-1$ باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با « $-1 < -2 \Rightarrow 1 < 2$ » که آشکارا نادرست است.

کار در کلاس

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

«اگر $a = \frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است d . ($a \neq 1$)»

استدلال های زیر را برای به دست آوردن d از برگه های امتحانی دانش آموزان آورده ایم.

کدام یک از استدلال ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

$$1) \mu = \frac{\mu-d}{c-d} \quad \times$$

$$2) \mu = \frac{-d}{c-d}$$

$$3) d = \mu$$

حذف در مرحله اول ایراد دارد. «استدلال نادرست»

$$a=5, c=\frac{5}{3}, d=1 \rightarrow \mu = \frac{5-1}{\frac{5}{3}-1} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6 \rightarrow \mu = -\frac{3}{2} \quad \text{نادرست}$$

(ب)

$$1) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$2) ac - ad = a - d$$

$$3) ac - a = ad - d$$

$$4) a(c-1) = (a-1)d$$

$$5) \frac{\mu(c-1)}{\mu-1} = d \quad \times$$

$$6) -(c-1) = d$$

حذف در مرحله پنجم ایراد دارد. «استدلال نادرست»

$$a=3, c=\frac{5}{3}, d=1$$

$$\frac{3(\frac{5}{3}-1)}{\frac{5}{3}-1} = d \rightarrow \frac{3(\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}} = d \rightarrow 3 = d \quad \text{نادرست}$$

(ب)

$$1) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$2) a(c-d) = a-d$$

$$3) ac - a = ad - d$$

$$4) ac - a = (a-1)d$$

$$5) \frac{ac-a}{a-1} = d$$

ایراد ندارد. «استدلال درست»

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصف‌ری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

طول: x

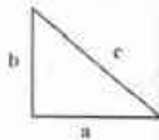
عرض: y

مساحت: $S = xy$

مساحت دو برابر شده است. $\rightarrow 2(xy) = 2 \frac{xy}{S} = 2S$

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b وتر c همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو

برابر می‌شود.



استدلال: می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو قوسه متساوورت به صورت زیر برقرار است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم‌الزاویه جدید نیز می‌نویسیم:

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(a^2 + b^2) = 4c^2 \Rightarrow c' = \sqrt{4c^2} \Rightarrow c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

$$\text{پ) تساوی } \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = 2\sqrt{11} \text{ برقرار است.}$$

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{2 \times 3}} = \sqrt{\frac{12 + 3 \times 16}{3}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

تهیه کننده:

حل تمرین صفحه‌ی ۱۸ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۱:

الف) $\sqrt{x} = x$ (ب) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq a + b$ (ت) $x \geq \frac{1}{x}; x \neq 0$

ب) $k^2 > k + 5$ (ت) $\alpha^2 + \beta^2 \geq (\alpha + \beta)^2$

۲:

الف) استدلال نادرست است. مسئله اشاره به دو برابر کردن اضلاع داشته است. در اینجا مساحت را دو برابر کرده است. می توان با مثال نیز نادرستی استدلال را نشان داد.

$a = 3 \rightarrow x = 3 \times 2 = 6$

$b = 5 \rightarrow y = 5 \times 2 = 10$

مساحت مستطیل اولیه $a \times b = 3 \times 5 = 15$

مساحت مستطیل ثانویه $x \times y = 6 \times 10 = 60$

مشاهده می کنیم که مساحت چهار برابر شده است نه دو برابر

ب) استدلال در مرحله‌ی $4a^2 + b^2 = 4(a^2 + b^2)$ باطل می شود. به این مثال توجه کنید.

$a = 3$ و $b = 5$

$4a^2 + b^2 = 4(3)^2 + (5)^2 = 36 + 25 = 61$

$4(a^2 + b^2) = 4(3^2 + 5^2) = 4(9 + 25) = 4 \times 34 = 136$

پ) استدلال در اولین قدم، ساده کردن ۲ از صورت و مخرج باطل می شود. ابتدا باید حاصل صورت را به

دست آوریم و سپس در صورت امکان ساده کنیم.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 2 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{36 + 32}{6}} = \sqrt{\frac{68}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{6} \sqrt{6} = \frac{5}{3} \sqrt{6}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ۲- تابع

توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۱

توابع پلکانی و قدر مطلق

درس ۲

اعمال بر روی توابع

درس ۳

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

اجرای طرح کانال اتصال زريندروود به سيمينه‌رود / احیای دریاچه ارومیه

عکس: بیرون سیمینرود

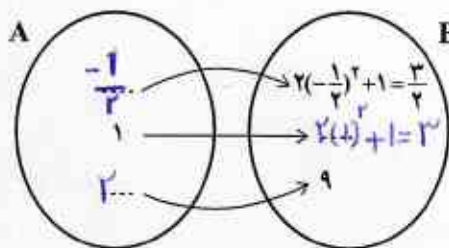
درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

فعالیت

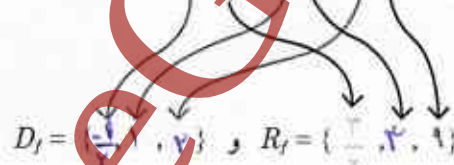
اگر $f: A \rightarrow B$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده شده در سال قبل برای بیان یک رابطه:



الف. در نمایش یکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A ، داریم:

بنابراین برد f مجموعه $B = \{ \frac{3}{4}, 2, 9 \}$ است. نمایش یکانی رابطه فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

ب. نمایش زوج مرتبی مثال بالا به صورت $f = \{ (-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}), (1, 2), (2, 9) \}$ است که:



مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهند.



ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است: تصویر این نقاط بر روی محور x ‌ها؛ یعنی $\{ -\frac{1}{3}, 1, 2 \}$ دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور y ‌ها $\{ \frac{3}{4}, 2, 9 \}$ برد تابع نامیده می‌شود.

نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

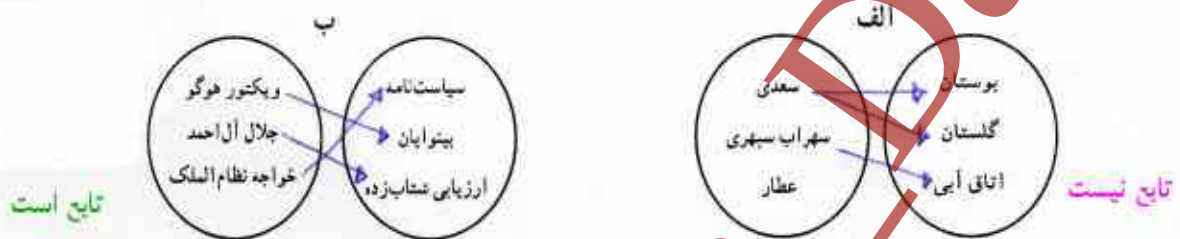
کار در کلاس

ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه‌ی خواسته‌شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.



۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش پیکانی	
	$\{(یزد, کوه‌رنگ), (یزد, رودسر), (چهارمحال و بختیاری, کوه‌رنگ), (چهارمحال و بختیاری, رودسر), (گیلان, کوه‌رنگ), (گیلان, رودسر)\}$		۱
	$\{(هرمزگان, میرجاوه), (هرمزگان, بندر خمیر), (سیستان و بلوچستان, میرجاوه), (سیستان و بلوچستان, بندر خمیر), (ایلام, میرجاوه), (ایلام, بندر خمیر)\}$		۲

با توجه به جدول بالا:

الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که...

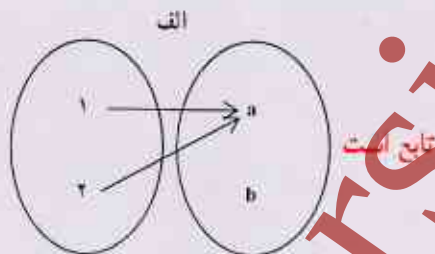
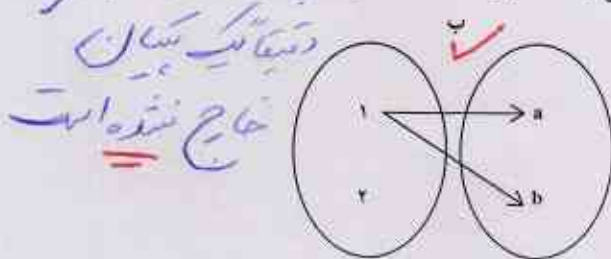
ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که...

ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که...

به عبارت دیگر اگر مولفه‌ها اول و دوم زوج مرتب آن استان باشند، در این صورت مولفه‌ها دوم آنها نیز برابر باشند.

تمرین

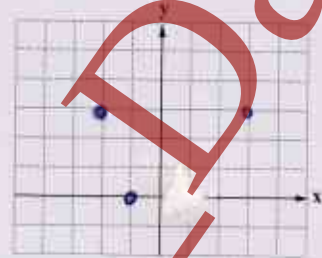
۱. کدام یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟



تابع است

۲. کامل کنید:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad D_f = A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad R_f = \{-3, 0, 3\}$$

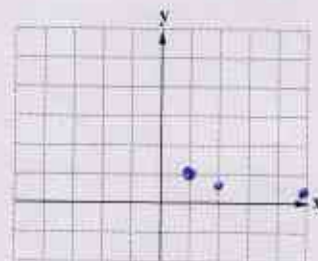


با توجه به ترتیب عضوها در دامنه و برد می‌توان این تابع را نوشت:

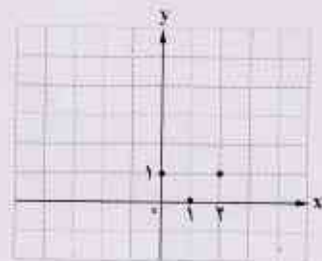
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 3x \end{cases} \quad D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, 2\} \quad R_f = \{-\frac{3}{2}, 0, 6\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad D_f = \{1, 2\} \quad R_f = \{1, \frac{1}{2}\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases} \quad D_f = \{1, 0, 2\} \quad R_f = \{0, 1\}$$



نهی کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

مدیران یک فروشگاه به دلایلی* تصمیم گرفته‌اند هزینه استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینه استفاده از توقفگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سیزده هفته هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ نمایش داده شده است:

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توقفگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت	دومین ساعت	سومین ساعت	چهارمین ساعت	پنجمین ساعت	ششمین ساعت	هفتمین ساعت	هشتمین ساعت	نهمین ساعت	دهمین ساعت	یازدهمین ساعت	دوازدهمین ساعت
	(۸-۹)	(۹-۱۰)	(۱۰-۱۱)	(۱۱-۱۲)	(۱۲-۱۳)	(۱۳-۱۴)	(۱۴-۱۵)	(۱۵-۱۶)	(۱۶-۱۷)	(۱۷-۱۸)	(۱۸-۱۹)	(۱۹-۲۰)
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یکشنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۴۱۰	۴۱۰	۴۳۰	۴۱۰	۴۳۰	۴۰۰	۲۱۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۲۵۰	۲۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنجشنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۲۰	۳۲۰	۲۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۲۰	۸۹۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۲۰	۴۱۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول ۲ تعیین شده است:

جدول ۲. هزینه توقفگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

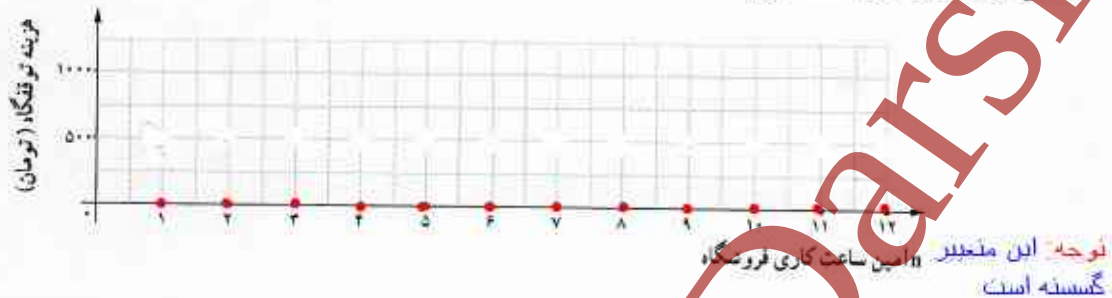
میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
۱-۱۰۰	(رایگان)
۱۰۰-۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰-۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰-۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰-۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰-۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰-۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

- * ۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هزینه اندک توقفگاه می‌تواند تشویقی برای خرید از فروشگاه نزد مشتریان باشد.
۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هزینه بالاتر استفاده از توقفگاه درآمد بیشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.
۳. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان از ظرفیت پذیرش فروشگاه بیشتر است و این مسئله باعث تعجیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هزینه رایگان یا اندک توقفگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر، هزینه کمتر توقفگاه به تنهایی می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد، بلکه این مسئله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه نیز تأثیرگذار است که نتیجه آن سود بیشتر فروشگاه خواهد بود.

تابع ثابت (Constant Function)

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «امین ساعت کاری فروشگاه- هزینه دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفته هوشمندسازی رسم می‌کنیم.^۱

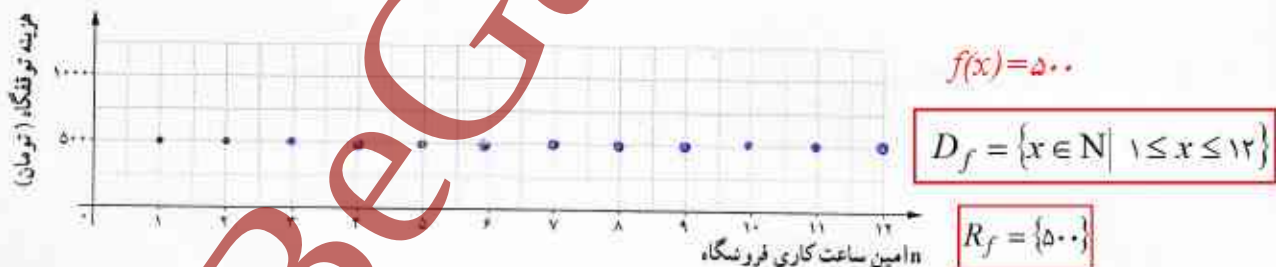
شنبه: در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به پارکینگ همواره در دسته «۱-» قرار می‌گیرند. بنابراین مطابق جدول ۲، نمودار زیر به دست می‌آید:



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به صورت $C(n)=0$ است که در آن $D=\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$ دامنه تابع و $R=\{0\}$ برد تابع C را تشکیل می‌دهند.

کار در کلاس

یک شنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x)=c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R=\{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مشتریان فروشگاه از نرخ جدید هزینه توقفگاه آگاهی یابند در نخستین هفته هوشمندسازی توقفگاه میانگین ورودی خودرو تغییر محسوسی نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معتبر است.

نکته: (۱۸ ساعت متغیر گسسته است)

*** لازم به ذکر است دانش آموزان در سال گذشته بسته بندی منحصر کمی بجای گسسته و پیوسته را خوانده اند

فعالیت

دوشنبه: با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

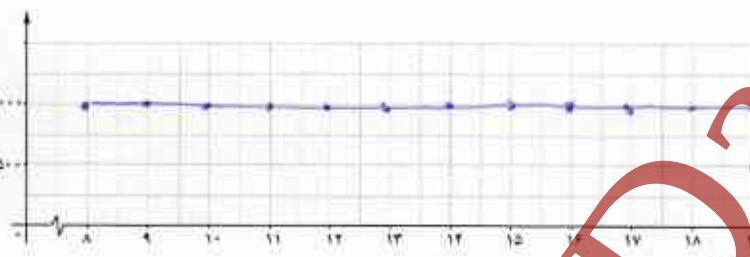
توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x \leq 12\}$$

$$R = \{1000\}$$

هزینه توقفگاه (تومان)



تومان ورود به توقفگاه

دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟

تفاوت این دامنه ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

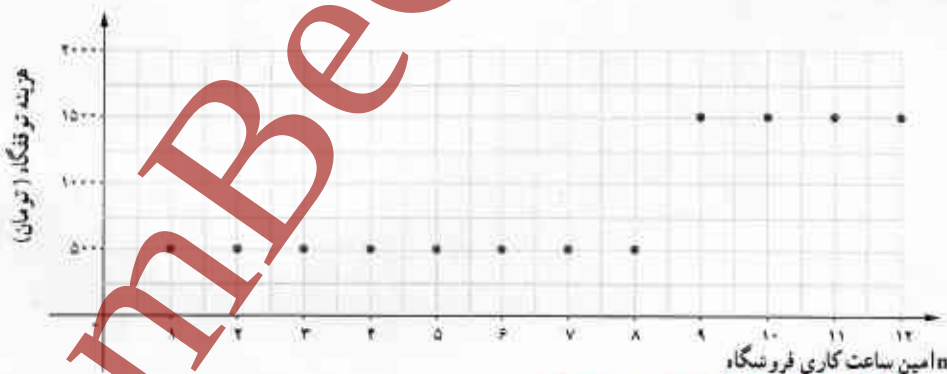
تابع

سه شنبه: با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از سه

۲۰۰-۱۰۰ و در چهار ساعت پایانی ساعت کاری فروشگاه در دسته ۴۰۰-۳۰۰ قرار می گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینه استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می کند:

$$C(n) = \begin{cases} 500 & 1 \leq n \leq 8 \\ 1500 & 9 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

که ضابطه ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطه ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن:



(که اشتراک آنها تهی است)

توابعی که در بخش های مختلف دامنه، ضابطه های مختلف دارند، توابع چند ضابطه ای نامیده می شوند. مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع ∇ ضابطه ای نامیده می شود.

دامنه نمودار روز دوشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه اعداد حقیقی است در صورتی که دامنه نمودار های روز شنبه و یکشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه ی اعداد طبیعی است.

