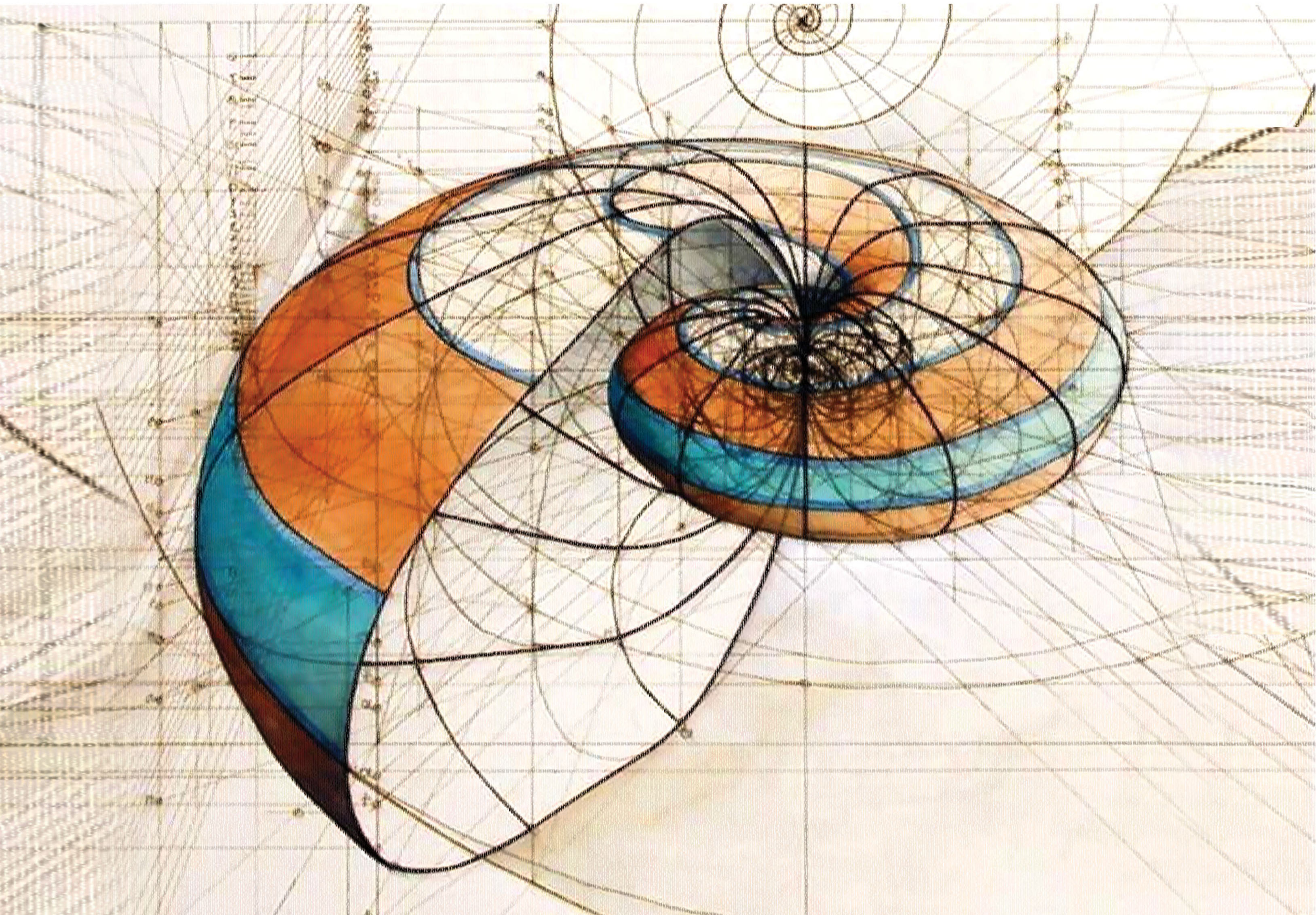
آموزش و تست

multivitamin

حسابان (۱)

kelk-m.com



به کلک: عباس امیدوار – حسنیه شریفی

جبر و معادله

فصل ۱

۱	مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲	معادلات درجه دوم
۳	معادلات گویا و گنگ
۴	قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۵	آشنایی با هندسه تحلیلی

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱-۱- مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n

در لیگ برتر فوتبال ایران در سال ۱۳۹۵، ۱۶ تیم وجود داشت، در نیم‌فصل اول بازی‌ها، تعداد کل بازی‌های انجام شده چه تعداد است؟

می‌دانیم در این نیم فصل هر تیم ۱۵ بازی انجام داده است. برای آن‌که تعداد کل بازی‌ها را بشماریم.

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱) تعداد بازی‌های تیم اول برابر چقدر است؟

۲) تعداد بازی‌های تیم دوم به‌جز بازی با تیم اول برابر چقدر است؟

۳) تعداد بازی‌های تیم سوم به جز بازی با تیم‌های اول و دوم برابر چقدر است؟

با ادامه روند فوق در می‌یابیم تعداد بازی‌های انجام شده برابر است با: $۱۵+۱۴+۱۳+...+۳+۲+۱$

حال به نظرتان چگونه می‌توان مجموع فوق را بدست آورد.

بگذارید راه‌حل جالبی را برایتان پیشنهاد کنم، مجموع فوق را S در نظر بگیرید و آن را به دو صورت زیر بنویسید.

$$\begin{cases} S=۱۵+۱۴+۱۳+۱۲+\cdots+۳+۲+۱ \\ S=۱+۲+۳+۴+\cdots+۱۳+۱۴+۱۵ \end{cases}$$

از جمع دو تساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$۲S=۱۶+۱۶+۱۶+۱۶+...+۱۶+۱۶+۱۶=۱۵\times۱۶$$

پس:

$$S=۱۵\times۸=۱۲۰$$

بنابراین تعداد بازی‌ها، ۱۲۰ بازی بوده است.

به همین ترتیب می‌توان مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} S=۱+۲+۳+...+(n-۱)+n \\ S=n+(n-۱)+(n-۲)+...+۲+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲S=(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+...+(n+۱)+(n+۱)$$

$$\to ۲S=n(n+۱) \to S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

نتیجه

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲-۱- مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

دنباله حسابی $a_۱, a_۲, a_۳, ..., a_n$ را در نظر بگیرید. برای آن‌که مجموع جملات این دنباله را بدست آوریم جاهای خالی را پر کنید.

$$(۱): a_۱=a_۱$$

$$(۲): a_۲=a_۱+d$$

$$(۳): a_۳=....+۲d$$

$$(۴): a_۴=....+....$$

$$\vdots$$

$$(n): a_n=a_۱+(.......-......)d$$

اگر طرفین تساوی‌های بالا را باهم جمع کنیم، داریم:

$$a_۱+a_۲+...+a_n=....\ a_۱+(............................)d$$

با توجه به تساوی $۱+۲+۳+...+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$ داریم:

$$a_۱+a_۲+...+a_n=na_۱+...............d=\frac{n}{۲}(....+(n-۱)....)$$

نتیجه اگر در دنبالهٔ حسابی $a_1, a_2, ..., a_n$ مجموع n جمله اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مثال ۱: هر یک از مجموع‌های زیر را برحسب a_1 و d بنویسید.

الف) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{51} =$

ب) $a_1 + a_2 + ... + a_{36} =$

پاسخ:

الف) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{51} \overset{n=51}{=\!=} \frac{51(2a_1 + (51-1)d)}{2} = \frac{51(2a_1 + 50d)}{2}$

ب) $a_1 + a_2 + ... + a_{36} \overset{n=....}{=\!=} \frac{....(2a_1 + (....-....)d)}{2} = \frac{.....(.....+.....)}{2}$

مثال ۲: جاهای خالی زیر را پر کنید.

۱) $S_{10} = ...(2a_1 + ...d)$

۲) $S_{13} = 13a_{....}$

۳) $2a_1 + 37d = \frac{1}{19}S_{.....}$

۴) $a_5 = \frac{1}{9}S_{.....}$

پاسخ:

۱) $S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + (....-1)d) = 5(2a_1 + 9d)$

۲) $S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + (13-1)d) = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = \frac{13}{2} \times 2(a_1 + 6d) = 13(a_1 + 6d) \xrightarrow{a_7 = a_1 + 6d} S_{13} = 13a_7$

۳) $2a_1 + 37d = 2a_1 + (38-1)d = \frac{2}{38} \times \frac{38}{2}(2a_1 + (38-1)d) = \frac{2}{38}(\frac{38}{2}(2a_1 + (38-1)d)) = \frac{1}{19}S_{....}$

۴) $a_5 = (a_1 + 4d) = \frac{2}{2}(a_1 + 4d) = \frac{1}{2}(2a_1 + 8d) = \frac{1}{2}(2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{9} \times \frac{9}{2}(2a_1 + (9-1)d)$

$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{2}(2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{9}S_{.....}$

مثال ۳: در دنباله $7, 9, 11, ...$ مجموع بیست جملهٔ اول دنباله را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} a_2 = 9 \ , \ a_1 = 7 \to a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2 \\ a_3 = 11 \ , \ a_2 = 9 \to a_3 - a_2 = 11 - 9 = 2 \end{aligned} \to \quad a_1 = 7 \ , \ d = 2$$

$$S_{20} = \frac{....}{2}(2 \times .... + (20-1) \times ....) = ...(.....+.....) = ...$$

مثال ۴: در یک دنباله جملهٔ اول ۴ و $a_{n+1} = a_n + 5$، مجموع ۸ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۱۷۲ ۳) ۱۶۸ ۴) ۱۷۴

پاسخ: با توجه به تساوی $a_{n+1} = a_n + 5$ واضح است که این دنباله حسابی است چون اگر به هر جمله ۵ واحد اضافه کنیم جملهٔ بعدی ساخته می‌شود و این یعنی $d = 5$ است.

$$S_8 = \frac{8}{2}(2 \times 4 + (8-1) \times 5) = ...(8 + 35) = ...$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۵: در یک دنبالهٔ حسابی جملات پنجم و نهم به ترتیب ۱ و ۷ است. مجموع دوازده جملهٔ اول آن را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \to a_5 = a_1 + 4d = 1 \\ a_9 = 7 \to a_9 = \dots + \dots d = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a_1 = \dots\dots \ , \ d = \dots\dots$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times \dots + (12-1)\dots) = \dots(\dots + \dots) = \dots$$

مثال ۶: اگر به یک دنبالهٔ عددی ۲ واحد اضافه شود به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چقدر اضافه می‌شود؟

پاسخ:

دنباله‌ی اولیه : جمله‌ی اول (a_1) ; تعداد $(20) \to S_{20} = \dots(\dots + \dots)$

دنباله‌ی ثانویه : جمله‌ی اول (a_1) ; قدرنسبت $(d+2)$; تعداد $(20) \to S'_{20} = \dots(\dots + \dots)$

$\to S'_{20} - S_{20} = (\dots) - (\dots) = \dots$

نکته: در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n = An^2 + Bn$ بدست می‌آید که در آن: جملهٔ اول $a_1 = A + B$ و قدرنسبت دنباله $d = 2A$ است.

مثال ۷: در دنبالهٔ حسابی $5, 7, 9, \dots$ مجموع n جملهٔ اول را بیابید.

پاسخ:

$a_1 = 5 \ , a_2 = 7 \to d = a_2 - a_1 = \dots$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2(5) + (n-1)\dots) \to S_n = \dots$$

مثال ۸: در دنبالهٔ حسابی $2, 6, 10, 14, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

پاسخ: ابتدا مجموع n جملهٔ اول این دنباله را پیدا می‌کنیم:

$a_1 = 2 \ , a_2 = 6 \to d = a_2 - a_1 = 4$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 2 + (n-1) \times 4) = \frac{n}{2}(4 + 4(n-1)) = \frac{\cancel{4}^{2} n}{\cancel{2}}(\cancel{1} + \cancel{(n-1)}^{n}) = 2n^2$$

برای آن که بفهمیم حداقل چند جمله از این دنباله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود کافی است $S_n > 200$ قرار دهیم و حداقل مقدار n را بیابیم:

$$S_n > 200 \to 2n^2 > 200 \to n^2 > 100 \longrightarrow n > 10$$

پس اگر حداقل ۱۱ جملهٔ از این دنباله را باهم جمع کنیم مجموع آن‌ها بیشتر از ۲۰۰ می‌شود.

نکته: در هر دنباله اگر a_n جملهٔ عمومی و S_n مجموع n جملهٔ اول باشد. آن‌گاه: $S_n - S_{n-1} = a_n$

مثال ۹: اگر در یک دنبالهٔ حسابی $S_n = n^2 - n$ باشد. جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ: این سؤال را از دو روش به کمک هم حل می‌کنیم:

روش اول:

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

$a_1 + a_2 = S_2 = 2^2 - 2 = 2 \xrightarrow{a_1 = 0} 0 + a_2 = 2 \to a_2 = 2$

$d = a_2 - a_1 = \dots \to a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$

روش دوم:

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - ((n-1)^2 - (n-1)) = n^2 - n - (n^2 - 2n + 1 - n + 1) = \dots$

مثال ۱۰: جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$a_9+a_{10}+a_{11}=S_{....}-S_{....}$$

پاسخ: می‌دانیم که:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+....+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=S_{11} \\ a_1+a_2+a_3+a_4+....+a_8=S_8 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم شود}} a_9+a_{10}+a_{11}=S_{.....}-S_{.....}$$

مثال ۱۱: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات دنباله با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

پاسخ: با توجه به مثال ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_7+a_8+a_9+....+a_{17}+a_{18}=S_{18}-S_6 \to \begin{cases} S_{18}=\frac{18(18-15)}{6}=\frac{18\times 3}{6}=9 \\ S_6=\frac{6(6-15)}{6}=\frac{-6\times 9}{6}=-9 \end{cases}$$

بنابراین

$$a_7+a_8+....+a_{17}+a_{18}=9-(-9)=.......$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

نکته: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ روبه‌رو بدست می‌آید: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

مثال ۱۲: جملات دنبالهٔ $2, 5, 8, ..., 149$ را در نظر بگیرید.

الف) دنبالهٔ فوق چند جمله دارد؟
ب) مجموع جملات این دنباله را بدست آورید.

پاسخ:

الف) می‌دانیم جملهٔ اول $a_1=2$ و جملهٔ آخر (شمارهٔ جمله را نمی‌دانیم) $a_n=149$ و قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی برابر $d=3$ پس داریم:

$$a_n=a_1+(n-1)d \to 149=2+(n-1)\times 3 \to 149=2+3n-3 \to 3n-1=149 \to 3n=150 \to n=50$$

پس این دنباله ۵۰ جمله دارد.

ب) $S_{50}=\frac{50}{2}(a_1+a_{50})=........$

مثال ۱۳: جملات دنباله حسابی $-27, x, -21, ...$ مفروض است.

الف) قدرنسبت این دنباله چقدر است؟
ب) این دنباله چند جمله منفی دارد؟
پ) بزرگترین جملهٔ منفی آن چقدر است؟
ت) مجموع جملات منفی را بیابید.

پاسخ:

الف)
$$a_1=-27$$
$$a_3=-21 \to a_3=a_1+2d \to -27+2d=-21 \to 2d=6 \to d=3 \to$$

ب) برای پیدا کردن تعداد جملهٔ منفی، کافی است $a_n<0$ در نظر بگیریم:

$$a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow[d=3]{a_1=-27} -27+(n-1)\times 3<0 \to 3n-3<27 \to 3n<30 \to n<10$$ ۹ جمله‌ی منفی دارد

پ با توجه به قسمت ب واضح است که بزرگ‌ترین جملهٔ منفی دنباله جملهٔ نهم آن است.
$a_۹ = a_۱ + ۸d = ...$

ت
$$S_۹ = \frac{۹}{۲}(a_۱ + a_۹) = ...$$

نکته: در یک دنباله حسابی با جملهٔ اول a و جملهٔ آخر b و قدرنسبت d، تعداد جملات از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:
$$n = \frac{b-a}{d} + ۱$$

مثال ۱۴: هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف $A = \{a_۳, a_۵, a_۷, ..., a_{۳۷}\}$

ب $B = \{a_۲, a_۹, a_{۱۶}, ..., a_{۱۴۲}\}$

پاسخ:

الف تعداد اعضای مجموعهٔ A با تعداد اعضای دنبالهٔ $۳, ۵, ۷, ..., ۳۷$ یکسان است و چون این دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۳ و قدر نسبت ۲ و جملهٔ آخر ۳۷است. طبق نکته تعداد این جملات برابر است با:
$$n = \frac{۳۷-۳}{۲} + ۱ = \frac{۳۴}{۲} + ۱ = ۱۷ + ۱ = ۱۸$$

ب ....

مثال ۱۵: اگر $a_۱, a_۲, a_۳, ...$ جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند.

الف آیا دنبالهٔ $a_۳, a_۵, a_۷, ..., a_{۴۷}$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند چرا؟

ب تعداد جملات بالا چقدر است؟

پ مجموع $a_۳ + a_۵ + ... + a_{۴۷}$ را بدست آورید.

ت مجموع $a_۳ + a_۵ + ... + a_{۴۷}$ را برحسب $S_{۴۹}$ چقدر است؟

پاسخ:

الف بله، زیرا فاصله بین جملات یکسان است.

ب
$$n = \frac{۴۷-۳}{۲} + ۱ = \frac{۴۴}{۲} + ۱ = ۲۲ + ۱ = ۲۳$$

پ جملات $a_۳, a_۵, ..., a_{۴۷}$ یک دنبالهٔ حسابی است که جملهٔ اول آن $a_۳$ و تعداد آن ۲۳ تا و جملهٔ آخر آن $a_{۴۷}$ است پس مجموع آن به صورت زیر بدست می‌آید.
$$S = \frac{۲۳}{۲}(a_۳ + a_{۴۷}) = \frac{۲۳}{۲}(a_۱ + ۲d + a_۱ + ۴۶d) \to S = \frac{۲۳}{۲}(۲a_۱ + ۴۸d)$$

ت در قسمت پ در محاسبهٔ مقدار S به رابطهٔ روبه‌رو رسیدیم:
$$S = \frac{۲۳}{۲}(۲a_۱ + ۴۸d) \quad (۱)$$

از طرفی داریم:
$$S_{۴۹} = \frac{۴۹}{۲}(۲a_۱ + ۴۸d) \quad (۲)$$

با تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) داریم:
$$\frac{S}{S_{۴۹}} = \frac{۲۳}{۴۹} \to S = \frac{۲۳}{۴۹}S_{۴۹}$$

مثال ۱۶: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n = n^۲ + n$ است حاصل $a_۱ + a_۳ + ... + a_{۹۹}$ چقدر است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۹۹۰۰ ۴) ۲۵۰۰۰

پاسخ: جملات دنبالهٔ $a_1, a_3, \ldots, a_{99}$ یک دنبالهٔ حسابی بوده با جملهٔ اول a_1 و جملهٔ آخر a_{99} و تعداد $n = \frac{99-1}{2} + 1 = 50$ پس داریم:

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{99} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{99}) = \frac{50}{2}(a_1 + a_1 + 98d) = \frac{50}{99} \times \frac{99}{2}(2a_1 + 98d) = \frac{50}{99} S_{99}, S_{99} = 99^2 + 99 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{99} = \frac{50}{99}(99^2 + 99) = \frac{50}{\cancel{99}} \times \cancel{99}(99 + 1) = 50 \times 100 = 5000$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکته: هرگاه $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$، n تا واسطه حسابی بین دو عدد a و b باشد. مجموع این واسطه‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S = x_1 + \ldots + x_n = \frac{n}{2}(a + b)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_n &= \frac{n}{2}(x_1 + x_n) \\ &= \frac{n}{2}\left((a+d) + (b-d)\right) \\ &= \frac{n}{2}(a+b) \end{aligned}$$

مثال ۱۷: بین دو عدد ۳ و ۸۷، ۲۳ تا واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

پاسخ: اگر $a = 3$ و $b = 87$ در نظر بگیریم و $x_1, \ldots, x_{23}$ واسطه‌های حسابی بین ۳ و ۸۷ باشد در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{23} = \frac{23}{2}(3 + 87) = \frac{23 \times 90}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال ۱۸:

الف) چند عدد سه رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد.

ب) مجموع این اعداد چقدر است؟

پاسخ:

الف) کوچک‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵برابر ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵ برابر ۹۹۰ می‌باشد. پس دنبالهٔ ۱۰۵,...,۹۹۰ یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱۰۵ و جملهٔ آخر ۹۹۰ و قدرنسبت ۱۵ است. که تعداد جملات این دنباله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \to n = \frac{990 - 105}{15} + 1 \to n = 59 + 1 = 60$$

ب) در این دنباله $a_1 = 105$ و $a_{60} = 990$ و $n = 60$، پس:

$$S_{60} = \frac{60}{2}(105 + 990) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال ۱۹: در یک دنباله عددی $a_n = \frac{3}{2}n - 5$، مجموع ده جمله دوم (جملهٔ یازدهم تا بیستم) از مجموع ده جملهٔ اول چقدر بیشتر است؟

پاسخ:

$$(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) = \frac{10}{2}(a_{11} + a_{20}) - \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

نکته: اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی مختلف باشند به طوری که $m + n = p + q$ و $\{a_k\}$ها جملات یک دنبالهٔ حسابی در این صورت $a_m + a_n = a_p + a_q$.

مثال ۲۰: در ۱۰۰ جمله‌ی اول یک دنبالهٔ حسابی اگر مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر ۳۰۰۰ باشد، حاصل جمع تمام جملات چقدر است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۵۰۰۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

پاسخ:

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_{98}+a_{99}+a_{100})=3000 \to (a_1+a_{100})+(a_2+a_{99})+(a_3+a_{98})=3000$$

$$\xrightarrow[a_3+a_{98}=a_1+a_{100}]{a_2+a_{99}=a_1+a_{100}} 3(a_1+a_{100})=3000 \to a_1+a_{100}=1000 \quad *$$

$$S_{100}=\frac{100}{2}(a_1+a_{100}) \overset{*}{=\!=} \frac{100}{2}\times 1000=50000$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱-۳- مجموع جملات دنباله هندسی

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌اش را تعیین کند. مخترع شطرنج گفت شطرنج ۶۴ خانه دارد، در خانهٔ اول ۱ گندم و در خانه دوم ۲ گندم و در خانهٔ سوم ۴ گندم بگذارید و به همین‌ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار دهید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر گندم یک گرم باشد. پادشاه چند گرم گندم باید به مخترع شطرنج بدهد. طبق گفته مخترع شطرنج، جدول زیر را کامل کنید.

شماره خانه	۱	۲	۳	۴	۵		۶۴
تعداد گندم	۱	۲	۴	...	...		...

برای این که بفهمیم چند گرم گندم باید پادشاه به مخترع شطرنج بدهد کافی است مجموع اعداد زیر را حساب کنیم:

$$1+2+4+8+\ldots+\ldots+2^{63}$$

به نظرتان چگونه می‌توان مجموع فوق را بدست آورد.

یک راه جالب برای این مسئله وجود دارد و آن این است که ابتدا مجموع داده شده را برابر S بگیریم و سپس به صورت زیر عمل کنیم:

$$S=1+2+4+8+\ldots+\ldots+2^{62}+2^{63} \xrightarrow{\text{طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم}} 2S=2+4+8+16+\ldots\ldots+2^{63}+2^{64}$$

از تفریق دو تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$2S-S=(2+4+8+16+\ldots\ldots+2^{63}+2^{64})-(1+2+4+8+\ldots+\ldots+2^{62}+2^{63}) \to S=2^{64}-1$$

حال می‌خواهیم با این ایده جالب در این بخش مجموع n جمله اول هر دنباله هندسی را بدست آوریم:

دنباله هندسی $a_1,a_2,\ldots,a_n$ مفروض است با توجه به این که در دنباله هندسی جمله عمومی به صورت $a_n=a_1q^{n-1}$ است (که در آن a_1 جملهٔ اول و q قدرنسبت است.) می‌توانیم مجموع n جمله‌ی اول را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots,a_{n-1}+a_n$$

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1} \qquad (1)$$

با ضرب طرفین تساوی (۱) در q داریم:

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n \qquad (2)$$

از تفریق دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_n-qS_n=a_1-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n=\frac{a_1(1-\ldots\ldots\ldots)}{1-q}$$

نتیجه اگر در دنباله هندسی $a_1, a_2, ..., a_n$ مجموع n جملهٔ اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال ۲۱: در دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, ...$ هر یک از مجموع‌های زیر را برحسب a_1 و q بدست آورید.

الف) $a_1 + a_2 + ... + a_{37}$

ب) $a_1 + a_2 + ... + a_{56}$

پاسخ:

الف) $a_1 + a_2 + ... + a_{37} = S_{37} = \frac{a_1(1-q^{\cdots})}{1-....}$

ب) $a_1 + a_2 + ... + a_{56} = S_{56} = \frac{a_1(1-q^{\cdots})}{1-....}$

مثال ۲۲: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی ...,۳,۶,۱۲ را بیابید.

پاسخ: در دنبالهٔ هندسی ...,۳,۶,۱۲ قدرنسبت به صورت روبرو بدست می‌آید:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = ...$$

پس مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = ...$$

مثال ۲۳: مجموع شش جملهٔ اول دنباله هندسی $a_n = 12(-\frac{1}{2})^n$ چقدر است؟

پاسخ: در این دنباله جملهٔ اول و قدرنسبت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 12(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=1} a_1 = 12(-\frac{1}{2})^1 = -6$$

$$a_n = 12(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=2} a_2 = 12(-\frac{1}{2})^2 = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \to q = \frac{a_2}{a_1} = ...$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = ...$$

مثال ۲۴: در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر ۱۲ و جمله هفتم ۳۲ برابر جمله دوم است. مجموع ۷ جملهٔ اول کدام است؟

۱) $3(1-2^7)$ ۲) $3(2^7-1)$ ۳) $2(1-3^7)$ ۴) $2(3^7-1)$

پاسخ: باتوجه به صورت مسئله داریم:

$$a_7 = 32a_2 \xrightarrow[a_2=a_1q]{a_7=a_1q^6} \cancel{a_1}q^6 = 32\cancel{a_1}q \to q^5 = 32 \to q = ...$$

از طرفی جملهٔ سوم این دنباله برابر ۱۲ است. پس:

$$a_3 = 12 \to a_1q^2 = 12 \to a_1(.....)^2 = 12 \to a_1 = ...$$

بنابراین:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = ...$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۲۵: حداکثر چند جمله ابتدایی دنباله $\cdots,\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۳},۱$ را با هم جمع کنیم تا حاصل کمتر از $۱/۴۹۷$ شود.

پاسخ: در این دنبالهٔ هندسی که جملهٔ اول آن $a_۱=۱$ و قدرنسبت آن $q=\frac{۱}{۳}$ است، برای آن‌که بفهمیم حداکثر مجموع چند جملهٔ ابتدایی کمتر از $۱/۴۹۷$ است کافی است $S_n<۱/۴۹۷$، قرار دهیم بنابراین:

$$S_n<۱/۴۹۷\to\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}<۱/۴۹۷\to\frac{۱(۱-(\frac{۱}{۳})^n)}{۱-\frac{۱}{۳}}<۱/۴۹۷\to ۱-(\frac{۱}{۳})^n<\frac{۲}{۳}\times ۱/۴۹۷$$

$$\to ۱-(\frac{۱}{۳})^n<۰/۹۹۸\to(\frac{۱}{۳})^n>۰/۰۰۲\to ۳^n<\frac{۱۰۰۰}{۲}=۵۰۰\to n\le ۵$$

مثال ۲۶: مجموع چند جمله از دنبالهٔ $۳,-۹,۲۷,\ldots$ برابر ۱۸۳ است؟

پاسخ:

دنبالهٔ داده شده یک دنبالهٔ هندسی است که در آن $a_۱=۳$ و $q=-۳$، از طرفی مجموع چند جملهٔ ابتدایی آن $S_n=۱۸۳$ است. حال ما بـه دنبال پیدا کردن تعداداین جملات (یعنی n) هستیم:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\xrightarrow[a_۱=۳,q=-۳]{S_n=۱۸۳}۱۸۳=\frac{۳(۱-(-۳)^n)}{۱-(-۳)}\to\overset{۶۱}{\cancel{۱۸۳}}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}(۱-(-۳)^n)}{۴}$$

$$\to ۱-(-۳)^n=۶۱\times ۴\to ۱-(-۳)^n=۲۴۴\to-(-۳)^n=۲۴۳\to(-۳)^n=-۲۴۳\to n=۵$$

مثال ۲۷: در دنبالهٔ هندسی غیرنزولی $\ldots,\frac{۱}{۲},x,۲$ مجموع دوازده جملهٔ اول کدام است؟

۱) $۴(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۲})$ ۲) $۴((\frac{۱}{۲})^{۱۲}-۱)$ ۳) $\frac{۴(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۲})}{۳}$ ۴) $\frac{۴((\frac{۱}{۲})^{۱۲}-۱)}{۳}$

پاسخ:

$a_۱=۲$

$$a_۳=\frac{۱}{۲}\to a_۱q^۲=\frac{۱}{۲}\to ۲q^۲=\frac{۱}{۲}\to q^۲=\frac{۱}{۴}\to\begin{cases}q=\frac{۱}{۲}\\ q=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

چون دنبالهٔ هندسی غیرنزولی است، پس $q=\ldots$ قابل قبول است. بنابراین:

$$S_{۱۲}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۲})}{۱-q}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

نکته: مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ را می‌توان به صورت زیر بدست آورد.

$$S_n=\frac{a_۱-a_nq}{۱-q}$$

مثال ۲۸: بین دو عدد ۱ و ۸۱ چند واسطه هندسی درج کنیم تا مجموع جملات دنباله هندسی حاصل برابر ۱۲۱ شود.

پاسخ: در دنبالهٔ داده شده داریم: $a_1=1, a_n=81$، بنابراین:

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\to 121=\frac{1-81q}{1-q}\to 121(1-q)=1-81q\to 121-121q=1-81q$$
$$\to -121q+81q=1-121\to -40q=-120\to q=3$$

بنابراین دنبالهٔ به صورت $1,3,9,27,81$ است پس بین ۱ و ۸۱، سه واسطه هندسی با شرایط فوق می‌توان درج کرد.

مثال ۲۹: در یک دنباله هندسی مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=3(2^n-1)$ بدست می‌آید. جملهٔ هفتم این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۹۲

پاسخ: به دو رابطهٔ زیر دقت کنید:

$$\begin{cases}a_1+a_2+\ldots+a_6+a_7=S_7\\ a_1+a_2+\ldots+a_6=S_6\end{cases}\longrightarrow a_7=S_7-S_6$$

حال با توجه به رابطهٔ $S_n=3(2^n-1)$، جملهٔ هفتم را بدست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}S_7=3(2^{\cdots\cdots}-1)=3(\ldots\ldots-1)=\ldots\ldots\\ S_6=3(2^{\cdots\cdots}-1)=3(\ldots\ldots-1)=\ldots\ldots\end{matrix}\to a_7=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۳۰: جاهای خالی را پر کنید. (a_nها جملات دنبالهٔ هندسی هستند.)

الف) $a_7+a_8+a_9+\ldots+a_{37}=S_{\ldots}-S_{\ldots}$

ب) $a_7+a_8+a_9+\ldots+a_{37}=\dfrac{a_{\ldots}(1-q^{\cdots})}{1-q}$

پاسخ:

الف) $$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\ldots+a_{37}=S_{37}\\ a_1+a_2+\ldots+a_6=S_6\end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم شود}}a_7+a_8+\ldots+a_{37}=S_{\ldots}-S_{\ldots}$$

ب) جملهٔ اول این مجموع a_7 و قدر نسبت q و تعداد جملات $n=31$ است، بنابراین:

$$a_7+a_8+a_9+\ldots+a_{37}=\frac{a_7(1-q^{31})}{1-q}$$

مثال ۳۱: در یک دنباله هندسی که ۱۱ جمله دارد. اگر مجموع ۶ جملهٔ اول آن ۶۳ و مجموع ۶ جملهٔ آخر آن ۲۰۱۶ باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ:

$$a_1+a_2+\ldots+a_5+a_6=63\to S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63\quad (1)$$

$$a_6+a_7+\ldots+a_{10}+a_{11}=2016\to\frac{a_6(1-q^6)}{1-q}=2016\quad (2)$$

$$\frac{\frac{a_6(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}=\frac{2016}{63}\to\frac{a_6}{a_1}\to\frac{a_1q^{\cdots}}{a_1}\to q^{\cdots}=\ldots\to q=\ldots$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۳۲: اگر a_n ها جملات دنباله هندسی باشند، جاهای خالی را پر کنید.

الف $a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{43} = \dfrac{a_3(1-q^{\dots})}{1-q^{\dots}}$

ب $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{50}^3 = \dfrac{a_1^3(1-q^{\dots})}{1-q^{\dots}}$

پاسخ:

الف مجموع داده شده، مجموع یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_3 و قدرنسبت q^2 است، که تعداد جملات آن $n = 21$ است.

$$a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{43} = \frac{a_3(1-(q^2)^{\dots})}{1-q^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

ب مجموع داده شده، مجموع یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1^3 و قدرنسبت q^3 است که تعداد جملات آن $n = 50$ است. بنابراین:

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{50}^3 = \frac{a_1^3(1-(q^3)^{\dots})}{1-q^{\dots}} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

مثال ۳۳: در ۲۰ جمله ابتدایی از یک دنباله هندسی با جملهٔ اول $\frac{4}{3}$، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲ است. مجموع ۵ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = \frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q^2} \qquad (1)$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{a_2(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_2(1-q^{20})}{1-q^2} \qquad (2)$$

با توجه به فرض مسئله داریم که:

$$\frac{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}} = 2 \xrightarrow[(1)]{(2)} \frac{\frac{a_2(1-(q^2)^{10})}{1-q^2}}{\frac{a_1(1-q^{20})}{1-q^2}} = 2 \to \frac{a_2}{a_1} = 2 \to q = 2$$

بنابراین مجموع ۵ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \dots\dots\dots$$

نکته: در یک دنباله هندسی با جملهٔ اول a و قدرنسبت q داریم:

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = 1 + q^n + q^{2n} \qquad \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

مثال ۳۴: در یک دنباله هندسی مجموع ۳ جملهٔ اول ۱۱۲ و مجموع ۶ جملهٔ اول ۱۲۶ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = 112 \\ &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S_6 = 126 \end{aligned} \xrightarrow{\text{طبق نکته قبل}} \frac{S_6}{S_3} = \frac{S_{2\times 3}}{S_3} = 1 + q^3 \to 1 + q^3 = \frac{126}{112} \to$$

$$q^3 = \frac{126}{112} - 1 = \frac{14}{112} = \frac{1}{8} \to q = \dots$$

مثال ۳۵: اگر n عددی فرد باشد، با استفاده از مجموع جملات در دنباله هندسی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} - \dots + a^2 - a + 1)$$

پاسخ: عبارت روبه‌رو را در نظر بگیرید: $1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}$

مجموع عبارت بالا را می‌توان مجموع یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $(-a)$ در نظر گرفت پس داریم:

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} + a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{1(1-(-a)^n)}{1-(-a)} \xrightarrow[(-a)^n = -a^n]{\text{فرد}\ n} \frac{1(1+a^n)}{1+a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (1+a)(1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}) = 1 + a^n$$

مثال ۳۶: مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ روبه‌رو را تعیین کنید. $1, 11, 111, \dots$

پاسخ:

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{\text{n تا ۱}} \xrightarrow{\times 9} 9S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{\text{n تا ۹}}$$

$$9S = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + (10000-1) + \dots + (1\underbrace{0\dots0}_{\text{n تا ۰}} - 1)$$

$$9S = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$9S = (10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n$$

$$9S = \frac{10(1-(10)^n)}{\underbrace{\cancel{1-10}}_{-9}} - n = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9} \to S = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$$

نکته: اگر m, n, p, q، چهار عدد طبیعی باشد به طوری که $m + n = p + q$ و a_kها جملات دنباله هندسی، در این صورت:

$$a_m . a_n = a_p . a_q$$

مثال ۳۷: اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله هندسی ۲ باشد، حاصل‌ضرب روبه‌رو را بیابید. $a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = ?$

پاسخ: طبق نکتهٔ قبل می‌توان نوشت: $a_1 a_9 = a_2 a_{...} = a_3 a_{...} = a_{...} a_6 = a_5 a_5 = (a_5)^2$

پس داریم: $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_9 = (a_5^2)^4 . a_5 = a_5^9 = 2^9 = 512$

مثال ۳۸: برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است. که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها یک چهارم می‌شود حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد؟

پاسخ: پس از عبور از هر لایه شدت تابش یک چهارم می‌شود پس دنباله زیر میزان کاهش شدت تابش در هر مرحله است:

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \dots$$

برای آنکه بفهمیم حداقل از چند لایه استفاده کنیم باید در دنباله فوق S_n را بزرگتر از $\frac{96}{100}$ قرار دهیم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4}} \frac{\cancel{\frac{3}{4}}(1-(\frac{1}{4})^n)}{\cancel{1-\frac{1}{4}}} > \frac{96}{100} \to 1 - (\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100}$$

$$\to -(\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100} - 1 = -\frac{4}{100} \to (\frac{1}{4})^n < \frac{4}{100} \to 4^n > 25 \to n \geq 3$$

پس حداقل باید از سه لایه استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد.

نکته: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت و قدر نسبت بین ۰ و ۱ داریم: $S_n < \dfrac{a_1}{1-q}$

مثال ۳۹: احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او در روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. آیا احمد می‌تواند بعد از مدتی ۱۰۰/۰۰۰ تومان جمع کند.

پاسخ:

$$\underset{\text{روز اول}}{1000} \quad , \quad \underset{\text{روز دوم}}{\frac{99}{100}\times 1000} \quad , \quad \underset{\text{روز سوم}}{\left(\frac{99}{100}\right)^2\times 1000} \quad , \quad \ldots$$

حال مجموع پول‌های احمد را در n روز حساب می‌کنیم. دنبالهٔ فوق یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱۰۰۰ و قدرنسبت $\dfrac{99}{100}$ است. پس طبق نکتهٔ قبل $S_n < \dfrac{a_1}{1-q}$ پس داریم:

$$S_n < \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n < \frac{1000}{1-\frac{99}{100}} = \frac{1000}{\frac{1}{100}} = 100000$$

بنابراین هر چند روز که احمد بدین شکل پول خود را در صندوق اضافه کند پول وی به ۱۰۰۰۰۰ نمی‌تواند برسد.

تمرینات:

۱- بر محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می‌کنیم تعداد کل وترهای متمایز را بدست آورید.

۲- یک ساعت دیواری رأس ساعت به تعداد همان ساعت زنگ می‌زند، علاوه بر آن هر نیم ساعت نیز یک‌بار زنگ می‌زند این ساعت در شبانه‌روز چند بار زنگ می‌زند.

۳- در اعداد طبیعی از ۱ تا چه عددی را به‌طور متوالی باهم جمع کنیم تا حاصل $\frac{۵}{۹}$ مربع همان عدد شود.

۴- مجموع $S=۱+۲+۳+...+(n-۱)$ را بدست آورید.

۵- حاصل $۳۷+۳۸+۳۹+...+۱۰۱$ را بدست آورید.

۶- مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله $۳,۷,۱۱,....$ را بدست آورید.

۷- در یک دنباله حسابی جملهٔ پنجم ۳ و هر جمله از جمله ما قبل آن $\frac{۱}{۲}$ کمتر است، مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن را بیابید.

۸- در یک دنباله حسابی جملهٔ اول و قدرنسبت باهم برابرند. اگر جمله ششم ۳۰ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول آن را بیابید.

۹- اگر مجموع سه جمله اول، ۹ برابر قدرنسبت باشد، مجموع یازده جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟

۱۰- اگر در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول ۳۳ و مجموع هفت جمله اول $\frac{۲۸۷}{۵}$ باشد، قدرنسبت چقدر است؟

۱۱- در یک دنباله عددی به جمله اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم به مجموع ۱۰ جمله اول چقدر اضافه خواهد شد؟

۱۲- در یک دنباله حسابی مجموع ۷ جمله اول برابر مجموع ۲۳ جمله اول آن است، مجموع ۳۰ جمله اول را بیابید.

۱۳- در یک دنباله حسابی $S_n=۲n^۲-۳n$، مجموع جملات چهارم و پنجم را بیابید.

۱۴- مجموع چند جمله از دنباله $۲,۶,۱۰,...$ برابر جمله سیزدهم است.

۱۵- در دنباله حسابی $-۲,۱,۴,۷,....$ حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل ۳ رقمی شود.

۱۶- در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول ۳برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم چقدر است؟

۱۷- مجموع ۱۰ جمله اول دنبالهٔ حسابی $a,۲a+۱,۳a+۲,...$ برابر ۱۵۵ است. جمله هفتم این دنباله چقدر است؟

۱۸- مجموع اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ که بر ۳ بخش‌پذیرند را بیابید.

۱۹- در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n=\frac{۳}{۲}n-۲$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله دهم و ختم به جملهٔ سی‌اُم را بیابید.

۲۰- در یک دنباله عددی که دارای ۱۷ جمله است. جمله نهم برابر ۸ است. مجموع جملات این دنباله چقدر است؟

۲۱- در یک دنباله حسابی $a_۷+a_{۱۶}=۴۲$ است مجموع ۲۲ جمله اول این دنباله را بیابید.

۲۲- مجموع همه عددهای صحیح بین ۲۰ و ۱۲۰۰ مختوم به رقم ۵ چقدر است؟

۲۳- اگر در یک دنباله حسابی جملهٔ اول n و جملهٔ آخر $۱۳n$ و مجموع جملات آن $۴۹n$ باشد، تعداد جملات را بیابید.

۲۴- در یک دنباله عددی $a_۴+a_۶+a_۸+a_{۱۰}=۲۰$ مقدار $S_{۱۳}$ چقدر است؟

۲۵- مجموع اعداد دو رقمی، که در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده ۴ دارند را بیابید.

۲۶- اگر مجموع اولین n عدد فرد ۴۴۱۰ باشد، n چقدر است؟

۲۷- بین ۱ و ۸۱ چند جمله درج شود تا مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی برابر ۲۴۶ گردد.

۲۸- جمله هفتم از یک دنباله حسابی ۲۷ و مجموع بیست‌ویک جملهٔ اول این دنباله ۹۰۳ است، مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

۲۹- در دو دنباله حسابی $\begin{cases} ۴,۷,۱۰,... \\ ۱,۵,۹,... \end{cases}$ مجموع جملات مشترک کوچکتر از ۱۰۰ را بیابید.

۳۰- اگر در یک دنباله حسابی $S_۵=۶۰$ و $S_۴=۵۴$ قدرنسبت چقدر است؟

۳۱- مجموع چند جمله دنباله هندسی $۶,۱۲,۲۴,...$ برابر ۳۷۸ است؟

۳۲- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول آن را بیابید.

۳۳- مجموع چند جملهی دنباله هندسی $۶,-۱۲,۲۴,...$ برابر ۱۰۲۶ است؟

۳۴- در یک دنباله هندسی جمله اول ۳ و جمله ششم ۹۶ است، مجموع پنج جمله اول دنباله را بیابید.

۳۵- اگر $x-۲, x+۲, ۴x+۲$ جملات متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مجموع هشت جمله بعدی را بدست آورید.

۳۶- حاصلضرب زیر را به ازای $x=\sqrt[۷]{۲}$ بدست آورید.

$$(۱+x+x^۲+...+x^۷)(۱-x+x^۲-x^۳+...-x^۷)$$

۳۷- مجموع ۱۰۰ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ چند برابر مجموع جملات ردیف فرد آن ۱۰۰جمله است؟

۳۸- اگر مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی ۶۳ و مجموع سه جمله اول آن ۷ باشد، جمله ششم چند برابر جمله دوم است؟

۳۹- در یک دنباله هندسی $S_n=\frac{۲^n-۱}{۵}$ جمله عمومی دنباله را بیابید.

۴۰- در یک دنباله هندسی صعودی، نسبت مجموع هر سه جمله متوالی به اولین جمله در بین آن سه، دو برابر مجذور قدرنسبت است، قدر نسبت را بیابید.

۴۱- در یک دنباله هندسی نزولی با جمله اول ۲ مجموع چهار جمله دوم $\frac{۱}{۱۶}$ مجموع چهار جمله اول آن است، مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

۴۲- دنباله هندسی $۴,a,۱,b,...$ غیرنزولی است. مجموع چند جمله اول آن برابر $\frac{۲۱}{۸}$ است.

۴۳- در یک دنباله هندسی صعودی اگر مجموع سه جمله دوم تا چهارم برابر ۳ و مجموع سه جمله چهارم تا ششم برابر ۲۴۳ باشد. جمله شانزدهم چند برابر جمله هفتم است.

۴۴- حاصلضرب ۵ جمله اول دنباله هندسی به صورت $۲^۵\times۳^{۱۰}$ است، جمله سوم را بیابید.

۴۵- در یک دنباله هندسی با تعداد جملات فرد ثابت کنید حاصلضرب جملات برابر است جمله وسط به توان تعداد جملات.

۴۶- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $۵,۵۵,۵۵۵,...$ را بیابید.

۴۷- ثابت کنید هر تعداد از اعداد دنباله زیر را در هم ضرب کنیم حاصل ۲ نمی شود.

$$\sqrt{۲},\sqrt[۴]{۲},\sqrt[۸]{۲},\sqrt[۱۶]{۲},...$$

۴۸- جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+...+(\frac{۱}{۳})^n$ ، حاصل $\frac{a_{۲۰}}{a_{۱۰}}$ چقدر است؟

۴۹- در یک دنباله هندسی اگر تمام جملات را معکوس کنیم مجموع ۱۰ جمله اول نصف میشود، در این دنباله حاصلضرب ده جملهٔ اول چقدر است؟

۵۰- توپی را از زمین به هوا پرتاب میکنیم تا به ارتفاع ۶ متری برسد بعد از هر بار به زمین خوردن به اندازه ۲۰ درصد ارتفاع قبلی بالاتر میرود. نشان دهید پس از شروع پرتاب مسافت طی شده کمتر از ۱۵ متر است.

تست‌های درس اول (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی)

۱- در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۲- حاصل عبارت $\dfrac{t^{11}+t^{10}+t^{9}+...+t+1}{t^{9}+t^{6}+t^{3}+1}$، به ازای $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n=\dfrac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟ (سراسری خارج- ریاضی ۹۰)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

۵- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟ (سراسری خارج- ریاضی ۹۱)

۱) ۴۲۸ ۲) ۴۸۴ ۳) ۴۸۶ ۴) ۴۸۸

۶- حاصل عبارت $\dfrac{t^{8}-t^{7}+t^{6}-....-t+1}{t^{6}-t^{3}+1}$، به ازای $t=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$، کدام است؟ (سراسری خارج- ریاضی ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۰ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۱۲ است. قدر نسبت آن کدام است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{14}{9}$ ۲) $\frac{16}{9}$ ۳) $\frac{14}{15}$ ۴) $\frac{16}{15}$

۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_7=20$، حاصل $a_3+a_6+a_8+a_{11}$ کدام است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

۹- اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۰ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۷- ۲) ۶- ۳) ۵ ۴) ۴

۱۰- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_1=m$ و $a_2=2m-1$ و $a_3=m-4$ باشد، S_9 چه‌قدر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۸۰- ۲) ۸۱- ۳) ۶۴- ۴) ۶۵-

۱۱-اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_5 = ۱۲$ و $a_{۱۲} = ۳۳$ باشد مجموع $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ چه‌قدر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۲۰

۱۲- در یک دنباله‌ی عددی اگر به قدر نسبت آن ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۱۰ جمله‌ی اول چه‌قدر افزوده می‌شود؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۲۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

۱۳- در یک دنباله‌ی عددی غیر ثابت، جمله‌ی نهم نصف جمله‌ی پنجم است. مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله صفر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۴ ۴) ۱۶

۱۴- در یک دنباله‌ی هندسی به صورت $۴, a, ۹, b, \ldots$ مجموع هشت جمله‌ی اول چند برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۹۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹۷}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱۶}{۶۵}$

۱۵- در یک دنباله‌ی عددی $a_n = ۲n - ۵$، اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله باشد حاصل $\frac{S_{۲n}}{S_n}$ بر حسب n کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{۴n-۸}{n-۴}$ ۲) $\frac{۴n-۲}{n-۸}$ ۳) $\frac{۴n-۲}{n-۴}$ ۴) $\frac{۲n-۸}{n-۲}$

۱۶- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع $۲n$ جمله‌ی اول، از رابطه‌ی $۲n^۲ + ۵n$ به دست می‌آید. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(گزینه ۲ -ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۷- حاصل $\frac{۱-q^۲+q^۴-\ldots-q^{۱۴}}{۱+q^۴+q^۸+q^{۱۲}}$ به ازای $q = ۱-\sqrt{۲}$ چقدر است؟ (گزینه ۲ -ریاضی ۹۵)

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲+۲\sqrt{۲}$

۱۸- در دنباله‌ی هندسی متناهی $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۳۰}$ با قدر نسبت ۲، مجموع $a_۳ + a_۶ + a_۹ + \ldots + a_{۳۰}$، چند برابر مجموع کل جملات است؟

(گزینه ۲ -ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۹- مجموع جملات سوم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ است. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(گزینه ۲ -ریاضی ۹۵)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۲۰- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی دهم ۲۰ واحد از جمله‌ی پنجم بیشتر است. اگر جمع جملات هشتم و دوازدهم ۷۶ برابر باشد، حداقل چند جمله از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۲۰۰ شود؟ (گزینه ۲ -ریاضی ۹۵)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۱- اگر در یک دنباله حسابی جمله‌ی نوزدهم ۲ برابر جمله سی‌ام باشد، مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله برابر صفر است؟

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۶)

۱) ۴۱ ۲) ۸۱ ۳) ۸۲ ۴) ۴۰

۲۲- جمله‌ی nام یک دنباله حسابی برابر $an+۳$ و مجموع n جمله‌ی اول آن برابر $bn^{۲}+۲n$ است حاصل $a+b$ کدام است؟

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۶)

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

۲۳- در دنباله عددی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۵ و ۱۷ می‌باشد، مجموع ۱۸ جمله اول آن کدام است؟ (سنجش-ریاضی ۹۲)

۱) ۲۴۳ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۷۹ ۴) ۲۸۸

۲۴- مجموع n جمله اول از دنباله حسابی به صورت $S_n=n^{۲}-۳n$ است. جمله هشتم کدام است؟ (سنجش-ریاضی ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۵- حاصل عبارت $\dfrac{۱-t+t^{۲}-t^{۳}+\dots-t^{۱۱}}{۱-t^{۳}+t^{۶}-t^{۹}}$ به ازای $t=\dfrac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}$ کدام است؟ (سنجش-ریاضی ۹۴)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۶- مجموع $n+۲$ عدد فرد متوالی شروع از ۱ کدام است؟ (سنجش-ریاضی ۹۴)

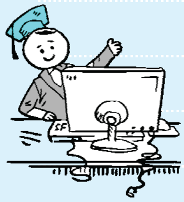
۱) $(n+۲)^{۲}$ ۲) $n^{۲}+۲n$ ۳) $(n+۱)^{۲}$ ۴) $n^{۲}+۴n$

۲۷- در دنباله‌ی ...,۱۳,۹,۵ حداقل چند جمله‌ی اول آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از ۹۰۰ باشد؟ (سنجش-ریاضی ۹۴)

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۸- در یک دنباله هندسی با ۳ جمله، بین هر دو جمله، عددی چنان قرار می‌دهیم که دنباله حاصل، یک دنباله هندسی با ۵ جمله باشد. اگر جمله اول دنباله برابر ۲ و مجموع ۳ جمله دنباله اول ۲۶ باشد، مجموع ۵ جمله اول دنباله جدید، کدام است؟ (سنجش-ریاضی ۹۵)

۱) $۲(۱۳+۲\sqrt{۳})$ ۲) $۲(۱۳+۴\sqrt{۳})$ ۳) $۲۶+۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲۶+۴\sqrt{۳}$



درس دوم: معادلات درجه دوم

۲-۱- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

در سال گذشته با معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ و روش‌های حل آن آشنا شده‌اید. در بین روش‌های ارائه شده، روش کلی حل معادله درجه دوم روشی بود که مستقیماً جواب معادله درجه دوم را در صورت وجود به ما نشان می‌داد.

یادآوری: برای حل معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ ابتدا عدد $\Delta=b^۲-۴ac$ را حساب می‌کنیم. که یکی از سه اتفاق زیر رُخ می‌دهد:

$\Delta<۰\rightarrow$ معادله درجه دوم جواب ندارد

$\Delta=۰\rightarrow$ معادله درجه دوم یک جواب دارد $\rightarrow x_۱=x_۲=\dfrac{-b}{۲a}$

$\Delta>۰\rightarrow$ معادله درجه دوم دو جواب دارد $\rightarrow \begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\end{cases}$

حال در حالتی که $\Delta\geq ۰$ است به دنبال آن هستیم که بین جمع ریشه‌ها $(x_۱+x_۲)$ و همچنین ضرب ریشه‌ها $(x_۱.x_۲)$ و ضرایب (a,b,c) رابطه‌هایی پیدا کنیم. برای بدست آوردن این رابطه‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x_۱+x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\text{.................................}=\frac{-b}{a}$$

$$x_۱.x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{۴a^۲}=\frac{\text{..........................}}{۴a^۲}=\frac{\text{..........................}}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

نکته ۱: اگر معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ جواب داشته باشد $(\Delta\geq ۰)$ و جمع ریشه‌ها را با S و ضرب ریشه‌ها را با P نمایش دهیم روابط روبه‌رو برقرارند.

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱.x_۲=\frac{c}{a}$$

مثال ۱: جدول زیر را کامل کنید.

$ax^۲+bx+c=۰$	Δ	a	b	c	S	P
$x^۲-۷x+۱=۰$	$\Delta=۴۹-۴=۴۵$	۱	-۷	۱	۷	۱
$x^۲+۱۱x-۱=۰$						
$۲x^۲-x+۷=۰$						
$۳x^۲-۶x-۱=۰$						

مثال ۲: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-5x+1=0$ باشد. بدون محاسبه ریشه‌ها حاصل عبارت زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ ب) $x_1^2x_2+x_2^2x_1$ پ) $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$

پاسخ: ضرایب معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ عبارتند از:

$$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=1$$

$$\rightarrow S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=5 \qquad P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=1$$

الف) عبارت $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=\frac{5}{1}=5$$

ب)

$$x_1^2x_2+x_2^2x_1 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x_1x_2(\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots)\xrightarrow[x_1+x_2=S]{x_1x_2=P} SP \xrightarrow[P=1]{S=5} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

پ)

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}+\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌گیری}}\frac{\sqrt{x_2^2}+\sqrt{x_1^2}}{\sqrt{x_1x_2}}\xrightarrow{x_1,x_2>0}\frac{\ldots\ldots+\ldots\ldots}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال ۳: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2-3x-5=0$ باشند، بدون محاسبه ریشه‌های معادله حاصل عبارت $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$ را بیابید.

پاسخ:

$$x^2-3x-5=0\xrightarrow{a=\ldots\ldots,b=\ldots,c=\ldots}\begin{cases}S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\ldots\\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=\ldots\end{cases}$$

حال عبارت $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_1+1}\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌گیری}}\frac{x_1+1+x_2+1}{(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{(x_1+x_2)+2}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}=\frac{S+2}{P+S+1}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\ldots$$

مثال ۴: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4=0$ باشند، m را چنان بیابید که داشته باشیم $x_1x_2^2+4=0$.

پاسخ:

$$x^2-3mx+4=0\xrightarrow[c=4]{a=1,\,b=-3m}\begin{cases}S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\ldots\\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=\ldots\end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ مقدار m از رابطهٔ $x_1x_2^2+4=0$ استفاده می‌کنیم:

$$x_1x_2^2+4=0\rightarrow(x_1x_2)x_2+4=0\rightarrow Px_2+4=0\xrightarrow{P=4}\ldots x_2+4=0\rightarrow x_2=\ldots\ldots$$

از طرفی می‌دانیم $x_۲$ جواب معادلهٔ $x^۲ - ۳mx + ۴ = ۰$ است. پس اگر در معادله به جای x، مقدار $x_۲ = ...$ را قرار دهیم تساوی برقرار است.

$$x_۲ = ... \rightarrow (....)^۲ - ۳m(....) + ۴ = ۰ \rightarrow m = ...$$

مثال ۵: در معادله $۲x^۲ - ۸x + m = ۰$ اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، مقدار m و هر دو جواب را بیابید.

پاسخ: اگر جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشد، طبق فرض‌مسئله $x_۲ = x_۱ + ۲$ حال به کمک ضرائب معادله درجه دوم داده شده جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$۲x^۲ - ۸x + m = ۰ \rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \xrightarrow[a=.........]{b=......} x_۱ + x_۲ = ...$$

با حل دستگاه زیر مقدار $x_۱$ و $x_۲$ بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ... \\ x_۲ = x_۱ + ۲ \end{cases} \rightarrow x_۱ + (x_۱ + ۲) = ... \rightarrow x_۱ = ... , x_۲ = ...$$

$$۲x^۲ - ۸x + m = ۰ \rightarrow x_۱ x_۲ = P = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{m}{۲} = ... \rightarrow m = ...$$

مثال ۶: در معادله درجه دوم $۸x^۲ - mx + ۱ = ۰$، m را چنان بیابید که یکی از ریشه‌ها مربع ریشه دیگر باشد.

پاسخ: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲ - mx + ۱ = ۰$ باشد طبق فرض‌مسئله $x_۲ = x_۱^۲$ حال به کمک ضـرائب معادلـه درجـه دوم داده شده جمع و ضرب ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$۸x^۲ - mx + ۱ = ۰ \xrightarrow[c=......]{a=......,b=....} \begin{cases} x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{m}{۸} \\ x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} = ... \end{cases}$$

$$x_۱ x_۲ = ... \xrightarrow{x_۲ = x_۱^۲} x_۱(x_۱)^۲ = ... \rightarrow (x_۱)^۳ = ... \longrightarrow x_۱ = ... , x_۲ = (......)^۲ = ...$$

از طرفی می‌دانیم $x_۱ + x_۲ = \frac{m}{۸}$ است، حال که مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ را محاسبه کرده‌ایم می‌توانیم m را بدست آوریم:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{m}{۸} \rightarrow \frac{m}{۸} = ... \rightarrow m = ...$$

نکته ۲: اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$ مجموع ضرایب صفر باشد $(a + b + c = ۰)$ یک ریشه معادله ۱ و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است.

نکته ۳: اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$، $a + c = b$، یک ریشه معادله -۱ و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال ۷: هر یک از معادلات زیر را با نکات فوق حل کنید.