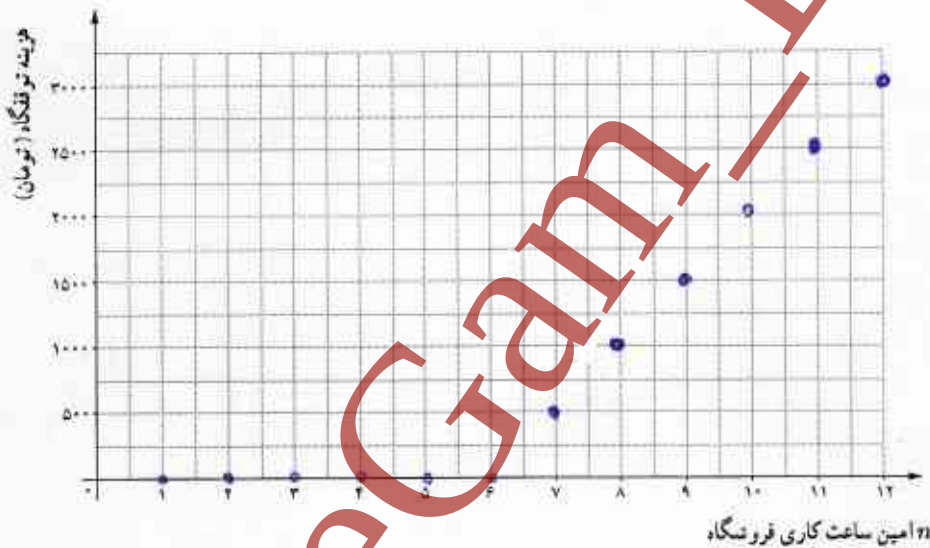
نمودار روز دوشنبه نقاط روی یک خط است که به هم وصل می شوند، اما نمودار های روز شنبه و یکشنبه نقاطی هستند که روی یک خط هستند و به هم وصل نمی شوند.

کار در کلاس

چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول ۱ و ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n = 7 \\ 1000 & n = 8 \\ 1500 & n = 9 \\ 2000 & n = 10 \\ 2500 & n = 11 \\ 3000 & n = 12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n-6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

۱. نمودار این تابع را رسم کنید:

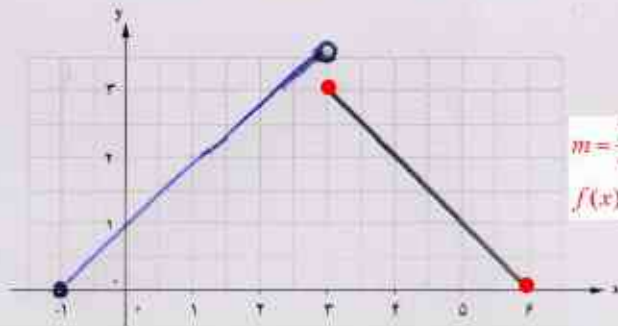


۲. درآمد توقفگاه در این روز چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{درآمد توقفگاه} &= 500 \times 10 + 1000 \times 20 + 1500 \times 30 + 2000 \times 40 + 2500 \times 50 \\ &+ 3000 \times 60 = 533000 \end{aligned}$$

تذکره: طبق ضابطه $C(n)$ در کارگاه هرگز نباید در اولین ساعت کاری دست میزد و در هفتمین ساعت، میانگین ورود خودرو در روز ۲۸ بهار طبق جدول ۱، برابر ۱۸ است پس با توجه به ضابطه $C(n)$ کارگاه ۵۰۰ را در ۱۸ ضرب کنیم و برای ساعت هفتمین خودرو (پنجمین خودرو ورودی) را در هفتمین میانگین با توجه به $C(n)$ کارگاه ضریب ۱۸۰ ضرب کنیم و بعد هم با هم جمع می کنیم.

کار در کلاس



$$m = \frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{4} = -1$$

$$f(x) = mx + b \Rightarrow f(3) = -1(3) + b = 3 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ -x+6 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.

در سال گذشته دانش آموزان به این روش حل می کردند

فعالیت

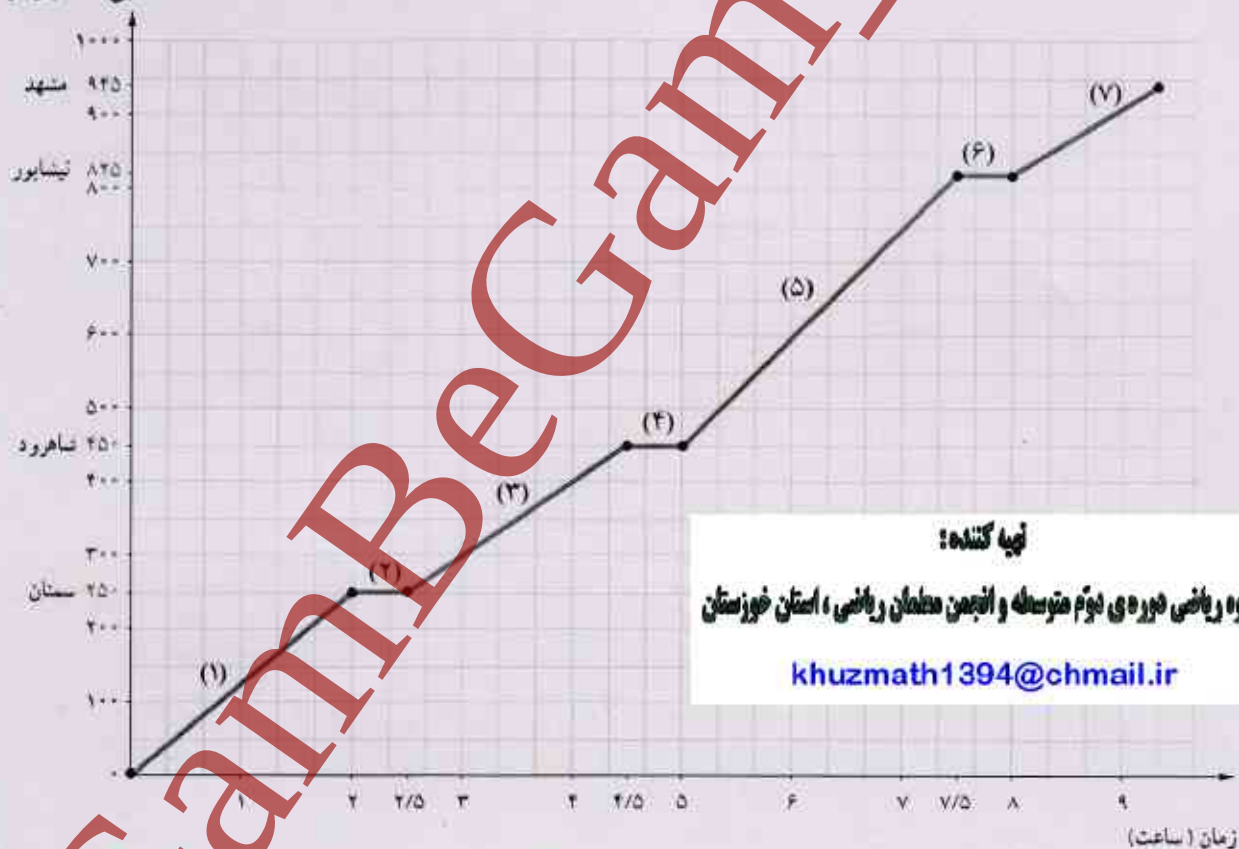
نمودار زیر قطاری را نشان می دهد که از تهران به مشهد رفته است.

۱. مفهوم قسمت هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟ **توقف در ایستگاه**

۲. ضابطه تابع «مکان-زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به دست آورید.

۳. اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می رسد؟

مسافت طی شده (کیلومتر)



نمودار:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

پایه ۱۳: صحنه های خط (۱)

$$1500 - 2000 = 925 \rightarrow \text{رسیده}$$

$$1500 - 1250 \rightarrow a = \frac{1250}{1500} = 1,3$$

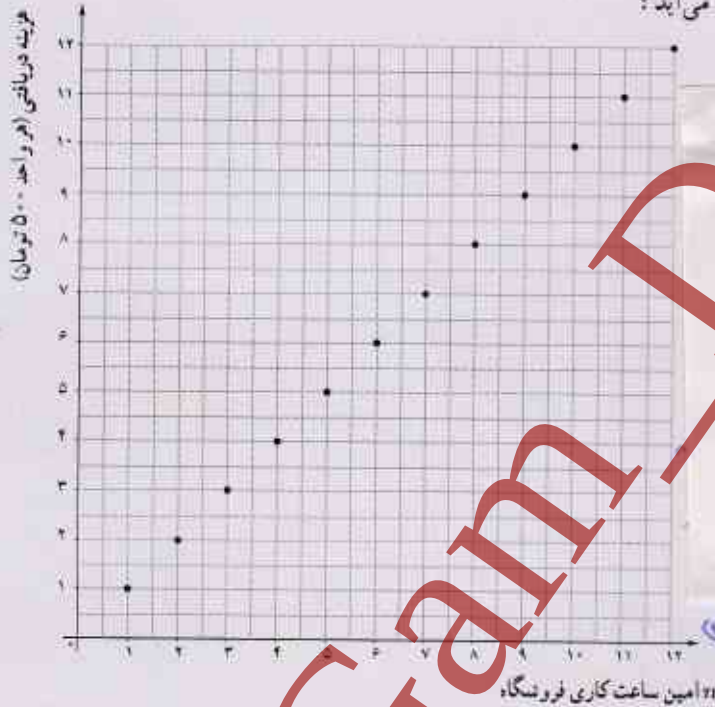
$$x = 1 + 1,3 \times 2 \Rightarrow 1,6$$

۲۹

$$f(x) = \begin{cases} 450 & 2,5 \leq x < 5 \\ 1500 - 200 & 5 \leq x < 7,5 \\ 825 & 7,5 \leq x < 8 \end{cases}$$

فعالیت

پنج شنبه: به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در ۱۱مین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی ۱۱ واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد.
بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:



$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10), (11,11), (12,12)\}$$

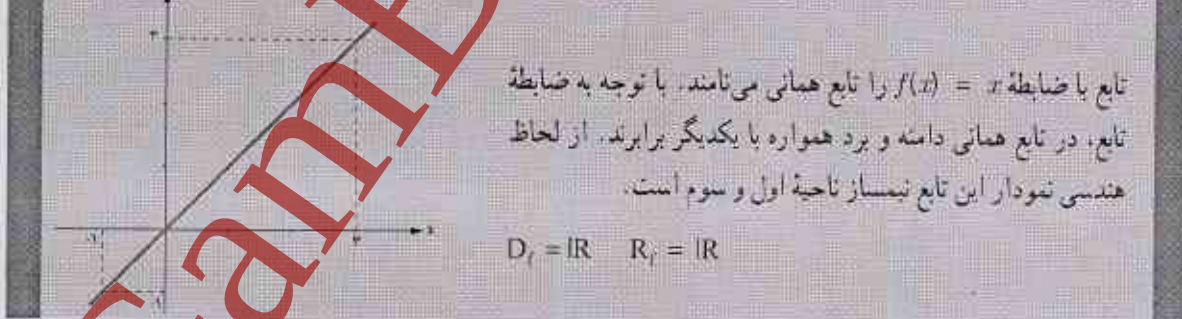
دامنه
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

بردار
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

این همواره درست است برای همین دامنه و برد را یکسان برابرند.

مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع به چشم می‌آید؟
برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟
اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

این تابع هر عدد حقیقی را به همان عدد حقیقی نظیر می‌کند. - دامنه و برد آن نقطه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی می‌شود



نویسنده:

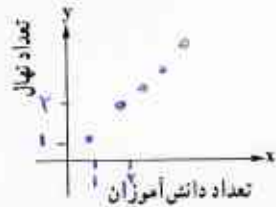
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین

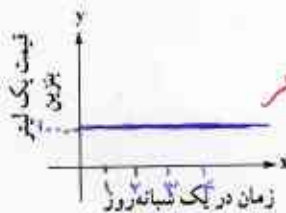
۱. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



$$f(n) = n$$

ب. هزینه یک لیتر بنزین معادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



$$f(n) = 1000$$

ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود.



$$f(n) = n$$

د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x=1,2,3 \\ 3000 & x=4,5,6,7 \\ 1500 & x=8,9 \end{cases}$$



(چون سانس‌های ششم و هفتم از سانس اول و دوم به‌شمار می‌آیند)

ه. دو تنه‌ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه A برمی‌گردد.



توجه: چند ضابطه‌ای

(در نقطه A با سرعت ثابت در یک زمان مشخص B می‌رسد و دوباره از B با همان سرعت ثابت)

(در یک زمان مشخص در یک مکان اولیه می‌رسد)

$$D = \{1, 3\} \quad R = \{1, 3\} \quad f = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

تایید

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$ نا درست $f(kx) = c \Rightarrow f(kx) = c$

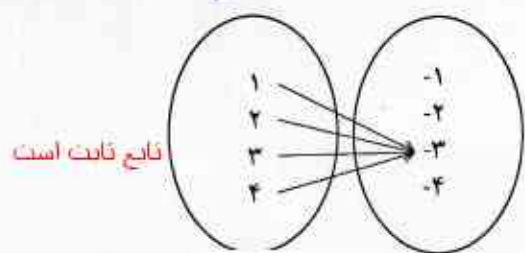
۳. اگر $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

$$a+b=4 \Rightarrow a+4=4 \Rightarrow a=4-4=0 \Rightarrow a=0$$

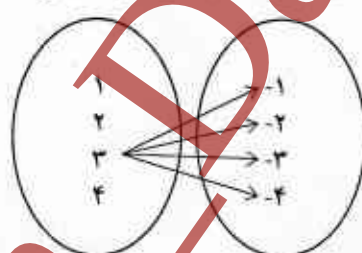
۴. اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1, y_2, y_3 را به دست

$$y_1 = y_2 = y_3 = c \Rightarrow \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{c + c + c}{3} = c$$

۵. کدام یک از نمایش‌های بیکنی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



تابع ثابت است



۶. در تابع ثابت $f(x) = c$:

$$f(a) = f(b) = f(a+b) = c$$

الف. مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

$$c = c \times c \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ or } c = 1$$

۷. اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

$$a=1, b=2, c=5 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

۸. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم

الف) $(2, n^2 - 3n + 4)$

ب) $(-1, n^2 - 4n + 2)$

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0 \Rightarrow n=2 \text{ or } n=1$$

$$n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n-1) = 0 \Rightarrow n=3 \text{ or } n=1$$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\} \quad n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \Rightarrow n=3 \text{ or } n=-1$$

$$f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 3)\}$$



۱۰. ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.

$$m+3 = -1 \Rightarrow m = -4$$

$$m-4 = -1 \Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow m+t = 3+3 = 6$$

$$f(n) = \begin{cases} -n & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 2 \\ 2 & 2 < n \end{cases}$$

توجه: در سوال ۹

بدست آوردن مقدار $m+t$ ضرورت نداشت

بهتر بود سوال چنان طراحی می شد که مقدار پارامترها برابر نباشد

ادامع پايه سوال ۱۴

$$30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50) \times 5 + 110 \times 8 + 270 \times 1 + 35 \times 15 + 49 \times 2 + 57 \times 15 + 68 \times 3 = 5330$$

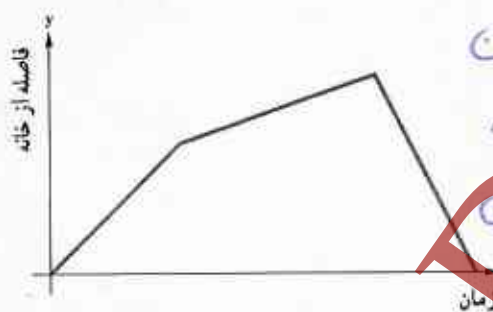
کل درآمد برابر با ۱۱۵۲۵ است

شیبه می‌سیم درآمد بسیار خواهند سازد بیشتر است

۱۱. در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad f(3) + f(-1) = 5 + (-1) = 4 \quad f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = -\sqrt{2} + 2$$



به سمت چپ مربوط می‌شود چون
سرعت را در آن لحظه کم کرده
این همان جابجایی است
در حال دودن برخورد کرد

- الف. آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.
- ب. علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرانجام رسید.
- ج. محمدرضا برای دودن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دودن با دوست خود که در حال دودن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دودنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سبزی شده از بازگشتی فروشگاه از ساعت ۸ صبح تا ۱۱ صبح (معادل ۵۰۰ تومان) باشد

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور لایها معادل ۵۰۰ تومان است).

۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

$$2 + 1 = 3 \quad 500 = (k+1) \Rightarrow k = 499 \quad 10 - 8 = 2 \Rightarrow 2 \times 500 = 1000$$

- الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.
- ب. بر اساس هوشمندسازی

در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

$$(30 \times 4 + 40 \times 2 + 50 \times 5 + 70 \times 1 + 90 \times 2) \times 700 = 34600$$

حل تمرین: جدول اجباری نیست.

$$(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 700 = 123900$$

$$(110 \times 4 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 2 + 170 \times 2) \times 700 = 187200$$

$$(120 + 110 + 180 \times 2 + 140 + 150 + 140 + 320 + 340 \times 2 + 360) \times 700 = 189000$$

$$(30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50 + 110 + 270 + 350 + 490 + 570 + 680) \times 700 = 203000$$

$$(30 \times 4 + 40 \times 2 + 50 \times 5 + 70 \times 1) \times 700 = 34600$$

$$(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 500 = 88500$$

$$(110 \times 4 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 2 + 170 \times 2) \times 1000 = 242000$$

درس ۲

توابع بلکائی و قدر مطلق

تابع بلکائی (Step Function)

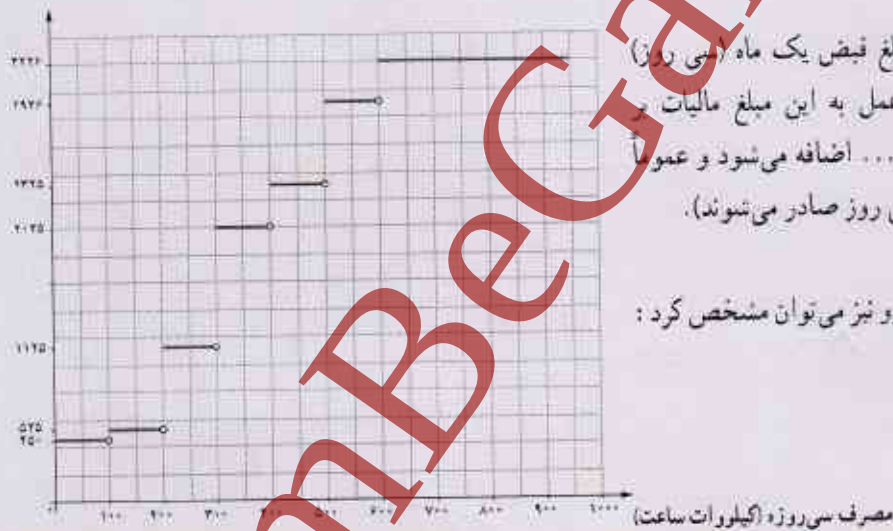
روش محاسبه قبض برق

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می شود. یک کیلووات ساعت (kwh) در واقع مصرف یک وسیله هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده ایم.