الف) $۴۷x^۲ - ۴۸x + ۱ = ۰$

ب) $۳۲x^۲ + ۱۹x - ۱۳ = ۰$

پاسخ:

الف)

$$۴۷x^۲ - ۴۸x + ۱ = ۰ \xrightarrow[c=......]{a=.....,b=....} a + b + c = ... \rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \frac{c}{a} = ... \end{cases}$$

ب

$$۳۲x^۲+۱۹x-۱۳=۰ \xrightarrow[c=......]{a=.....,b=....} .....+.....=..... \to \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=\frac{-c}{a}=.... \end{cases}$$

مثال ۸: اگر در معادله $ax^۲+۲bx+c=۰$ رابطه $a+۴c=۴b$ برقرار باشد، یک ریشه معادله کدام است؟

۱) $\frac{c}{۲a}$ ۲) $\frac{-c}{۲a}$ ۳) $\frac{۲c}{a}$ ۴) $\frac{-۲c}{a}$

پاسخ:

$$a+۴c=۴b \to a-۴b+۴c=۰ \xrightarrow{\div ۴} \frac{a}{۴}-b+c=۰ \to a(\frac{-۱}{۲})^۲+۲b(-\frac{۱}{۲})+c=۰$$

پس یک ریشهٔ معادله $ax^۲+۲bx+c=۰$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

$$ax^۲+۲bx+c=۰ \to x_۱\,x_۲=\frac{c}{a} \xrightarrow{x_۱=\frac{۱}{۲}} (-\frac{۱}{۲})x_۲=\frac{c}{a} \to x_۲=.....$$

پس گزینهٔ ...... صحیح است.

نکتهٔ ۴: معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰\,(a\neq ۰)$ در صورتی دو ریشه قرینه حقیقی دارد که $b=۰$ و $\Delta>۰$.

مثال ۹: اگر معادلهٔ درجه دوم $(m+۱)x^۲+(m^۲-۴)x-۲=۰$ دو ریشه قرینه داشته باشد، مقدار m چقدر است؟

پاسخ: با توجه به نکته (۴) در صورتی معادلهٔ درجه دوم دو ریشه قرینه دارد که $b=۰$ باشد. پس داریم:

$$b=(m^۲-۴) \to m^۲-۴=۰ \to m^۲=..... \to \begin{cases} m=..... \\ m=..... \end{cases}$$

$m=....$ قابل قبول نیست چون دلتای معادله درجه دوم منفی می‌شود و معادله جواب ندارد.

نکتهٔ ۵: معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰\,(a\neq ۰)$ در صورتی دو ریشه معکوس حقیقی دارد که $a=c$ و $\Delta\geq ۰$

مثال ۱۰: اگر معادلهٔ درجه دوم $m^۲x^۲+(۲m-۱)x+۱=۰$ دو ریشه حقیقی معکوس داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ± ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: معادلهٔ درجه دوم داده شده هنگامی دو ریشه حقیقی معکوس دارد که $a=c$ باشد. پس داریم:

$$m^۲x^۲+(۲m-۱)x+۱=۰ \to \begin{cases} a=m^۲ \\ c=۱ \end{cases} \xrightarrow{a=c} m^۲=۱ \to \begin{cases} m=..... \\ m=..... \end{cases}$$

$m=....$ قابل قبول نیست چون دلتای معادلهٔ درجه دوم منفی می‌شود. پس گزینه .... صحیح است.

نکتهٔ ۶: اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰\,(a\neq ۰)$، $P<۰$ باشد، معادله دو ریشه متمایز دارد.

مثال ۱۱: به کمک نکتهٔ ۶ مشخص کنید کدام معادله زیر همواره دو ریشه متمایز دارد.

الف) $۳۷x^۲-۷x+۱=۰$

ب) $۵۴x^۲+۱۳x-۱=۰$

پاسخ: با توجه به نکتهٔ (۶)، هرگاه در معادلهٔ درجه دوم $P<0$ باشد و یا به عبارتی ضرایب a و c هم علامت نباشند. معادله دو ریشه متمایز دارد پس معادلهٔ.......... همواره دو ریشه متمایز دارد. در معادله دیگر هم Δ منفی است و معادله جواب ندارد.

مثال ۱۲: جاهای خالی را با استفاده از اتحادهای جبری پر کنید.

الف) $x_1^2+x_2^2=(.......+.......)^2-...............$

ب) $x_1^3+x_2^3=(.......+.......)^3-3x_1x_2(.......+.......)^3$

پ) $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=.......+.......+2\sqrt{........}$

ت) $(x_1-x_2)^2=(.......+.......)^2-4x_1x_2$

پاسخ:

الف) $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\rightarrow x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

ب) $(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3\rightarrow (x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1x_2(x_1+x_2)+x_2^3\rightarrow$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

پ) $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=(\sqrt{x_1})^2+2(\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2})+(\sqrt{x_2})^2=x_1+2\sqrt{x_1x_2}+x_2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}$

ت) $(x_1-x_2)^2=\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{\text{با توجه به قسمت الف}}-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

نکته ۷: اگر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ دو ریشه x_1 و x_2 داشته باشد و S و P جمع و ضرب ریشه‌ها باشند در این صورت داریم:

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

$x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

$|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}$

مثال ۱۳: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-4x-1=0$ باشد. حاصل $|x_1^2-x_2^2|$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$x^2-4x-1=0\xrightarrow[c=....]{a=.....,\ b=...}\begin{cases}S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=....\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=.......\end{cases}$$

$$|x_1^2-x_2^2|\overset{\text{تجزیه به کمک مزدوج}}{=\!=\!=\!=}|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|=|x_1-x_2||x_1+x_2|=\sqrt{S^2-4P}(|S|)$$

$$\xrightarrow[P=..........]{S=..........}(\sqrt{(....)^2-4(....)}\ (|....|)=.....$$

مثال ۱۴: اگر x_1 و x_2 ریشه معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند. حاصل $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

پاسخ:

$$x^2-3x+1=0 \xrightarrow[c=....]{a=.....,b=...} \begin{cases} x_1+x_2=S=...... \\ x_1x_2=P=........ \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل $A=x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کافی است طرفین را به توان ۲ برسانیم:

$$A^2=(x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1})^2=x_1^2x_2+x_2^2x_1+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}=x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$
$$=P(S)+2P\sqrt{P}=................\to A^2=......\to A=......$$

پس گزینهٔ ...... صحیح است.

مثال ۱۵: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-1=0$ باشند. حاصل $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$x^2-5x-1=0 \xrightarrow[c=....]{a=.....,b=...} \begin{cases} S=x_1+x_2=...... \\ P=x_1x_2=........ \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}=\frac{S^3-3SP}{P^2}=\frac{(....)^3-3(....)(....)}{(....)^2}=.......$$

مثال ۱۶: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-x-7=0$ باشد. حاصل $(x_1^2-7)(x_2^2-7)$ را بیابید.

پاسخ:

$$x^2-x-7=0 \xrightarrow[c=....]{a=.....,b=...} \begin{cases} x_1+x_2=\frac{-b}{a}=...... \quad , \quad x_1^2-x_1-7=0\to x_1^2-7=x_1 \quad (1) \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=........ \quad , \quad x_2^2-x_2-7=0\to x_2^2-7=x_2 \quad (2) \end{cases}$$

از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(x_1^2-7)(x_2^2-7)=x_1.x_2=.......$$

مثال ۱۷: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-1=0$ باشد، حاصل $(\alpha^3-5\alpha^2+\beta)(\beta^3-5\beta^2+\alpha)$ چقدر است؟

پاسخ:

$$x^2-5x-1=0 \xrightarrow[c=....]{a=.....,b=...} \begin{cases} S=\alpha+\beta=...... \\ P=\alpha\beta=........ \end{cases}$$

از طرفی α ریشهٔ معادلهٔ $x^2-5x-1=0$ است پس می‌توان به جای x، α را قرار داد:

$$\alpha^2-5\alpha-1=0\to\alpha^2-5\alpha=1\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^3-5\alpha^2=\alpha \qquad (1)$$

همچنین β ریشهٔ معادلهٔ $x^2-5x-1=0$ است. و می‌توان به جای x، β را قرار داد:

$$\beta^2-5\beta-1=0\to\beta^2-5\beta=1\xrightarrow{\times\beta}\beta^3-5\beta^2=\beta \qquad (2)$$

$$(\alpha^3-5\alpha^2+\beta)(\beta^3-5\beta^2+\alpha)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}(\alpha+\beta)(\beta+\alpha)=S\times S=S^2=.............$$

مثال ۱۸: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند. حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

پاسخ:

$$x^{۲}-۲x-۴=۰ \xrightarrow[c=....]{a=.....,b=...} \begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=...... \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=........ \end{cases}$$

α ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۲}-۲x-۴=۰$ است پس داریم:

$$\alpha^{۲}-۲\alpha-۴=۰ \to \alpha^{۲}-۴=۲\alpha \qquad (۱)$$

بنابراین داریم:

$$(\alpha^{۲}-۴)^{۲}+۴\beta^{۲} \overset{(۱)}{=\!=} (۲\alpha)^{۲}+۴\beta^{۲}=۴\alpha^{۲}+۴\beta^{۲}=۴(\alpha^{۲}+\beta^{۲})=.............$$

مثال ۱۹: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ باشند. حاصل $x_۱^{۴}+۴x_۲^{۲}-۴x_۲$ چقدر است؟

پاسخ:

$$x^{۲}+۲x-۱=۰ \to \begin{cases} x_۱+x_۲=S=...... \\ x_۱x_۲=P=........ \end{cases}$$

از طرفی $x_۲$ ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ است. پس داریم:

$$x_۲^{۲}+۲x_۲-۱=۰ \to x_۲^{۲}=۱-۲x_۲ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} (x_۲^{۲})^{۲}=(۱-۲x_۲)^{۲} \to x_۲^{۴}=۱+۴x_۲^{۲}-۴x_۲$$

$$\to x_۲^{۴}-۱=۴x_۲^{۲}-۴x_۲ \quad (۱)$$

حال حاصل $x_۱^{۴}+۴x_۲^{۲}-۴x_۲$ را بدست می‌آوریم:

$$x_۱^{۴}+۴x_۲^{۲}-۴x_۲ \overset{(۱)}{=\!=} x_۱^{۴}+x_۲^{۴}-۱=(x_۱^{۲}+x_۲^{۲})^{۲}-۲x_۱^{۲}x_۲^{۲}-۱$$

$$=(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}-۱=((.....)^{۲}-۲(.....))^{۲}-۲(.....)^{۲}-۱=.........$$

مسئله کلی: معادله درجه دومی بسازید که $x=\alpha$ و $x=\beta$ ریشه‌های آن باشند.

پاسخ: معادلهٔ درجه دوم موردنظر به راحتی قابل ساختن و به صورت $(x-\alpha)(x-\beta)=۰$ است که پس از ساده کردن به صورت $x^{۲}-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$ در می‌آید.

نتیجه اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ معلوم باشند، آن‌گاه α و β جواب‌های معادله $x^{۲}-Sx+P=۰$ هستند.

مثال ۲۰: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$ باشند.

پاسخ:

$$\begin{cases} \alpha=۱+\sqrt{۲} \\ \beta=۱-\sqrt{۲} \end{cases} \to \begin{matrix} S=\alpha+\beta=(۱+\cancel{\sqrt{۲}})+(۱-\cancel{\sqrt{۲}})=۲ \\ P=\alpha\beta=(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=۱-\sqrt{۴}=۱-۲=-۱ \end{matrix} \to x^{۲}-Sx+P=۰ \to x^{۲}-۲x-۱=۰$$

مثال ۲۱: معادله درجه دومی با ضرایب گویا بیابید که یکی از ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ باشد.

پاسخ: اگر $x=۲+\sqrt{۳}$ ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم باشد در این صورت داریم:

$$x=۲+\sqrt{۳} \to (x-۲)=\sqrt{۳} \longrightarrow (x-۲)^{۲}=(\sqrt{۳})^{۲} \longrightarrow x^{۲}-۴x+۴=۳ \to x^{۲}-۴x+۱=۰$$

بنابراین معادله درجه دوم مورد نظر به صورت $x^{۲}-۴x+۱=۰$ است که یکی از ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ می‌باشد.

مثال ۲۲: طول و عرض مستطیلی که محیط آن ۲۲ و مساحت آن ۲۸ است. کدام است؟

۱) ۲۸,۱۱ ۲) ۴,۷ ۳) ۴,۹ ۴) ۷,۵

پاسخ: اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم. داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۲۲ \to x+y = ۱۱ \to y = ۱۱ - x \quad (۱)$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = ۲۸ \xrightarrow{(۱)} x(۱۱-x) = ۲۸ \to ۱۱x - x^۲ = ۲۸ \to x^۲ - ۱۱x + ۲۸ = ۰$$

حال معادلهٔ درجه دوم فوق را حل می‌کنیم تا مقدار x (طول مستطیل) محاسبه شود.

$$x^۲ - ۱۱x + ۲۸ = ۰ \longrightarrow (x-۷)(x-۴) = ۰ \to \begin{cases} x-۷=۰ \to x=۷ \xrightarrow{(۱)} y=۴ \\ x-۴=۰ \to x=۴ \xrightarrow{(۱)} y=۷ \end{cases}$$

پس طول مستطیل ۷ و عرض آن ۴ می‌باشد. یعنی گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال ۲۳: معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن از ۲ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ یک واحد کمتر باشد.

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ خواسته شده و $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ باشند آن‌گاه داریم:

$$x^۲ - ۵x - ۱ = ۰ \to \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۵ \\ x_۱x_۲ = -۱ \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} \alpha = ۲x_۱ - ۱ \\ \beta = ۲x_۲ - ۱ \end{cases} \to \begin{cases} \alpha+\beta = ۲x_۱ - ۱ + ۲x_۲ - ۱ = ۲(x_۱+x_۲) - ۲ \\ \alpha\beta = (۲x_۱-۱)(۲x_۲-۱) = ۴(x_۱x_۲) - ۲(x_۱+x_۲) + ۱ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \alpha+\beta = ۲(.........) - ۲ = ... = S \\ \alpha\beta = ۴(.........) - ۲(.........) + ۱ = ... = P \end{cases} \to x^۲ - Sx + P = ۰ \to ....$$

مثال ۲۴: ثابت کنید معادله درجه دومی که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد به صورت: $cx^۲ + bx + a = ۰$ است.

پاسخ:

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند. آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

از طرفی ریشه‌های معادله درجه دومی که معکوس ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. به صورت $\frac{۱}{\alpha}, \frac{۱}{\beta}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} S = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} \\ P = \frac{۱}{\alpha} \times \frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{cases} \to x^۲ - Sx + P = ۰ \to x^۲ - (\frac{-b}{c})x + \frac{a}{c} = ۰ \xrightarrow{\times c} cx^۲ + bx + a = ۰$$

مثال ۲۵: اگر هر یک از ریشه‌های معادله $۳x^{۲}+ax+b=۰$ دو برابر معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۵x^{۲}-۷x+۳=۰$ باشد. مقادیر a و b را بیابید.

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^{۲}+ax+b=۰$ باشند. آن‌گاه:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{-a}{۳} & (۱) \\ \alpha\beta=\dfrac{b}{۳} & (۲) \end{cases}$$

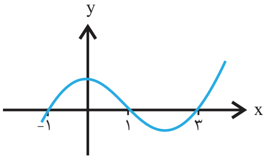
از طرفی ریشه‌های معادلهٔ $۵x^{۲}-۷x+۳=۰$ برحسب α و β به صورت $\dfrac{۲}{\alpha}$ و $\dfrac{۲}{\beta}$ هستند، پس داریم:

$$\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=\frac{۷}{۵}\to\frac{۲\alpha+۲\beta}{\alpha\beta}=\frac{۷}{۵}\to\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{۷}{۵}\xrightarrow[(۲)]{(۱)}\frac{۲(\frac{-a}{۳})}{\frac{b}{۳}}=\frac{۷}{۵}\to\frac{-۲a}{b}=\frac{۷}{۵}\to ۷b=-۱۰a\ (۳)$$

$$(\frac{۲}{\alpha})(\frac{۲}{\beta})=\frac{۳}{۵}\to\frac{۴}{\alpha\beta}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\alpha\beta=\frac{b}{۳}}\frac{۴}{\frac{b}{۳}}=\frac{۳}{۵}\to\frac{۱۲}{b}=\frac{۳}{۵}\to b=۲۰$$

$$۷b=-۱۰a\xrightarrow{b=۲۰}۱۴۰=-۱۰a\to a=-۱۴$$

۲-۲- صفرهای تابع



به نمودار تابع f توجه کنید این تابع محور طول‌ها را در سه نقطه به طول‌های ۱− و ۱ و ۳ قطع کرده است. در واقع $f(۳)=f(۱)=f(-۱)=۰$ به این مقادیر از دامنه تابع که در آن‌ها $f(x)=۰$ است. صفرهای تابع f می‌گویند.

یادآوری: برای رسم تابع درجه دوم f با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ کافی است مختصات رأس سهمی را که طول آن $x=\dfrac{-b}{۲a}$ است، پیدا کنیم. سپس دو نقطه اطراف رأس بدست می‌آوریم، از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تقریبی تابع درجه دوم بدست می‌آید.

مثال ۲۶: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس جواب‌های معادلات $f(x)=۰$، $g(x)=۰$ و $h(x)=۰$ را تعیین کنید.

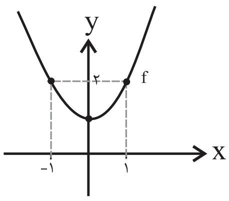
الف) $f(x)=x^{۲}+۱$ ب) $g(x)=x^{۲}-۴x+۴$ پ) $h(x)=x^{۲}-۲x$

پاسخ:

الف) $f(x)=x^{۲}+۱\to$ طول رأس سهمی $x=\dfrac{-b}{۲a}\xrightarrow{a=۱,b=۰}x=۰\to f(۰)=۱$

x	−۱	۰	۱
$f(x)=x^{۲}+۱$	۲	۱	۲
	$\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$



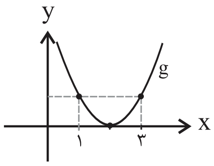
با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس معادلهٔ $f(x)=۰$ جواب ندارد.

ب

$$g(x)=x^{۲}-۴x+۴ \xrightarrow[c=۴]{a=۱,b=-۴} x=\frac{-b}{۲a}=\ldots\ldots \Rightarrow y=\ldots\ldots$$

x	۱	......	۳
y	۱	......	۱

$\Rightarrow$



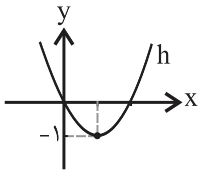
با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طول‌ها را در............. قطع می‌کند. پس معادلهٔ $g(x)=۰$ دارای........... جواب به صورت $x=\ldots$ است.

پ

$$h(x)=x^{۲}-۲x \xrightarrow[c=۰]{a=۱,b=-۲} x=\frac{-b}{۲a}=\ldots\ldots \Rightarrow y=\ldots\ldots$$

x	۰	......	۲
y	......	......	......

$\Rightarrow$



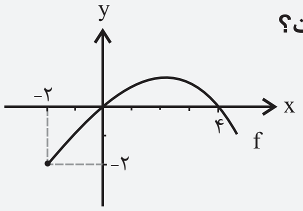
با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طول‌ها را در......... قطع می‌کند. پس معادلهٔ $h(x)=۰$ دارای........... جواب به صورت $x=\ldots$ و $x=\ldots$ می‌باشد.

نکته ۱: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد می‌توان آن را به صورت $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ نیز نمایش داد.

اثبات:

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^{۲}-Sx+P)=a(x^{۲}-(x'+x'')x+(x'.x''))=a(x-x')(x-x'')$$

مثال ۲۷: اگر نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت زیر باشد. حاصل $a-۳b+۲c$ کدام است؟



۱) $\frac{-۶}{۱۵}$ ۲) $\frac{-۶}{۱۳}$

۳) $\frac{-۱۵}{۶}$ ۴) $\frac{-۱۳}{۶}$

پاسخ: با توجه به نمودار رسم شده واضح است که صفرهای تابع درجه دوم $x'=۰$ و $x''=۴$ می‌باشد. (محل تلاقی نمودار f با محور x ها) پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=a(x-۰)(x-۴)$ می‌باشد. از طرفی نقطهٔ $(-۲,-۲)$ روی نمودار f قرار دارد. پس داریم:

$$f(x)=a(x-۰)(x-۴)\xrightarrow[y=-۲]{x=-۲}-۲=a(-۲-۰)(-۲-۴)\rightarrow -۲=۱۲a\rightarrow a=-\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۶}(x-۰)(x-۴)=-\frac{۱}{۶}x(x-۴)=-\frac{۱}{۶}x^{۲}+\frac{۴}{۶}x\rightarrow a=\ldots,b=\ldots,c=\ldots\Rightarrow a-۳b+۲c=\ldots$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۲۸: حدود k را چنان بیابید تا صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=x^{۲}+x+k^{۲}-۱$ دو نقطه باشد.

پاسخ: برای آن که تابع درجه دوم $f(x)=x^{۲}+x+k^{۲}-۱$ دارای دو صفر باشد، باید معادلهٔ $x^{۲}+x+k^{۲}-۱=۰$ دارای دو ریشه حقیقی باشد. پس باید $\Delta>۰$ باشد.

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱-۴(k^{۲}-۱)>۰\rightarrow k^{۲}-۱<\frac{۱}{۴}\rightarrow\ldots\ldots$$

نکته ۲: اگر x_0 تنها صفر تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد می‌توان تابع f را به صورت $f(x)=a(x-x_0)^2$ نمایش داد که در آن $x_0=\frac{-b}{2a}$ است.

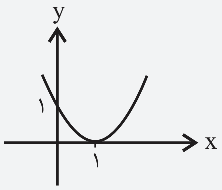
اثبات:

همان‌طور که می‌دانیم اگر x_0 تنها صفر تابع درجه دوم باشد باید $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد.

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})=a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^2-\underbrace{\cancel{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}_{0})=a(x+\frac{b}{2a})^2=a(x-x_0)^2$$

مثال ۲۹: اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد. حاصل $a-b+2c$ کدام است؟



۱) -5

۲) -3

۳) 5

۴) 2

پاسخ:

باتوجه به نمودار، $x=1$ تنها صفر تابع درجه دوم است. پس ضابطهٔ f به صورت $y=a(x-1)^2$ است. از طرفی تابع از نقطهٔ $(0,1)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$y=a(x-1)^2 \xrightarrow[y=1]{x=0} \ldots\ldots=a(\ldots\ldots-1)^2 \rightarrow a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پس .... = y می‌باشد. بنابراین ..... = a و ..... = b و ..... = c است.

$$\Rightarrow a-b+2c=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۳۰: اگر تابع $f(x)=ax^2+x+1$ فقط یک صفر داشته باشد. مقدار a چقدر است؟

پاسخ: تابع f هنگامی تنها یک صفر دارد که Δ معادلهٔ $ax^2+x+1=0$ برابر با صفر شود:

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(\ldots\ldots)(1)=\ldots\ldots\ldots \xRightarrow{\Delta=0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \rightarrow a=\ldots\ldots$$

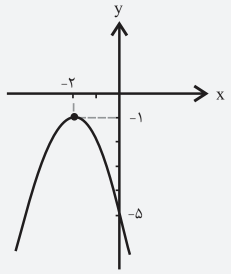
مثال ۳۱: اگر $x=2$ تنها صفر تابع $f(x)=ax^2-x+b$ باشد، مقدار a و b را بیابید.

پاسخ: چون $x=2$ تنها صفر تابع درجه دوم f است. می‌توان آن را به صورت $f(x)=a(x-2)^2$ نوشت پس داریم:

$$f(x)=a(x-2)^2=ax^2-x+b \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=1 \end{cases}$$

نکته ۳: هرگاه مختصات رأس سهمی با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت $S(x_0,y_0)$ باشد، ضابطهٔ آن را می‌توان به صورت $y=a(x-x_0)^2+y_0$ نمایش داد.

مثال ۳۲: نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ به صورت زیر است. مقادیر a، b و c را تعیین کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار رسم شده رأس سهمی به مختصات $(-۲,-۱)$ می‌باشد پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=a(x-(-۲))^{۲}+(-۱)$ می‌باشد. بنابراین داریم: $f(x)=a(x+۲)^{۲}-۱$

از طرفی تابع محور عرض‌ها را در $(۰,-۵)$ قطع می‌کند پس: $-۵=a(۰+۲)^{۲}-۱\to ۴a=-۴\to a=-۱$

بنابراین:

$$f(x)=-۱(x+۲)^{۲}+(-۱)\Rightarrow f(x)=-x^{۲}-۴x-۵\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=-۴\\ c=-۵\end{cases}$$

نکته ۴: فرض کنید x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشند.

الف) در صورتی عدد α بین صفرهای تابع قرار دارد $(x'<\alpha<x'')$ که $af(\alpha)<۰$

ب) در صورتی عدد α از هر دو ریشه بزرگتر است $(x'<x''<\alpha)$ که اولاً $af(\alpha)>۰$ ثانیاً $\alpha>\frac{-b}{۲a}$ باشد.

پ) در صورتی عدد α از هر دو ریشه کوچکتر است $(\alpha<x'<x'')$ که اولاً $af(\alpha)>۰$ ثانیاً $\alpha<\frac{-b}{۲a}$ باشد.

مثال ۳۳: تابع درجه دوم $f(x)=۲x^{۲}-x-m$ مفروض است. حدود m را چنان بیابید که صفرهای تابع هر دو کوچکتر از ۱ باشند.

پاسخ: سه مرحلهٔ زیر را باید انجام دهیم:

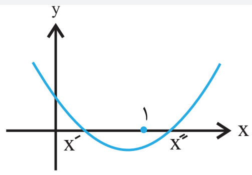
$$(۱):\Delta>۰\xrightarrow[c=......]{a=.....,b=.....}(.....)^{۲}-۴(.....)(.....)>۰\to m>.....$$

$$(۲):af(۱)>۰\xrightarrow[f(۱)=......]{a=......}.....................>۰\to m<.......$$

$$(۳):\frac{-b}{۲a}<۱\xrightarrow[b=....]{a=.....}..........<۱$$ همواره برقرار است

حال اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم داریم: ....

مثال ۳۴: حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+mx+۱$ به صورت زیر باشد.



پاسخ: با توجه به نمودار رسم شده واضح است که عدد ۱ بین دو ریشه قرار دارد پس دو مرحلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم:

$$(۱):\Delta>۰\xrightarrow[c=......]{a=.....,b=.....}\Delta=..............>۰\to m>.....$$ یا $m<.....$

$(۲): af(۱) < ۰ \xrightarrow[f(۱)=......]{a=......} .... < ۰ \to m < ....$

با اشتراک دو بازه بدست آمده می‌توان محدوده m را بدست آورد: ....

تعیین علامت صفرهای تابع درجه دوم به کمک ضرایب

فرض کنید x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد با مشخص کردن علامت S و P می‌توان علامت صفرهای تابع درجه دوم را مشخص کرد.

نکات:

- در صورتی نمودار تابع درجه دوم محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند که: $\Delta > ۰ \quad , \quad S > ۰ \quad , \quad P > ۰$
- در صورتی نمودار تابع درجه دوم محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع می‌کند که: $\Delta > ۰ \quad , \quad S < ۰ \quad , \quad P > ۰$
- در تابع درجه دوم f در صورتی $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است که $P < ۰$
- در تابع درجه دوم f، در صورتی $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه هم علامت است که $P > ۰ \quad , \quad \Delta > ۰$

مثال ۳۵: به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + (a+۳)x - ۱$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع می‌کند.

(سراسری –ریاضی ۹۲)

۱) $a < -۹$ ۲) $a < -۳$ ۳) $a > -۱$ ۴) $-۳ < a < ۰$

پاسخ:

$(۱): \Delta > ۰ \to \Delta = (.......)^۲ - ۴(.......)(.......) = a^۲ + ۶a + ۹ + ۴a = ... \to \Delta a^۲ + ۱۰a + ۹ > ۰$

$\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} a < .....$ یا $a > ....$

$(۲): S < ۰ \xrightarrow{S = \frac{-b}{a}} \frac{..............}{..............} < ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} a > .....$ یا $a < .....$

$(۳): P > ۰ \xrightarrow{P = \frac{c}{a}} \frac{-۱}{a} > ۰ \to a < .....$

با اشتراک از سه بازه‌ی بالا داریم ....

مثال ۳۶: تابع $f(x) = x^۲ + (m-۲)x + m - ۴$ مفروض است. در چه صورتی ریشه‌های $f(x) = ۰$ مختلف‌العلامه‌اند.

پاسخ: هنگامی ریشه‌های معادله داده شده مختلف‌العلامه هستند که $P < ۰$ باشد. پس داریم:

$P = \frac{c}{a} \xrightarrow[a=.....]{c=.....} \frac{..........}{..........} < ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} m < ....$

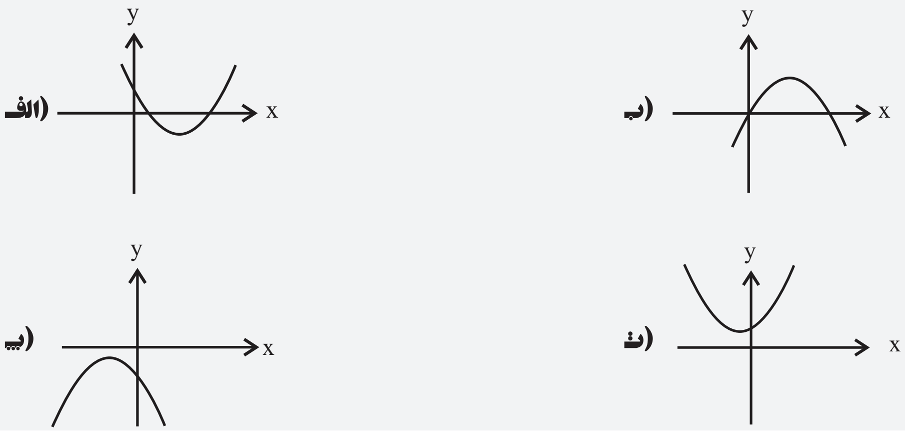
نکته: برای پیدا کردن علامت ضرایب تابع درجه دوم به کمک نمودار آن قدم‌های زیر را بر می‌داریم:

قدم اول: محل برخورد تابع با محور عرض‌ها علامت c را مشخص می‌کند.