مبلغ قبض مصرف ۴۰ روزه	مبلغ قبض مصرف ۳۰ روزه	مبلغ قبض مصرف ۲۰ روزه	مبلغ قبض مصرف ۱۰ روزه
۲۵۰۰۰	۱۰۰	۴۵۰	۵۰
۳۴۵۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰
۳۴۰۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۵۰

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز $246/23 \text{ kwh}$ بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت بلکائی تقسیم می شود.

هزینه بلکائی برق (ریال)



مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می کند (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و... اضافه می شود و عموماً قبض های برق برای بیشتر از سی روز صادر می شوند).

جدول بالا را با نمودار روبه رو نیز می توان مشخص کرد:

نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع بلکائی می نامند.

فعالیت

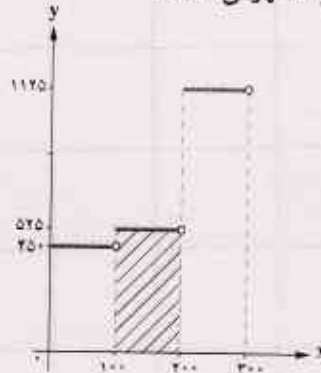
به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه :

۱. هزینه 100 kWh اول چگونه محاسبه می شود؟ آیا می توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را

تعیین کند؟

$$100 \times 450 = 45000$$

۲. مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟



هزینه بازاد مصرف

$$(100 - 0 = 100 \text{ kWh})$$

۳. هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

با رسم جدول مصرف برق خانه



$$100 + 100 + 47,23 = 247,23$$

$$100 \times 450 + 100 \times 525 + 47,23 \times 1125$$

$$= 45000 + 52500 + 52008,75$$

$$= 149508,75$$

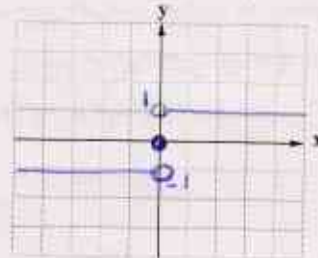
مساحت جدول مصرف

تابع علامت (Sign Function)

کار در کلاس

بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y=f(x)$ ، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



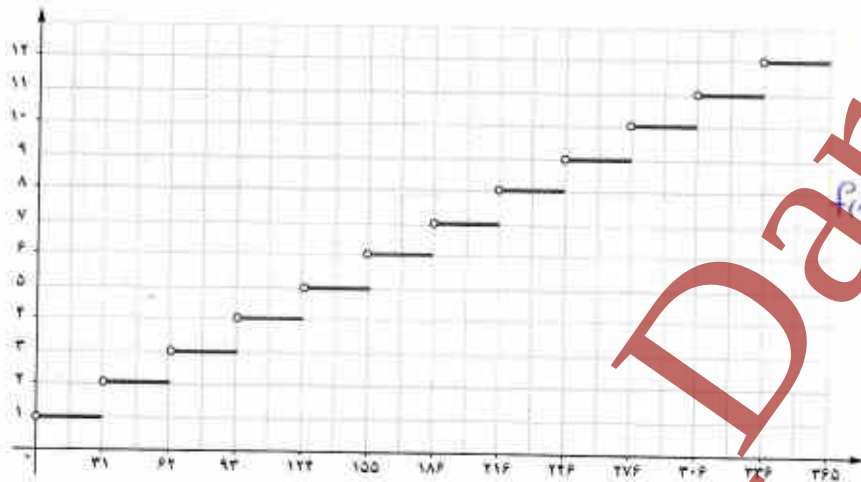
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{1, 0, -1\}$$

تابع بالا را تابع علامت یا تابع $y = \text{sign}(x)$ می نامند.

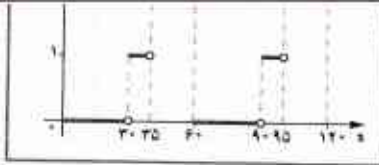
کار در کلاس

۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطه تابع را بنویسید؟

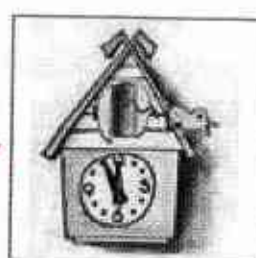
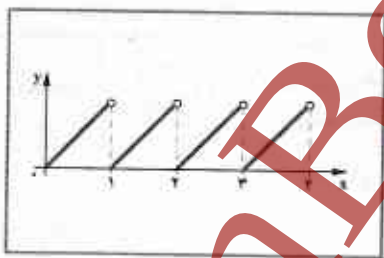


۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

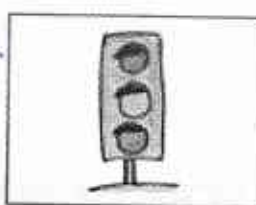
معمولاً ساعت دیواری به صورت دایره‌ای است، راس هر ساعت بیرون می‌آید و در تقسیم زمان، داخل ساعت



ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت.

نمودار سوم: مربوط به ساعت دیواری است چون مکان پرنده ثابت است فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید یعنی مکان آن تغییر می‌کند

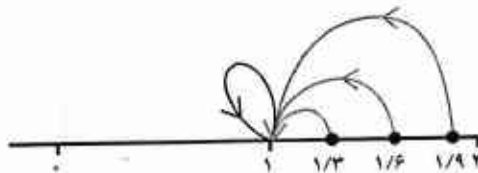
نمودار اول: مربوط به چراغ راهنمایی و رانندگی: در هر واحد اول محور x بیانگر زمان و محور y بیانگر حالت چراغ راهنمایی است (چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت دارد)

نمودار دوم: مربوط به ساعت شمس و قمری است با سرعت ثابت در درون مخروط مخروطی در هر واحد حجم شمس و قمری تغییر می‌کند و در هر واحد ساعت

فعالیت

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

برای مثال، در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد. به بیانی دیگر:



(شکل ۱)

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = 1$$

مطابق تعریف تابع g ، اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی -۲ و -۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد -۳ نسبت می‌دهد. (شکل ۲).

و اگر x عددی بین اعداد ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ۲ نسبت می‌دهد (شکل ۳).



$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow g(x) = -3$$

(شکل ۲)



$$2 \leq x < 3 \Rightarrow g(x) = 2$$

(شکل ۳)

توجه کنید:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

کار در کلاس

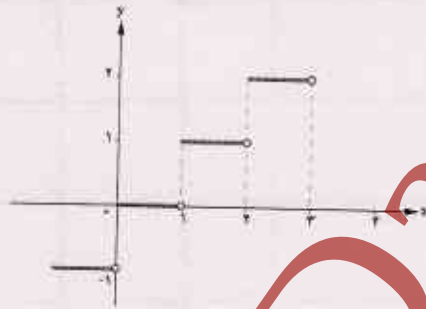
به کمک تابع g که در فعالیت صفحه قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x) = 2$	$2 \leq x < 3$
	$g(x) = 1$	$1 \leq x < 2$
	$g(x) = 0$	$0 \leq x < 1$
	$g(x) = -1$	$-1 \leq x < 0$
	$g(x) = -2$	$-2 \leq x < -1$

توجه کننده:

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چندضابطه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطه این تابع را با $g(x) = [x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می‌کنند.

کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

$$[2] = 2$$

$$[2/7] = 0$$

$$[-2/7] = -1$$

$$[0/7] = 0$$

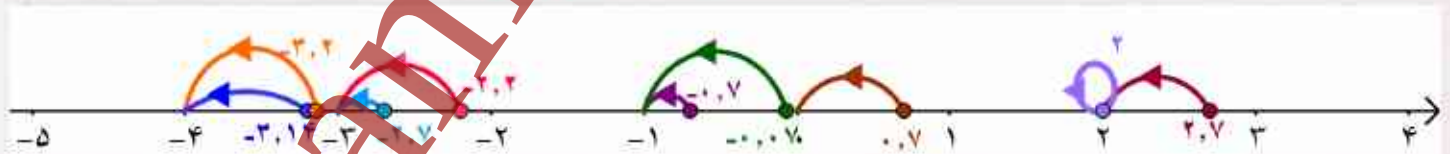
$$[-0/7] = 0$$

$$[-0/0/7] = 0$$

$$[-3/2] = -2$$

$$[-\pi] = -4$$

$$[-2/2] = -1$$



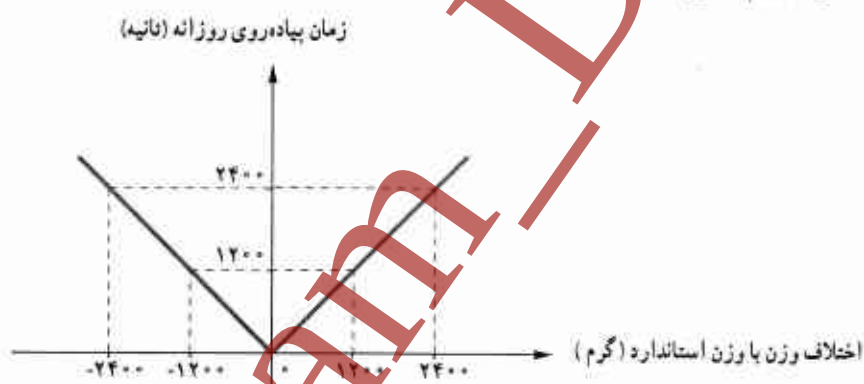
نوبه کنه:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

فعالیت

فعالیت ۱. هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه، یعنی ۲ دقیقه روزانه به صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه یعنی ۴ دقیقه به صورت منظم پیاده‌روی کند. این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد:



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200 \quad f(-1200) = 1200 \quad f(2400) = 2400 \quad f(-2400) = 2400$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

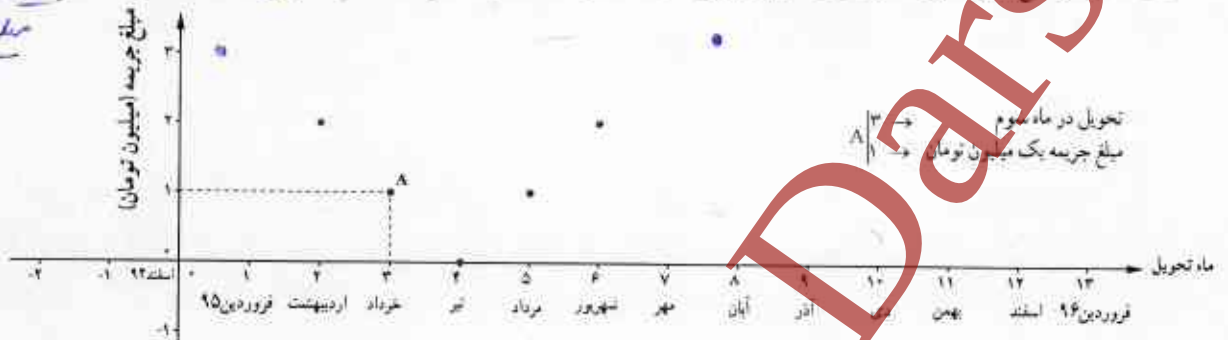
این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نیه گفته:

فعالیت ۲. پلی که روی رودخانه سیمینه رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر احداث این پل زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینه نگهداری پل و عدم استفاده از آن (به خاطر پایان نیافتن بقیه جاده مواصلاتی به پل) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح پل نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد. الف. نمودار تابع جریمه بر حسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید. *م از اس محاسبه تأخیر یا تحویل در پروژه*



$f(n) = \begin{cases} n-4 & n \geq 4, n \in \mathbb{N} \\ -(n-4) & n < 4, n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f(n) = |n-4|$

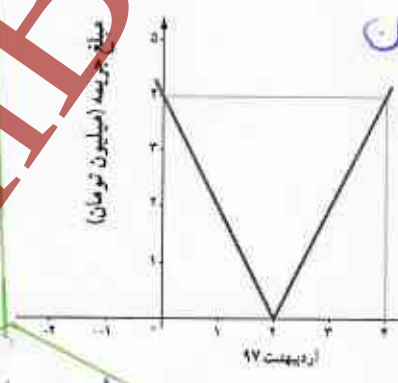
ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زمان یک تابع قدر مطلق بیان کنید؟
ج. اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟
چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطه تابع قدر مطلق به دست آمده توضیح دهید.

پس ۴ ماه با زمان تحویل پروژه اختلاف دارد
 $f(8) = |8-4| = 4$ *سیصد و پنجاه و پنج میلیون تومان*
 $f(0) = |0-4| = 4$ *سیصد و پنجاه و پنج میلیون تومان*
 آبان و اسفند ۹۵ / ماه اسفند ۹۶

کار در کلاس

با توجه به نمودار
الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. *اگر پروژه در ماه ۲ در آن محل در هر جریمه نمی‌شود*
ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هریک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.
ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.
د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

$m = \frac{4-0}{4-2} = 2$ و $m = \frac{0-4}{2-4} = 2 \Rightarrow y = 2x - 4$
 $m = \frac{4-0}{0-2} = -2$ و $m = \frac{0-4}{2-4} = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$



پایه د) شیب خط مثبت باشد یعنی تأخیر در زمان
تحویل پروژه ولی اگر شیب خط منفی باشد
یعنی تحویل پروژه زودتر از موعد مقرر انجام شده
است که هر دو حالت
موجب خسارت به صاحب کار است

$f(n) = \begin{cases} 2n-4 & n \geq 2 \\ -2n+4 & n < 2 \end{cases} \Rightarrow f(n) = |2n-4|$

حل یک مسئله

نمودار تابع $y = |2x - 6|$ را رسم کنید.

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \quad \text{با توجه به تعریف قدر مطلق}$$

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 & (1) \\ -(2x - 6) & 2x - 6 < 0 & (2) \end{cases}$$

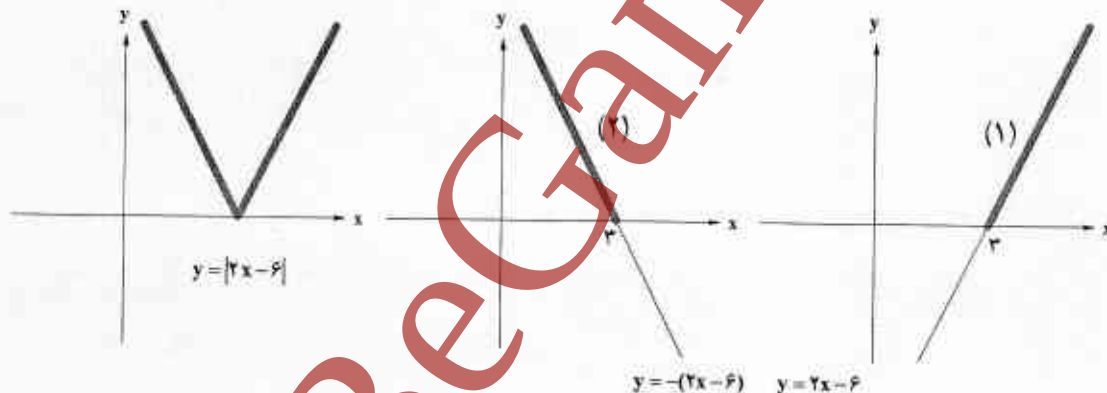
برای تعیین حدود برای هر کدام از ضابطه‌های بالا، به کمک قوانین نامساوی‌ها در ریاضی نهم:

$$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0, & 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 & (1) \\ 2x - 6 < 0, & 2x < 6 \Rightarrow x < 3 & (2) \end{cases}$$

پس ضابطه تابع این گونه مشخص می‌شود:

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 & (1) \\ -(2x - 6) & x < 3 & (2) \end{cases}$$

و نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



کار در کلاس

الف. نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید.

ب. نمودار $y = |x|$ را در همین صفحه مختصات رسم کنید.

ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا، بر اساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

د. نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با توجه به «ج» رسم کنید.

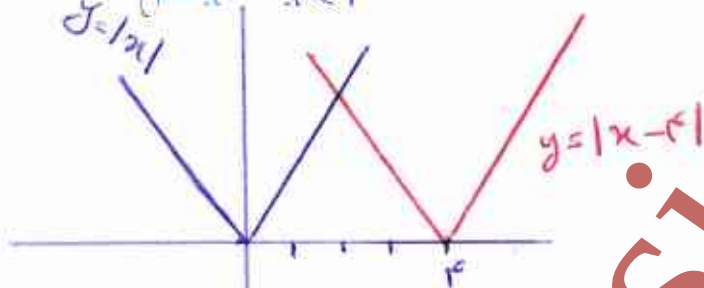
ه. نمودار $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

حل کتاب ریاضیات ص ۴۲

$$f' = |x-4| = \begin{cases} x-4 & x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & -(x-4) < 0 \end{cases} \Rightarrow f' = \begin{cases} x-4 & x-4 \geq 0 \\ 4-x & x < 4 \end{cases}$$

$$y = |x-4|$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$



(الف)

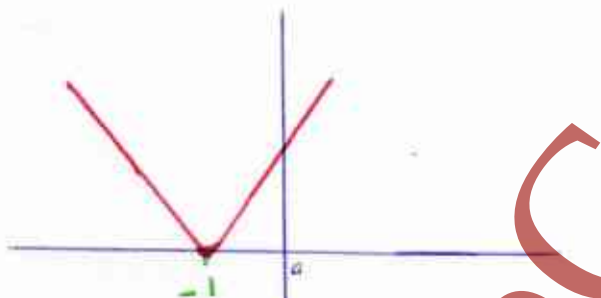
(ب)

(ج) طبق نمودار رسم شده می‌توان گفت که برای رسم $y = |x-4|$ کافی است

ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم کرد پس به اندازه ۴ واحد به سمت راست انتقال داد.

$$y = |x+1|$$

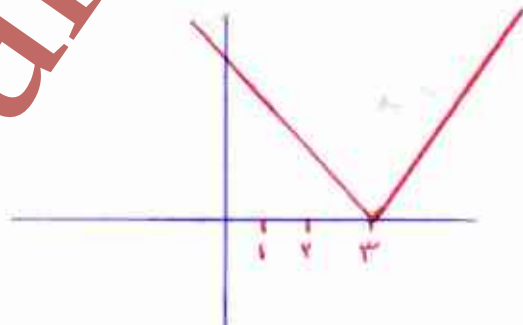
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



نمودار $y = |x|$ را به اندازه ۱ واحد به سمت چپ انتقال دادیم.

$$y = |x-3|$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

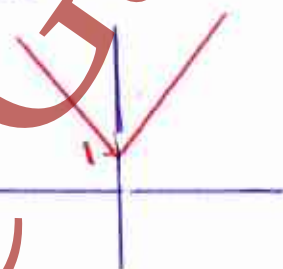


نمودار $y = |x|$ را به اندازه ۳ واحد به سمت راست انتقال دادیم.