قدم دوم: گودی منحنی $\cup$ یا $\cap$ علامت a را مشخص می‌کند.

قدم سوم: علامت طول رأس سهمی $x_۰ = \frac{-b}{۲a}$، علامت b را مشخص می‌کند.

مثال ۳۷: هر یک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع درجه دوم به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است. علامت ضرایب این توابع را بیابید.



پاسخ:

الف) گودی به سمت بالاست پس $a>۰$ است و محور عرض‌ها را در قسمت مثبت قطع می‌کند پس $c>۰$، همچنین علامت طول رأس‌سهمی مثبت است.

پس $\frac{-b}{۲a}>۰$ و چون $a>۰$ پس $b<۰$ است.

ب) گودی به سمت پایین است پس............ است و محور عرض‌ها را در مبدأ قطع می‌کند. پس $c=۰$ است و همچنین علامت طول رأس‌سهمی............ است. پس $\frac{-b}{۲a}>۰$ و چون.............. پس............... است.

پ) گودی سهمی رو به پایین است پس............... است و چون نمودار تابع محور عرض‌ها را در قسمت............... قطع کرده پس .... است. از طرفی علامت طول رأس‌سهمی منفی است پس $\frac{-b}{۲a}<۰$ و چون.................. پس...................... می‌باشد.

ت) گودی سهمی رو به .... است پس............... است و چون نمودار تابع محور عرض‌ها را در قسمت............... قطع می‌کند پس .... می‌باشد. از طرفی علامت طول رأس‌سهمی .... است پس............... می‌باشد و چون........................ پس............... است.

نکته: در تابع درجه دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ علامت شیب خط مماس در نقطه برخورد منحنی با محور عرض‌ها با علامت b یکسان است.

مثال ۳۸: اگر یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^{۳}+kx^{۲}-x-۲$ برابر -۲ باشد. مقدار k و صفرهای دیگر تابع را بیابید.

پاسخ:

$x=-۲$ یکی از صفرهای تابع است پس اگر در تابع به جای x، -۲ را قرار دهیم مقدار آن برابر با صفر می‌شود.

$$f(x)=x^{۳}+kx^{۲}-x-۲\xrightarrow{x=-۲}(-۲)^{۳}+k(-۲)^{۲}-(-۲)-۲=۰\rightarrow -۸+۴k+۲-۲=۰\rightarrow k=.......$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲$، چون $f(-۲)=۰$ پس این تابع بر $x+۲$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^{۳}}+۲x^{۲}-x-۲ & x+۲ \\ \hline -\ \cancel{x^{۳}}\pm ۲x^{۲} & x^{۲}-۱ \\ \quad -x-۲ & \\ -\ \ -x-۲ & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+۲)(x^{۲}-۱)$$

بنابراین صفرهای دیگر این تابع برابر $x=\pm۱$ است.

حل برخی از معادلات به کمک معادله درجه دوم

برخی از معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغییر به کمک معادله درجه دوم حل کرد.

مثال ۳۹: هر یک از معادلات زیر را به معادله درجه دوم تبدیل و آن‌ها را حل کنید.

الف) $x^۶+۵x^۳-۶=۰$ ب) $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰$ پ) $(x^۲+x+۱)^۲+۳x^۲+۳x=۱$

پاسخ:

الف) اگر در معادلهٔ داده شده $x^۳=A$ بگیریم داریم:

$$(x^۳)^۲+۵x^۳-۶=۰\to A^۲+۵A-۶=۰\to (A+۶)(A-۱)=۰ \begin{cases} \nearrow A=-۶ \\ \searrow A=۱ \end{cases} \to \begin{cases} x^۳=-۶\to x=-\sqrt[۳]{۶} \\ x^۳=۱\to x=۱ \end{cases}$$

ب) اگر در معادلهٔ داده شده $(x^۲-۱)^۲=A$ بگیریم داریم:

$$A^۲+A-۲=۰\to (A+۲)(A-۱)=۰ \begin{cases} \nearrow A=-۲ \\ \searrow A=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^۲-۱)^۲=-۲ \quad \text{غیرقابل‌قبول} \\ (x^۲-۱)^۲=۱\to \begin{cases} x^۲-۱=۱\to x^۲=۲\to x=\pm\sqrt{۲} \\ x^۲-۱=-۱\to x^۲=۰\to x=۰ \end{cases} \end{cases}$$

ب) اگر $x^۲+x+۱=A$ در نظر بگیریم داریم:

$$(x^۲+x+۱)^۲+۳x^۲+۳x+۳-۳=۱\to (x^۲+x+۱)^۲+۳(x^۲+x+۱)-۳-۱=۰\to A^۲+۳A-۴=۰$$

$$\to (A+۴)(A-۱)=۰ \begin{cases} \nearrow A=-۴ \\ \searrow A=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+x+۱=-۴\to x^۲+x-۵=۰\to \Delta=.....\to \begin{cases} x_۱=..... \\ x_۲=..... \end{cases} \\ x^۲+x+۱=۱\to x^۲+x=۰\to x(x+۱)=۰\to \begin{cases} x=..... \\ x=..... \end{cases} \end{cases}$$

مثال ۴۰: حدود m را چنان بیابید که معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشه حقیقی باشد.

پاسخ: اگر $x^۲=A$ در نظر بگیریم داریم:

$$A^۲-(m+۲)A+(m+۵)=۰$$

برای آن‌که معادله داده شده دارای چهار ریشه حقیقی باشد باید معادله فوق دو ریشهٔ متمایز مثبت داشته باشد. بنابراین سه مرحلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم:

$$(۱): \Delta>۰\to (m+۲)^۲-۴(m+۵)>۰\to m^۲+۴m+۴-۴m-۲۰>۰\to m^۲>۱۶\to m>۴ \text{ یا } m<-۴$$

$$(۲): S>۰\xrightarrow{S=\frac{-b}{a}} \frac{m+۲}{۱}>۰\to m>.....$$

$$(۳): P>۰\xrightarrow{P=\frac{c}{a}} \frac{m+۵}{۱}>۰\to m>.....$$

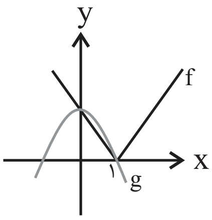
با اشتراک از ۳ بازه بالا داریم: ....

۲-۳- روش هندسی حل معادلات

توابع f و g با ضابطه‌های زیر مفروضند:

$$f(x)=|x-1| \qquad g(x)=1-x^2$$

الف هر یک از نمودارهای فوق را رسم کنید.



ب این دو تابع همدیگر را در چند نقطه قطع کرده‌اند.

در دو نقطه

پ نقاطی از این دو تابع بیابید که عرض آن‌ها یکسان است؟

$(1,0),(0,1)$

ت چه ارتباطی بین معادلهٔ $f(x)=g(x)$ و نقاط برخورد دو تابع وجود دارد؟

جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ در واقع همان طول نقاط برخورد دو تابع می‌باشد.

نتیجه یکی از روش‌های حل معادله $f(x)=g(x)$ که به کمک آن تعداد و مقدار تقریبی (گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است. روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌باشد. بدین ترتیب که نمودارهای توابع f و g را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. طول نقاط محل تلاقی، جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است.

تمرینات:

۱- اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+3)x+3a=0$ مساوی ۴ باشد. حاصل‌ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

۲- به ازای چه مقدار m دو ریشه معادلهٔ $3x^2+11x-2m=7$ عکس و قرینه هم‌اند.

۳- در معادلهٔ $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ حاصل $x_1^6+x_2^6$ چقدر است؟

۴- در معادله $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است.m چقدر است؟

۵- به ازای چه مقدار از m، مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(m-1)x=1$ برابر $\frac{13}{4}$ است.

۶- اگر در معادله $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $4a+2b=c$ و $9a+3b+c=0$ مجموع ریشه‌های این معادله چقدر است؟

۷- اگر در معادله درجه دوم $x^2+2ax+3a+1=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها از مجموع ریشه‌ها، ۴ واحد کمتر باشد. مجموع مربعات ریشه‌ها چقدر است؟

۸- اگر معادله درجه دوم $x^2-4x+k=0$ دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، ثابت کنید $P<4$.

۹- اگر به هر یک از جواب‌های معادله $x^2-x-1=0$ یک واحد اضافه کنیم به حاصل‌ضرب آن چقدر اضافه می‌شود؟

۱۰- در معادله $x^2-3x+1=0$ حاصل $x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2$ چقدر است؟

۱۱- جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt{2}+1)x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1=0$ را بدون حل مشخص کنید.

۱۲- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله مثبت و یکی از ریشه‌های معادله $x^2-5mx+16=0$ مکعب ریشه دیگر باشد.

۱۳- اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2-4x+2=0$ باشد. حاصل $x'^4x''+x'x''^4$ چقدر است؟

۱۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-4=0$ باشد. حاصل $A=(x_1^2-3x_1)^3+(x_2^2-3x_2)^3$ چقدر است؟

۱۵- اگر $x^2+4x+1=0$ باشد حاصل $(x+2)^4+1$ چقدر است؟

۱۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2-bx+1=0$ برابر $2-\sqrt{3}$ باشد، ریشه دیگر چقدر است؟

۱۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2+5x+2=0$ باشد. حاصل $\frac{\alpha^3\beta^2}{5\alpha+2}+\frac{\beta^3\alpha^2}{5\beta+2}$ چقدر است؟

۱۸- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2-5x+2=0$ باشد. حاصل $A=(\alpha+\frac{2}{\beta})^2+(\beta+\frac{2}{\alpha})^2$ چقدر است؟

۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشد. حاصل $\alpha^3+14\beta$ چقدر است؟

۲۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x-1=0$ باشد. حاصل $\alpha\beta^{-2}+\beta\alpha^{-2}$ چقدر است؟

۲۱- معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{1/5+\sqrt{2}}$ و $\sqrt{1/5-\sqrt{2}}$ است. به صورت $ax^2+bx+c=0$، نشان دهید c, b, a هر سه صحیح‌اند.

۲۲- اگر بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(2m-3)x+m-1=0$ رابطه $3x_1-5x_1x_2+2x_2=0$ برقرار باشد، مقدار m چقدر است؟

۲۳- معادله درجه دومی را بنویسید که بین ریشه‌های آن رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \alpha^{۲}+\beta^{۲}=۵ \\ \dfrac{۱}{\alpha}+\dfrac{۱}{\beta}=\dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

۲۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^{۲}-x-۱=۰$ و $\dfrac{۱}{\alpha^{۳}}+\dfrac{۱}{\beta^{۳}}$ ریشه‌های $x^{۲}+kx-۸=۰$ باشند، مقدار k چقدر است؟

۲۵- معادله‌ای را بیابید که جواب‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $۳x^{۲}-۵x-۴=۰$ باشد.

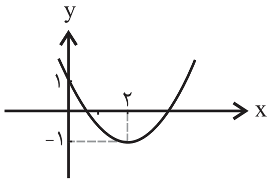
۲۶- معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن ۵ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+x-۳=۰$ باشد.

۲۷- ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-bx+c=۰$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $x^{۲}-x-۱=۰$ است. b کدام است؟

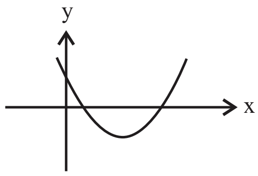
۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲}+kx+۱=۰$ باشند به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۱=۰$ به صورت $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ است.

۲۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲}-۲x-۱=۰$ باشد. معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن $\dfrac{\alpha^{۲}-۲\alpha}{\beta}$ و $\dfrac{\beta^{۲}-۲\beta}{\alpha}$ باشد.

۳۰- با توجه به نمودار $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ضرایب a,b,c را تعیین کنید.



۳۱- در شکل زیر سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است. علامت ضرایب a,b,c و تعداد صفرهای $f(x)=۰$ را تعیین کنید.

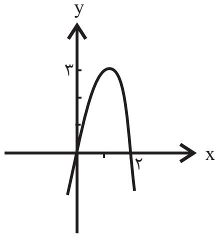


۳۲- بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱$ را تعیین کنید.

۳۳- صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، ۳ و ۱ می‌باشد و تابع محور عرض‌ها را در ۶ قطع کرده است، کم‌ترین مقدار y را بیابید.

۳۴- اگربیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=(m-۲)x^{۲}+۳x+m+۲$، صفر باشد، m چقدر است؟

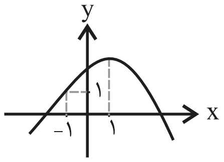
۳۵- نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت روبه‌رو است . مقادیر a,b,c را بیابید.



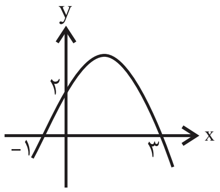
۳۶- مقدار m را چنان بیابید که نمودار تابع $y = x(۲x + m - ۱) + ۱$ فقط یک صفر داشته باشد.

۳۷- حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع $y = (m + ۲)x^۲ + ۴x + m - ۱$ دو صفر داشته باشد.

۳۸- در سهمی شکل روبه‌رو به معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ اگر $a - b = -۳$ باشد آن‌گاه $f(۱)$ را بیابید.



۳۹- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به صورت روبه‌رو است. مختصات رأس‌سهمی را بیابید.



۴۰- به ازای چند مقدار صحیح a تابع $f(x) = ax^۲ + ۲(a + ۲)x + ۲a + ۷$ حداقل یک صفر دارد.

۴۱- اگر قدرمطلق تفاضل صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = -x^۲ + x + m$ برابر ۳ باشد. بیش‌ترین مقدار تابع چقدر است؟

۴۲- محور تقارن سهمی $f(x) = ax^۲ + ۴x + k$ منحنی را در دو نقطه به عرض -۲ قطع می‌کند. فاصله بین صفرهای تابع چقدر است؟

۴۳- در تابع $f(x) = x^۲ - mx + m = ۰$ حدود m را چنان بیابید که $f(x) = ۰$ فاقد ریشه باشد.

۴۴- اگر مساحت مثلثی که دو رأس آن روی صفرهای تابع $y = x^۲ - kx + ۱$ و رأس دیگر محل برخورد تابع با محور عرض‌ها است، برابر ۱ باشد، مقدار k چقدر است؟

۴۵- اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ - (a - ۴)x + \frac{۹}{۴}$ فقط از ناحیه چهارم عبور نکند، حدود a را بیابید.

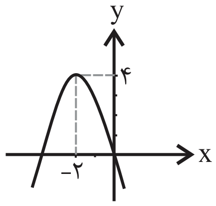
۴۶- اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۲ + x + k^۲ - ۱$ صفر باشد، صفر دیگر چقدر است؟

۴۷- حدود m را چنان بیابید تا هیچ نقطه‌ای از تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + m$ دارای فاصله ۵ از محور طول‌ها نباشد.

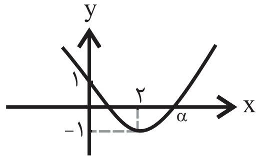
۴۸- حدود a را چنان بیابید که تابع درجه دوم $f(x) = (a - ۱)x^۲ - ۲\sqrt{۳}x + (a + ۱)$ از ناحیه سوم و چهارم عبور نکند.

۴۹- اگر $۲\alpha + ۱$ و $۲\beta + ۱$ صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ۲x(x + ۲) - ۳$ باشد. تابعی را بیابید که صفرهای آن $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشد.

۵۰- با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ مقدار a چقدر است؟



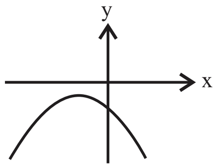
۵۱- با توجه به نمودار تابع درجه دوم زیر مقدار α چقدر است؟



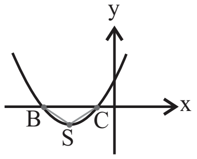
۵۲- اگر α و β صفرهای تابع $f(x)=x^2-4x-1$ باشد. حاصل عبارت زیر را بدون محاسبه S و P و مقادیر α و β تعیین کنید.

$$A=\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

۵۳- حدودm را چنان بیابید که نمودار تابع $y=mx^2-4\sqrt{2}x+m-2$ به صورت زیر باشد:



۵۴- نمودار تابع $y=5x^2+12x+a$ به صورت زیر است. اگر مثلث SBC در رأس S قائمه باشد، مقدار a چقدر است؟



۵۵- نمودار تابع $f(x)=x^2-2x-8$ را باید حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کرد تا صفرهای تابع هر دو منفی شود.

۵۶- در صورتی که منحنی تابع $y=2x^2+ax+a-\frac{3}{2}$ محور طول‌ها را در طرفین محور y ها قطع کند حدود a را بیابید.

۵۷- اگر در تابع $f(x)=2x^2+bx+6$، $f(x)=0$ فقط یک ریشه مثبت داشته باشد، b چقدر است؟

۵۸- علامت ریشه‌های $-6x^2+2x+k^2+3=0$ را بدون حل معادله تعیین کنید.

۵۹- به ازای کدام مقدارm معادله درجه دوم $(m^2+1)x^2-3mx+m-2=0$ دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

۶۰- به ازای جمیع مقادیر مختلف k، علامت ریشه‌های معادله $(k^2+1)^2x^2-(k+1)x-1=0$ را بدون تعیین ریشه‌ها مشخص کنید.

۶۱- کدامیک از توابع زیر به ازای جمیع مقادیر k محور طول‌ها را در دو نقطه با طول منفی قطع می‌کند.

۱) $f(x)=x^2+kx+k^2+1$
۲) $f(x)=x^2+(k+1)x+k-2$
۳) $f(x)=x^2-(k^2+1)x+k^2$
۴) $f(x)=x^2+(k^2+3)x+k^2+2$

۶۲- حدودm را چنان بیابید که تابع $f(x)=x^2-x+m$ محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند.

۶۳- به ازای جمیع مقادیر مختلف k علامت ریشه‌های معادله $(-x-1)(x-3)+2+k^2=0$ را تعیین کنید.

۶۴- معادله زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3}-2\right)^2-11\left(\frac{x^2}{3}-2\right)+10=0$$

۶۵- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله زیر را بیابید.

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$$

۶۶- ریشه‌های معادله $x^4-36x^2+49=0$ را بیابید.

۶۷- معادلهٔ $x^4+3x^2=\sqrt{m-1}+2$ دارای چند ریشه حقیقی است.

۶۸- حاصل‌ضرب جواب‌های حقیقی معادله $(x^2+3x+1)^2+x^2+3x=1$ چقدر است؟

۶۹- معادله $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=144$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۷۰- معادله $(x+2)(x^2+1)(x-2)=1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۷۱- حدود b را چنان بیابید که معادله $2x^4+bx^2-bx-2$ فقط دو ریشه حقیقی داشته باشد.

۷۲- به ازای کدام مقادیر a معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است.

۷۳- اگر در تجزیه $f(x)=x^3+2x^2-ax-6$، $(x-2)$ وجود داشته باشد، تمام صفرهای تابع $f(x)$ را بیابید.

۷۴- نمودار تابع $f(x)=x^3+ax+b$ و خط $y=-2x+b$ در نقطه‌ای به طول یک، یکدیگر را روی محور طول‌ها قطع می‌کنند حاصلضرب طول دو نقطه تقاطع دیگر را بیابید.

۷۵- اگر نمودار تابع $f(x)=2x^3-5x^2-x+m$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند. صفرهای دیگر تابع $f(x)$ رابیابید.

۷۶- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را به روش هندسی بدست آورید.

الف $|x|=1$

ب $x^2+|x-2|=4x+2$

پ $\frac{1}{x}=x-2$

ت $|x|=x-2$

تست‌های درس دوم (معادلات درجه دوم)

۲۹- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله $y=2x-4$ بر منحنی به معادله $y=(m+3)x^2+mx$، مماس است؟ (سراسری-ریاضی ۹۰)

۱) ۱۸ و ۲- ۲) ۲۲ و ۲- ۳) ۲۲ و ۲ ۴) ۱۱ و ۴

۳۰- اگر β,α ریشه‌های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری-ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۳۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری-ریاضی ۹۲)

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

۳۲- اگر β,α ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟ (سراسری-ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۳۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادله $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟ (سراسری-ریاضی ۹۵)

۱) $m>2$ ۲) $-1<m<2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۳۴- به ازای کدام مقدار a، معادله درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (سراسری- ریاضی ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

۳۵- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟ (سراسری- ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶۱۴

۳۶- اگر β,α ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ به صورت $\left\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\right\}$ است؟ (سراسری خارج- ریاضی ۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۳۷- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری خارج-ریاضی ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۸- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (سراسری خارج- ریاضی ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۳۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+(a+۳)x-۱$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟
(سراسری خارج- ریاضی ۹۲)

۱) $a<-۹$
۲) $a<-۳$
۳) $a>-۱$
۴) $-۳<a<۰$

۴۰- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+۲)x^{۲}+۳x+۱-m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟
(سراسری خارج- ریاضی ۹۵)

۱) $m>۱$ یا $m<-۲$
۲) $-۲<m<۱$
۳) فقط $m<-۲$
۴) فقط $m>۱$

۴۱- به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $۸x^{۲}-mx-۸=۰$ توان سوم ریشه‌های معادله $۲x^{۲}-x-۲=۰$ می‌باشد؟
(سراسری خارج- ریاضی ۹۶)

۱) ۹
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۵

۴۲- کدام یک از معادلات زیر یکی از ریشه‌هایش $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ می‌باشد؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $x^{۴}+۱۰x^{۲}+۱=۰$
۲) $x^{۴}-۱۰x^{۲}-۱=۰$
۳) $x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱=۰$
۴) $x^{۴}+۱۰x^{۲}-۱=۰$

۴۳- کدام یک از معادلات زیر ریشه‌هایش ۲ واحد از ریشه‌های معادله $x^{۲}+mx-m-۱=۰$ کمتر است؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $x^{۲}-(m+۴)x+m+۳=۰$
۲) $x^{۲}+(m+۴)x-m-۳=۰$
۳) $x^{۲}+(m+۴)x+m+۳=۰$
۴) $x^{۲}-(m+۴)x-m-۳=۰$

۴۴- دو برابر عددی از عدد دیگر شش واحد بیشتر است. اگر حاصل‌ضرب آنها کمترین باشد، قدر مطلق تفاضل دو عدد کدام است؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) $\frac{۹}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۵- اگر α,β ریشه‌های معادله $x^{۲}+۳x-۱=۰$ باشند حاصل عبارت $\frac{۱}{\beta^{۳}+۳\beta^{۲}+۲}+\frac{۱}{\alpha^{۳}+۳\alpha^{۲}+۲}$ کدام است؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۶- کدام یک از معادلات زیر ریشه‌هایش از مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۱=۰$، ۱ واحد کمتر است؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) $x^{۲}-۵x+۵=۰$
۲) $x^{۲}+۵x-۵=۰$
۳) $x^{۲}+۵x+۵=۰$
۴) $x^{۲}-۵x-۵=۰$

۴۷- ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۳}-۳x^{۲}+ax+b=۰$، عکس ریشه‌های معادلهٔ $cx^{۳}+dx^{۲}-۹x+۶=۰$ می‌باشد. حاصل $\frac{a+b}{c+d}$ کدام است؟ $(ab\neq ۰)$
(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۴۸- اگر α,β ریشه‌های $۲x(۲-x)=-۳$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\frac{۱}{\beta^{۲}}$ و $\frac{۱}{\alpha^{۲}}$ می‌باشد؟
(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۱) $۹x^{۲}-۲۸x-۴=۰$
۲) $۹x^{۲}-۲۸x+۴=۰$
۳) $۹x^{۲}+۲۸x-۴=۰$
۴) $۹x^{۲}+۲۸x+۴=۰$

۴۹- اگر $۴x+۳y=۷$ باشد، کمترین مقدار $x^۲+y^۲$ چه عددی است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۸}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴۹}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴۹}$

۵۰- اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲+x-۱=۰$ و $\frac{۲\alpha}{\beta}$ و $\frac{۲\beta}{\alpha}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+kx+۴=۰$ باشند، مقدار k کدام است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۵۱- ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^۲+۵x+a^۲=۶$ معکوس یکدیگرند. اختلاف این دو ریشه کدام است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۲- اگر $۲\alpha+۱$ و $۲\beta+۱$ ریشه‌های معادله‌ی $۲x(x+۲)=۳$ باشند، کدام معادله ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

۱) $۸x^۲+x-۳=۰$ ۲) $۸x^۲-x-۳=۰$ ۳) $۳x^۲+۱۶x+۸=۰$ ۴) $۳x^۲-۱۶x+۸=۰$

۵۳- اگر به هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۵x-k=۰$ دو واحد اضافه کنیم به حاصل‌ضرب آن‌ها چقدر اضافه می‌شود؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۶)

۱) -۱۸ ۲) ۱۸ ۳) -۹ ۴) ۹

۵۴- به ازای کدام مقادیر a هر دو نقطه تلاقی منحنی‌های $y=x^۲+ax$ و $y=ax^۲-x+۲$ در ناحیه اول هستند؟ (سنجش- ریاضی ۹۱)

۱) $a<۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $-۱<a<۲$ ۴) $-۲<a<۱$

۵۵- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم $mx^۲+۵x+m^۲=۶$ معکوس هم‌اند؟ (سنجش – ریاضی ۹۱)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۶- معادله $x^۴+m(x^۲+۳)=m^۲-۲x^۲$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m دو جواب حقیقی دارد؟ (سنجش – ریاضی ۹۱)

۱) $m>۳$ یا $m<۰$ ۲) $۰<m<۳$ ۳) $-۲<m<۳$ ۴) $۳<m<۵$

۵۷- در معادله درجه دوم $۲x^۲-۵x+m=۱$ به ازای کدام مقدار m مجموع مکعب‌های دو ریشه حقیقی برابر ۵ است؟ (سنجش – ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۲۳}{۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۹}{۱۲}$

۵۸- به ازای کدام مقدار m منحنی $y=x^۲-(۲m+۱)x+m^۲-۴$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟ (سنجش – ریاضی ۹۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}<m<۲$ ۲) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $m>۲$

۵۹- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله $۲x^۲+۳x=m$ دو واحد از ریشه‌های معادله $۲x^۲-۵x-۱=۰$ کمتر است؟

(سنجش – ریاضی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰- به ازای کدام مقدار a قدر مطلق تفاضل جذر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-(a+۱)x+۲a=۰$ برابر $\sqrt{۳}$ است؟

(سنجش – ریاضی ۹۲)

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۶۱- به ازای کدام مقادیر m معادله $2x^2-(m+1)x+m=\frac{1}{2}$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (سنجش –ریاضی ۹۳)

۱) $-1<m<1$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $\frac{1}{2}<m<5$ ۴) $m>5$

۶۲- به ازای کدام مقدار a کمترین مقدار تابع $y=x^2+ax+a^2-12$ روی محور x ها است؟ (سنجش – ریاضی ۹۳)

۱) 4 ۲) -4 ۳) ± 4 ۴) $\pm 2\sqrt{3}$

۶۳- به ازای کدام مقدار a در معادله درجه دوم $9x^2-25ax+4a=0$ قدر مطلق تفاضل جذر ریشه‌ها برابر $\frac{1}{6}$ است؟ (سنجش – ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶۴- اگر ریشه‌های حقیقی معادله $5x^4-42x^2=27$ برابر x_2 و x_1 باشند مجموعه ریشه‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{2}x_1+1,\frac{1}{2}x_2+1\right\}$ است؟ (سنجش - ریاضی ۹۴)

۱) $2x^2-4x=3$ ۲) $4x^2-8x=5$ ۳) $4x^2+8x=5$ ۴) $2x^2+4x=7$

۶۵- به ازای کدام مقادیر m معادله $x^3+3x^2+(m-6)x-m+2=0$ دارای دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت است؟ (سنجش – ریاضی ۹۴)

۱) $m>2$ ۲) $-2<m<6$ ۳) $2<m<6$ ۴) $1<m<2$

۶۶- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $f(x)=x^2+ax+2a-3$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند؟ (سنجش – ریاضی ۹۴)

۱) $a<0$ ۲) $a<\frac{2}{3}$ ۳) $2<a<6$ ۴) هیچ مقدار a

۶۷- معادله درجه دوم $(m+2)x^2+4x+m-1=0$، به ازای کدام مقادیر m، دو ریشه منفی دارد؟ (سنجش – ریاضی ۹۵)

۱) $-2<m<1$ ۲) $-3<m<2$ ۳) $-3<m<-2$ ۴) $1<m<2$

۶۸- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $6(4)^{\frac{2}{x}}-13(6)^{\frac{2}{x}}+6(9)^{\frac{2}{x}}=0$ کدام است؟ (سنجش – ریاضی ۹۵)

۱) -1 ۲) 1 ۳) -4 ۴) 4

۶۹- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ است؟ (سنجش – ریاضی ۹۵)

۱) 2 ۲) -2 ۳) 6 ۴) -6

۷۰- به ازای کدام مقادیر m، معادله $(m+2)x^2-4x+(m+2)=0$ دو ریشه در فاصله $(0,2)$ دارد؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

۱) $-1<m<-\frac{2}{5}$ ۲) $-4<m<0$ ۳) $-\frac{2}{5}<m<0$ ۴) $-4<m<-2$

۷۱- به ازای چه مقادیری از a معادله‌ی $3x+a=|3x+1|$ جواب ندارد؟

۱) $a<1$ ۲) $a>-1$ ۳) $a<3$ ۴) $a>1$

۷۲- تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2+|x-1|=2x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

۳-۱- معادلات شامل عبارات گویا

شخصی به ازای ۶۰/۰۰۰ تومان مقداری پارچه خرید اگر با همین مبلغ ۳ متر پارچه بیشتر گرفته بود. قیمت هر متر ۱۰۰۰ تومان کمتر می‌شد معادله‌ای تشکیل دهید که به کمک آن طول پارچه برحسب متر بدست آید و سپس آن را حل کنید.

قیمت هر متر پارچه خریداری شده $\frac{\text{کل پارچه خریده شده}}{\text{مبلغ پرداختی}} = \frac{x\ \text{متر}}{۶۰۰۰۰} = \frac{۱\ \text{متر}}{\square} \Rightarrow \square = \frac{۶۰۰۰۰}{x}$

قیمت هر متر پارچه در مرتبه دوم بار دوم: $\frac{(x+۳)}{۶۰۰۰۰} = \frac{۱\ \text{متر}}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{۶۰۰۰۰}{x+۳}$

با توجه به فرض مسئله قیمت هر متر پارچه در مرتبه اول ۱۰۰۰ تومان بیشتر از قیمت هر متر پارچه در مرتبه دوم است بنابراین:

$$\square - \Delta = ۱۰۰۰ \Rightarrow \frac{۶۰۰۰۰}{x} - \frac{۶۰۰۰۰}{x+۳} = ۱۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰} \frac{۶۰}{x} - \frac{۶۰}{x+۳} = ۱$$

اگر به معادله بدست آمده توجه کنید این معادله یک تساوی از عبارت‌های گویا است به همین دلیل به این گونه معادلات، معادلات گویا **گفته می‌شود.**

نکته: برای حل معادلات گویا کافی است طرفین را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم. معمولاً بعد از ضرب، معادله به یک معادله چند جمله‌ای از درجات ۱ یا ۲ تبدیل می‌شود.

تذکر ۱: اگر برخی از جواب‌های معادله با شرایط مسئله در محیط پیرامون مطابقت نداشته باشد این جواب قابل قبول نیست.

$$\frac{۶۰}{x} - \frac{۶۰}{x+۳} = ۱ \xrightarrow[\times x(x+۳)]{\text{باضریب طرفین در ک.م.م مخرج‌ها}} \cancel{x}(x+۳) \times \frac{۶۰}{\cancel{x}} - x(\cancel{x+۳}) \times \frac{۶۰}{\cancel{x+۳}} = x(x+۳)$$

$$\to \cancel{۶۰x} + ۱۸۰ - \cancel{۶۰x} = x^۲ + ۳x$$

$$\to x^۲ + ۳x - ۱۸۰ = ۰ \to (x+۱۵)(x-۱۲) = ۰ \to \begin{cases} x+۱۵ = ۰ \to x = -۱۵ & \text{غیرقابل قبول (با شرایط مسئله مطابق نیست)} \\ x-۱۲ = ۰ \to x = ۱۲ \end{cases}$$

بنابراین شخص ۱۲ متر پارچه خریده است.

تذکر ۲: جواب‌های بدست آمده در معادلات گویا نباید مخرج کسرهای اولیه را صفر کند.

مثال: معادلهٔ $\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱} = \frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{x-۱}$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x-۱ = (x-۱) \\ x+۱ = (x+۱) \\ x^۲-۱ = (x-۱)(x+۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک.م.م مخرج‌ها}} (x-۱)(x+۱)$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}\xrightarrow{\times(x-1)(x+1)}\cancel{(x-1)}(x+1)\times\frac{1}{\cancel{x-1}}+(x-1)\cancel{(x+1)}\times\frac{1}{\cancel{x+1}}=\cancel{(x-1)(x+1)}\times\frac{x^2+1}{\cancel{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow (x+1)+(x-1)=x^2+1\to x^2-2x+1=0\to (x-1)^2=0\to x=1$$ غیرقابل قبول

تذکر هرگاه در معادلات کسری، دو کسر مساوی هم شوند. اگر مخرج‌ها یکسان است صورت‌ها را مساوی هم قرار دهید.

مثال ۲: معادلهٔ $\frac{-3}{2x^2-5x+2}=\frac{x}{x-2}+\frac{2}{2x-1}$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

$$\frac{2}{2x-1}+\frac{x}{x-2}=\frac{2(x-2)+x(2x-1)}{2x^2-5x+2}=\frac{2x-4+2x^2-x}{2x^2-5x+2}=\frac{2x^2+x-4}{2x^2-5x+2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{2}{2x-1}+\frac{x}{x-2}=\frac{-3}{2x^2-5x+2}\to\frac{2x^2+x-4}{\cancel{2x^2-5x+2}}=\frac{-3}{\cancel{2x^2-5x+2}}\to 2x^2+x-4=-3\to 2x^2+x-1=0$$

$$\xrightarrow[c=.....]{a=.....,b=.....}a+c=.....\to\begin{cases}x_1=-1\\x_2=........\end{cases}$$

پس معادله دارای .... است و گزینهٔ .... صحیح است.

تذکر: هرگاه در معادلات گویا، دو کسر باهم مساوی شوند و صورت‌های آن‌ها یکسان برای حل معادله کافی است یکبار صورت‌ها را مساوی صفر و بار دیگر مخرج‌ها را مساوی هم قرار دهیم.

مثال ۳: معادلهٔ $\frac{x^2-1}{x^3+3}=\frac{x^2-1}{x^3+4x^2-x}$ را حل کنید.

پاسخ: صورت‌های کسرهای معادلهٔ داده شده باهم برابرند پس داریم:

$$\begin{cases}x^2-1=0\to x^2=1\to x=.......\\x^3+4x^2-x=x^3+3\to 4x^2-x-3=0\xrightarrow[a+b+c=............]{a=......,b=......,c=.....}\begin{cases}x=1\\x=......\end{cases}\end{cases}$$

$x=....$ ، $x=....$ و $x=....$ مخرج دو کسر در معادله را صفر نمی‌کند پس جواب‌های بدست آمده همگی قابل هستند.

مثال ۴: پارامتر a را چنان بیابید که $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{2(a+5)}{x+5}=\frac{a+2}{x+2}+\frac{a+3}{x+3}$ باشد.

پاسخ: چون $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادلهٔ کسری فوق است پس می‌توان به جای x در معادله $\frac{1}{2}$ را قرار داد.

$$\frac{a+3}{....+3}+\frac{a+2}{....+2}=\frac{2(a+5)}{....+5}\to\frac{2(a+3)}{7}+\frac{2(a+2)}{5}=\frac{4(a+5)}{11}\to......................$$

تذکر: هرگاه در معادلات گویا، دو کسر باهم مساوی شوند می‌توان برای حل معادله طرفین وسطین کرد.

مثال ۵: معادلهٔ $\frac{x+5}{3x-7}=\frac{x+4}{3x-8}$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\frac{x+4}{3x-8}=\frac{x+5}{3x-7}\to(x+4)(3x-7)=(x+5)(3x-8)$$

$$\to\cancel{3x^2}-7x+12x-28=\cancel{3x^2}-8x+15x-40\to x=.........$$

مثال ۶: ۱۱کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰درصد با ۴ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند با تبخیر چند کیلوگرم آن غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد. *(سراسری خارج از کشور ۹۲)*

۱) $0/4$ ۲) $0/5$ ۳) $0/6$ ۴) $0/8$

پاسخ:

۱۱ کیلو رنگ با غلظت ۴۰ درصد $\to 11\times\frac{40}{100}=$ .... kg رنگ

۴ کیلو رنگ با غلظت ۷۰ درصد $\to 4\times\frac{70}{100}=$ .... kg رنگ

بنابراین روی هم $7/2\,kg=....+....$ رنگ دارد. حال اگر x کیلوگرم، میزان تبخیر باشد در این صورت داریم:

$$\frac{7/2}{15-x}=\frac{50}{100}\to 72=75-5x\to.......\to x=.................$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

تذکر: هرگاه در معادلات گویا، صورت با مخرج ساده شود می‌توان آن را ساده کرد.

مثال ۷: معادله $\frac{x^3-1}{x-1}=3$ را حل کنید.

پاسخ: صورت کسر را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و آن را با مخرج ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=3\to\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3\to x^2+x+1=3\to x^2+x-2=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}}\begin{cases}x=.....\\x=......\end{cases}$$

$x=.....$ قابل قبول نیست. زیرا ....

تذکر: گاهی اوقات با تغییر متغیر می‌توان یک معادله کسری را از طریق یک معادله درجه دوم حل کرد.

مثال ۸: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(\frac{x}{x+1})^2+(\frac{x}{x+1})-6=0$

ب) $\frac{x^2+2}{x^2+2x+1}+\frac{x^2+2x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}$

پاسخ:

الف) اگر $\frac{x}{x+1}=A$ بگیریم در این صورت معادلهٔ کسری به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A^{۲}+A-۶=۰\xrightarrow{\text{تجربه}}(A+۳)(A-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}A+۳=۰\rightarrow A=....\\A-۲=۰\rightarrow A=....\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x+۱}=-۳\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}.............\\\dfrac{x}{x+۱}=۲\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}.............\end{cases}$$

ب) $\dfrac{x^{۲}+۲}{x^{۲}+۲x+۱}=A$ بگیریم در این صورت معادلهٔ کسری به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A+\frac{۱}{A}=\frac{۵}{۲}\rightarrow\frac{A^{۲}+۱}{A}=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۲A^{۲}+.....=۵A\rightarrow ۲A^{۲}-.....+.....=۰\xrightarrow{\text{تجربه}}(۲A-۱)(A-۲)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}۲A-۱=۰\rightarrow A=\dfrac{۱}{۲}\\A-۲=۰\rightarrow A=۲\end{cases}$$

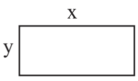
$$A=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}+۲x+۱}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}.............$$

$$A=۲\rightarrow\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}+۲x+۱}=۲\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}.............$$

تعریف نسبت طلایی: در ریاضیات و هنر هنگامی نسبت طلایی رُخ می‌دهد که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر نسبت کل به بخش بزرگتر باشد.

مثال ۹: اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۳۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد. طول و عرض زمین چقدر است؟

پاسخ: اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم داریم:



محیط مستطیل: $۲(x+y)=۳۲۰\rightarrow x+y=۱۶۰(۱)\rightarrow y=۱۶۰-x(۲)$

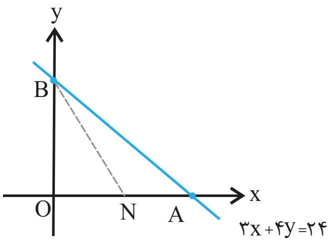
$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{x}{۱۶۰-x}=\frac{۱۶۰}{x}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$x^{۲}=(۱۶۰)^{۲}-۱۶۰x\rightarrow x^{۲}+۱۶۰x=(۱۶۰)^{۲}\rightarrow x^{۲}+۱۶۰x+(۸۰)^{۲}=(۱۶۰)^{۲}+(۸۰)^{۲}$$

$$\rightarrow(x+۸۰)^{۲}=۳۲۰۰۰\longrightarrow x+۸۰=۸۰\sqrt{۵}\rightarrow x=۸۰\sqrt{۵}-۸۰\rightarrow$$

$$y=۱۶۰-(۸۰\sqrt{۵}-۸۰)=۲۴۰-۸۰\sqrt{۵}$$

۳-۲- معادلات شامل عبارت‌های گنگ



خط $3x+4y=24$ محور طول‌ها را در A و محور عرض‌ها را در B قطع می‌کند و مثلث AOB را ایجاد می‌کند حال می‌خواهیم مختصات نقطهٔ N روی ضلع OA را چنان می‌یابیم که محیط مثلث $\overset{\triangle}{ANB}$ برابر ۲۲ شود.

$$y_A=0\to 3x+4(0)=24\to x_A=8\to A(8,0)$$
$$x_B=0\to 3(0)+4y=24\to y_B=6\to B(0,6)$$

واضح است که مختصات N را می‌توان به صورت $N(x,0)$ در نظر گرفت. پس داریم:

$$ON=x\to AN=8-x$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OBN}$: $NB^2=OB^2+ON^2\to NB^2=x^2+6^2\to NB=\sqrt{x^2+36}$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OAB}$: $AB^2=OA^2+OB^2\to AB^2=8^2+6^2=64+36=100\to AB=10$

طبق فرض مسئله: $AN+NB+AB=22\to(8-x)+\sqrt{x^2+36}+10=22\to\sqrt{x^2+36}=x+4$

به معادله بدست آمده توجه کنید در این معادله مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است به همین دلیل به این گونه معادلات، معادلات گنگ می‌گوییم.

نکته: برای حل معادلات رادیکالی، طرفین تساوی را یک یا چند بار به توان فرجه می‌رسانیم تا به معادله‌ای بدون رادیکال برسیم.

تذکر ۱: جواب‌های بدست آمده باید در معادله اصلی امتحان شود زیرا در عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب اضافه ایجاد شود.

$$\sqrt{x^2+36}=x+4\xrightarrow{\text{به‌توان}2}36+x^2=(x+4)^2\to 36+x^2=x^2+8x+16$$
$$8x=20\to x=\frac{20}{8}=2/5$$

پس مختصات $N(2/5,0)$ می‌باشد.

مثال ۱۰: معادلهٔ $2x-\sqrt{x+1}=4$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

$$2x-\sqrt{x+1}=4\to 2x-4=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{طرفین به توان}2}(2x-4)^2=\ldots\ldots\to 4x^2-\ldots\ldots+16=\ldots\ldots$$

$$\to 4x^2-17x+15=0\to\Delta=\ldots\ldots\to\begin{cases}x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\ldots\ldots\\[2mm] x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\ldots\ldots\end{cases}$$

$x=\ldots$ قابل قبول نیست چون اگر آن را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم رابطه برقرار نمی‌باشد. پس این معادله دارای.............. است، بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۱۱: معادلهٔ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2 \to \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان۲}} x+1=4-4\sqrt{x-1}+x-1 \to 4\sqrt{x-1}=2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان۲}} 16(x-1)=4 \to x-1=\frac{1}{4} \to x=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

حال $x=\frac{5}{4}$ را در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}-1}=\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

پس $x=\frac{5}{4}$ جواب معادله می‌باشد.

مثال ۱۲: معادلهٔ $\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x+1}=0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x+1}=0 \longrightarrow \sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+2x}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان۲}} (\cancel{x}-\cancel{1})-2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}+(\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{1})=\cancel{x^2}+\cancel{2x}$$

$$\to -2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}=0 \to \begin{cases} x-1=0 \to x=1 \\ x^2+x+1=0 \to \Delta=.... \to .... \end{cases}$$

حال $x=....$ را در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم، پس ....

مثال ۱۳: هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$

ب) $x-\sqrt{x-1}=3$

پاسخ:

الف) اگر $\sqrt[4]{x^3+8}=A$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$(\sqrt[4]{x^3+8})^2=A^2 \to \sqrt{x^3+8}=A^2$$

پس معادلهٔ داده شده به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$A^2+A=6 \to A^2+A-6=0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (A-....)(A+....)=0 \to \begin{cases} A=.... \\ A=.... \end{cases}$$

اما $A=....$ قابل قبول نیست چون...................

$$A=2 \to \sqrt[4]{x^3+8}=2 \xrightarrow{\text{به توان۴}} x^3+8=............ \to x^3=..... \to x=.....$$

ب) اگر $\sqrt{x-1}=A$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\sqrt{x-1}=A \xrightarrow{\text{به توان۲}} x-1=A^2 \to x=A^2+1$$

پس معادلهٔ داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(A^2+1)-A=3 \to A^2-A-2=0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (A-....)(A+....)=0 \to \begin{cases} A=.... \\ A=.... \end{cases}$$

$A=....$ غیرقابل قبول است. چون ......

$$A=2 \to \sqrt{x-1}=2 \xrightarrow{\text{به توان۲}} ....$$

مثال ۱۴: حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}$ کدام است؟ *(سراسری- ریاضی ۹۴)*

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ:

اگر $\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}=A$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}=A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^{۲}+۴x+۵=A^{۲} \to x^{۲}+۴x+۳=A^{۲}-۲ \quad (۱)$$

پس معادلهٔ داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵} \xrightarrow{(۱)} A^{۲}-۲=A \to A^{۲}-A-۲=۰ \to \begin{cases} A=.... \\ A=.... \end{cases}$$

که $A=....$ قابل قبول نیست، پس داریم:

$$A=۲ \to \sqrt{x^{۲}+۴x+۵}=۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ....=۴ \to x^{۲}+۴x+....=۰$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با $P=....$ بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

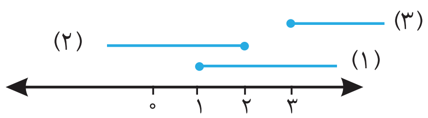
تذکر: گاهی اوقات قبل از حل معادله به مقادیری که می‌توان به جای متغیر در عبارات زیر رادیکال قرار داد (دامنه) توجه کنید.

مثال ۱۵: معادلهٔ $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲-x}=\sqrt{x-۳}$ را حل کنید.

پاسخ:

می‌دانیم زیر رادیکال (با فرجهٔ زوج) همواره باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x-۱\geq ۰ \to x\geq ۱ & (۱) \\ ۲-x\geq ۰ \to x\leq ۲ & (۲) \\ x-۳\geq ۰ \to x\geq ۳ & (۳) \end{cases}$$



با توجه به سه نامعادلهٔ داده شده xای را نمی‌توان پیدا نمود که در هر سه شرط (۱)، (۲)، (۳) صدق کند. پس این معادله جواب ندارد.

تذکر: هر عبارت رادیکال به فرم $\sqrt{A}$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

مثال ۱۶: معادلهٔ $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x-۵}+x=۳$ را حل کنید.

پاسخ:

معادله را به صورت $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x-۵}=۳-x$ مرتب می‌کنیم اولاً زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد پس داریم:

$$\begin{cases} x-۲\geq ۰ \to x\geq ۲ \\ x-۵\geq ۰ \to x\geq ۵ \end{cases} \longrightarrow x\geq ۵ \qquad (۱) \qquad \text{(یعنی جواب معادله باید از ۵ بزرگتر یا مساوی باشد)}$$

ثانیاً طبق تذکر $\sqrt{x-۲}\geq ۰$ و $\sqrt{x-۵}$ می‌باشد. پس $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x-۵}\geq ۰$ است. بنابراین باید $۳-x\geq ۰$ باشد. پس داریم:

$$۳-x\geq ۰ \to x\leq ۳ \qquad (۲)$$

اما اگر به (۱) و (۲) توجه کنیم این دو محدوده باهم اشتراکی ندارند یعنی xای نمی‌توان پیدا کرد. پس معادله جواب ....

مثال ۱۷: معادلهٔ $\sqrt{x-۲}+\sqrt[۳]{x-۱}=۱$ را حل کنید.

پاسخ: عبارت $x-۲$ که در زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد باید همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد. پس داریم: (۱) $x-۲\ge ۰ \to x\ge ۲$

با توجه به شرط بالا عبارت $x-۱\ge ۱$ است بنابراین $\sqrt[۳]{x-۱}\ge ۱$ (۱)

از طرفی طبق تذکر $\sqrt{x-۲}\ge ۰$ است. (۲)

باتوجه به (۱) و (۲) و معادله داده شده می‌توان نتیجه گرفت که باید $\sqrt{x-۲}=۰$ و $\sqrt[۳]{x-۱}=۱$ باشد. یعنی .... $=x$ جواب معادله است.

تذکر: هرگاه مجموع چند مقدار نامنفی برابر صفر شود، هر یک برابر صفر است.

مثال ۱۸: معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x^۲-x-۶}+\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{x^۳-x-۶}=۰$$

پاسخ: طبق تذکر بالا مجموع چند رادیکال که همگی نامنفی می‌باشند برابر صفر است. پس هر یک از آن‌ها برابر صفر می‌باشند.

$$\begin{cases}\sqrt{x^۲-x-۶}=۰\to x^۲-x-۶=۰\\ \sqrt{x^۲-۴}=۰\to x^۲-۴=۰\\ \sqrt{x^۳-x-۶}=۰\to x^۳-x-۶=۰\end{cases}$$

برای راحتی کار، چون جواب‌های مشترک در هر سه معادله جواب معادلهٔ اصلی است. پس فقط کافی است معادلهٔ $x^۲-۴=۰$ را حل نمود و جواب‌های آن را در دو معادلهٔ دیگر بررسی نمود.

$$x^۲-۴=۰\to x^۲=۴\to x=\pm ۲$$

$$x=۲\to\begin{cases}x^۲-x-۶=۰\xrightarrow{x=۲}......\\ x^۳-x-۶=۰\xrightarrow{x=۲}......\end{cases}\qquad \to x=۲....................$$

$$x=-۲\to\begin{cases}x^۲-x-۶=۰\xrightarrow{x=-۲}......\\ x^۳-x-۶=۰\xrightarrow{x=-۲}......\end{cases}\qquad \to x=-۲....................$$

مثال ۱۹: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید.

$$\sqrt{x-۳}+x^۲=۹$$

پاسخ: معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x-۳}+x^۲-۹=۰$$

می‌دانیم زیر رادیکال همواره نامنفی است. پس $x-۳\ge ۰$ یعنی $x\ge ۳$ است، طبق جدول تعیین علامت عبارت $x^۲-۹$ در محدوده $x\ge ۳$ همواره به صورت $x^۲-۹\ge ۰$ است. پس طبق تذکر مجموع دو عبارت نامنفی $\sqrt{x-۳}$ و $x^۲-۹$ برابر صفر است. پس هر یک برابر با صفر می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases}\sqrt{x-۳}=۰\\ x^۲-۹=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جواب مشترک هر دو معادله}} x=۳$$

مثال ۲۰: معادلهٔ $\sqrt{x+۶}-\sqrt{x+۷}=۱$ را حل کنید.

پاسخ:

$$x+۶<x+۷\to\sqrt{x+۶}<\sqrt{x+۷}\Rightarrow\sqrt{x+۶}-\sqrt{x+۷}<۰$$

پس $\sqrt{x+۶}-\sqrt{x+۷}\ne ۱$ بنابراین معادله جواب..................

تمرینات:

❖ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{x+1}{x^2+6x+8}=\frac{x^2-1}{3x^2+6x}$

۲) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x+2}{x-1}=3$

۳) $\frac{3x-2}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{3x^2-7x}{x^2-4}$

۴- به ازای چه مقدار k جواب معادلهٔ $\frac{3x}{x+1}=\frac{k}{x}+\frac{1}{x-1}$ برابر -2 است.

۵- یک لوله چدنی ۶۵ کیلوگرم وزن دارد. یک لوله چدنی دیگر طول آن ۳ متر بیشتر از اولی است و وزن آن در هر متر ۲ کیلوگرم وزن دارد. معادله‌ای بنویسید که به کمک آن طول چدن‌ها و وزن یک متر از هر کدام از چدن‌ها را بیابیم.

۶- دو فوارهٔ A و B مشترکاً حوضی را در ۱ ساعت پر می‌کنند. اگر فقط A باز شود حوض ۲۲ دقیقه دیرتر از وقتی پر می‌شود که فقط B باز باشد. معین کنید هر کدام از این فواره‌ها به تنها حوض را در چه مدتی پر می‌کند.

۷- برق‌کاری ۱۲ ساعت نیاز دارد تا خانه‌ای را سیم‌کشی کند دستیار او این کار را به تنهایی در ۱۶ ساعت انجام می‌دهد. برق‌کار بعد از ۴ ساعت کار به تنهایی، کار را ترک می‌کند و ادامه کار را به دستیارش می‌سپارد تا کار را تمام کند. چقدر طول می‌کشد که دستیار کار را تمام کند.

۸- یک خودرو پژو از تهران به سمت اهواز حرکت می‌کند و همزمان با آن یک پراید از اهواز به سمت تهران به راه می‌افتد. دو اتومبیل با سرعت‌های ثابت حرکت می‌کنند. طوری که پژو ۵ ساعت زودتر از پراید به مقصد خواهد رسید. اگر بعد از ۶ ساعت دو اتومبیل بهم برسند پراید چند ساعت دیگر باید براند تا به مقصد برسد.

۹- در یک آزمایش قصد داشتیم مقدار محلول آب‌نمک بسازیم که ۶ درصد آن نمک باشد اما به اشتباه ۱۸۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۵ درصد ساخته‌ایم. برای جبران اشتباهمان ۱ کیلوگرم نمک به این محلول اضافه کنیم اکنون چند کیلوگرم از آب را تبخیر کنیم تا به هدفمان برسیم.

۱۰- با ۱۸۰/۰۰۰ تومان می‌خواهیم تعدادی پرس چلوکباب بخریم. اگر بتوانیم برای هر پرس ۳۰۰۰ تومان تخفیف بگیریم. می‌توانیم ۱۰ پرس بیشتر بخریم بدون تخفیف با این پول می‌توانیم چند پرس چلوکباب بخریم.

❖ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱۱) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۹}$

۱۲) $\sqrt{\sqrt{x}-۲}=\sqrt{x-۸}$

۱۳) $\sqrt{x^۲-۴}=x-۱$

۱۴) $\sqrt{۲-x}+\sqrt{x-۴}=۲x+۱$

۱۵) $\sqrt{x^۲+۵}-\sqrt{x^۲+۶}=۳$

۱۶) $\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}+\sqrt{x-۱}=۰$

۱۷) $۴x-\sqrt{x^۲+۱}=x^۲+۴$

۱۸) $\sqrt{۱-۳x}+\sqrt{۱-۲x}=۱$

۱۹) $\sqrt[۵]{x-۱}+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt{x-۳}=۰$

۲۰) $\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

۲۱) $\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x}=۲$

۲۲- اگر $x=۴$ یک جواب برای معادله $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ باشد. جواب دیگر آن چقدر است؟

۲۳- نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ بیابید که از دو نقطه $A(۱,۱)$ و $B(۳,-۱)$ به یک فاصله باشد.

۲۴- معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ مفروض است.

الف) حدود m را چنان بیابید که فقط یک جواب برای x حاصل شود.

ب) حدود m را چنان بیابید که معادله دو جواب متمایز داشته باشد.

تست‌های درس سوم (معادلات گویا و گنگ)

۷۳- حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟ (سراسری - ریاضی ۹۴)

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۴- ۱۱ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (سراسری - خارج - ریاضی ۹۲)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۷۵- معادله‌ی $\sqrt{۳x+۷}-\sqrt{۳-x}=\sqrt{۲x+۱۰}+\sqrt{x-۳}$ در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب ندارد

۷۶- معادله‌ی $|x-۲|+\sqrt{x-۱}+۱=۰$ چند جواب دارد؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۷- معادله‌ی $(۹-x^۲)\sqrt{۲-x}=۰$ چند جواب دارد؟ (گزینه۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۸- معادله‌ی $\sqrt{۳x+۳}=\sqrt{x-۳}-۳$ چند ریشه دارد؟ (گزینه۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) جواب ندارد

۷۹- به ازای کدام مقدار a معادله‌ی $\sqrt{۳x^۲-۷x+۲}+\sqrt{۲x^۲+۴x-ax-۲a}=۰$ ، ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (سنجش ریاضی ۹۲)

۱) $۲,\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲,\frac{۳}{۲}$ ۳) $۴,-\frac{۱}{۳}$ ۴) $۴,\frac{۲}{۳}$

۸۰- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $\frac{-3}{2}=\frac{2}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x^2-2x}$ کدام است؟ (سنجش ـ ریاضی ۹۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۸۱- معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$ چند جواب دارد؟ (سنجش ـ ریاضی ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۸۲- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^2-4x+\sqrt{x}+2=0$ کدام است؟ (سنجش ـ ریاضی ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۸۳- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{2}=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}+\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$، کدام است؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -3 ۴) -2

۸۴- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $\frac{3}{2}=\frac{1}{x^2-2x-5}-\frac{1}{x^2-2x-2}$ کدام است؟ (سنجش- ریاضی ۹۵)

۱) ۲۲ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۸۵- معادلهٔ $\sqrt{2x+4}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2(x+3)}$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۸۶- معادلهٔ $1+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشهٔ منفی دارد.

۳) دو ریشه دارد. ۴) ریشه ندارد.

۸۷- معادلهٔ $\sqrt{x^2-4}+4=x(4-x)$ چند جواب دارد؟

۱) جواب ندارد ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۸- به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ $1=\frac{1}{x-1}+\frac{2a}{x-x^2}$ جواب مضاعف دارد؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) ۱

۸۹- معادلهٔ $x(\sqrt{x+2}-x)=0$ دارای چند جواب حقیقی می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب ندارد.

۹۰- اگر $x=-1$ جواب معادلهٔ $2x-\sqrt{3x-a}=-4$ باشد، کدام گزینه در مورد جواب‌های دیگر معادله، صحیح است؟

۱) فقط یک جواب منفی دارد. ۲) فقط یک جواب مثبت دارد.

۳) دو جواب منفی دارد. ۴) جواب دیگر ندارد.