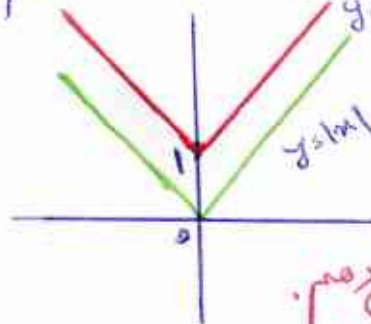
(د)

$$y = |x|+1$$

معادله $y = |x|+1$ را به صورت $y-1 = |x|$ در می‌آوریم. $y-1=0 \Rightarrow y=1$
 در $y=1$ دو نقطه داریم: $(-1, 1)$ و $(1, 1)$



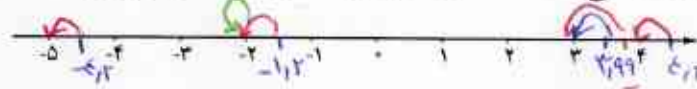
(ه) در نمودار $y = |x|$ را به سمت راست و چپ انتقال می‌دهیم و سپس $y = |x|+1$ را رسم می‌کنیم.



نتیجه می‌شود که برای رسم $y = |x|+1$ کافی است
 نمودار $y = |x|$ را به اندازه ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$[4/2] = 2$$

$$[-4/2] = -2$$

$$[3/99] = 0$$

$$[-1/2] = -1$$

$$[-2] = -2$$

$$[\pi] = 3$$

۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2/3$	$f(x) = -1$
	$x = 5$	$f(x) = 5$
$f(x) = [-x]$	$x = 1/2$	$f(x) = -1$
	$x = 2/3$	$f(x) = -1$
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = -1$
	$x = 1/2$	$f(x) = -1$
	$x = 2$	$f(x) = 0$
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	$f(x) = 3$
	$x = 1/2$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = 1$

$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 0$$

$$f(1/3) = [1/3] + [-1/3] = 0 + (-1) = -1$$

$$f(1/2) = [1/2] + [-1/2] = 0 + (-1) = -1$$

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 0$$

$$f(1) = [3(1)] = [3] = 3$$

$$f(1/2) = [3(1/2)] = [1.5] = 1$$

$$f(1/3) = [3(1/3)] = [1] = 1$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
۰ تا ۱/۳۰۰/۰۰۰	حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۰	مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۱۵	مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰

الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

• کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

$$\left(240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 240000$$

$$\left(600000 \times \frac{25}{100} \right) = 600000 - 150000 = 450000$$

مالیات

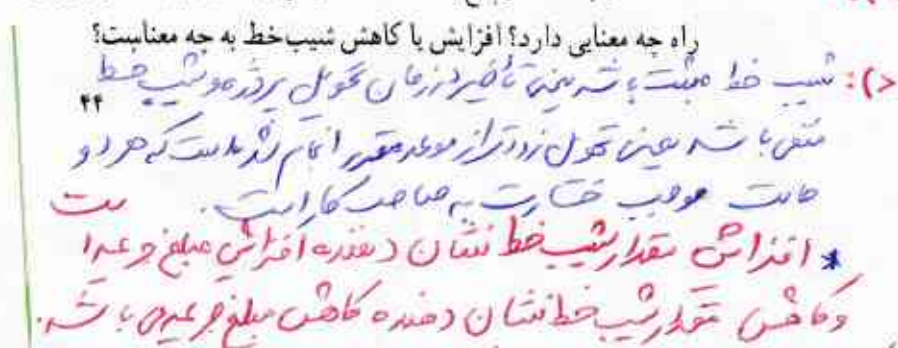
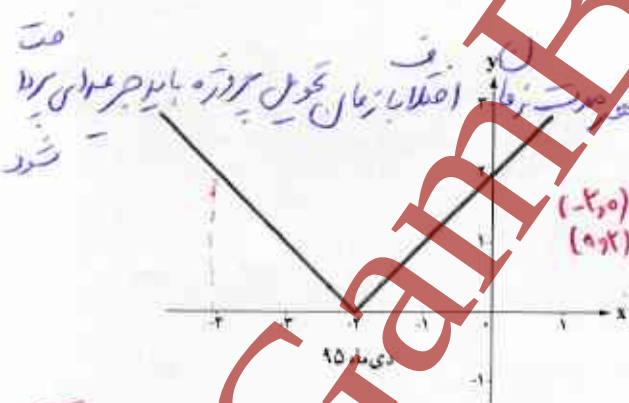
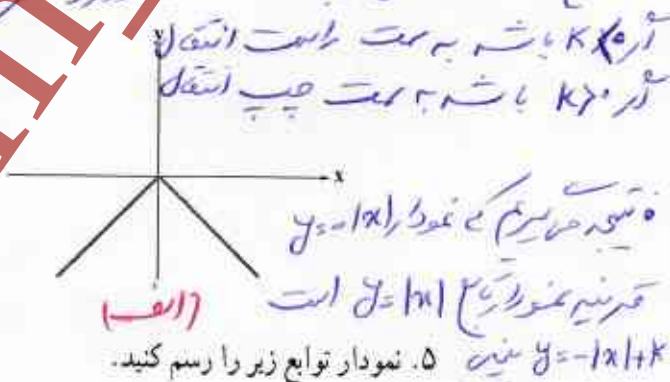
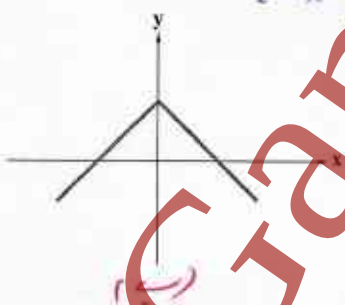
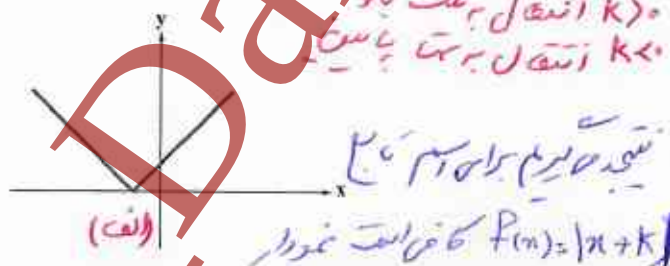
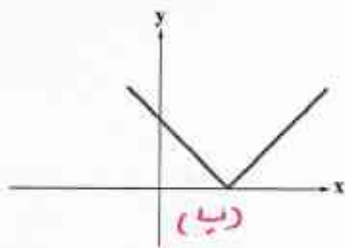
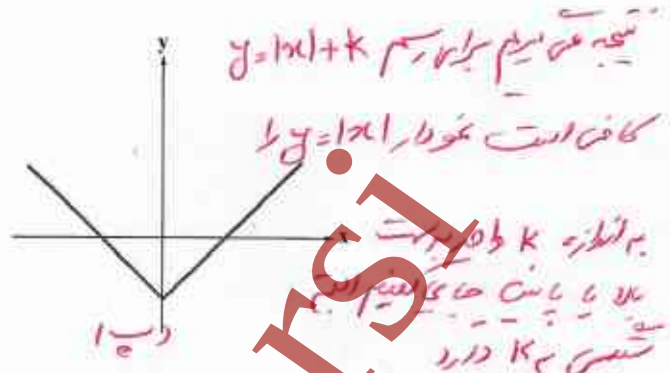
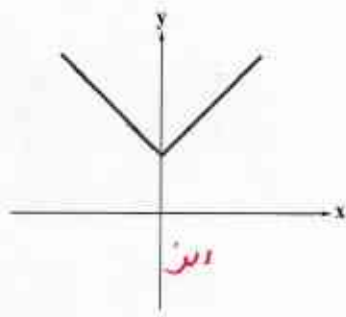
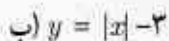
$$f(240000) = 240000 - 240000 = 0$$

$$f(240000) = 240000 - \left(240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 0$$

$$f(600000) = 600000 - \left(600000 \times \frac{25}{100} \right) = 600000 - 150000 = 450000$$

دریافتی

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



بدرین ۴۴ کتاب آمار ریاضی انسان سوال ۱۵

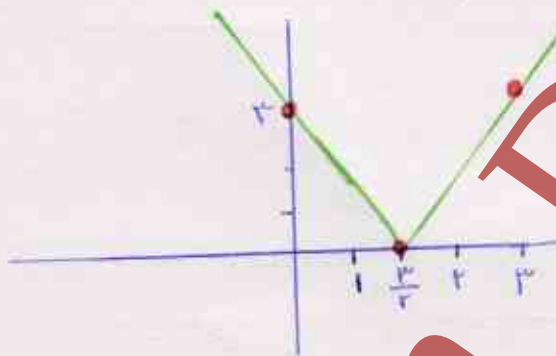
پاسخ بدرین ۱۵ :

الف) $y = |x - 3|$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{1}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq \frac{3}{1} \\ -(x - 3) & x < \frac{3}{1} \end{cases}$$

x	y	x	y
3	0	3	0
4	1	4	1
2	1	2	1



ب) $y = |x + 1|$

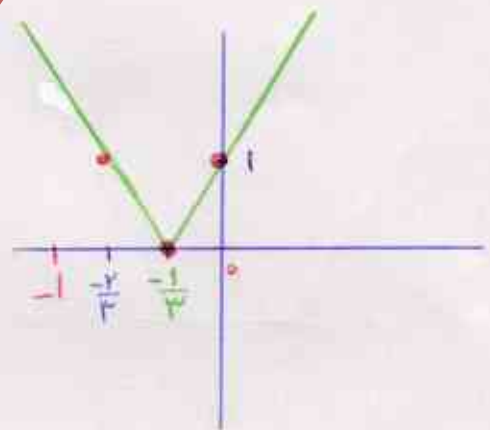
$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{1}$

$$y = \begin{cases} x + 1 & x \geq -\frac{1}{1} \\ -(x + 1) & x < -\frac{1}{1} \end{cases}$$

$x \geq -\frac{1}{1}$

$x < -\frac{1}{1}$

x	y	x	y
-1	0	-1	0
0	1	0	1
-2	1	-2	1



نویسندگان:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

درس ۳

اعمال بر روی توابع

فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) زندگی می کند. وی می خواهد در جشنواره فیلم و تئاتر دهه فجر امسال اعضای خانواده اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاقه مندی اعضای خانواده به سبک های مختلف فیلم و تئاتر و تنوع موارد نمایش داده شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور اولیه اش، نتوانست به سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می تواند با اعضای خانواده اش ببیند. بنابراین:

۱. ابتدا با یک پرسش نامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.
۲. با توجه به بودجه محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینه صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف هایی قائل شده اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینه بلیت با توجه به گروه های مختلف

مکان نمایش	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
گروه سنی			
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو	۸۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۲۴۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	۱۵۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف	۱۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف



علیرضا نتایج پرسش نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول های زیر مشخص نمود :

جدول ۲. علاقه مندی به سینمای کودک و نوجوان

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
مریم		✓		✓	✓
علیرضا			✓	✓	✓

جدول ۳. علاقه مندی به سینما

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه ای	علمی - تخیلی
پدر		✓			✓		✓
پدر			✓	✓	✓		
مریم							
علیرضا			✓		✓		✓

جدول ۴. علاقه مندی به تئاتر

اعضای خانواده	سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
پدر		✓	✓	✓	
پدر			✓	✓	✓
مریم		✓		✓	
علیرضا				✓	

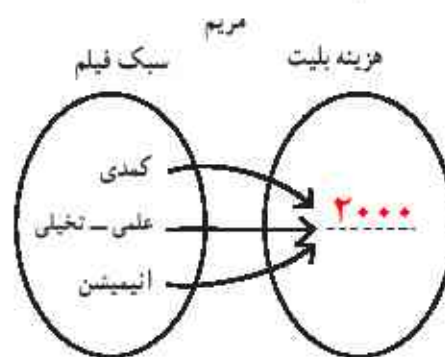
در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد.

او باید دو نکته را مشخص کند :

۱. به دیدن چه سبک فیلمی می روند؟

۲. هزینه بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقه، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنه» آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و «بردا» آن هزینه خرید بلیت، نمایش های بیکانی این دو تابع به صورت زیر است :



پس اشتراک فیلم مورد علاقه شان دو سبک فیلم انیمیشن و علمی-تخیلی است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آنها می توانند به سینما بروند. این مطلب را می توانیم چنین نشان دهیم:

$$\text{علیرضا} = \{(4000, \text{علمی-تخیلی}), (4000, \text{انیمیشن}), (4000, \text{تاریخی})\}$$

$$\text{مریم} = \{(2000, \text{علمی-تخیلی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی})\}$$

$$\text{علیرضا} + \text{مریم} = \{(2000 + 4000, \text{علمی-تخیلی}), (2000 + 4000, \text{انیمیشن}), (2000 + 4000, \text{تاریخی})\}$$

کار در کلاس

- اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواند مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول ۲:



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم مورد علاقه هر کدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه ای که در این روز علیرضا صرف می کند، چقدر است؟

- پنجشنبه علیرضا می خواهد همه اعضای خانواده اش را به تماشای یک فیلم ببرد. با استفاده از جدول ۱ و جدول ۲، الف. نمایش زوج مرتبی هر کدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرطی را که همه آنها به تماشای یک فیلم می روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می کند؟

$$\text{علیرضا} + \text{مادر} + \text{مریم} = \{(2000 + 4000 + 2000, \text{تاریخی}), (2000 + 4000 + 2000, \text{انیمیشن}), (2000 + 4000 + 2000, \text{کمدی})\}$$

$$30000 + 30000 + 15000 + 24000 = 99000$$

پایه ۱-

$$\text{علیرضا} = \{(2000, \text{تاریخی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی})\}$$

$$\text{مادر} = \{(2000, \text{تاریخی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی})\}$$

$$2000 \times \frac{2}{100} = 4000 \quad 20000 - 4000 = 16000$$

$$\text{مریم} = \{(15000, \text{تاریخی}), (15000, \text{انیمیشن}), (15000, \text{کمدی})\}$$

با توجه به فعالیت مطرح شده پرسش مهم زیر را پاسخ می‌دهیم:

با چه شرایطی می‌توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای

هر مقدار x در این اشتراک داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

برای مثال اگر

$$f = \{(1, 2) \text{ و } (-3, 4) \text{ و } (3, 5) \text{ و } (7, -1)\}$$

و

$$g = \{(2, 1) \text{ و } (3, -1) \text{ و } (7, 2)\}$$

فرض شود با توجه به دامنه‌های دو تابع f و g :

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\}$$

$$D_g = \{2, 3, 7\}$$

اشتراک دو دامنه برابر است با

$$D_f \cap D_g = \{3, 7\}$$

پس تابع $f+g$ این گونه مشخص می‌شود:

$$f+g = \{(3, -1+5) \text{ و } (7, 2+(-1))\} = \{(3, 4) \text{ و } (7, 1)\}$$

توجه کنید:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

فعاليات

باتوجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ ، ضابطه توابع زیر را به دست آورید:

$$f_r(x) = n^r + n$$

$$f_r(x) = m^r - n - r$$

$$f_8(x) = -x^7 + x + 7$$

$$f_2(x) = x^2 + x - 2$$

$$f_v(x) = m - 1$$

$$f_A(x) = \frac{1}{x-1}$$

اگر مقادیر تابع‌های f_1 تا f_n به ازای $x = 2$ نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ

چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

$$f_9(r) = r^9 + r^8 - r - 1 = 9$$

$$f(x) + f(y) = 4$$

$$c(x) = 0$$

$$\{f_1(r) - f_2(r)\} = 2$$

$$v(r) = r - 1 \leq 1$$

$$\frac{f_Y(y)}{f_X(x)} = \frac{y+1}{y-1} \approx \frac{1}{y} \approx |z|$$

$$|P_1 - P_2|, |r^r - r - r| \leq 10$$

$$|F_{\Delta}| = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right| = 1/2$$

$$P_1(r) \times P_r(r) = \frac{r}{r+1} - (r-1)$$

$$f_v(r) = r^T + r = \bar{r}$$

$$P_A(r) = \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r}$$



دو کفه با هم برابرند $\Rightarrow \left. \begin{aligned} 9 + 9 + 9 + 1 + 0 + 1 &= 17 \\ 0 + 9 + 1 + 1 + 0 + 4 &= 17 \end{aligned} \right\}$

عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f \cap g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{i+j} = D_i \cap D_j$$

$$D_{\underline{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

توبہ گناہوں :

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$f_1(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$f_7(2) = (2) + 1 = 3$
$f_7(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$	$f_8(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$
$f_8(2) = -(2)^2 + (2) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$	$f_9(2) = (2)^2 + (2)^2 - (2) - 1 = 4 + 4 - 2 - 1 = 5$
$f_9(2) = (2) - 1 = 1$	$f_{10}(2) = \frac{1}{(2) - 1} = \frac{1}{1} = 1$