۹۱- به ازای چند مقدار t، معادلهٔ $\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{t-1}{2x}$ جواب ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

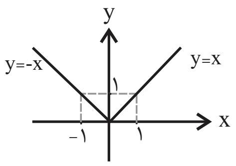
۹۲- تعداد ریشه‌های متمایز معادله $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۴-۱- رسم توابع قدر مطلق

در سال گذشته یاد گرفتیم که قدر مطلق هر عدد مانند x به صورت $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ تعریف می‌شود. بنابراین تابع $y=|x|$ یک تابع قطعه‌ای است و از دو ضابطه تشکیل شده است. نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



حال می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توان تابع $y=|x-2|+1$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد و آن را رسم نمود.

می‌دانیم طبق تعریف در عبارت $|u|$ وقتی u بزرگتر یا مساوی صفر است $|u|=u$ و وقتی u منفی است $|u|=-u$ می‌باشد. مثلاً

$$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|\xlongequal{\sqrt{3}-\sqrt{5}<0}\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$|5-\pi|\xlongequal{5-\pi\geq 0}5-\pi$$

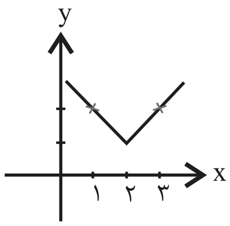
بنابراین برای آن‌که تابع $y=|x-2|+1$ را بتوان به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد باید عبارت داخل قدر مطلق یعنی $(x-2)$ را تعیین علامت کنیم.

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow |x-2|=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ -(x-2) & x<2\end{cases}$$

$$y=|x-2|+1=\begin{cases}(x-2)+1 & x\geq 2\\ -x-2+1 & x<2\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x-1 & x\geq 2\\ -x+3 & x<2\end{cases}$$

بنابراین:



مثال: هر یک از توابع زیر را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کنید.

الف) $y=2|x+1|-3$ ب) $y=|2x-3|$ پ) $y=x+\dfrac{x}{|x|}$ ت) $y=x^2-2|x|$

پاسخ:

الف)

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow |x+1|=\begin{cases}x+1 & x\geq -1\\ -x-1 & x<-1\end{cases}$$

$$y=2|x+1|-3=\begin{cases}2(x+1)-3 & x\geq -1\\ 2(-x-1)-3 & x<-1\end{cases}\rightarrow y=\begin{cases}\ldots\ldots & x\geq -1\\ \ldots\ldots & x<-1\end{cases}$$

ب

x		$\frac{3}{2}$	
$2x-3$			

$$\Rightarrow |2x-3| = \begin{cases} .... & x \geq \frac{3}{2} \\ .... & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

پ دقت می‌کنیم که این تابع در $x=0$ تعریف نشده است.

بنابراین:

x		0	
x			

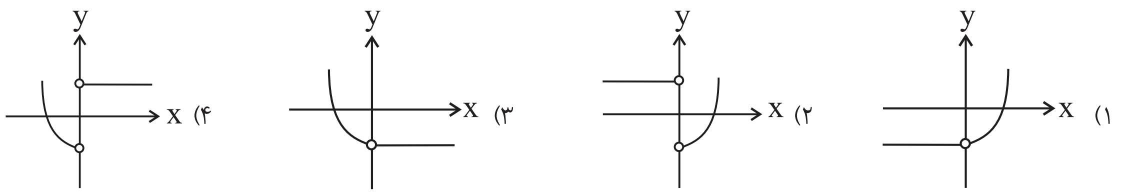
$$\Rightarrow |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x + \frac{x}{....} & x > 0 \\ x + \frac{x}{....} & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} .... & x \geq 0 \\ .... & x < 0 \end{cases}$$

ت با توجه به قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت که:

$$y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - .... & x \geq 0 \\ x^2 - (........) & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} .... & x \geq 0 \\ .... & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۲: نمودار تابع $y = x^2 + x|x| - \frac{x}{|x|}$ کدام است؟



پاسخ: با توجه به تابع $y = x^2 + x|x| - \frac{x}{|x|}$ واضح است که تابع در $x=0$ تعریف نشده است. پس داریم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 + x(x) - \frac{x}{x} & x > 0 \\ x^2 + x(-x) - \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار قطعه‌ای بالا واضح است که نمودار آن به صورت گزینهٔ .... می‌باشد.

نکته: برای تبدیل تابع $y = |f(x)|$ به یک تابع قطعه‌ای در حالت کلی باید $f(x)$ را تعیین‌علامت کنیم.

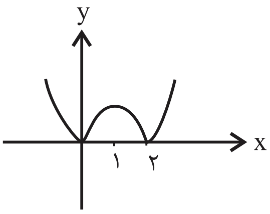
مثال ۳: تابع $y = |x^2 - 2x|$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل و سپس نمودار آن را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت $x^2 - 2x$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

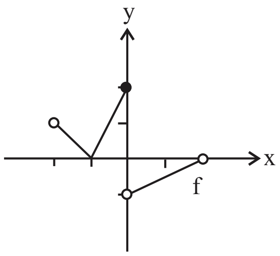
		۰	۲	
$x^۲-۲x$	+		−	+

$$\Rightarrow y=|x^۲-۲x|=\begin{cases}(x^۲-۲x) & x<۰\\ -(x^۲-۲x) & ۰\le x<۲\\ (x^۲-۲x) & x\ge ۲\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^۲-۲x & x<۰\\ -x^۲+۲x & ۰\le x<۲\\ x^۲-۲x & x\ge ۲\end{cases}$$



مثال ۴: با توجه به نمودار f نمودار تابع $y=\frac{|f|}{f}$ را رسم کنید.

پاسخ: با توجه به نمودار f می‌توان نتایج زیر را بدست آورد.



$۱)-۲<x\le ۰\ \ ; f\ge ۰\Rightarrow |f|=f$

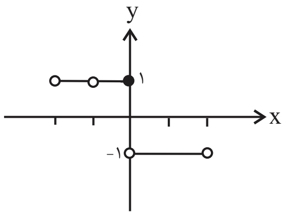
$۲)۰<x<۲\ ; f\le ۰\Rightarrow |f|=-f$

$۳)f(-۱)=۰\Rightarrow$ تابع $y=\frac{|f|}{f}$ در $x=-۱$ تعریف نشده است چون مخرج کسر برابر صفر می‌شود.

پس داریم:

$$y=\begin{cases}۱ & -۲<x\le ۰\ ,\ x\neq -۱\\ -۱ & ۰<x<۲\end{cases}$$

پس نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



مثال ۵: نمودار تابع $y=|x-|x-۴||$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کنید.

پاسخ: ابتدا $|x-۴|$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل می‌کنیم:

x		۴	
$x-۴$	−		+

$$|x-۴|=\begin{cases}x-۴ & x\ge ۴\\ -x+۴ & x\le ۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}x\ge ۴\to y=|x-|x-۴||=|x-x+۴|=|۴|=۴\\ x<۴\to y=|x+x-۴|=|۲x-۴|\end{array}$$

حال با توجه به $x<۴$ عبارت $(۲x-۴)$ را تعیین‌علامت می‌کنیم.

$$|۲x-۴|=\begin{cases}-۲x+۴ & x<۲\\ ۲x-۴ & ۲\le x<۴\end{cases}$$

پس ضابطه y به صورت قطعه‌ای به فرم زیر است:

$$y=|x-|x-۴||=\begin{cases}\text{..........} & x<۲\\ \text{..........} & ۲\le x<۴\\ \text{..........} & x\ge ۴\end{cases}$$

نکته: برای هر عدد حقیقی u، $\sqrt{u^{۲}}=|u|$ است.

مثال ۶: نمودار $y=\sqrt{۴x^{۲}-۴x+۱}-۱$ را رسم کنید.

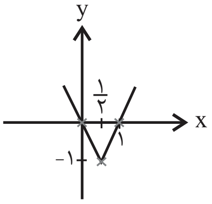
پاسخ:

$$\sqrt{۴x^{۲}-۴x+۱}-۱=\sqrt{(۲x-۱)^{۲}}-۱=|۲x-۱|-۱$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $y=|۲x-۱|-۱$ می‌باشد.

x		$\frac{۱}{۲}$	
$۲x-۱$	$-$	0	$+$

$$y=|۲x-۱|-۱=\begin{cases}۲x-۲ & x\geq \frac{۱}{۲}\\ -۲x & x<\frac{۱}{۲}\end{cases}\rightarrow$$



نکته: هرگاه تابعی شامل مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق باشد می‌توان با تعیین‌علامت هر یک از عبارت‌های داخل قدرمطلق تابع را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد.

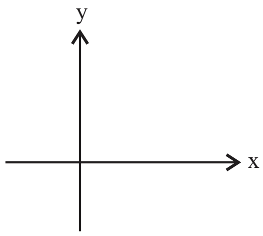
مثال ۷: تابع $y=|x-۱|-|x-۲|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا دو عبارت $(x-۱)$ و $(x-۲)$ را تعیین‌علامت می‌کنیم، بنابراین داریم:

x		۱		۲	
$x-۱$	$-$	0	$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$	0	$+$

$$y=\begin{cases}-(x-۱)+(x-۲) & x<۱\\ (x-۱)+(x-۲) & ۱\leq x<۲\\ (x-۱)-(x-۲) & x\geq ۲\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}\dots\dots\dots\dots & x<۱\\ \dots\dots\dots\dots & ۱\leq x<۲\\ \dots\dots\dots\dots & x\geq ۲\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



نکته: اگر ضابطهٔ یک تابع به صورت مجموع یا تفاضل چند جمله‌ای‌های درجه اول و عبارت‌های قدرمطلق که داخل آن درجه اول است باشد برای رسم نیاز به چند ضابطه‌ای کردن تابع نیست و کافی است ریشه‌های داخل قدرمطلق را پیدا کرده و مقدار تابع را به ازای آن‌ها بدست آوریم و سپس یک نقطه قبل از کوچک‌ترین ریشه داخل قدرمطلق و یک نقطه بعد از بزرگ‌ترین ریشه داخل قدرمطلق پیدا کرده و نقاط بوجود آمده را بهم وصل کنید تا نمودار رسم شود.

مثال ۸: هر یک از نمودارهای زیر را بدون تبدیل تابع به یک تابع قطعه‌ای رسم کنید و برد هر یک را مشخص کنید.

الف) $y=۲x-|x-۱|$ ب) $y=x-|x-۲|+|x-۳|$ پ) $y=||x|-۲|$

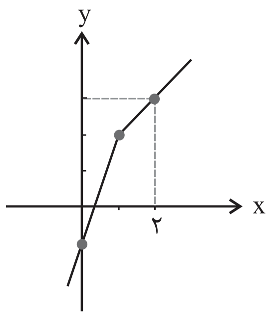
پاسخ:

الف ابتدا ریشهٔ داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم.

$x-۱=۰ \rightarrow x=۱ \rightarrow$

x	۰	۱	۲
y	$۲(۰)-\lvert۰-۱\rvert=-۱$	$۲(۱)-\lvert۱-۱\rvert=۲$	$۲(۲)-\lvert۲-۱\rvert=۴-۱=۳$

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود که بُرد این تابع برابر با $\mathbb{R}$ می‌باشد.



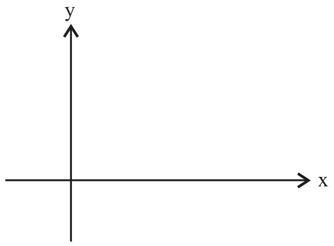
ب ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌های تابع $y=x-\lvert x-۲\rvert+\lvert x-۳\rvert$ را بدست می‌آوریم:

$x-۲=۰ \rightarrow x=۲ \qquad x-۳=۰ \rightarrow x=۳$

x	۱	۲	۳	۴
y	....	....	....	....

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:

با توجه به نمودار برد تابع برابر .... است.



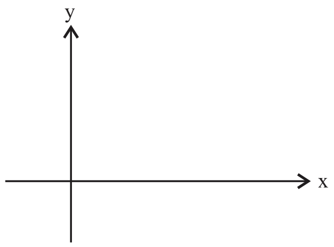
پ ابتدا ریشه‌های داخل هر قدرمطلق را بدست می‌آوریم.

$x=۰ \;;\; \lvert x\rvert-۲=۰ \rightarrow \lvert x\rvert=۲ \rightarrow x=\pm۲$

x	-۳	-۲	۰	۲	۳
y	....	....	....	....	....

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:

که با توجه به نمودار تابع برد آن به صورت .... است.



مثال ۹: مساحت مثلث محصور بین نمودار تابع $y=\lvert ۳-\lvert x+۱\rvert\rvert$ و محور x ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

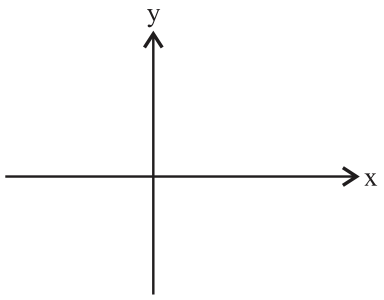
$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱ \quad ; \quad ۳-\lvert x+۱\rvert=۰ \rightarrow \lvert x+۱\rvert=۳$

$\nearrow x+۱=۲ \rightarrow x=۲$

$\searrow x+۱=-۳ \rightarrow x=-۴$

x	-۵	-۴	-۱	۲	۳
y	....	....	....	....	....

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



$S = ...$

پس گزینهٔ ...... صحیح است.

۴-۲- ویژگی‌های قدرمطلق

در سال گذشته با مفهوم قدرمطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید در این درس به برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق می‌پردازیم.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف **فاصلهٔ $c(۳)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟.........................**

ب **فاصلهٔ $B(-۶)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟.........................**

پ **فاصلهٔ $A(x)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟**

برای پاسخ به این قسمت باید در دو شرط مسئله را حل کنیم، اگر $x \geq ۰$ باشد، $AO = x$ است اما اگر $x \leq ۰$ باشد $AO = -x$ است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(x)$ از مبدأ برابر است با:

$$AO = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x \leq ۰ \end{cases}$$

نتیجه با توجه به تعریف قدرمطلق می‌توان گفت فاصلهٔ $A(x)$ تا مبدأ یعنی AO برابر $|x|$ است.

ویژگی‌های قدرمطلق:

ویژگی ۱:

الف اگر عددی نامنفی باشد، قدرمطلق آن برابر خود آن است.

به عبارت دیگر:

$$x \geq ۰ \rightarrow |x| = x$$

ب اگر عددی منفی باشد، قدرمطلق آن برابر قرینه آن است.

به عبارت دیگر:

$$x < ۰ \rightarrow |x| = -x$$

مثال ۱۰: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ باشند حاصل $A = \big||\alpha| - |\beta|\big|$ را بدست آورید.

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ:

$$3x^2-5x-1=0 \to \begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=...... \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=...... \end{cases}$$

چون $P<0$، α و β هم علامت نیستند پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1)\ \alpha>0\ ,\ \beta<0 \to \big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha-(-\beta)|=|\alpha+\beta| \overset{S>0}{=\!=} \alpha+\beta=....$$

$$2)\ \alpha<0\ ,\ \beta>0 \to \big||\alpha|-|\beta|\big|=|-\alpha-\beta|=|-(\alpha+\beta)| \overset{S>0}{=\!=} \alpha+\beta=....$$

پس گزینه‌ی .... صحیح است.

ویژگی ۲:

قدر مطلق هر عدد مانند x یعنی فاصله x تا مبدأ بنابراین، این مقدار همواره مثبت یا صفر است.

به عبارت دیگر: $\forall x\in\mathbb{R} \to |x|\ge 0$

مثال ۱۱: برد تابع $y=3-2|x|$ را بیابید.

پاسخ:

$$|x|\ge 0 \xrightarrow{\times(-2)} -2(|x|)\le 0 \xrightarrow{+(3)} 3-2|x|\le 3 \to y\le 3 \Rightarrow R=(-\infty,....]$$

ویژگی ۳:

نقاطی که روی محور قرار دارند و فاصله‌اشان تا مبدأ برابر عدد مثبت a شود عبارتند از $x=a$ یا $x=-a$

به عبارت دیگر: $|x|=a \xrightarrow{a>0} x=a$ یا $x=-a$

مثال ۱۲: اگر از تساوی $2|x-1|-1=A$ دو مقدار مثبت برای x بدست آید محدوده A را بیابید.

پاسخ:

$$2|x-1|-1=A \to 2|x-1|=A+1 \to |x-1|=\frac{A+1}{2}$$

طبق ویژگی قبل باید $\frac{A+1}{2}>0$ باشد پس داریم: $\frac{A+1}{2}>0 \to A+1>0 \to A>-1 \quad (1)$

از طرفی برای x باید دو مقدار مثبت بدست آید پس داریم:

$$|x-1|=\frac{A+1}{2} \to \begin{cases} x=\dfrac{A+1}{2}+1=\dfrac{A+3}{2} \xrightarrow{\text{جواب مثبت}} \dfrac{A+3}{2}>0 \to A>-3 \quad (2) \\ x=-\dfrac{A+1}{2}+1=\dfrac{-A+1}{2} \xrightarrow{\text{جواب مثبت}} \dfrac{-A+1}{2}>0 \to A<1 \quad (3) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم پس $-1<A<1$ است.

ویژگی ۴:

اگر فاصله دو نقطه از مبدأ یکسان باشد، آن‌گاه دو نقطه با هم برابر و یا قرینه هم هستند.

به عبارت دیگر: $|x|=|y| \to x=y$ یا $x=-y$

تذکر: برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم. $|x|=|y| \leftrightarrow x^۲=y^۲$

ویژگی ۵:

جذر مربع هر عددی برابر با قدر مطلق آن عدد است.

به عبارت دیگر: $\sqrt{x^۲}=|x|$

مثال ۱۳: اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند و $\sqrt{x^۲+۴x+۴}=\sqrt{۴y^۲-۴y+۱}$ ثابت کنید $\sqrt{x^۲-۴xy+۴y^۲}=۳$

پاسخ:

$$\sqrt{x^۲+۴x+۴}=\sqrt{۴y^۲-۴y+۱} \rightarrow \sqrt{(x+۲)^۲}=\sqrt{(۲y-۱)^۲} \rightarrow |x+۲|=|۲y-۱|$$

پس دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

$۱)\ x+۲=۲y-۱ \rightarrow x-۲y=-۳$

$۲)\ x+۲=-۲y+۱ \rightarrow x+۲y=-۱$ غیرقابل قبول (چون x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

پس $x-۲y=-۳$ است. بنابراین داریم:

$$\sqrt{x^۲-۴xy+۴y^۲}=\sqrt{(x-۲y)^۲} \rightarrow |x-۲y|=|-۳|=۳$$

ویژگی ۶:

دو نقطه که نسبت به مبدأ قرینه باشند فاصله‌شان تا مبدأ یکسان است.

به عبارت دیگر: $|-x|=|x|$

مثال ۱۴: با توجه به ویژگی ۶ تساوی‌های زیر برقرار است.

الف) $|-x+۲|=|x-۲|$

ب) $|-x-۵|=|x+۵|$

ویژگی ۷:

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x.y|=|x|.|y|$

اثبات:

$$|x.y|=\sqrt{x^۲y^۲}=\sqrt{x^۲}.\sqrt{y^۲}=|x|.|y|$$

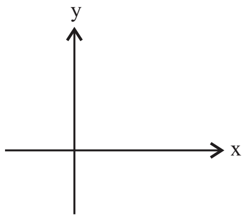
مثال ۱۵: نمودار تابع $y=\big||۳x|-|x|\big|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\big||۳x|-|x|\big|=\big||۳||x|-|x|\big|=\big|۳|x|-|x|\big|=\big|۲|x|\big|=۲|x|$$

که نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:

x	....	۰	....
y	....	....	....



مثال ۱۶: اگر $|x^۳-۸|<x^۲+۲x+۴$ باشد ثابت کنید $|x-۲|<۱$

پاسخ:

$$|x^۳-۸|\xlongequal{\text{تجزیه به کمک اتحاد چاق و لاغر}}|(x-۲)(x^۲+۲x+۴)|=|\ldots\ldots\ldots||\ldots\ldots\ldots|$$

از طرفی عبارت $x^۲+۲x+۴$ همواره مثبت است. پس:

$$|x-۲|(x^۲+۲x+۴)<x^۲+۲x+۴\xrightarrow{\div(\ldots\ldots\ldots)}|x-۲|<\ldots\ldots$$

نتیجه مربع قدر مطلق هر عدد حقیقی برابر مربع همان عدد است.

به عبارت دیگر: $|x|^۲=x^۲$

مثال ۱۷: با توجه به نامساوی $x^۲-|x|-۶<۰$ نشان دهید $|x|<۳$ است.

پاسخ:

$$x^۲-|x|-۶=|x|^۲-|x|-۶$$

حال اگر $|x|=a$ در نظر بگیریم عبارت بالا به صورت زیر ساده می‌شود.

$$a^۲-a-۶=(a-۳)(a+۲)\Rightarrow x^۲-|x|-۶=(|x|-۳)(|x|+۲)$$

با توجه به نامساوی $x^۲-|x|-۶<۰$ داریم: $(|x|-۳)(|x|+۲)<۰\xrightarrow{\text{عبارت}\ldots\ldots\text{همواره مثبت است}}|x|-۳<۰\to|x|<\ldots\ldots$

ویژگی ۸:

برای هر دو عدد حقیقی x و $(y\neq ۰)$ داریم: $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

تذکر برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x|\le|y|\leftrightarrow x^۲\le y^۲$

مثال ۱۸: اگر $x\neq ۱$ باشد، از نامساوی $\left|\frac{x}{x-۱}\right|<۱$ نتیجه بگیرید $x<\frac{۱}{۲}$ است.

پاسخ:

$$\left|\frac{x}{x-۱}\right|<۱\longrightarrow\frac{|x|}{|x-۱|}<۱\xrightarrow{\times|x-۱|}|x|<|x-۱|\longrightarrow|x|^۲<|x-۱|^۲\to x^۲<x^۲-\ldots+\ldots\to\ldots<۱\to x<\frac{۱}{۲}$$

ویژگی ۹:

الف) نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ کمتر یا مساوی عدد مثبت c باشد بازه $[-c,c]$ است.

به عبارت دیگر: $|x|\le c\xrightarrow{c>۰}-c\le x\le c$

ب) نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ بیشتر یا مساوی عدد مثبت c باشد به صورت $(-\infty,-c]\cup[c,+\infty)$ است.

به عبارت دیگر: $|x|\ge c\xrightarrow{c>۰}x\le -c$ یا $x\ge c$

مثال ۱۹: اگر $|a+1|<1-b$ باشد ثابت کنید. $|a+b|+|a-b+2|+b=|b-2|$

پاسخ:

$$|a+1|<1-b \to -1+b<a+1<1-b$$

بنابراین:

$$1)\ -1+b<a+1 \to a-b+2>0$$
$$2)\ -1+b<1-b \to 2b<2 \to b<1$$
$$3)\ a+1<1-b \to a+b<0$$

پس داریم:

$$\underbrace{|a+b|}_{(3)}+\underbrace{|a-b+2|}_{(1)}+b=(-a-b)+(a-b+2)+b=-b+2=-\underbrace{(b-2)}_{(2)}=|b-2|$$

ویژگی ۱۰:

برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$-|x|\le x\le |x|$$

اثبات: می‌دانیم که $|x|\le|x|$ حال اگر $|x|=k$ بگیریم داریم:

$$|x|\le k \to |x|\le k \to -k\le x\le k \xrightarrow{|x|=k} -|x|\le x\le |x|$$

مثال ۲۰: در هر یک از حالات زیر محدوده x را تعیین کنید.

الف) $x-|x|<0$ ب) $x+|x|>0$

پاسخ:

الف) برای آن‌که $|x|>x$ باشد باید $x<0$ باشد.

ب) برای آن‌که $|x|>-x$ باشد باید $x>0$ باشد.

ویژگی ۱۱: (نامساوی مثلثی)

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$|x+y|\le|x|+|y|$$

اثبات:

$$|x+y|=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}\le\sqrt{x^2+y^2+2|x||y|}\le\sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x||y|}\le\sqrt{(|x|+|y|)^2}\le|x|+|y|$$

مثال ۲۱: حداقل مقدار تابع f با ضابطهٔ $y=|x-2|+|4-x|$ را بدون رسم تعیین کنید.

پاسخ:

$$y=|x-2|+|4-x|\ \ge|(x-2)+(4-x)|=|2|=2\Rightarrow y\ge 2$$

پس کمترین مقدار تابع برابر .... است.

۴-۳- معادلات قدرمطلق

گفتیم که فاصلهٔ نقطه $A(x)$ تا مبدأ برابر $|x|$ است. حال می‌خواهیم فاصله دو نقطه روی محور را پیدا کنیم.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) فاصله دو نقطه $A(5)$ و $B(2)$ روی محور چقدر است؟ ....

ب فاصله دو نقطه $A(۷)$ و $B(-۱)$ روی محور چقدر است؟............................

پ فاصله دو نقطه $A(-۲)$ و $B(-۶)$ روی محور چقدر است؟..........................

ت فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x)$ و $B(y)$ روی محور چقدر است؟

در پاسخ به این قسمت باید مشخص کنیم x بزرگتر است یا y، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$AB=\begin{cases}x-y & x>y\\ ۰ & x=y\\ y-x & x<y\end{cases}$$

نتیجه فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x)$ و $B(y)$ روی محور اعداد برابر است با: $AB=|x-y|$

مثال ۲۲: عبارت «فاصله بین x و ۲ برابر ۵ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

پاسخ:

$|x-۲|=۵$

به تساوی‌های نظیر مثال (۱) که مجهول آن در قدرمطلق قرار دارد معادلات قدرمطلقی می‌گویند.

روش‌های جبری در حل معادلات قدرمطلق:

روش اول: گاهی اوقات می‌توان با استفاده از ویژگی‌های موجود در قدرمطلق، یک معادله قدرمطلقی را حل کرد.

مثال ۲۳: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x-۲|=۳$ ۲) $|x-۲|+|x^۲-۴|=۰$ ۳) $|۳x-۱|=|x-۷|$

۴) $\sqrt{x^۲+۴x+۴}-x=۲$ ۵) $(x-۱)^۲-۵|x-۱|+۶=۰$

پاسخ:

۱) $|x-۲|=۳\to\begin{cases}x-۲=۳\to x=..........\\ x-۲=-۳\to x=..........\end{cases}$

۲) چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است پس هر یک از عبارت‌ها برابر .... است.

$$\to\begin{cases}x-۲=۰\to x=.......... & (۱)\\ x^۲-۴=۰\to x=..........\ \text{یا}\ x=.......... & (۲)\end{cases}$$

اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم ......$=x$ قابل قبول است.

۳) $|۳x-۱|=|x-۷|\to\begin{cases}۳x-۱=x-۷\to ....\\ ۳x-۱=-(x-۷)\to ....\end{cases}$

۴) می‌دانیم که: $\sqrt{x^۲+۴x+۴}=\sqrt{(x+۲)^۲}=|x+۲|$

بنابراین: $\sqrt{x^۲+۴x+۴}-x=۲\to|x+۲|-x=۲\to|x+۲|=x+۲\to x+۲\geq۰\to x\geq-۲$

۵) می‌دانیم که $(|x-۱|)^۲=(x-۱)^۲$، اگر $|x-۱|=A$ بگیریم داریم:

$$A^{۲}-۵A+۶=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} A=\ldots\ldots \to |x-۱|=\ldots\ldots \to \begin{cases}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\end{cases} \\ A=\ldots\ldots \to |x-۱|=\ldots\ldots \to \begin{cases}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\end{cases} \end{cases}$$

مثال ۲۴: معادله $x^{۲}+|x^{۲}-x-۱۲|=x+۱۲$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

پاسخ: $x^{۲}+|x^{۲}-x-۱۲|=x+۱۲ \to |x^{۲}-x-۱۲|=-x^{۲}+x+۱۲ \to x^{۲}-x-۱۲\leq ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} \ldots\ldots\ldots\ldots$

با توجه به محدودهٔ بالا .... عدد صحیح در این بازه وجود دارد پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۲۵: معادله $\big|۲|x^{۲}-۶x|-۸\big|=۱۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ:

$$\begin{cases} ۲|x^{۲}-۶x|-۸=۱۰ \to |x^{۲}-۶x|=۹ \to \begin{cases} x^{۲}-۶x=۹ & (۱) \\ x^{۲}-۶x=-۹ & (۲) \end{cases} \\ ۲|x^{۲}-۶x|-۸=-۱۰ \to |x^{۲}-۶x|=-۱ \to \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$(۱) \to x^{۲}-۶x-۹=۰ \to \Delta=\ldots\ldots \to$ دارای .... جواب است

$(۲) \to x^{۲}-۶x+۹=۰ \to \Delta=\ldots\ldots \to$ دارای .... جواب است

پس این معادله .... جواب دارد پس گزینهٔ .... صحیح است.

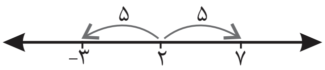
روش دوم:

در حل برخی از معادلات قدرمطلق می‌توان با استفاده از مفهوم فاصلهٔ دو نقطه معادله را حل کرد.

مثال ۲۶: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x-۲|=۵$ ۲) $|x-۲|=|x-۴|$ ۳) $|x-۲|+|x-۶|=۴$ ۴) $|x-۲|+|x-۳|=۲$

پاسخ:



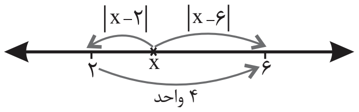
۱) باید نقاطی مانند x را پیدا کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از ۲ برابر ۵ باشد.

بنابراین $x=-۳$ و $x=۷$ جواب‌های معادله هستند.