سمت چپ ترازو	سمت راست ترازو
$f_9(2) = 5$	$ f_1(2) - f_7(2) = 3 - 3 = 0 = 0$
$f_1(2) + f_7(2) = 3 + 3 = 6$	$ f_8(2) = 0 = 0$
$ f_8(2) = 0 = 0$	$f_1(2) \times f_7(2) = 3 \times 3 = 9$
$ f_7(2) - f_1(2) = 3 - 3 = 0 = 0$	$f_7(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$
$f_9(2) = (2) - 1 = 1$	$f_{10}(2) = \frac{1}{(2) - 1} = \frac{1}{1} = 1$
$\frac{f_7(2)}{f_1(2)} = \frac{6}{3} = 2$	$\frac{f_1(2)}{f_7(2)} = \frac{3}{3} = 1$
$9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$	$0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$

نتیجه می گیریم:
$f_9(2) = f_1(2) \times f_7(2)$
$f_1(2) + f_7(2) = f_7(2)$
$ f_8(2) = f_8(2) $
$ f_7(2) - f_1(2) = f_1(2) - f_7(2) $
$f_9(2) = \frac{f_1(2)}{f_7(2)}$
$\frac{f_7(2)}{f_1(2)} = f_{10}(2)$

نهیة گفته :

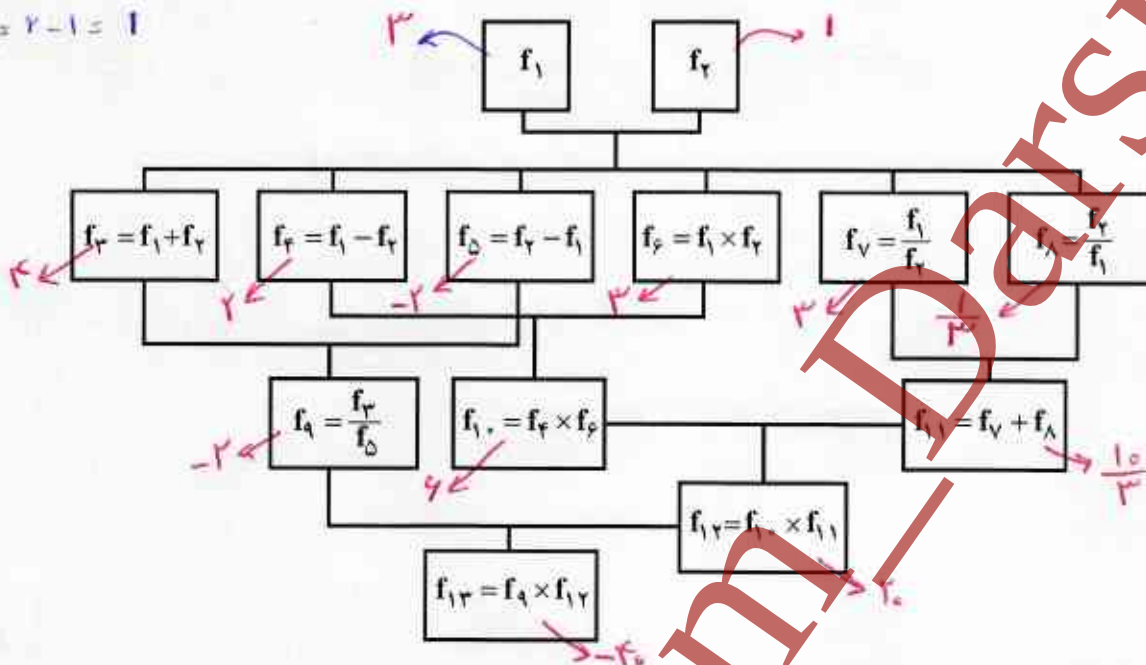
گروه ریاضی دوره دوم متوسطه و البعثه علمی ریاضی استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۱. باتوجه به ضابطه $f_1(x) = x+1$ و $f_2(x) = x-1$ درخت زیر را به ازای $x=2$ کامل کنید.

$$f_1(2) = 2+1=3$$

$$f_2(2) = 2-1=1$$



۲. اگر $f = \{(2,0), (-1,-1), (-1,3)\}$ و $g = \{(2,5), (3,-1), (-1,2)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$f+g = \{(2,5), (-1,1)\}$$

$$D_{f+g} = \{2, -1\}$$

$$f \times g = \{(2,0), (-1,7)\}$$

$$D_{f \times g} = \{2, -1\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(-1, \frac{2}{-1})\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{-1\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2,0), (-1, \frac{2}{-1})\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{2, -1\}$$

$$f-g = \{(2,-5), (-1,1)\}$$

$$D_{f-g} = \{2, -1\}$$

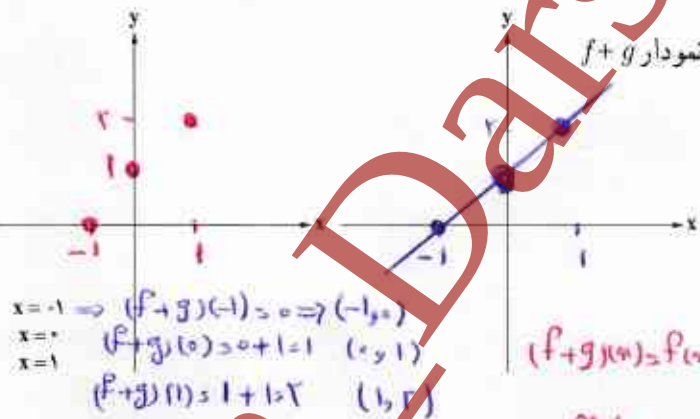
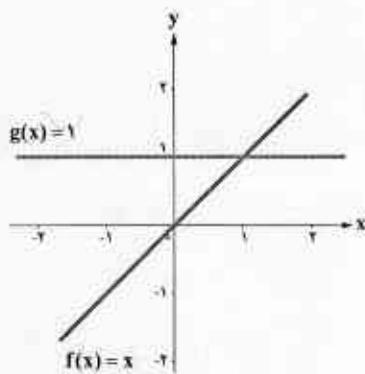
$$g-f = \{(2,5), (-1,-1)\}$$

$$D_{g-f} = \{2, -1\}$$

نیمه کننده:

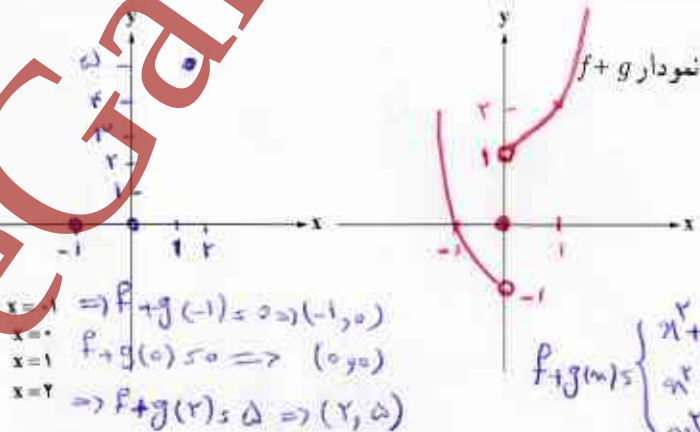
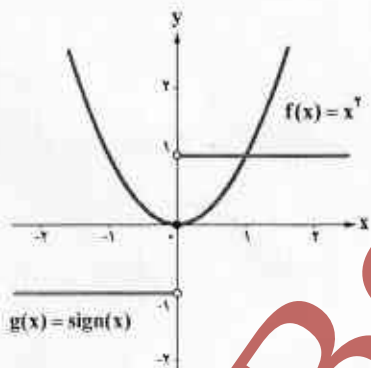
فعالیت

به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = n + 1$$

n	0	1	-1
f	1	2	0



$$f+g(n) = \begin{cases} n^2 + 1 & n > 0 \\ n^2 & n = 0 \\ n^2 - 1 & n < 0 \end{cases}$$

n	0	1	-1
f	1	2	0

نقشه کشیده:

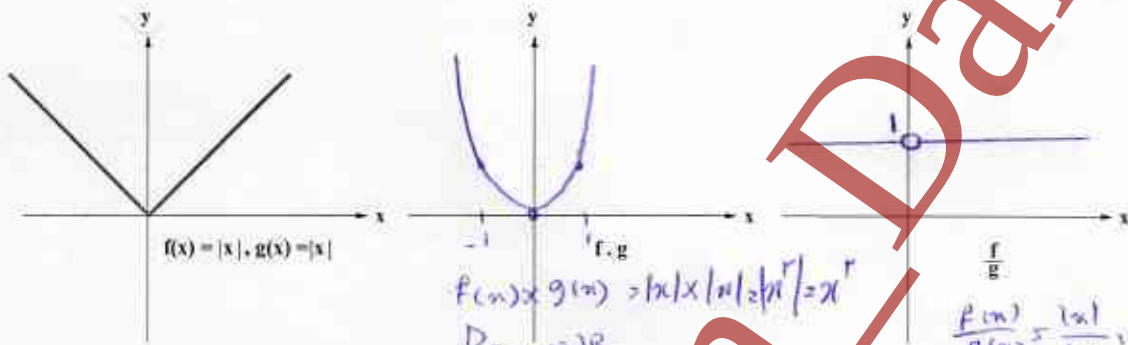
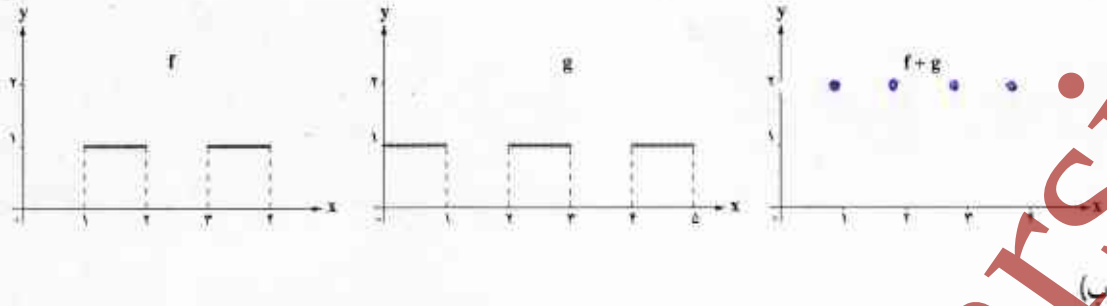
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و الگن طالبان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.
(الف)

$$D_{f \circ g} = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

۲. یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $2x^2 + 16x - 4$ و $8x + 6$ و در کارخانه B به ترتیب $x^2 + 12x - 1$ و $2x + 9$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):
الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

پایه سوال ۲ در پایین

ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟

۳. اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

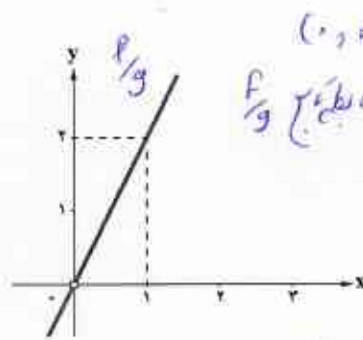
تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) = [x] + x \quad (1, 2)$ $D_s = D_f \cap D_g = \{1\}$ $s(1) = [1] + 1 = 2$	
$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad (1, -3)$ $D_q = D_h \cap D_f = \{1\}$ $q(1) = \frac{1 - 4}{1} = -3$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times x \quad (1, -3)$ $D_p = D_h \cap D_g = \{1\}$ $p(1) = (1 - 4) \times 1 = -3$	

$$D_f \cap D_h = \{h(x) = -\} = \{-\} \cap \{1\} = \{1\}$$

۱. هولدینگ از واژه لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتهای سهامی است که دارای شرکت‌های زیرمجموعه است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

پایه سوال ۲: $P(n) = R_p(n) - C_p(n) = -2n^2 + 12n - (8n + 6) = -2n^2 + 4n - 6$
 $P(n) = R_p(n) - C_p(n) = -n^2 + 12n - (2n + 9) = -n^2 + 10n - 9$
 $P(n) = A + B = (-2n^2 + 4n - 6) + (-n^2 + 10n - 9) = -3n^2 + 14n - 15$
 پایه سوال ۳: تابع سود شرکت هولدینگ به همین است و ماکزیمم مقدار آن این است
 $n = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2(-3)} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3} \approx 2.33$
 ۳ تن کاشی

۴. اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید؟



$$(0,0) \quad (1,2) \Rightarrow m = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$f/g \text{ ضابطه } f/g(n) = 2n \quad n \neq 0 \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\frac{f}{g}(n) = \frac{f(n)}{g(n)} \Rightarrow 2n = \frac{n^2}{g(n)}$$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \quad g \text{ ضابطه}$$

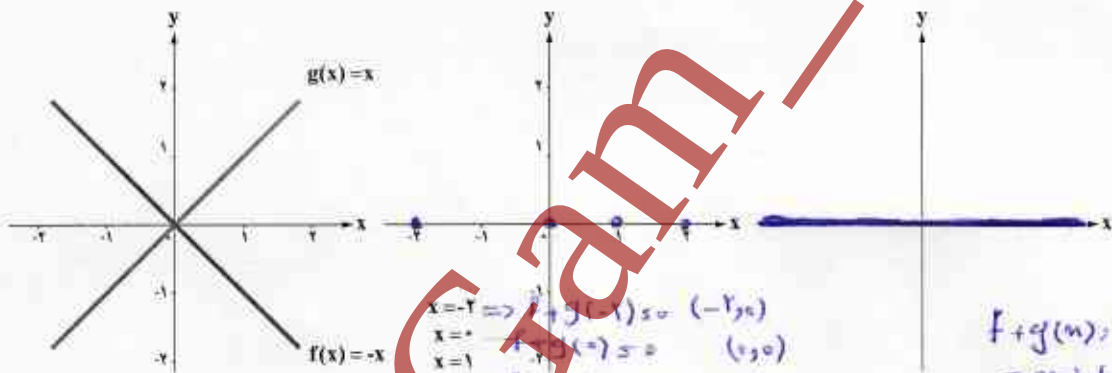
$$g(n) = \frac{n}{2}$$

۵. به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس

نمودار کلی تابع $(f+g)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$



$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow f+g(-2) = 0 & (-2,0) \\ x = -1 &\Rightarrow f+g(-1) = 0 & (-1,0) \\ x = 1 &\Rightarrow f+g(1) = 0 & (1,0) \\ x = 2 &\Rightarrow f+g(2) = 0 & (2,0) \end{aligned}$$

$$f+g(n) = f(n)+g(n) = n+(-n) = 0$$

$$\begin{aligned} f+g(n) &= f(n)+g(n) \\ &= n+(-n) = 0 \\ \Rightarrow f+g(n) &= 0 \end{aligned}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

خواندنی!

چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می کنیم؟

در آثار ریاضی اسلامی برخی از اصطلاحات مانند نماد استفاده می شدند. یکی از این اصطلاحات کلمه «شی» است که آن را به جای مجهول به کار می بردند. اولین ترجمه کتاب های ریاضی دوره اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مشکل علمای قرون وسطایی اسپانیا که وظیفه شان ترجمه چنین متونی بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمه «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود. به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «sh» وجود ندارد. صدای «sh» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل χ یا «کای» جایگزین صدای «ش» یا «sh» کردند و بعدها که این متون به زبان های رایج تر اروپایی ترجمه شدند، حرف یونانی «کای» χ ، با حرف لاتین x جایگزین شد.



خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین نیز ساده به نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک پروژه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تمرکز بر کم‌شدن میزان محصول شکل گرفت؛ چنان‌که در همین بازار و سود کشاورزان خللی به وجود نیاید. برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود:

– بهترین زمان کاشت

– مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌هایی کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی بستر کاشت مهیا نیست)
نقطه عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند که اطلاعات مهم و تعیین‌کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی نوین به شکل‌گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

مثالی دیگر در این زمینه طراحی مدلی برای استفاده از کودهای شیمیایی است. در حال حاضر به کمک ماشین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود شیمیایی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفاده بی‌رویه کود شیمیایی جلوگیری شود که نتیجه مستقیم و مفید آن کمتر شدن چشمگیر نترات در منابع آبی؛ به‌ویژه آب‌های کشاورزی است.

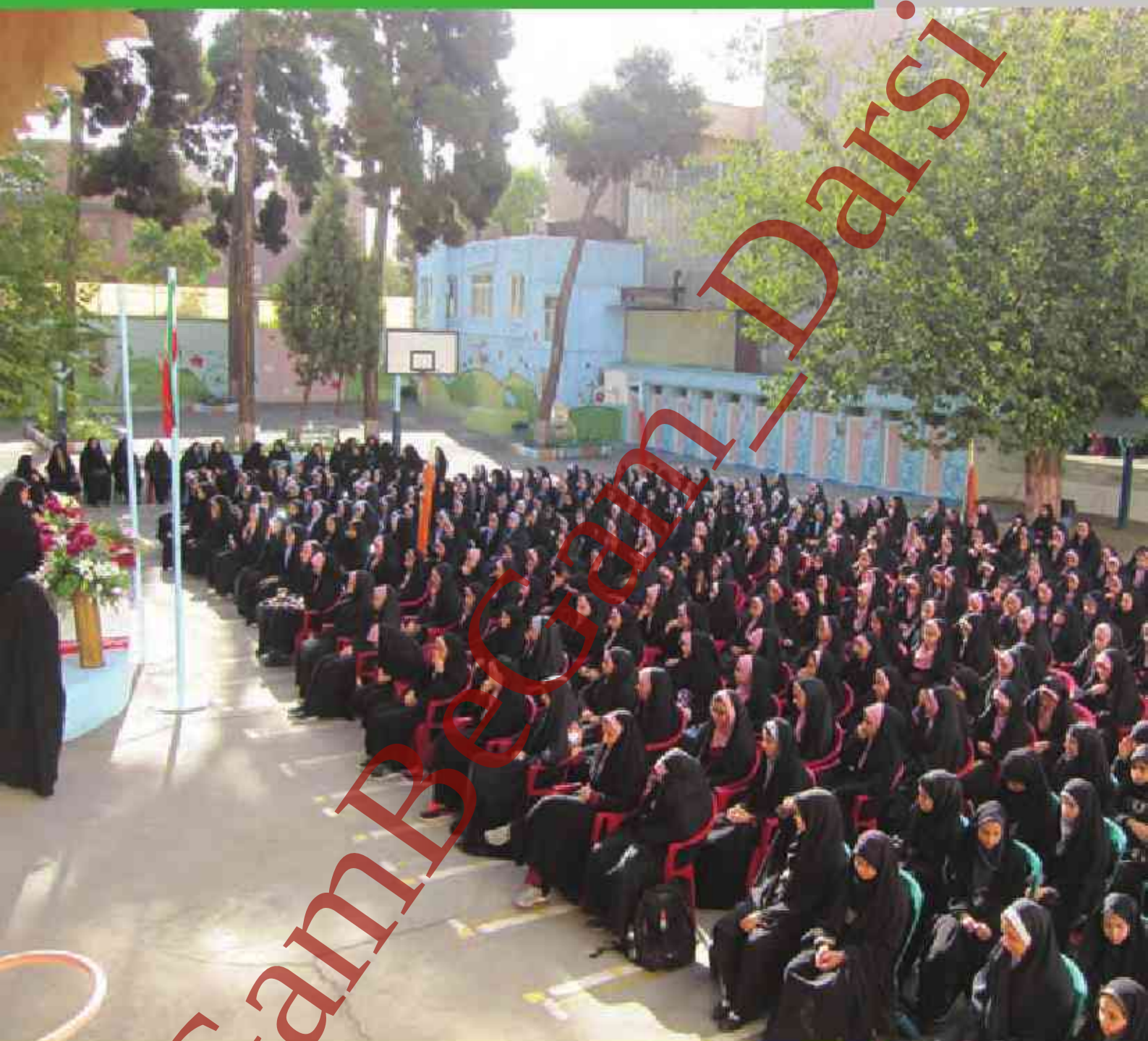
فصل ۳- آمار

درس ۱

شماره های آماری

درس ۲

سوی های زمانی



در دوره متوسطه تقریباً دانش آموزان دختر ۵۱٪ از کل دانش آموزان این دوره را تشکیل می دهند.

$$\mu = \frac{50 + 55 \times 10 + 60 \times 20 + 65 \times 30 + 70 \times 40 + 75 \times 50 + 80 \times 60 + 85 \times 70 + 90 \times 80 + 95 \times 90 + 100 \times 100}{10} = \frac{9270}{10} = 927$$

$322,33 - 287,5 = 34,83 \rightarrow 34,83 \times 3 = 104,49$ (کاهش شماره پرداخت ۱)
 $287,5 - 250 = 37,5 \rightarrow 37,5 \times 4 = 150$ (کاهش شماره ۲)

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

کار در کلاس

در فعالیت قبل خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کنید. هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند. به کدام یک از کارکنان چه میزان یارانه بدهند که خانواده او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

$387,5 = \frac{775}{2}$ (نصف میانه)
 $441,428 = \frac{882,856}{2}$ (نصف میانگین)

کار در کلاس

خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان (۱/۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

- در فعالیت قبل چند خانوار درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.
- اگر درآمد یک خانواده سه نفری در یک ماه دو میلیون تومان باشد، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟
- متوسط درآمد ماهیانه یک خانواده سه نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا شخص فقیر نباشد؟
- در فعالیت قبل میزان یارانه را با خط فقر بین المللی برای هر یک از کارکنان محاسبه کنید.
- چه موقع دو روش محاسبه خط فقر تفاوت زیادی بهم دارند؟ چرا؟ اگر داده دوره امتحان داشته باشیم

شناختن یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.

شناختن آنها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده ها را خلاصه می کنند؛ بلکه واقعیت های مفیدی را از جامعه به ما نشان می دهند و امکان مقایسه را فراهم می کنند. مثلاً خط فقر مشخصی است که درآمد افرادی را که حداقل درآمد برای زندگی را ندارند، مشخص می کند. این شناختن به ما کمک می کند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست های دولت ها برای فقرزدایی را رصد کنیم.

جایگاه ابتدای اتومبیل، چراغ های هشدار، سرعت سنج، چراغ های هشدار، خطر، دوربین موتور



دشبورد خودرو که از میان انبوه اتفاقات داخل خودرو برخی از مهم ترین شاخص ها را به راننده نشان می دهد.

دما سنج آب، چراغ هشدار، نشانگر میزان سوخت، چراغ، سطح نمایش چرخ، آمپر نمایش مسافت طی شده، دمای بالای آب، هشدار حداقل میزان سوخت، مسافت صرف وضعیت دنده درگیر یکس، نور پست زمینه، چراغ انتخاب کیلومتر شمار، مسافت

۱- اساس این تعریف خط فقر (Poverty line) به دلیل سادگی آن استفاده شده است. دولت ها از تعریف بسیار دقیق تر استفاده می کنند. در این کتاب منظور از خط فقر همین تعریف است.

۲- معمولاً شناختن شاخص ها (Indicators) بر اساس چند آماره محاسبه می شوند. هدف ما تجلیل و تفسیر آنهاست.

۱	$\frac{1000000}{3 \times 30} \approx 11111,11$	۶	$\frac{3000000}{\sqrt{30}} \approx 142857,14$
۲	$\frac{2000000}{4 \times 30} \approx 16666,67$	۷	$\frac{2000000}{3 \times 30} \approx 22222,22$
۳	$\frac{1000000}{1 \times 30} \approx 33333,33$	۸	$\frac{1000000}{4 \times 30} \approx 8333,33$
۴	$\frac{2000000}{5 \times 30} \approx 13333,33$	۹	$\frac{2000000}{2 \times 30} \approx 33333,33$
۵	$\frac{3000000}{1 \times 30} \approx 100000$	۱۰	$\frac{1000000}{1 \times 30} \approx 33333,33$

می‌خواهیم با پرداخت بارانه ثابت به خانوارها تعداد کسانی را که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، کاهش دهیم. اگر بوجه این کار ثابت باشد، به نظر شما آن را بین همه خانوارها تقسیم کنیم یا خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر داشته‌اند؟ پاسخ خود را برای خط فقر بین المللی نیز بیان کنید.

فرض کنید هدف ما کنترل فقر یا شاخص بین المللی آن باشد و تصمیم گرفته‌ایم که به خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر دارند بارانه دهیم. آیا با این تصمیم به هدف خود رسیده‌ایم؟ برای پاسخ دقیق‌تر به این سؤال نیاز به معرفی شاخص دیگری داریم. در ادامه نمودار پراکنش نکات شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی مناطق شهری در طی ۵ سال متوالی رسم شده است. این شاخص بر اساس متوسط هزینه ۳۰۰ نوع کالا، خوراک و خدمات برای همراه محاسبه می‌شود. از جمله می‌توان به هزینه‌های مسکن، پوشاک، سلامت، غذا، حمل و نقل و تحصیل اشاره کرد. البته موارد ذکر شده دارای اهمیت یکسانی در محاسبه نیستند.



این شاخص نسبت به یک سال پایه محاسبه می‌شود که در نمودار عدد ذکر شده درصد تغییرات نسبت به سال پایه ۱۳۹۰ است.

۱= CPI: Consumer Price Index

شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است. این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

مثال

به عنوان مثال اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰ و ۵۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسند و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبه شاخص به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{(1500 \times 200) + (70000 \times 80)}{(1000 \times 200) + (500 \times 80)} \times 100 = \frac{590000}{420000} \times 100 = 1405$$

استهوارها (۱۰۰ × ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰)

کار در کلاس

- در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات محور طول‌ها نشان دهنده سال و محور عرض‌ها نشان دهنده شاخص است.
- شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.
- به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان دهنده افزایش هزینه اقلام خوراکی و به مصرف می‌باشد.
- شاخص بهای کالاها و خدمات بر اساس تعداد در نظر گرفته می‌شود.
- اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟ این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد. حال به سؤال قبل باز می‌گردیم. آیا پرداخت یا وانه ثابت ملی سال‌های آتی (مثلاً ۴۵۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می‌تواند در همه این مدت درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟

این شاخص، سطح قیمت‌ها را در یک سال اندازه می‌گیرد.

خواندنی

در اقتصاد، یک جریان چرخشی پول و کالاها و خدمات و عوامل تولید وجود دارد. به عنوان مثال، وقتی آقای شکوهی به عنوان طراح در یک شرکت سازنده تزیینات داخلی ساختمان کار می‌کند، درآمدی به دست می‌آورد که می‌تواند آن را برای خرید کالاها و خدمات، خرج کند. آقای شکوهی در طول سال، درآمدش را صرف خرید کالاها و خدمات گوناگونی می‌کند. او وقتی به فروشگاه می‌رود، ۱۰۰ هزار تومان با خود می‌برد و مجموعه‌ای از کالاهای مورد نیاز خانواده‌اش را می‌خرد. فرض کنیم خریدهای اینها باشند: شیر، تخم مرغ، برنج، گوشت، چای و شکر. او همچنین بنزین برای خودرو سواری‌اش می‌خرد و هزینه اجاره خانه و قبض آب و برق و گاز و تلفن را می‌پردازد. او در این سال، یک تلویزیون می‌خرد به یک مسافرت می‌رود، و یک عمل جراحی هم انجام می‌دهد.

هر یک از خانوارها و افراد جامعه در طول سال، هزینه‌هایی این چنین دارند. هزینه‌های همه خانوارها در هر سال، شاخصی به نام «شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی یا شاخص قیمت مصرف کننده» را می‌سازد که برای کل اقتصاد محاسبه می‌شود. این شاخص، سطح قیمت‌ها در یک سال را اندازه می‌گیرد.

شاخص بهای کالاها و خدمات نشان می‌دهد که با بولمان جقدر می‌توانیم خریده کنیم، یا به اصطلاح، «قدرت خرید» بولمان جقدر است. هرچه قیمت‌ها افزایش یابند، «قدرت خرید» بولمان کاهش می‌یابد.

آقای شکوهی در سال بعد نیز به فروشگاه می‌رود و همان مبلغ ۱۰۰ هزار تومان را خرج می‌کند. او متوجه می‌شود که این بار نمی‌تواند همه کالاهای قبلی را با همان ۱۰۰ هزار تومان بخرد. علت این موضوع، افزایش قیمت کالاها و خدمات در طول زمان است. در واقع، «هزینه زندگی» او افزایش یافته است. او نه تنها وقتی که به فروشگاه می‌رود، باید پول بیشتری بپردازد، بلکه برای پر کردن باک بنزین خودرو یا برای یک شب اقامت در شهری دیگر باید پول بیشتری بپردازد.

عبرمسطح قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می‌نامند.

تورم، یکی از مهم‌ترین مفاهیم اقتصادی است که شما به آسانی می‌توانید درک کنید. تورم بر زندگی تک‌تک ما اثرگذار است. اقتصاددانان و آماردانان با کمک یکدیگر، میزان تورم یا تغییرات سطح قیمت‌ها را با استفاده از «شاخص بهای کالاها و خدمات» محاسبه می‌کنند. برای این کار، شاخص بهای کالاها و خدمات یک سال را با سال‌های قبل مقایسه می‌کنند. به نظر شما رابطه بین تورم و شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

از تقسیم تفاضل شاخص در سال مورد نظر و شاخص در سال پایه بر عدد ۱۰۰، افزایش قیمت‌ها به درصد در فاصله بین سال پایه و سال مورد نظر به دست می‌آید.

$$\text{تورم} = \frac{(\text{شاخص بهای گوشت و نان در سال پایه}) - (\text{شاخص بهای گوشت و نان در سال مورد نظر})}{100} = \frac{120/5 - 100}{100} = 20/5 = 4 = 40\%$$

کار در کلاس

از مدرسه به خانه برمی‌گشتم و داشتم از کنار دفتر روزنامه‌فروشی رد می‌شدم که جمله درشت یکی از روزنامه‌ها نظرم را جلب کرد: «در صورتی که رشد اقتصاد سالانه یک درصد باشد، در سال ۱۴۰۰ نرخ (شاخص) بیکاری تحصیل‌کردگان آموزش عالی به ۴۸ درصد خواهد رسید».

با خودم گفتم پس در زمانی که ما قرار است شاغل شویم، احتمال یافتن شغل پنجاه‌پنجاه است. تا به حال به این مسئله توجه نکرده بودم و فکر می‌کردم اگر درس بخوانم، شغل خوبی خواهم داشت و می‌دانستم درس خواندن سخت است! اما نسبت به کار پیدا کردن خیلی راحت‌تر است.

این جمله را با معلم درس آمار در میان گذاشتم. او گفت: «نرخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال». این نرخ با رشد اقتصادی پنج درصد نیز محاسبه شده و اگر رشد اقتصادی ۵ درصد برای کشور به دست آید، نرخ بیکاری تحصیل‌کردگان به ۳۶ درصد می‌رسد. سپس او با یک توضیح و چند سؤال، نظرم را درباره همه ماجرا عوض کرد.

بیکار به فردی بالای ۱۶ سال می‌گویند که به‌طور موقت بیکار شده یا در جست‌وجوی شغل باشد یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد. این تعریف برای تمام کشورها یکسان است.

آیا به نظر شما شاخص بیکاری برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی یکسان است؟ در هر رشته چگونه؟

به دلیل مشخص نکردن تعداد خانوارها قابل حل نیست * ۶۱

تمرین

۱. اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵۰۰۰۰ ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان شرکت الف چقدر باشد تا هیچ کارمندی در این شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می کنیم؟

۲. خانواده ای شش نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین المللی درآمد ماهانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشد؟ حداقل ۲۲۵ دلار باشد. $225 \times 30 \times 1.25 = 8437.5$ دلار

۳. در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جوای کار می باشند. الف) این بیکاری در این منطقه چقدر است؟ تقریباً ۱۶.۷ درصد

ب) حداقل چند سال در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟ $1200 \times 0.05 = 60$ نفر

۴. خانواده آقای صالحی در فروردین ماه سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت ها داشته است. در همان تاریخ هزینه ماهانه خوراکی ها و آشامیدنی های این خانواده دویست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به طور تقریبی محاسبه کنید. فرمول در سوال ۷

الف) هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳ $500 \times 1.05 \times 1.05 \times 1.05 = 576.75$ تومان

ب) هزینه ماهانه خوراکی ها و آشامیدنی های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵ $200 \times 1.05 \times 1.05 \times 1.05 \times 1.05 \times 1.05 = 260.62$ تومان

۵. نماتوب یا شاخص توده بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد.

جدول زیر اطلاعات خانواده صالحی را نشان می دهد.

افراد خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۲
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارند؟ $18.5 < BMI < 25$

۶. در موقع خرید کتاب های داستان معمولاً به سطح کتاب برای رده سنی مشخص شده، توجه می کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن به خصوص همیشه یکسان است؟ از زبان آنها کیفی است یا کمی؟

۴) $750 = \frac{500 \times 1.50}{2}$ هزار تومان

۵) $455 = \frac{450 \times 1.02}{2}$ هزار تومان

۶۱

۱) $70000 = \frac{150000}{2}$ تومان

۲) $35000 = \frac{70000}{2}$ تومان

۳) $70000 = \frac{140000}{2}$ تومان

۴) $70000 = \frac{140000}{2}$ تومان

* با فرض اینکه تومان ۳۵۰۰۰۰ درآمده ماهیانه یک خانواده ۵ نفره است سؤال راحل مسأله

خوانایی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

یکی از شاخص های خوانایی که سال های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می زند، به صورت زیر تعریف شده است.

$$\text{شاخص پایه آموزش} = \left(\frac{1}{4} \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشووار»}) \right)$$

که منظور از کلمات «دشووار» کلمات دو هجا بدون در نظر گرفتن اسمی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص عددی بین

۱۱ تا ۱۸ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است.

مثلاً برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب دانش آموزان چه پایه ای است؟

$$[(0.2 + 8) \times 0.25] = 2.1$$

پاسخ: این کتاب مناسب دانش آموزانی است که پایه ۲ را به پایان رسانده اند.

ب) مزایا و محدودیت های این شاخص چیست؟

پاسخ: استفاده از این شاخص ساده است. یا این حال، فرض می کند که کلمات بزرگ تر و جملات طولانی تر باعث سخت شدن

متن می شوند، اما یک نویسنده چیره دست می تواند با کلمات و جملات دیگری باعث آسان شدن متن شود.

ج) همان گونه که متوجه شده اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.

۷. هزینه های زندگی خانواده آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و

خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید. (طبق جدول صفحه ۸۵)

	۱۳۹۰	مهر ماه ۱۳۹۳	دی ماه ۱۳۹۶
هزینه خوراکی ها و آبنامیدنی ها (بر حسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{210 \times 225}{100} = 472.5$	$\frac{210 \times 277}{100} = 581.7$
هزینه کل (بر حسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{850 \times 202}{100} = 1717$	$\frac{850 \times 255}{100} = 2167.5$

۸. شاخص بوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۹۰ برابر ۲ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک

دندان کشیده شده، یک دندان بوسیده و یک دندان پُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است. این شاخص را در

سال ۱۳۹۵ تفسیر کنید. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۹۰ نسبت به سال ۱۳۹۵

چند درصد کاهش داشته است؟

شاخص ۶ نشان دهنده ۲ دندان کشیده شده و ۲ دندان بوسیده شده و ۲ دندان پُر شده است.

این شاخص در سال ۱۳۹۵ نسبت به سال ۱۳۹۰ دو برابر شده است.

این شاخص در سال ۱۳۹۵ نسبت به سال ۱۳۹۰ ۶۲٪ کاهش یافته است.

درس ۲

سری های زمانی

مهر

$$\bar{x}_T = \frac{15 + 20 + 30 + 35 + 30 + 20}{6} = \frac{140}{6} \approx 23.3$$

$$S = \frac{(15 - 23.3)^2 + (20 - 23.3)^2 + 3(30 - 23.3)^2 + (35 - 23.3)^2}{6} = \frac{134.19 + 44.19 + 124.47 + 147.89}{6} = \frac{449.14}{6} \approx 74.86$$

$$s = \sqrt{74.86} \approx 8.65$$

به نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب تر است؟

دمای هوای شهر محل زندگی ما در هفته آینده.

میزان آلودگی های شهر محل زندگی ما در ماه آینده.

ترجیح کاری در زمان اخذ دیپلم.