۲) باید نقاطی مانند x را پیدا کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از ۲ و ۴ یکسان باشد. با توجه به محور واضح است که تنها نقطه با این ویژگی وسط اعداد ۲ و ۴ است. پس $x=\ldots\ldots$ جواب معادله است.

۳) باید نقاطی مانند x را بیابیم که مجموع فاصله‌های آن‌ها از .... و .... برابر ۴ است.

با توجه به محور اعداد فاصلهٔ بین ۲ و ۶ عدد ۴ است. اگر x کوچکتر از ۲ یا بزرگتر از ۶ باشد، مجموع فاصلهٔ آن از ۲ و ۶ بزرگتر از ۴ است. اما اگر $۲ < x < ۶$ باشد داریم:



$$\Rightarrow |x-۲|+|x-۶|=۴$$

بنابراین هر عدد که در فاصلهٔ $[۲,۶]$ باشد جواب معادله است.

۴) باید نقاطی مانند x را پیدا کنیم که مجموع فاصلهٔ آن از .... و .... برابر .... است.

این نقطه یقیناً بین ۲ و ۳ نیست.

حالت اول: اگر $x < ۲$ و فاصلهٔ x تا ۲ را k بگیریم فاصلهٔ x تا ۳، $k+۱$ خواهد بود از طرفی مجموع این دو فاصله ۲ است. بنابراین $k+k+۱=۲$

و یعنی $k=\frac{۱}{۲}$ پس: $x=۲-k=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

حالت دوم: اگر $x > ۲$ باشد وضع به همین منوال است و $k=\frac{۱}{۲}$ پس جواب دیگر معادله $x=۳+k=$............

روش سوم:

در این روش عبارات داخل قدرمطلق را تعیین‌علامت می‌کنیم سپس دربازه‌های مختلف جواب معادله را بدست می‌آوریم.

مثال ۲۷: معادلات زیر را حل کنید.

$۱)\ x+|x-۱|=۳$ $\quad$ $۲)\ x^۲=|x-۲|$ $\quad$ $۳)\ |x-۲|-|x-۳|=۱$ $\quad$ $۴)\ |x^۲-x|=x-۶$

پاسخ: ۱) عبارت $x-۱$ که داخل قدرمطلق قرار دارد را تعیین‌علامت می‌کنیم:

حالت اول: $x \geq ۱ \rightarrow |x-۱|=x-۱$

$x+|x-۱|=۳ \rightarrow x+x-۱=۳ \rightarrow ۲x=۴ \rightarrow x=۲$ قابل قبول است

حالت دوم: $x < ۱ \rightarrow |x-۱|=-x+۱$

$x+|x-۱|=۳ \rightarrow x-x+۱=۳ \rightarrow$ جواب ندارد

۲) عبارت $x-۲$ در داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

حالت اول: $x \geq ۲ \rightarrow |x-۲|=x-۲$

$x^۲=|x-۲| \rightarrow x^۲=x-۲ \rightarrow x^۲-x+۲=۰ \rightarrow \Delta=-۷$

پس معادله در $x \geq ۲$، جواب ندارد.

حالت دوم: $x < ۲ \rightarrow |x-۲|=-x+۲$

$x^۲=|x-۲| \rightarrow x^۲=-x+۲ \rightarrow x^۲+x-۲=۰ \rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰$

پس جواب‌های معادله $x=-۲$ یا $x=۱$ می‌باشد که هر دو در محدودهٔ $x < ۲$ قرار دارد.

۳) با تعیین علامت عبارات $x-۲$, $x-۳$ داریم:

x		۲		۳	
x−۲	−	○	+		+
x−۳	−		−	○	+

(حالت اول) $x \leq ۲$: $|x-۲|=۲-x\ ,\ |x-۳|=۳-x$

$\rightarrow |x-۲|-|x-۳|=۱ \rightarrow (۲-x)-(۳-x)=۱ \rightarrow -۱=۱$ غ‌ق‌ق

(حالت دوم) $۲ < x \le ۳ \quad : \quad |x-۲| = x-۲,\ |x-۳| = ۳-x$

$\rightarrow |x-۲| - |x-۳| = ۱ \rightarrow (x-۲)-(۳-x) = ۱ \rightarrow ۲x-۵ = ۱ \rightarrow x = ۳$

(حالت سوم) $x > ۳ \quad : \quad |x-۲| = x-۲,\ |x-۳| = x-۳$

$\rightarrow |x-۲| - |x-۳| = ۱ \rightarrow (x-۲)-(x-۳) = ۱ \rightarrow ۱ = ۱$

پس جواب‌های معادله به صورت $A = [۳, +\infty)$ است.

۴) با تعیین علامت $x^۲ - x$ داریم:

(حالت اول) $x \le ۰ \quad : \quad x^۲ - x > ۰ \rightarrow |x^۲ - x| = x-۶ \rightarrow x^۲ - x = x-۶$

$\rightarrow x^۲ - ۲x + ۶ = ۰$ غ‌ق‌ق

(حالت دوم) $۰ < x < ۱ \quad : \quad x^۲ - x < ۰ \rightarrow |x^۲ - x| = x-۶ \rightarrow x - x^۲ = x-۶ \rightarrow x^۲ = ۶$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{۶}$ غ‌ق‌ق

(حالت سوم) $x \ge ۱ \quad : \quad x^۲ - x > ۰ \rightarrow |x^۲ - x| = x-۶ \rightarrow x^۲ - x = x-۶$

$\rightarrow x^۲ - ۲x + ۶ = ۰$ غ‌ق‌ق

بنابراین معادله جواب ندارد.

مثال ۲۸: معادله $x + \frac{x}{|x|} = ۳$ .... جواب .... دارد.

۱) یک، مثبت ۲) یک، منفی ۳) دو، مختلف‌العلامه ۴) دو، هم علامت

پاسخ: توجه می‌کنیم که $x = ۰$ نمی‌تواند جواب باشد چون مخرج کسر را صفر می‌کند.

حالت اول: $x > ۰$

$x + \frac{x}{|x|} = ۳ \xrightarrow{|x| = ...} x + \frac{x}{.....} = ۳ \rightarrow x + ... = ۳ \rightarrow x = ...$; ق‌ق

حالت دوم: $x < ۰$

$x + \frac{x}{|x|} = ۳ \xrightarrow{|x| = ...} x + \frac{x}{.....} = ۳ \rightarrow x - .... = ۳ \rightarrow x = ...$; غ‌ق‌ق

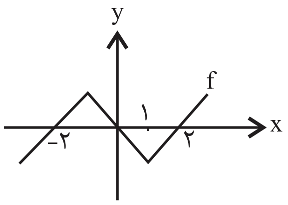
پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش هندسی حل معادلات قدرمطلق

همان‌گونه که می‌دانید در روش هندسی حل معادلات، رسم تابع بسیار اهمیت دارد. از این رو باید بتوانیم در حل معادلات قدرمطلقی به روش هندسی تابع $|f(x)|$ را رسم کنیم.

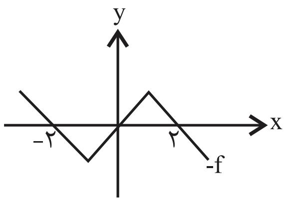
تذکر برای رسم نمودار $-f(x)$ از روی نمودار $f(x)$ کافی است قرینه نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال ۲۹: با توجه به نمودار f، نمودار $-f$ را رسم کنید.



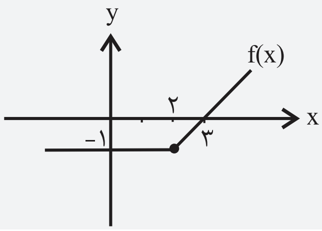
پاسخ:

برای رسم نمودار $-f$ کافی است y تمام نقاط f را قرینه کنیم پس داریم:

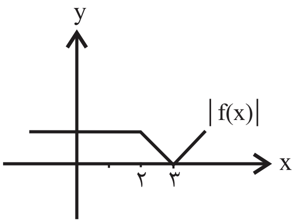


نکته: برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ به کمک نمودار $f(x)$ کافی است در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها قرار دارد تصویر آینه‌وار $f(x)$ یعنی نمودار $-f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال ۳۰: با توجه به نمودار داده شده f نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کنید.



پاسخ:



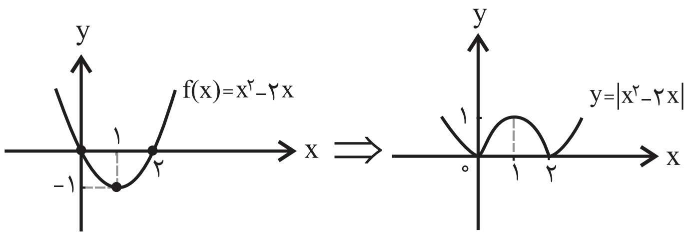
مثال ۳۱: نمودارهای زیر را با توجه به نکتهٔ قبل رسم کنید و سپس به ازای $y=2$ معادلات بدست آمده را به روش هندسی حل کنید.

الف) $y=|x^2-2x|$

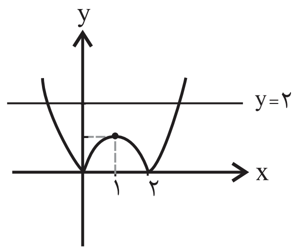
ب) $y=||x|-2|$

پاسخ:

الف)

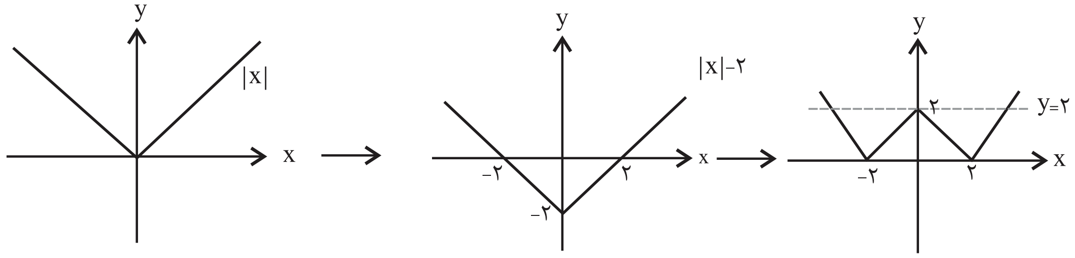


حال به کمک نمودار $y=|x^2-2x|$ معادلهٔ $|x^2-2x|=2$ (به ازای $y=2$) را حل می‌کنیم.



پس معادلهٔ $\left|x^{۲}-۲x\right|=۲$ دارای دو جواب است.

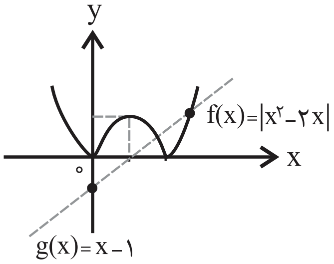
ب نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



با توجه به نمودار معادلهٔ $\left||x|-۲\right|=۲$، ۳ جواب دارد.

مثال ۳۲: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\left|x^{۲}-۲x\right|=x-۱$ چقدر است؟

پاسخ: نمودار دو تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۲x\right|$ و $g(x)=x-۱$ را رسم می‌کنیم (در یک دستگاه مختصات)



محل برخورد دو تابع f و g جواب معادله $\left|x^{۲}-۲x\right|=x-۱$ است.

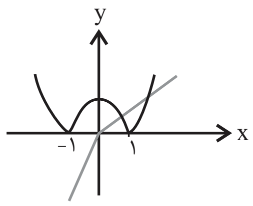
محل برخورد این دو تابع در دو نقطه است. پس معادلهٔ $\left|x^{۲}-۲x\right|=x-۱$ دارای دو جواب است.

مثال ۳۳: معادلهٔ $\left|x^{۲}-۱\right|=۲x-|x|$ چند جواب مثبت و چند جواب منفی دارد.

۱) ۱,۲ ۲) ۲,۱ ۳) ۲,۲ ۴) ۲,۰

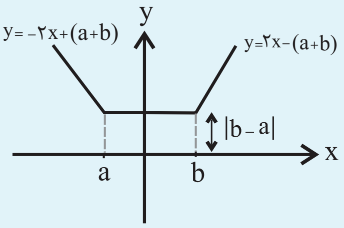
پاسخ: دو تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ و $g(x)=۲x-|x|$ را در نظر گرفته و هر یک را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$g(x)=۲x-|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ ۳x & x<۰ \end{cases}$$



با توجه به این که دو تابع f و g همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند طول نقاط برخورد جواب معادله است پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: نمودار تابع $y = |x-a| + |x-b|$ به صورت روبه‌رو رسم می‌شود به این تابع، تابع گلدانی می‌گویند. $(a < b)$



مثال ۳۴: اگر خط $y = ۲x + ۳$ نمودار $y = |x-۲| + |x+a|$ را در بی‌شمار نقطه قطع کند مقدار a کدام است؟

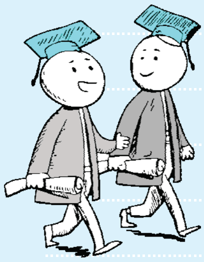
۱) -۲ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۵

پاسخ:

با توجه به نکتهٔ گفته شده خط $y = ۲x + ۳$، در صورتی نمودار $y = |x-۲| + |x+a|$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند که

$$y = ۲x + ۳ = ۲x - (a+b) \xrightarrow{b=۲} -a - ۲ = ۳ \rightarrow a = ...$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.



تمرینات:

❖ هر یک از توابع زیر به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرده و سپس آن را رسم کنید.

۱) $y=|x(x-2)|$ ۲) $y=|x|(x-2)$ ۳) $y=x|x-2|$

۴) $y=\dfrac{x-|x|}{x+|x|+1}$ ۵) $y=|x-5|-|x-3|$ ۶) $y=|2x-|x-2||$

۷- طول پاره‌خط شکسته و نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ در فاصلهٔ $[-1,4]$ را بدست آورید.

۸- مساحت محدود به نمودار تابع $y=x+2|x|-3$ و محور xها چقدر است؟

۹- اگر خط $y=m$ نمودار تابع $y=|x-1|+|x+2|$ را در دو نقطه قطع کند حدود m را بیابید.

۱۰- بیش‌ترین مقدار تابع $y=x-|2x-1|$ چقدر است؟

۱۱- به کمک روش هندسی تعداد جواب‌های معادله $x+\dfrac{x}{|x|}=3$ را پیدا کنید.

۱۲- اگر منحنی $y=||x|-3|-1$ خط $y=3k-2$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند. k چقدر است؟

۱۳- اگر $0<a<1$ باشد حاصل $A=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}$ را برحسب a بدست آورید.

۱۴- اگر x عدد حقیقی و مخالف -1 باشد از نامساوی $|x^2-1|<|x+1|$ نتیجه بگیرید $0<x<2$.

۱۵- ثابت کنید:

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$$

۱۶- با استفاده از ویژگی $-|x|\le x\le|x|$ ثابت کنید $|x+y|\le|x|+|y|$

۱۷- اگر $A=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ ثابت کنید $A\ge\sqrt{2}$ (راهنمایی: طرفین تساوی را به توان ۲ برسانید.)

۱۸- ثابت کنید:

الف) $\text{Max}\{x,-x\}=|x|$

ب) $\text{Max}\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

پ) $\text{Min}\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

۱۹- با استفاده از تمرین ۱۶۸، تابع $y=\text{Max}\{2x,x-1\}$ را رسم کنید.

۲۰- با استفاده از تمرین ۱۶۸، $\text{Min}(\text{Max}\{x+2,3x-2\})$ را پیدا کنید.

۲۱- اگر $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}=0$ ثابت کنید.

$$|x-y|=|x|+|y|$$

۲۲- اگر عبارت $A=\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ به x بستگی نداشته باشد، حدود x را بیابید.

۲۳- حداقل مقدار عبارت $A=\left|\frac{a+3b}{a+b}\right|+\left|\frac{3a+b}{a+b}\right|$ چقدر است؟

۲۴- در چه صورتی $|x+y|=|x|+|y|$ است.

۲۵- در چه صورتی $|x+y|<|x|+|y|$ است.

❖ معادلات زیر را حل کنید.

۲۶) $|2x-1|=3$

۲۷) $|x-7|=2x+4$

۲۸) $|7-3x|+3x=7$

۲۹) $x^4+3x|x|-10=0$

۳۰) $\big||x|-3\big|=1$

۳۱) $|x+4|+|4x-1|=8x$

۳۲) $|x-1|+|3x+1|=|4x|$

❖ به روش هندسی تعداد ریشه‌های معادلات زیر را حل کنید.

۳۳) $|x^2-1|=|x|$

۳۴) $|x+1|+|x-3|=2$

۳۵) $x|x|=4$

۳۶) $|x^2-4x|+|x|=3$

۳۷- نقاطی از محور اعداد حقیقی را بیابید که فاصله آن‌ها از ۲، دو واحد کمتر از فاصله آن‌ها تا ۲- است.

۳۸- بر روی محور x ها دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها از ۶، دو برابر فاصله آن‌ها از $\frac{3}{2}$ است. مجموع این نقاط چقدر است؟

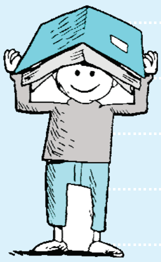
۳۹- تعداد صفرهای تابع $y=|x-1|+|x^3-4x+3|$ را بیابید.

۴۰- خط $y=k$ نمودار $y=\big||x|-1\big|$ را در ۳ نقطه قطع می‌کند، k چقدر است؟

۴۱- معادلهٔ $3=a|x-1|+2x$ به ازای چه مقادیری از a دارای دو جواب است؟

۴۲- اگر تفاضل دو ریشه معادلهٔ $|x-1|+|x+1|=a$ برابر ۶ باشد مقدار a چقدر است؟

۴۳- به ازای چه مقادیری از k خط $y=kx+2$ نمودار $y=|2x-5|$ را قطع نمی‌کند؟



تست‌های درس چهارم (قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۹۳- اگر نمودار $y=\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{4x^2+4x+1}+ax+b$ در بازه‌ی $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ بر خط $y=3$ منطبق باشد، $a-b$ چه عددی است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۱)

۱) -4 ۲) ۴ ۳) -2 ۴) ۲

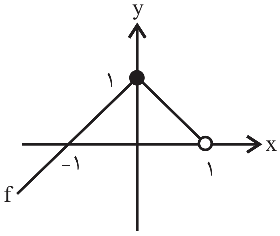
۹۴- معادله $\big||x^2-13|-10\big|=2$ دارای چند ریشه است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۹۵- کدام گزینه نمایش جبری نمودار f است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۲)



۱) $\begin{cases} f(x)=-|x|+1 \\ x\in(-\infty,-1) \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=|x|+1 \\ x\in(-\infty,1) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=1+|x| \\ x\in(-\infty,-1) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=1-|x| \\ x\in(-\infty,1) \end{cases}$

۹۶- چند نقطه روی محور طول‌ها یافت می‌شود که فاصله‌اش از نقطه‌ای به طول ۳- روی محور طول‌ها از ۳ برابر فاصله‌اش از مبدأ، یک واحد بیشتر باشد؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۳)

۲) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۷- مجموعه‌ی همه‌ی mهایی که معادله‌ی $|2x-2|=m-2|x+3|$ به ازای آنها <u>فاقد</u> جواب است، در کدام گزینه آمده است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۱) $(-\infty,10)$ ۲) $(-\infty,8)$ ۳) $(10,+\infty)$ ۴) $(8,+\infty)$

۹۸- حاصل جمع جواب‌های معادله‌ی $x^2+2x-6+3|x|=0$ کدام است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۳)

۱) ۴ ۲) -4 ۳) -1 ۴) ۱

۹۹- معادله‌ی $|x+1|+\sqrt{x-1}=3x+2$ دارای چند جواب حقیقی است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۳)

۱) ۲ ۲) هیچ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۱۰۰- به ازای چه مقادیری از a، معادله‌ی $ax+|x|=1$ دو جواب دارد؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۵)

۱) $|a|>2$ ۲) $|a|<2$ ۳) $|a|<1$ ۴) $|a|>1$

۱۰۱- مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|<a$ به صورت $(-\infty,b)$ است مقدار $a+b$ کدام است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۶)

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۰۲- مجموعه جواب نامعادله $2x-|x-2|>x^2$ یک بازه باز از نقطه میانی a است، a کدام است؟

(گزینه۲- ریاضی ۹۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

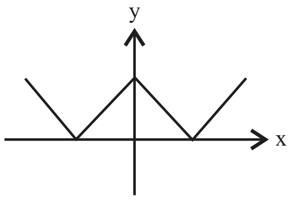
۱۰۳- مجموعه جواب‌های معادله $|۲x-۱|+۲|x+۳|=۵$ کدام است؟ *(سنجش ــ ریاضی ۹۱)*

۱) $(-۳,۱)$ ۲) $R-\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right]$ ۳) $\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right]$ ۴) $\varnothing$

۱۰۴- مجموعه جواب‌های معادله $\sqrt{۴x^۲+۱۲x+۹}+۲\sqrt{x^۲-۴x+۴}=۵$ کدام است؟ *(سنجش ــ ریاضی ۹۲)*

۲) $(-۱,۰)$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-۳}{۲},۲)$ ۴) $\varnothing$

۱۰۵- شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟ *(سنجش- ریاضی ۹۲)*



۱) $y=|x-۲|-|x|$ ۲) $y=|x-۲|+|x|$

۳) $y=||x|-۲|$ ۴) $y=|x|+x-۲$

۱۰۶- تابع با ضابطه $f(x)=|۲x+۴|+۳|۱-x|+x$ در کدام بازه ثابت است؟ *(سنجش- ریاضی ۹۵)*

۱) $\varnothing$ ۲) $(-\infty,۱]$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $[-۲,۱]$

۱۰۷- معادله‌ی $\frac{۴x-۸}{|x-۲|}=x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۸- نمودار تابع $y=-|x-۴|+۱$ محور xها را در طول‌هایی قطع می‌کند. مجموع این طول‌ها کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۸

۱۰۹- اگر معادله‌ی $۳|x-۲|+|x-۱|=k$ در فاصله‌ی $۱<x<۲$ دارای ریشه باشد، محدوده‌ی k کدام است؟

۲) R ۲) $\varnothing$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $(۱,۳)$

۱۱۰- بیشترین مقدار عبارت $|۲x-۱|-۲|x-۳|$ چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۱۱- مجموع ریشه‌های صحیح معادله‌ی $۲|x|+|x-۱۰|=|x+۱۰|$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰ ۴) ۵۵

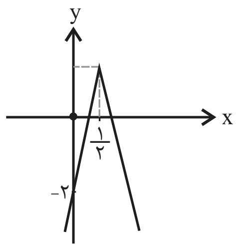
۱۱۲- کدام خط زیر نمودار تابع $y=۲|x-۱|+|x|$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند؟

۱) $y=۲-x$ ۲) $y=x-۲$ ۳) $y=۰$ ۴) $y=۱$

۱۱۳- معادله‌ی $||x-۱|-۲|=۱$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴- اگر نمودار $y=۱+a|۱+bx|$ به صورت مقابل باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -۵
۲) -۶
۳) -۷
۴) -۸

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

۵-۱- فاصله بین دو نقطه

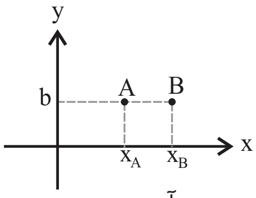
همان‌گونه که در بحث معادلات قدرمطلقی گفته شد هرگاه بخواهیم فاصله دو نقطه $A(x_A)$ و $B(x_B)$ را روی محور اعداد حساب کنیم کافی است قدرمطلق اختلاف آن‌ها را بدست آوریم:

$$AB=|x_B-x_A|$$

در این بخش می‌خواهیم فاصله دو نقطه در دستگاه مختصات را از یکدیگر پیدا کنیم:

الف فاصله دو نقطه هم‌عرض

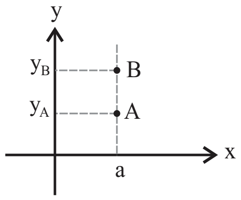
فرض کنید دو نقطه $A(x_A\,,b)$ و $B(x_B\,,b)$ دو نقطه هم‌عرض در دستگاه مختصات باشد. طول پاره‌خط AB به صورت زیر بدست می‌آید:



$$AB=|x_B-x_A|$$

ب فاصله دو نقطه هم‌طول

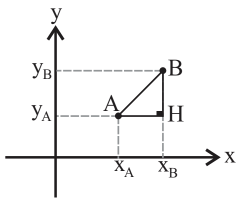
نقاط هم‌طول $A(a\,,y_A)$ و $B(a\,,y_B)$ را در دستگاه مختصات در نظر بگیرید فاصله این دو نقطه به صورت زیر بدست می‌آید:



$$AB=|y_B-y_A|$$

پ فاصله دو نقطه در حالت کلی

دو نقطه $A(x_A\,,y_A)$ و $B(x_B\,,y_B)$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم فاصله بین این دو نقطه یعنی طول پاره‌خط AB را حساب کنیم مطابق شکل زیر از نقاط A و B خطوطی را برهر دو محور عمود می‌کنیم در این صورت داریم:



$$AH=|x_B-x_A| \qquad BH=|y_B-y_A|$$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورث در مثلث AHB داریم:

$$AH^{۲}+BH^{۲}=AB^{۲}\rightarrow |x_B-x_A|^{۲}+|y_B-y_A|^{۲}=AB^{۲}\rightarrow AB=\sqrt{(x_B-x_A)^{۲}+(y_B-y_A)^{۲}}$$

نتیجه فاصله هر نقطه $A(x\,,y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

مثال ۱: فاصله دو نقطه $A(۴\,,-۳)$ و $B(۱\,,۱)$ را حساب کنید.

پاسخ: $\begin{cases} x_A=\ldots\,,y_A=\ldots \\ x_B=\ldots\,,\,y_B=\ldots \end{cases}\rightarrow AB=\sqrt{(x_B-x_A)^{۲}+(y_B-y_A)^{۲}}=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\rightarrow AB=\ldots\ldots\ldots$

مثال ۲: فاصله نقطه $A(۲\,,۴)$ را از محل تلاقی دو خط $۲y-x=۱$ و $۲x-y=۷$ بیابید.

پاسخ: ابتدا محل تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم و آن را B می‌نامیم:

$$\begin{cases} ۲x - y = ۷ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases} \to \begin{cases} .... \\ .... \end{cases} \to x = ... \ , \ y = ... \to B(....,....)$$

حال فاصلهٔ بین دو نقطه A و B را بدست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(.......)^۲ + (.......)^۲} = ...$$

مثال ۳: **نقطه $A(-۲,۳)$ مفروض است، فاصله این نقطه را تا نقاط زیر بدست آورید.**

الف **قرینه نقطه A نسبت به محور طول‌ها**

ب **قرینه نقطه A نسبت به محور عرض‌ها**

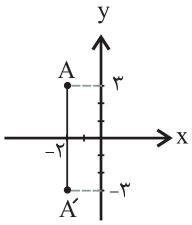
پ **قرینه نقطه A نسبت به مبدأ**

پاسخ:

الف به شکل روبه‌رو توجه کنید.

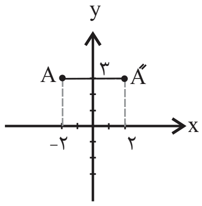
A' قرینهٔ نقطه A نسبت به محور طول‌ها می‌باشد که مختصات آن به صورت $A'(-۲,-۳)$ است پس:

$AA' = ...$



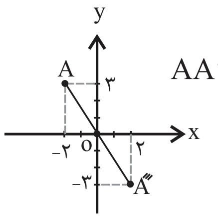
ب A'' قرینهٔ A نسبت به محور .... است که مختصات آن به صورت $A''(.....,......)$ می‌باشد بنابراین:

$AA'' = ...$



پ A''' قرینهٔ A نسبت به .... است که مختصات آن به صورت $A'''(.....,......)$ می‌باشد بنابراین:

$AA''' = ...$



مثال ۴: **نقطه $A(۳,۴)$ مفروض است نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که فاصلهٔ آن تا A برابر ۵ باشد.**

پاسخ: فرض کنیم $B(x,\circ)$ نقطه‌ای روی محور طول‌ها است که $AB = ۵$ می‌باشد. پس داریم:

$$AB = \sqrt{(x-۳)^۲ + (\circ - ۴)^۲} = ۵ \to \sqrt{(x-۳)^۲ + ۱۶} = ۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-۳)^۲ + ۱۶ = ۲۵ \to (x-۳)^۲ = ۹$$

$$\to \begin{cases} x - ۳ = ۳ \to x = ۶ \\ x + ۳ = -۳ \to x = \circ \end{cases} \to B(۶,\circ) \text{ یا } B(\circ,\circ)$$

مثال ۵: **اگر $A(۱,۱)$ و $B(۲,۲)$ و $C(-۱,۳)$ سه رأس یک مثلث باشد.**

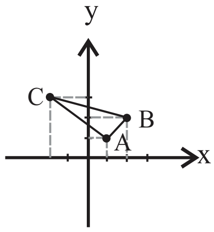
الف **نشان دهید مثلث ABC، قائم‌الزاویه است.**

ب **مساحت مثلث را بیابید.**

پاسخ:

الف با توجه به شکل رسم شده، برای این‌که نشان دهیم مثلث ABC قائم‌الزاویه است کافی است نشان دهیم که $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ (رابطهٔ فیثاغورث)

پس ابتدا طول ضلع‌های AB، AC و BC را بدست می‌آوریم:



$$AB=\sqrt{(۲-.....)^۲+(۲-....)^۲}=.........$$
$$AC=\sqrt{(-۱-.....)^۲+(۳-....)^۲}=.........$$
$$BC=\sqrt{(-۱-.....)^۲+(۳-....)^۲}=.........$$

$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \rightarrow$ مثلث ABC قائم‌الزاویه است

ب

مساحت مثلث قائم‌الزاویه $=\dfrac{AB\times AC}{۲}=...........$

مثال ۶: نقاط $B(۰,۱)$ و $C(-۱,۰)$ دو رأس از مثلث متساوی‌الساقین هستند در صورتی که طول ساق‌های AB و AC از مثلث $\sqrt{۵}$ باشد مختصات نقطه A را بدست آورید.