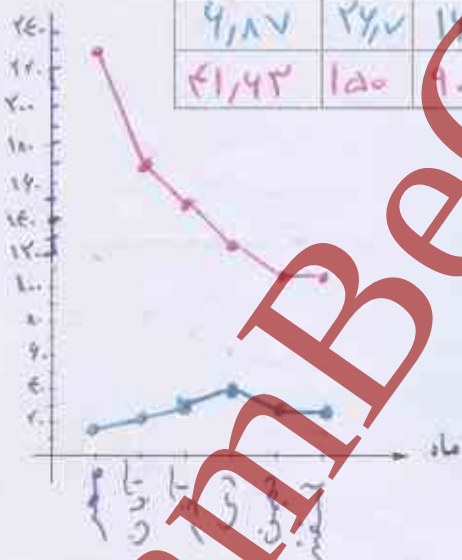
آیا به نظر شما مجموعه ای از داده های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع آوری شده باشند، می تواند پیش بینی

خوبی برای تصمیم گیری ما باشند؟

فعالیت

میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر آ و ب بر حسب میلی متر در جدول زیر آمده است.

	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر آ	۱۵	۲۰	۳۰	۳۵	۳۰	۲۰	۱۴۰	۲۳.۳	۸.۶۵
شهر ب	۲۳	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۱۲	۹۰	۱۵	۴.۱۴



• جدول را کامل کنید.

• میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

• نمودار پراکنش نگرش هر دو شهر را بر حسب ماه های سال با یک مقیاس

بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص شدن

هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

• کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

دانش آموزان
با این اسم
آشنا هستند

مهر

$$\bar{x}_T = \frac{23 + 17 + 15 + 13 + 10 + 12}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

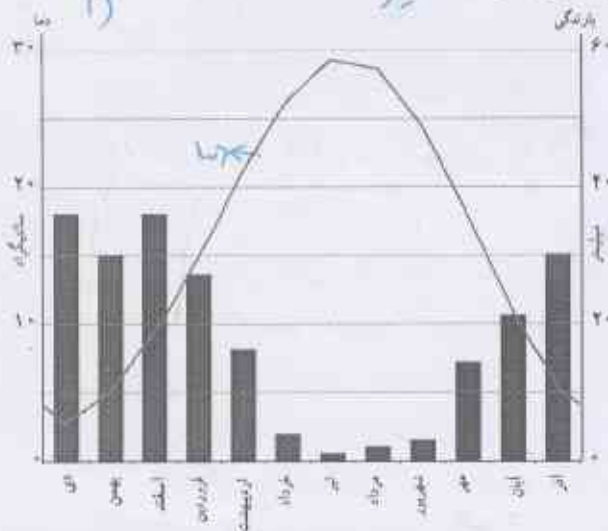
$$S = \frac{(23 - 15)^2 + (17 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (13 - 15)^2 + 2 \times (10 - 15)^2}{6} = \frac{64 + 4 + 0 + 4 + 50}{6} = \frac{118}{6} \approx 19.67$$

$$s = \sqrt{19.67} \approx 4.44$$

سج چنبر

حال نمودار پراکنش نگاشت دما و نمودار میله‌ای بارندگی‌های همان دو شهر را با مقیاس‌های متفاوت برای یک سال به‌ویژه در یک محور رسم کرده‌ایم.

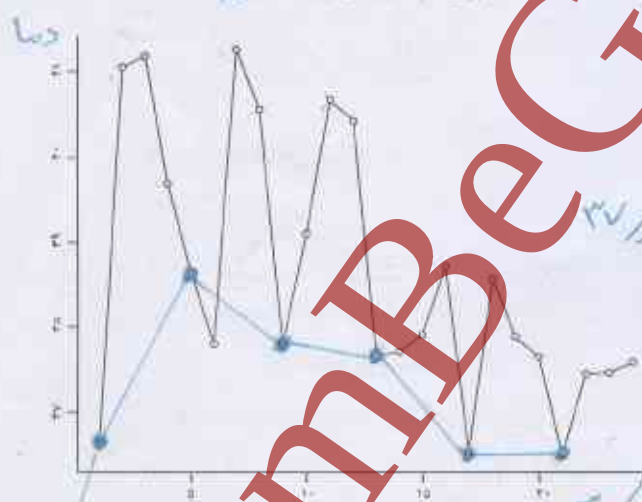
- درجه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟ برای شهر زمستانی برابر شهر یابیز
- متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه‌های سال به همین نحو است؟ خنبر



سری زمانی: مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.
نمودار سری زمانی: پراکنش نگاشت سری زمانی که داده‌ها را با یاره خط‌هایی در طول زمان به هم متصل می‌کند.

کار در کلاس

روز: ۲۷
انکال بر حسب محورهای معلوم نیست



سری زمانی زیر نشان‌دهنده ۶ روز درجه حرارت یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درماتس با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.

- هر روز چند درجه حرارت خوانده شده ثبت شده است.
- درجه حرارت بیمار در لحظه بستری شدن چند درجه است؟
- پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟ روز ششم به حالت طبیعی شده است.
- اگر اولین زمان ثبت درجه حرارت ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام یک جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد؟

درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه گیری شده است.



- بیشترین دمای بدن چقدر است؟ تقریباً ۳۷٫۲
- کم - زیاد - کم
- دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.
- آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟ بله
- این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا نزولی، تناوبی)

خواندنی

معادله منحنی دمای بدن انسان سالم در طی روز تقریباً برابر است با

$$y = 5 \left(\left(\frac{1}{8} \right) \sin^2 \left(\left(\frac{\pi}{12} \right) x - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{98}{6} - 32 \right) / 9$$

که مقدار $x = 0$ دمای بدن در ساعت ۱۲ ظهر است.

تکرار یک ویژگی را در سری زمانی الگو می نامند. بازنمایی الگو به ما کمک می کند که چنین معادله هایی را برای پدیده های طبیعی بیابیم.

تپه کشنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن طلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

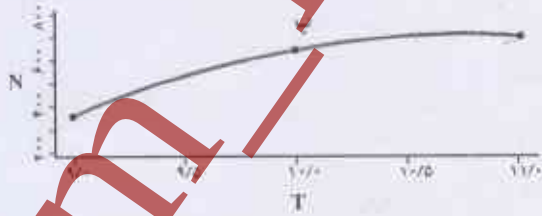
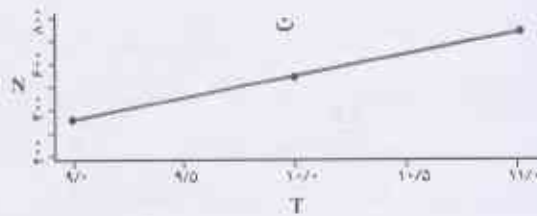
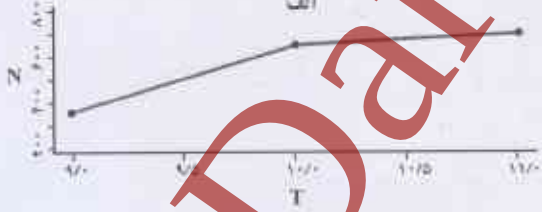
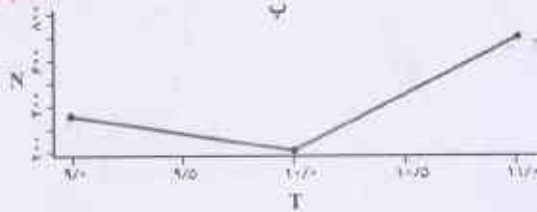
فعالیت

در یک مرکز خرید تعداد مشتری ها بین ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

ساعت (T)	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
تعداد مشتری (N)	۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰

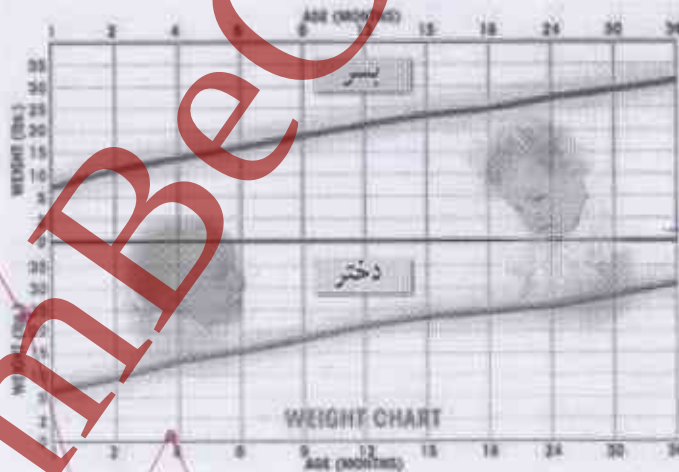
نمودار سری زمانی را رسم کنید.

می خواهیم تعداد مشتری های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به نظر شما کدام یک از نمودارهای زیر واقعی تر است؟ (ب) هر کدام که به نظر خودتان مناسبتر باشد انتخاب کنید.



اگر فرض کنیم تعداد مشتری ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است، به سوال قبل پاسخ دهید.

درون یابی تخمین داده های بین داده های ثبت شده است



نمودار متوسط وزن نوزادان پسر و دختر یک تا ۳ ساله

۶۶

اشغال: نمودار واضح نیست

نویسندگان:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن طلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$f(9) : 200(9) + h = 2500 \Rightarrow h = 2500 - 1800 \Rightarrow h = -1450 \Rightarrow f(x) = 200x - 1450$

کار در کلاس

نمود مشتری



می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون‌یابی کنیم. فرض می‌کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصله زمانی تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

- معادله خط بین دو ساعت (۹, ۲۵۰) و (۱۱, ۷۵۰) را به دست آورید.
- خط را رسم کنید. $y = 200(10) - 1450 = 2000 - 1450 = 550$
- مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟ ۵۵۰
- این مقدار به درون‌یابی کدام یک از شکل‌های فعالیت قبل نزدیک‌تر است؟ **شکل (ت)**
- اگر مفادیر داده‌های واقعی را به صورت ساعتی جمع‌آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است، خطای درون‌یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟ N نشان‌دهنده تعداد مشتری‌ها و T نشان‌دهنده زمان است. (خطا برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون‌یابی آن).
- خطای درون‌یابی بقیه نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.



درون‌یابی که به وسیله یک یاره خط انجام شود، درون‌یابی خطی است.



توجه کنید:

گروه ریاضی دوره ی دهم متوسطه و انجمن دانشمندان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

نمودار شاخص قیمت واقعی و اسمی بورس تهران در ماه‌های گذشته، رفتار این شاخص در آینده چگونه خواهد بود؟

↓
اشکال نمودار واضح نیست

$$** m = \frac{19 - 12}{5 - 3} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$f(x): 3.5(x) + h = 12 \Rightarrow h = 12 - 10.5 \Rightarrow h = 1.5$$

$$f(x) = 3.5x + 1.5$$

فعالیت

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است

سال	۱	۲	۳	۴	۵
فروش	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹

• سری زمانی را رسم کنید.

• فروش در سال هفتم را حدس بزنید. ۲۷

• میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.

• یک خط از نقطه میانگین ها به نقطه (۵, ۱۹) وصل کنید.

• معادله خط را به دست آورید.

• اگر به جای ۵ در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا می توان این مقدار را به عنوان تخمین فروش

$$y = 3.5(6) + 1.5 = 21 + 1.5 = 22.5$$

در سال آینده تصور کرد. بله

• برون یابی تخمین داده های بعد یا قبل از داده های ثبت شده است.

در فعالیت قبل مقدار عدد به دست آمده در سال ششم برون یابی مقدار فروش است.

تمرین

۱- کدام یک از داده های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در "۱۰ سال گذشته". ۷. مناسبت زمانی منظم است.

(ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازار می کند.

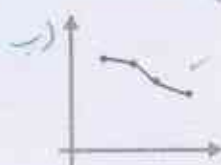
(ج) تعداد ساعاتی که در معرض تور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی. X.

۲- اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت برون یابی و برون یابی خطی بهتری امکان پذیر است؟ پاسخ

خود را توضیح دهید.

• عوامل زمانی منظمی
• بیان شده است

• شکل های الف و ب - چون تقریباً روی یک خط تغییر میکنند و تغییرات ناگهانی ندارند.



۶۸
• امکان: معتبر است. شکل ها اسم نزاری شود.

جواب تمرینات صفحه ۶۹ در صفحات بعدی است

۳- یک دهه دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته‌شده روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

ج) تعداد بطری‌های فروخته‌شده دوشنبه از هفته دوم را برون‌یابی کنید.

۴- تعداد گل‌های زده‌شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد گل‌ها	۳۰	۲۷	۳۲	۳۵	۳۵	۲۸	۳۵

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفته ۳۰ام را برون‌یابی کنید.

۵- میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹/۵	۲۹	۳۸/۵	۴۸	۵۸	۶۷

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.

۶- تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) سری زمانی آن را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

ج) معادله خطی را که نقطه (۲۱ و ۱۰) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

د) با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر را در سال یازدهم در جهان برون‌یابی کنید.

ه) اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟

۷- نرخ تورم در ایران بین سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

نوبه گفته:

$$m = \frac{25 - 1}{7 - 1} = \frac{14}{6}$$

$$\frac{14}{6}(1) + h = 1 \Rightarrow$$

$$h = 1 - \frac{14}{6} \Rightarrow h = \frac{6 - 14}{6} \Rightarrow h = -\frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{14}{6}x + \frac{4}{3}$$

$$f(2) = \frac{14}{6}(2) + \frac{4}{3} = \frac{28}{3} + \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$f(3) = \frac{14}{6}(3) + \frac{4}{3} = \frac{42}{3} + \frac{4}{3} = \frac{46}{3}$$

$$f(4) = \frac{14}{6}(4) + \frac{4}{3} = \frac{56}{3} + \frac{4}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

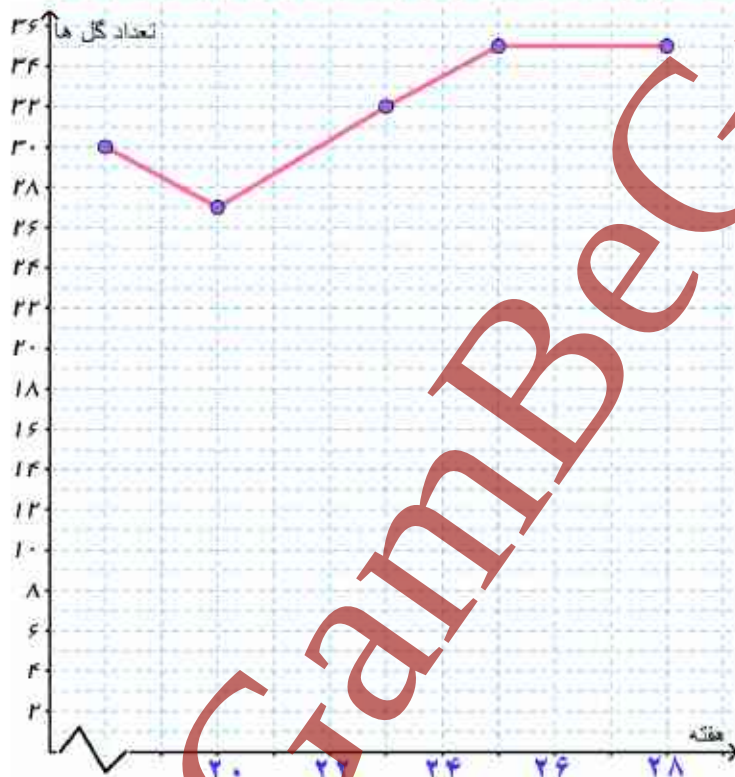
$$\bar{y} = \frac{1 + 11 + 19 + 25}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

$$m = \frac{25 - 14}{5 - 3} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\frac{11}{2}(3) + h = 25 \Rightarrow h = 25 - \frac{33}{2} \Rightarrow h = \frac{50 - 33}{2} \Rightarrow h = \frac{17}{2}$$

$$f(x) = \frac{11}{2}x + \frac{17}{2} \Rightarrow f(1) = \frac{11}{2}(1) + \frac{17}{2} = \frac{11 + 17}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

تعداد بطری های دو شنبه هفته دوم



تمرین 4

$$\bar{x} = \frac{20 + 22 + 24 + 26 + 28}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$\bar{y} = \frac{30 + 27 + 32 + 35 + 35}{5} = \frac{159}{5} = 31.8$$

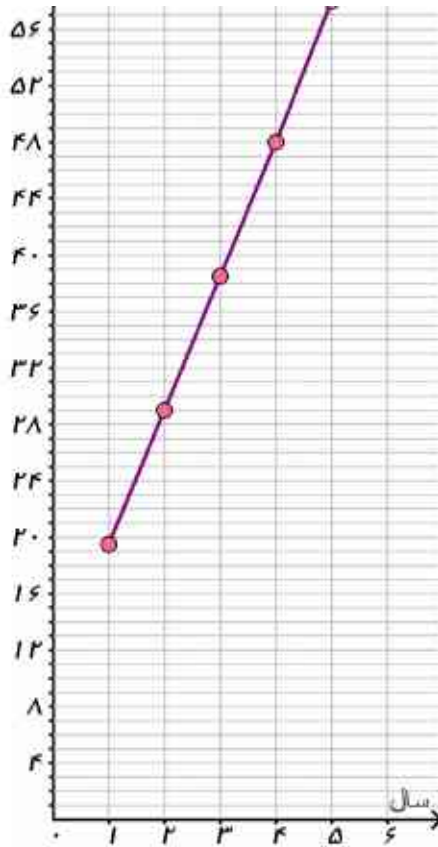
$$m = \frac{35 - 31.8}{28 - 24} = \frac{3.2}{4} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}(28) + h = 35 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{112}{5} + 35 \Rightarrow h = \frac{-112 + 175}{5} \Rightarrow h = \frac{63}{5}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{63}{5}$$

$$f(30) = \frac{4}{5}(30) + \frac{63}{5} = \frac{120 + 63}{5} = \frac{183}{5} = 36.6$$



$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{19.5+29+38.5+48+57.5+67}{6} = \frac{290}{6}$$

$$m = \frac{67 - \frac{290}{6}}{6 - \frac{21}{6}} = \frac{6.2 - 48.3}{3.5 - 3.5} = \frac{142}{10}$$

$$\frac{142}{10}(6) + h = 67 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{142}{10} + 67 \Rightarrow h = \frac{-142 + 670}{10} \Rightarrow h = \frac{528}{10}$$

$$f(x) = \frac{142}{10}x + \frac{528}{10}$$

$$f(7) = \frac{142}{10}(7) + \frac{528}{10} = \frac{994 + 528}{10} = \frac{1522}{10} \approx 152.2$$



$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\bar{y} = \frac{30+28+29+23+20+16+21+25+16+21}{10} = \frac{229}{10} = 22.9$$

$$m = \frac{21 - 22.9}{10 - 5.5} = \frac{-1.9}{4.5} = -\frac{19}{45}$$

$$-\frac{19}{45}(10) + h = 21 \Rightarrow h = 21 + \frac{190}{45} \Rightarrow h = \frac{945 + 190}{45} \Rightarrow h = \frac{1135}{45}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{19}{45}x + \frac{1135}{45}$$

$$f(11) = -\frac{19}{45}(11) + \frac{1135}{45} = \frac{-209 + 1135}{45} = \frac{926}{45} \approx 20.58$$

$$E = |20.58 - 25| = 4.42$$

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را ده سال در میان رسم کنید.

ب) داده‌های را با استفاده از قسمت قبل درون‌یابی کنید.

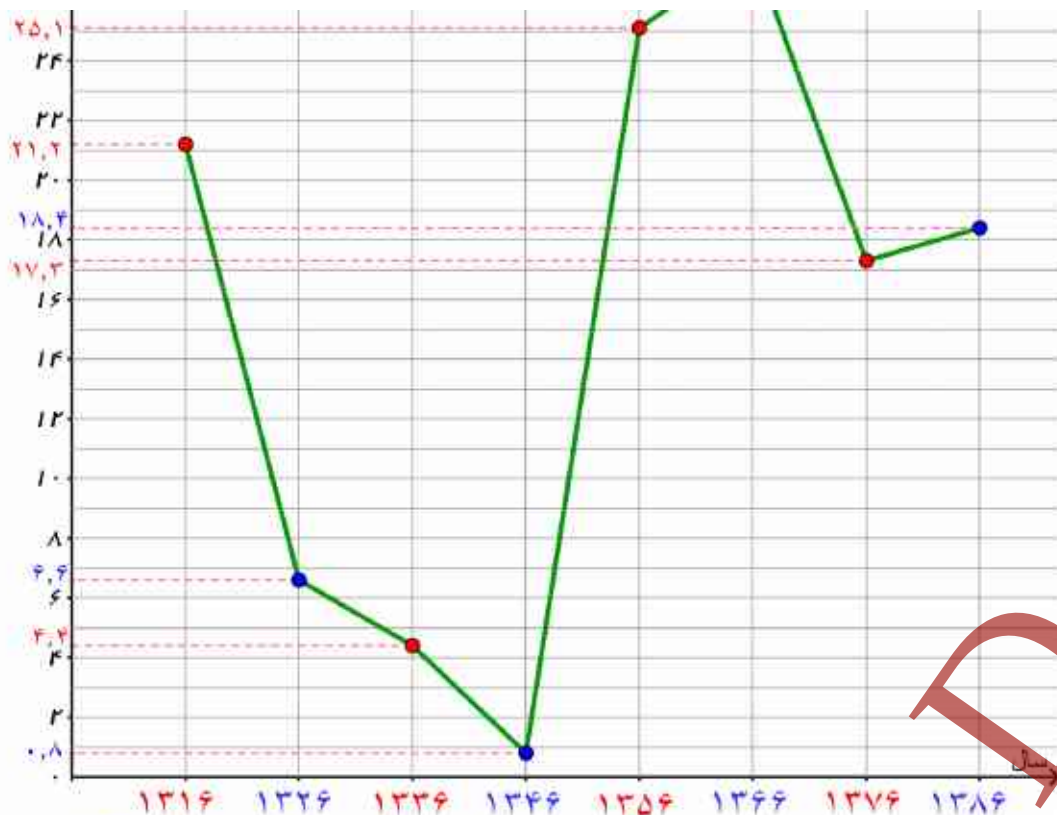
ج) بر روی همان سری زمانی داده‌ها پنج سال در میان را با استفاده از جدول به‌روی همان نمودار رسم و خطای درون‌یابی را محاسبه کنید.

سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم
۱۳۱۶	۲۱/۲	۱۳۲۶	۶/۶	۱۳۳۶	۴/۴	۱۳۴۶	۰/۸	۱۳۵۶	۲۵/۱	۱۳۶۶	۴۷/۷	۱۳۷۶	۱۷/۳	۱۳۸۶	۱۸/۴
۱۳۱۷	۸/۸	۱۳۲۷	۱۱/۱	۱۳۳۷	۱/۰	۱۳۴۷	۱/۵	۱۳۵۷	۱۰/۰	۱۳۶۷	۴۸/۹	۱۳۷۷	۱۸/۱	۱۳۸۷	۲۵/۴
۱۳۱۸	۸/۰	۱۳۲۸	۲/۳	۱۳۳۸	۱۳/۰	۱۳۴۸	۳/۶	۱۳۵۸	۱۱/۴	۱۳۶۸	۱۷/۴	۱۳۷۸	۲۰/۱	۱۳۸۸	۱۰/۸
۱۳۱۹	۱۳/۸	۱۳۲۹	-۱۷/۲	۱۳۳۹	۷/۹	۱۳۴۹	۱/۵	۱۳۵۹	۲۳/۵	۱۳۶۹	۹/۰	۱۳۷۹	۱۲/۶	۱۳۸۹	۱۲/۴
۱۳۲۰	۴۹/۵	۱۳۳۰	۸/۳	۱۳۴۰	۱/۶	۱۳۵۰	۵/۵	۱۳۶۰	۲۲/۸	۱۳۷۰	۲۰/۷	۱۳۸۰	۱۱/۴	۱۳۹۰	۲۱/۵
۱۳۲۱	۹۶/۲	۱۳۳۱	۷/۲	۱۳۴۱	۰/۹	۱۳۵۱	۶/۳	۱۳۶۱	۱۹/۲	۱۳۷۱	۲۴/۴	۱۳۸۱	۱۵/۸	۱۳۹۱	۳۰/۵
۱۳۲۲	۱۱/۵	۱۳۳۲	۹/۲	۱۳۴۲	۱/۰	۱۳۵۲	۱۱/۲	۱۳۶۲	۱۴/۸	۱۳۷۲	۲۲/۹	۱۳۸۲	۱۵/۶	۱۳۹۲	۳۴/۷
۱۳۲۳	۲/۷	۱۳۳۳	۱۵/۹	۱۳۴۳	۴/۵	۱۳۵۳	۱۵/۵	۱۳۶۳	۱۰/۴	۱۳۷۳	۳۵/۲	۱۳۸۳	۱۵/۲	۱۳۹۳	۱۵/۶
۱۳۲۴	-۱۴/۴	۱۳۳۴	۱/۷	۱۳۴۴	۰/۳	۱۳۵۴	۹/۹	۱۳۶۴	۶/۹	۱۳۷۴	۴۹/۴	۱۳۸۴	۱۰/۴	۱۳۹۴	۱۱/۹
۱۳۲۵	-۱۱/۵	۱۳۳۵	۸/۸	۱۳۴۵	۰/۸	۱۳۵۵	۱۶/۶	۱۳۶۵	۱۳/۷	۱۳۷۵	۲۳/۲	۱۳۸۵	۱۱/۹	۱۳۹۵	۹

توجه کنند:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

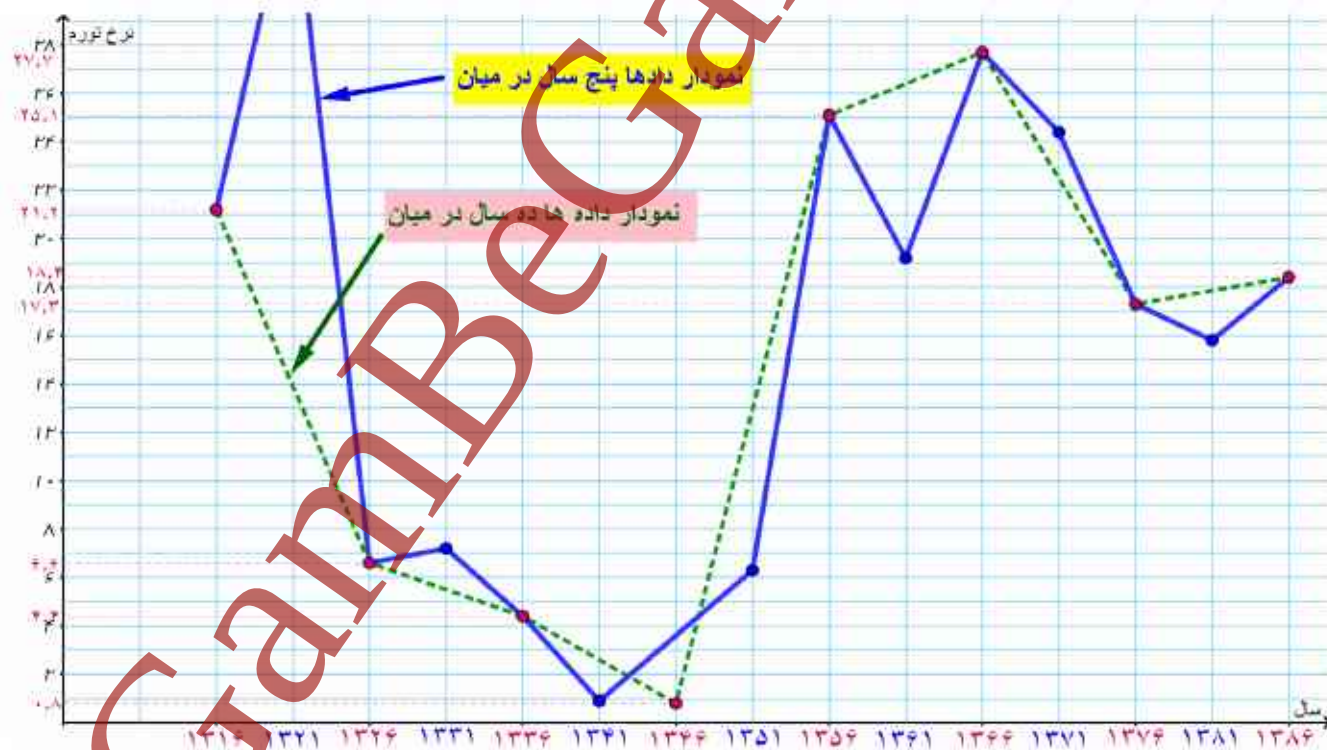
khuzmath1394@chmail.ir



(ب) توجه سال ۱۳۱۶ را سال
یک در نظر گرفته ایم بنابراین
سال ۱۳۸۶ سال ۷۱ است.

$$m = \frac{18.4 - 21.2}{71 - 1} = \frac{-2.8}{70} = -\frac{28}{700} = -\frac{2}{100}$$

$$-\frac{2}{100}(71) + h = 18.4 \Rightarrow h = \frac{282}{100} + \frac{1840}{100} \Rightarrow h = \frac{2122}{100} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{100}x + \frac{2122}{100}$$



$$f(11) = -\frac{P}{100}(11) + \frac{212P}{100} = \frac{-11P + 212P}{100} = \frac{201P}{100} = 201.8 \Rightarrow E = |201.8 - 9.9| = 191.9 \quad \text{در سال ۱۳۲۶}$$

$$f(19) = -\frac{P}{100}(19) + \frac{212P}{100} = \frac{-19P + 212P}{100} = \frac{193P}{100} = 193.9 \Rightarrow E = |193.9 - 7.9| = 186 \quad \text{در سال ۱۳۳۱}$$

$$f(21) = -\frac{P}{100}(21) + \frac{212P}{100} = \frac{-21P + 212P}{100} = \frac{191P}{100} = 191.9 \Rightarrow E = |191.9 - 9.9| = 182 \quad \text{در سال ۱۳۳۶}$$

$$f(29) = -\frac{P}{100}(29) + \frac{212P}{100} = \frac{-29P + 212P}{100} = \frac{183P}{100} = 183.9 \Rightarrow E = |183.9 - 9.9| = 174 \quad \text{در سال ۱۳۴۱}$$

$$f(31) = -\frac{P}{100}(31) + \frac{212P}{100} = \frac{-31P + 212P}{100} = \frac{181P}{100} = 181.9 \Rightarrow E = |181.9 - 9.9| = 172 \quad \text{در سال ۱۳۴۶}$$

$$f(39) = -\frac{P}{100}(39) + \frac{212P}{100} = \frac{-39P + 212P}{100} = \frac{173P}{100} = 173.9 \Rightarrow E = |173.9 - 7.9| = 166 \quad \text{در سال ۱۳۵۱}$$

$$f(41) = -\frac{P}{100}(41) + \frac{212P}{100} = \frac{-41P + 212P}{100} = \frac{171P}{100} = 171.9 \Rightarrow E = |171.9 - 15.1| = 156.8 \quad \text{در سال ۱۳۵۶}$$

$$f(49) = -\frac{P}{100}(49) + \frac{212P}{100} = \frac{-49P + 212P}{100} = \frac{163P}{100} = 163.9 \Rightarrow E = |163.9 - 19.9| = 144 \quad \text{در سال ۱۳۶۱}$$

$$f(51) = -\frac{P}{100}(51) + \frac{212P}{100} = \frac{-51P + 212P}{100} = \frac{161P}{100} = 161.9 \Rightarrow E = |161.9 - 27.7| = 134.2 \quad \text{در سال ۱۳۶۶}$$

$$f(59) = -\frac{P}{100}(59) + \frac{212P}{100} = \frac{-59P + 212P}{100} = \frac{153P}{100} = 153.9 \Rightarrow E = |153.9 - 29.9| = 124 \quad \text{در سال ۱۳۷۱}$$

$$f(61) = -\frac{P}{100}(61) + \frac{212P}{100} = \frac{-61P + 212P}{100} = \frac{151P}{100} = 151.9 \Rightarrow E = |151.9 - 17.3| = 134.6 \quad \text{در سال ۱۳۷۶}$$

$$f(69) = -\frac{P}{100}(69) + \frac{212P}{100} = \frac{-69P + 212P}{100} = \frac{143P}{100} = 143.9 \Rightarrow E = |143.9 - 15.1| = 128.8 \quad \text{در سال ۱۳۸۱}$$

$$f(71) = -\frac{P}{100}(71) + \frac{212P}{100} = \frac{-71P + 212P}{100} = \frac{141P}{100} = 141.9 \Rightarrow E = |141.9 - 18.9| = 123 \quad \text{در سال ۱۳۸۶}$$

- ۱- هاک، سوزان. فلسفه منطق، (ترجمه : سیدمحمدعلی حجتی)، انتشارات طه.
- ۲- امیری، حمیدرضا، المخانجی پور، بدالله. مبانی ریاضیات گسسته. انتشارات مدرسه.
- ۳- سام، لوید. معناها و سرگرمی های ریاضی، (ترجمه : کاظم فاتقی)، انتشارات امید یزدانی، ۱۳۶۴.
- ۴- ایگل ویتس، پوریس، اسکریل، جودیت. مقدمه ای بر استدلال ریاضی، (ترجمه : غلامرضا یاسی پور)، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۶.
- ۵- شهریار، پرویز و همکاران، دانشنامه ریاضی، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۹۲.
- 6- Canton, B. **Mathematics of Data Management**, Mc Graw – Hill, 2002.
- 7- Ministry of Education. **Mathematical Development 5.3**, Austed Publishing, Western Australia.
- 8- Smith, P. **An Introduction to Godel's Theorems**, Cambridge University Press, 2013.
- 9- Nickerson, R.S. **Mathematical Reasoning: Pattern, problems, conjectures, and proofs**, Psychology press, 2010.
- 10- Henriksen M. **What is Godel's theorem**, Scientific American, January, 1999.



بسمه تعالی

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی، مشارکت معلمان را به‌عنوان سیاست اجرایی مهم دنبال می‌نماید. برای تحقق این امر با بهره‌مندی هوشمندانه از فرصت‌های فناوری‌های نوین در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی برخط اعتبارسنجی کتاب‌های نونگاشت راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت کیفیت تولیدات سازمان را بهبود بخشیده و محتوای کتاب‌های درسی را در اولین چاپ بسیاری با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب فرآیند اعتبارسنجی همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی، گروه‌های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس در استان‌ها، شورای هماهنگی تألیف دفاتر، دبیرخانه پروژه اعتبارسنجی سازمان در هماهنگی و اجرا، نقش سازنده‌ای را داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش همکاران شرکت‌کننده در فرآیند اعتبارسنجی، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌نماید.

محسن باهو

مشاور معاون وزیر و مدیر پروژه اعتبارسنجی

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار (۲) کد ۱۱۱۲۱۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	عباس اسدی قلعه رشیدی	بهار محل و بختیاری	۱۵	مرضیه شریف زاد	ایلام
۲	اکرم سلامی	آذربایجان شرقی	۱۶	لیلا صیوری	فارس
۳	سپیدال چناری	کرمانشاه	۱۷	ایوب خلیلیان گل سفیدی	چهارمحال و بختیاری
۴	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی	۱۸	تهمینه امیر خسروی	کرمان
۵	فاطمه عمویی	شهر تهران	۱۹	ندمت دانش	کرمان
۶	ساره ماه‌گلی	خراسان جنوبی	۲۰	عبداللطیف حسین پور	هرمزگان
۷	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۱	جمال نوین	یزد
۸	جواد راشدی	خراسان جنوبی	۲۲	گل یخت مهوری ناکان	سیستان و بلوچستان
۹	معصومه رجب پور	همدان	۲۳	ظاهره دانش سکیب	گیلان
۱۰	مهری میرحاج	سمنان	۲۴	زهرا ملتصی	شهرستان‌های تهران
۱۱	اکبر رضائی پور	قزوین	۲۵	فریدون حسینی سیدان شاهی	آذربایجان غربی
۱۲	منور صفائی	سمنان	۲۶	علی مهرنیا	آذربایجان شرقی
۱۳	وحیده سلیمانی	گلستان	۲۷	رحیم پردیده	مازندران
۱۴	شهره رنجبران	همدان	۲۸	نرجس زنگارکی	مرکزی