پاسخ: اگر $A(x,y)$ باشد، پس:

$$AB=AC\rightarrow\sqrt{x^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲}\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}x^۲+y^۲-۲y+۱=x^۲+۲x+۱+y^۲\rightarrow x=-y$$

پس $A(x,-x)$ می‌باشد.

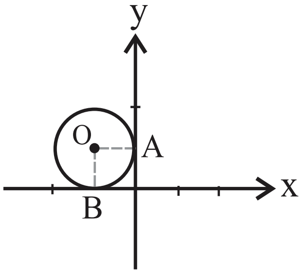
از طرفی $AB=\sqrt{۵}$ است. پس داریم:

$$\sqrt{x^۲+(-x-۱)^۲}=\sqrt{۵}\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}x^۲+x^۲+۲x+۱=۵\rightarrow ۲x^۲+۲x-۴=۰\rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=.....\rightarrow A(.....,...)\\x=.....\rightarrow A(.....,...)\end{cases}$$

مثال ۷: اگر دایره‌ای در ناحیه دوم و بر محورهای مختصات مماس باشد و نقطه $(-۳,۵)$ روی آن، شعاع و مرکز دایره را بیابید.

پاسخ: شکل تقریبی دایره به صورت زیر می‌باشد.



$A(۰,y)$ و $B(x,۰)$، از طرفی OA بر محور y ها و OB بر محور x ها عمود است. پس $O(x,y)$ است.

$$OA=|x|\ \ ,OB=|y|\xrightarrow{\text{شعاع دایره}=OA=OB}|x|=|y|\xrightarrow{\text{در ناحیه دوم است}}x=-y$$

از طرفی شعاع دایره برابر با y است. پس اگر $C(-۳,۵)$ در نظر بگیریم $OC=y$ است. پس داریم:

$$\begin{cases}O(-y,y)\\C(-۳,۵)\rightarrow OC=\sqrt{(-y+۳)^۲+(y-۵)^۲}=y\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}y^۲-۶y+۹+\cancel{y^۲}-۱۰y+۲۵=\cancel{y^۲}\rightarrow\\OC=y\end{cases}$$

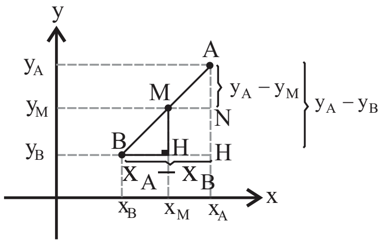
$$y^۲-۱۶y+۳۴=۰$$

بنابراین مختصات مرکز دایره بصورت (و   ) و شعاع آن .... است.

۵-۲- مختصات وسط یک پاره‌خط

دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ در صفحه مختصات در نظر بگیرید. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را برحسب مختصات دو نقطهٔ A و B بدست می‌آوریم.

از نقاط A و B و M بر محورهای مختصات عمود رسم می‌کنیم.



دو مثلث AMN و ABH متشابه بوده و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{1}{2}$ است. پس

$$\begin{cases} \dfrac{x_A - x_M}{x_A - x_B} = \dfrac{1}{2} \to x_M = ... \\ \dfrac{y_A - y_M}{y_A - y_B} = \dfrac{1}{2} \to y_M = ... \end{cases}$$

نتیجه مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB به صورت زیر بدست می آید:

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

مثال ۸: اگر $A(1,-4)$ و $B(-5,2)$ دو سر پاره‌خط AB باشند مختصات نقطهٔ M وسط این پاره‌خط را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x_A = ... \ , \ x_B = ... \to x_M = ... \\ y_A = ... \ , \ y_B = ... \to y_M = ... \end{cases}$$

مثال ۹: اگر $A(1,4)$ و $B(2,6)$ دو سر قطر یک دایره باشند. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

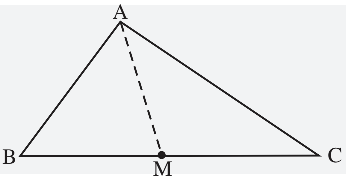
پاسخ: مرکز دایره وسط قطر دایره می‌باشد پس داریم:

$$O(\frac{x_A + x_B}{2}, ...) = (......... , ...)$$

از طرفی AB طول قطر دایره است بنابراین داریم:

$$AB = \sqrt{....................} = ... \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{AB}{2} = ...$$

مثال ۱۰: اگر $A(1,2)$ و $B(-2,4)$ و $C(3,1)$ سه رأس یک مثلث باشند.



الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را بیابید.

ب) طول میانه وارد بر ضلع BC چقدر است؟

پاسخ:

الف) AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است که ضلع BC را در M نصف می‌کند پس M وسط B و C قرار دارد. بنابراین:

$$M = (........,........)$$

حال با داشتن دو نقطه M و A معادلهٔ خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند را بدست می‌آوریم (معادله میانه وارد بر ضلع BC)

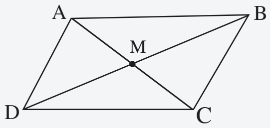
ب با داشتن مختصات دو نقطه M و A طول میانهٔ AM محاسبه می‌شود:

$$AM=\sqrt{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

تذکر: در یک متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

نکته: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ چهار رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$



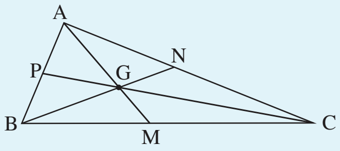
مثال ۱۱: اگر $A(۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۷)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند آن‌گاه مختصات رأس D را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \to \dots\dots\dots\dots\dots\dots \to x_D=\dots\dots \\ y_A+y_C=y_B+y_D \to \dots\dots\dots\dots\dots\dots \to y_D=\dots\dots \end{cases}$$

تذکر: نقطه برخورد میانه‌ها هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

$$\frac{AG}{GM}=\frac{BG}{GN}=\frac{CG}{GP}=۲$$

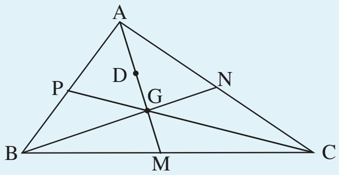


نکته: اگر G نقطه تلاقی میانه‌های (مرکز ثقل) مثلث ABC باشد، آن‌گاه مختصات آن به صورت زیر می‌آید:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳} \quad , \quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$

اثبات: اگر D را وسط AG درنظر بگیریم در این صورت G وسط MD می‌باشد زیرا $AG=۲GM$. بنابراین:

$$x_G=\frac{x_D+x_M}{۲}=\frac{\frac{x_A+x_G}{۲}+\frac{x_B+x_C}{۲}}{۲}\to ۴x_G=x_A+x_G+x_B+x_C\to x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}$$



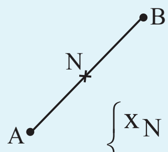
به همین ترتیب $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$.

مثال ۱۲: نقاط $A(-۲,-۳)$ و $B(۴,۰)$ دو رأس یک مثلث هستند که نقطهٔ $G(۳,-۲)$ محل تلاقی میانه‌ها است. مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

پاسخ: اگر $C(x,y)$ باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x}{۳} \to \text{...} \to x = \text{......} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y}{۳} \to \text{...} \to y = \text{......} \end{cases} \to C(\text{....},\text{.....})$$

نکته: اگر نقطه N روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد که $AN = kAB$ در این صورت مختصات نقطهٔ N به صورت زیر بدست می‌آید:



$$\begin{cases} x_N = (۱-k)x_A + kx_B \\ y_N = (۱-k)y_A + ky_B \end{cases}$$

مثال ۱۳: اگر $A(۲,۵)$ و $B(۳,۸)$ مختصات دو سر پاره‌خط AB باشد. نقطهٔ N روی این پاره‌خط را چنان بیابید که $AN = ۳NB$.

پاسخ: $N(x,y)$ در نظر می‌گیریم چون $AN = ۳NB$. پس می‌توان گفت $AN = \frac{۳}{۴}AB$ بنابراین $k = \frac{۳}{۴}$ است حال طبق نکته فوق می‌توان مختصات نقطه N را به دست آورد.

$$\begin{cases} x_N = (۱-k)x_A + kx_B \to x_N = \text{.........} \\ y_N = (۱-k)y_A + ky_B \to y_N = \text{........} \end{cases}$$

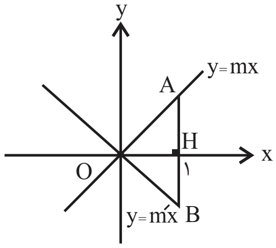
مثال ۱۴: نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۴,۱)$ دو رأس یک مثلث هستند. اگر رأس سوم روی محور طول‌ها و محل تلاقی میانه‌ها روی نیم‌ساز ربع اول باشد. مختصات رأس سوم را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به فرض‌مسئله $C(x,۰)$ و $G(a,a)$ (G روی نیم‌ساز ربع اول یعنی خط $y = x$ قرار دارد که در آن باید a مثبت باشد.)

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x}{۳} \to a = \dfrac{۱+۴+x}{۳} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y}{۳} \to a = \dfrac{۲+۱+۰}{۳} \to a = ۱ \end{cases} \to ۱ = \dfrac{۵+x}{۳} \to x = -۲ \Rightarrow C(-۲,۰)$$

۵-۳- عمود بودن دو خط

در سال گذشته یاد گرفتیم که در صورتی دو خط باهم موازی‌اند که شیب‌های آن‌ها با یکدیگر برابر باشند. حال می‌خواهیم بدانیم اگر خطوط d و d' با شیب‌های m و m' برهم عمود باشند چه رابطه بین m و m' وجود دارند.



فرض کنید دو خط $y = mx$ و $y = m'x$ بر یکدیگر در مبدأ مختصات عمود باشند مطابق شکل زیر نقطه‌ای به طول ۱ روی هر دو خط در نظر بگیرید.

عرض نقطه A برابر m و عرض نقطه B برابر m' است. مثلث OAB در شکل روبه‌رو مثلث قائم‌الزاویه است به راحتی می‌توان نشان داد $\overset{\Delta}{OHB} \sim \overset{\Delta}{OAH}$ پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$OH^۲ = HA.HB \to ۱^۲ = m.(-m') \to mm' = -۱$$

نتیجه اگر دو خط با شیب m و m' برهم عمود باشند آن‌گاه $mm' = -۱$

مثال ۱۵: اگر $A(۱,۲)$ و $B(-۱,۴)$ دو سر پاره‌خط AB باشد. معادله عمودمنصف پاره‌خط AB را بدست آورید.

پاسخ: عمود منصف AB خطی است که بر AB عمود و آن را نصف می‌کند پس ابتدا مختصات نقطهٔ وسط AB را بدست می‌آوریم:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=(............. , ...)$$

اگر m شیب خط AB و m' شیب خط عمودمنصف بر AB باشد آن‌گاه:

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=.............\xrightarrow{mm'=-۱}m'=......$$

حال با داشتن m' و M معادلهٔ عمود منصف AB را بدست می‌آوریم:

مثال ۱۶: مثلث ABC با رئوس $A(-۴,۷)$ و $B(۴,۳)$ و $C(۰,-۵)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC بر ضلع BC عمود است پس اگر m شیب‌خط BC و m' شیب ارتفاع باشد داریم:

$$m=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=.............\xrightarrow{mm'=-۱}m'=......$$

حال با داشتن مختصات A و شیب m' می‌توان معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را به صورت زیر بدست آورید.

نکته: عمودمنصف هر دو وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

مثال ۱۷: مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که از سه نقطهٔ $A(-۳,-۸)$ و $B(۲,۷)$ و $C(۴,۳)$ بگذرد.

پاسخ: با توجه به نکته گفته شده ابتدا معادلهٔ عمودمنصف وترهای AB و AC را بدست می‌آوریم:

$m_{AB}=.........\rightarrow$ عمودمنصف AB $m'=......$

وسط AB $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=(............. , ...)$

معادلهٔ خط عمودمنصف AB: $y-y_M=m'(x-x_M)\rightarrow$ .... (۱)

$m_{AC}=.........\rightarrow$ عمودمنصف AC $m''=......$

وسط AC $M'(\frac{x_A+x_C}{۲},\frac{y_A+y_C}{۲})=(............. , ...)$

معادلهٔ خط عمودمنصف AC: $y-y_{M'}=m''(x-x_{M'})\rightarrow$ .... (۲)

محل تلاقی دو خط (۱) و (۲) مرکز دایره می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}(۱):..........\\(۲):..........\end{cases}\rightarrow O(......,......)$$

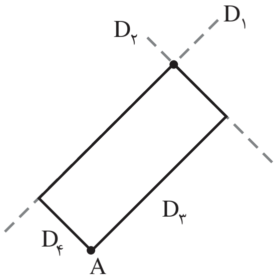
مثال ۱۸: معادله دو ضلع مستطیلی عبارتند از $D_۲:۳x+۲y-۷=۰$ و $D_۱:۲x-۳y+۵=۰$، اگر $A(۲,-۳)$ یکی از رأس‌های مستطیل باشد معادله دو ضلع دیگر مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{matrix}۳x+۲y-۷=۰\rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\\ ۲x-۳y+۵=۰\rightarrow m'=\frac{۲}{۳}\end{matrix}\xrightarrow{mm'=-۱}$$ دو ضلع عمود برهم هستند.

مختصات نقطهٔ A در دو خط داده شده صدق نمی‌کند. پس نقطهٔ A بر روی این دو خط قرار ندارد.

فرض کنیم شکل تقریبی مستطیل به صورت روبرو باشد.



برای نوشتن معادلهٔ خط D_3 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$D_3 \parallel D_1 \rightarrow m_{D_3} = \frac{2}{3}$$

$$D_3 : y - y_A = m_{D_3}(x - x_A) \rightarrow \text{......................................}$$

معادلهٔ خط D_4 :

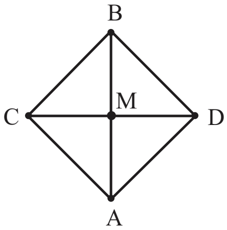
$$D_4 \parallel D_2 \rightarrow m_{D_4} = -\frac{3}{2}$$

$$D_4 : y - y_A = m_{D_4}(x - x_A) \rightarrow \text{..}$$

مثال ۱۹: اگر $A(-1,4)$ و $B(3,1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند:

الف معادله قطرهای مربع را بنویسید. **ب** مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

پاسخ:



الف با توجه به شکل فرضی که رسم کردیم معادلات قطرها بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{AB} = \frac{..........}{..........} = ...$$

معادلهٔ قطر AB:

$$AB \text{ معادلهٔ قطر}: y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \rightarrow y - (4) = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

معادلهٔ قطر CD:

$$CD \perp AB \rightarrow m_{CD} = \frac{4}{3}$$

$$AB \text{ وسط } M(1, \frac{5}{2})$$

$$CD \text{ معادلهٔ خط}: y - y_M = m_{CD}(x - x_M) \rightarrow y - \frac{5}{2} = \frac{4}{3}(x - 1)$$

ب می‌دانیم $M(1, \frac{5}{2})$ است و معادلهٔ خط CD به صورت $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$ است. پس می‌توان $C(x, \frac{4}{3}x + \frac{7}{6})$ در نظر گرفت. از طرفی:

$$\begin{cases} MC = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{5}{2})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{4}{3})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{16}{9}(x-1)^2} = \frac{5}{3}|x-1| \\ MA = \sqrt{(1-(-1))^2 + (\frac{5}{2} - 4)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

از طرفی $MC = MA$ (در مربع قطرها باهم برابر و همدیگر را نصف می‌کنند.)

$$\frac{5}{3}|x-1| = \frac{5}{2} \rightarrow |x-1| = \frac{3}{2} \rightarrow x - 1 = \pm\frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ یا } x = -\frac{1}{2} \rightarrow\rightarrow x_C = \frac{5}{2}, x_D = -\frac{1}{2}$$

پس $C(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ و $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ است.

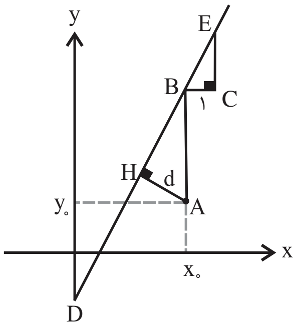
مثال ۲۰: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطه $A(۲,۳)$ بگذرد و بر نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم عمود باشد.

پاسخ: اگر شیب‌خط موردنظر را m' بگیریم داریم:

نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم $y=-x \to m=-۱ \xrightarrow{m'm=-۱} m'=۱$

معادلهٔ خط موردنظر: $y-y_A=m'(x-x_A) \to y-۳=۱(x-۲)$

۵-۴- فاصله نقطه از خط



نقطه $A(x_\circ,y_\circ)$ و خط D به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ را در نظر بگیرید در این بخش به دنبال آن هستیم که رابطه‌ای برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه A از خط D پیدا کنیم. خط D و نقطه A را به صورت زیر در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله نقطه A تا خط D برابر d است. از نقطهٔ A خطی به موازی محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطهٔ B قطع کند. از نقطهٔ B به اندازه یک واحد در جهت افقی مطابق شکل جلو رفته تا نقطه C بدست آید از C عمود بر BC رسم می‌کنیم تا خط D را در E قطع کند.

برای بدست آوردن d مراحل زیر را طی می‌کنیم:

الف مختصات نقطهٔ B را بدست می‌آوریم: با قرار دادن $x_\circ$ در معادله خط y نقطه B بدست می‌آید.

$$y_B=-\frac{a}{b}x_\circ-\frac{c}{b} \to B(x_\circ,-\frac{a}{b}x_\circ-\frac{c}{b})$$

ب اندازه ضلع AB را مشخص می‌کنیم:

$$AB=\left|y_\circ+\frac{a}{b}x_\circ+\frac{c}{b}\right|=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{|b|}$$

ت نشان می‌دهیم دو مثلث $\overset{\Delta}{BCE}$ و $\overset{\Delta}{ABH}$ متشابه‌اند.

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{H}=۹\circ\\ \hat{A}=\hat{E}\end{cases} \longrightarrow \overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{BCE}$$

ث نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{d}{۱}=\frac{AB}{BE} \to \frac{d}{۱}=\frac{\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{|b|}}{\sqrt{۱+\frac{a^۲}{b^۲}}}=\frac{\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{|b|}}{\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{|b|}}=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نتیجه فاصلهٔ نقطه $A(x_\circ,y_\circ)$ از خط D به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ برابر است با: $d=AH=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

مثال ۲۱: فاصله نقطه $M(۲,-۱)$ از خط $۳x-۴y+۲=\circ$ چقدر است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}M(۲,-۱)\\ ۳x-۴y+۲=\circ\end{cases} \to d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times۲-۴(-۱)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\text{..............}$$

نکته: فاصله مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه روبه‌رو بدست می‌آید: $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

مثال ۲۲: نقطه $A(۱,-۱)$ و $B(۳,۱)$ و $C(-۱,۲)$ سه رأس یک مثلث هستند. اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث ABC را بیابید.

پاسخ:

ابتدا معادلهٔ خط BC را بدست می‌آوریم:

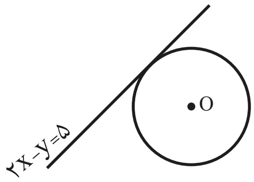
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۲-۱}{-۱-۳}=\frac{-۱}{۴}$$

$$\text{معادله خط } BC: y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\rightarrow y-۱=\frac{-۱}{۴}(x-۳)\rightarrow ۴y-۴=-x+۳\rightarrow x+۴y-۷=۰$$

اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر است با فاصله نقطهٔ A تا خط BC پس داریم:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱+۴(-۱)-۷|}{\sqrt{۱^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۷}}$$

مثال ۲۳: خط $۲x-y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

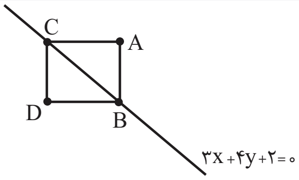


پاسخ: برای پیدا کردن شعاع دایره کافی است فاصلهٔ نقطه O را تا خط $d:۲x-y=۵$ بدست آوریم:

$$d:۲x-y=۵\rightarrow ۲x-y-۵=۰$$

$$r=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(-۱)-(۲)-۵|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۵}}$$

مثال ۲۴: معادله یک قطر مربع $۳x+۴y+۲=۰$ و یک رأس آن $A(۲,۳)$ است. مساحت این مربع را چقدر است؟



پاسخ: مختصات نقطهٔ A روی معادلهٔ قطر مربع $۳x+۴y+۲=۰$ صدق نمی‌کند. پس معادله خط داده شده قطر CB است.

فاصلهٔ نقطهٔ A تا این خط به اندازهٔ نصف قطر مربع است.

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳(۲)+۴(۳)+۲|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$BC=۲AH=۸\rightarrow \text{مساحت مربع}=\frac{BC^۲}{۲}=\frac{۶۴}{۲}=۳۲$$

مثال ۲۵: فاصله نقطه $A(۲a+۱,a-۱)$ از خط $-۳x+۴y+۵=۰$ برابر ۸ است. a چقدر است؟

پاسخ:

$$AH=\frac{|-۳(۲a+۱)+۴(a-۱)+۵|}{\sqrt{(-۳)^۲+۴^۲}}=۸\rightarrow\frac{|-۶a-۳+۴a-۴+۵|}{۵}=۸$$

$$۸\rightarrow|-۲a-۲|=۴۰\rightarrow\begin{cases}-۲a-۲=۴۰\rightarrow a=-۲۱\\-۲a-۲=-۴۰\rightarrow a=۱۹\end{cases}$$

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط افقی $y = b$ برابر $d = |b - y_0|$.

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط قائم $x = a$ برابر $d = |a - x_0|$.

مثال ۲۶: نقطه‌ای روی خط $y = ۳x - ۲$ بیابید که:

الف) فاصله آن تا خط $x = ۱$ برابر ۲ باشد.

ب) فاصله آن تا خط $y = -۱$ برابر ۳ باشد.

پاسخ:

الف) نقطه $A(x, ۳x - ۲)$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$d = ۲ \to d = |a - x_0| \xrightarrow[x_0 = x]{a = ۱} |۱ - x| = ۲ \to \begin{cases} .... \\ .... \end{cases}$$

ب) نقطه $A(x, ۳x - ۲)$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$d = ۳ \to d = |b - y_0| \xrightarrow[y_0 = ۳x - ۲]{b = -۱} |-۱ - (۳x - ۲)| = ۳ \to \begin{cases} .... \\ .... \end{cases}$$

نکته: فاصله دو خط موازی $\begin{cases} ax + by + c = ۰ \\ ax + by + c' = ۰ \end{cases}$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال ۲۷: فاصله دو خط موازی $x + ۲y = ۱$ و $۳x + ۶y - ۲ = ۰$ چقدر است؟

$D: x + ۲y = ۱ \to x + ۲y - ۱ = ۰$

$D: ۳x + ۶y - ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x + ۲y - \frac{۲}{۳} = ۰ \to D \| D'$

فاصله دو خط موازی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = d = \frac{\left|-۱ - (-\frac{۲}{۳})\right|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = ...$

تمرینات:

۱- چند نقطه روی خط $y=x+1$ یافت می‌شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $(1,2)$ و $(0,1)$ برابر ۲ باشد.

۲- فاصله نقطه تلاقی دو خط $\begin{cases} x+2y=3 \\ y=x-6 \end{cases}$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۳- اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط $\begin{cases} 2y+x=3 \\ 3y+x=4 \\ y=2x-1 \end{cases}$ است نوع مثلث را بیابید.

۴- نقاط $A(8,-1)$ و $B(3,4)$ دو رأس مقابل یک مربع می‌باشند، محیط و مساحت مربع چقدر است؟

۵- خط به معادله $(m+3)x+(2m-1)y=7$ به ازای هر m از نقطه ثابتی می‌گذرد فاصله این نقطه از نقطه $(1,-1)$ چقدر است؟

۶- نقاط $A(2,a)$ و $B(0,3)$ و $C(-2,3)$ رئوس مثلث ABC هستند. a را چنان بیابید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد.

۷- خط به معادله $x-y=2$ محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند فاصله AB از $(0,\frac{1}{3})$ چقدر است؟

۸- طول میانه نظیر رأس A در مثلث ABC با رئوس $A(1,1)$ و $B(0,0)$ و $C(3,-2)$ را بدست آورید.

۹- به ازای چه مقادیر از m و n دو نقطه $A(-n,m)$ و $B(2n,-2)$ نسبت به نقطه $M(3n-1,m+n)$ قرینه یکدیگرند.

۱۰- قرینه نقطه $A(2,1)$ را نسبت به نقطه $M(4,-1)$ بیابید.

۱۱- نقاط $A(3,5)$ و $B(2,3)$ دو رأس مثلث ABC می‌باشند. مختصات رأس C را چنان بیابید که میانه‌های مثلث یکدیگر را روی نیم‌ساز ناحیه دوم و به طول -2 قطع کند.

۱۲- نقاط $A(1,-1)$ و $B(-2,3)$ و $C(3,5)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند مختصات نقطه D را بیابید.

۱۳- نقطه $A(6,1)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن $\begin{cases} 2y-3x=12 \\ 3y+x=7 \end{cases}$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر را بیابید.

۱۴- اگر $A(1,2)$ و $B(-2,3)$ و $C(m-1,2n)$ رئوس مثلث باشد و $G(-1,3)$ محل تلاقی میانه‌ها $m+n$ چقدر است؟

۱۵- اگر $A(m-2,0)$ و $B(m,2m)$ و فاصلهٔ C وسط AB از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد. m چقدر است؟

۱۶- نقاط $A(2\beta,\beta)$ و $B(\beta+3,\beta-4)$ دو رأس مثلث ABC هستند و معادله میانه نظیر رأس C خط $y=5$ است. مختصات وسط AB را بیابید.

۱۷- اگر خطی به معادله $(m+1)y=x+2$ بر خط به معادله $y=(2m+1)x+1$ عمود باشد m چقدر است؟

۱۸- خطوط $\begin{cases} y=2x+3 \\ ax-y+1=0 \end{cases}$ معادلات قطرهای یک لوزی هستند طول مرکز تقارن لوزی را بیابید.

۱۹- خطوط $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$ معادله دو ارتفاع مثلث ABC هستند و مختصات رأس A در مثلث $(7,5)$ است. شیب ضلع BC را بیابید.

۲۰- معادله سه ضلع یک مثلث $\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \\ x=1 \end{cases}$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد را بیابید.

۲۱- اگر $A(2,3)$ و $B(4,b)$ دو نقطه دلخواه باشند و خط $y=-x+a$ معادله عمودمنصف آن‌ها باشد، $a+b$ چقدر است؟

۲۲- خطوط $\begin{cases} y-2x+3=0 \\ 2y+x-4=0 \end{cases}$ دو ضلع مربع هستند که مبدأ مختصات مرکز آن می‌باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۲۳- بر روی خط $x+y=۱$ نقطه‌ای را پیدا کنید که فاصله‌اش از خط $۳x+۴y-۱=۰$ برابر ۲ باشد.

۲۴- دو خط وجود دارند که فاصله آن‌ها از خط $۳x+۴y=۵$ برابر ۲ است. اختلاف عرض از مبدأ آن‌ها چقدر است؟

۲۵- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ یک رأس مستطیل نقطه $A(۸,۵)$ است. مساحت مستطیل را بیابید.

۲۶- یک ضلع مربعی منطبق بر خط $y=x+۲$ و نقطه $A(۳,-۱)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع را بیابید.

۲۷- اگر فاصله $A(۱,۱)$ از خط $y=x+m$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد. m چقدر است؟

۲۸- معادلات دو ضلع مربعی به صورت $x-۲y+۲=۰$ و $۳x-۶y-۲=۰$ است. مساحت مربع چقدر است؟

۲۹- نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۰,۱)$ و $C(۴,۷)$ سه رأس یک مثلث هستند اندازهٔ ارتفاع AH چقدر است؟

۳۰- فاصله مبدأ مختصات از خط $۲y+m=mx+۴$ برابر ۲ است. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند.

۳۱- اگر $y=-\frac{۳}{۴}x+۱$ و $۳x+۴y+a=۰$ دو ضلع یک مربع با محیط ۲۰ باشد. مقدار a چقدر است؟

۳۲- فاصله نقطه A واقع بر نیم‌ساز ناحیه اول از خط به معادله $۲y=-x+۱$ برابر $\sqrt{۵}$ است. طول نقطه A چقدر است؟

۳۳- معادلات اضلاع مثلثی $\begin{cases} x+۲y=۳ \\ y=۲x-۱ \\ x+y=۴ \end{cases}$ است، طول ارتفاع AH چقدر است؟

تست‌های درس پنجم (آشنایی با هندسه تحلیلی)

۱۱۵- دو نقطه‌ی $A(۲,۳)$ و $B(۴,۷)$ و خط به معادله‌ی $y=x-۱$، در صفحه‌ی محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطه‌ی M بر روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه‌ی مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟ (سراسری-ریاضی ۹۳)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۱۱۶- نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشد. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۰)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۱۱۷- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۱۱۸- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس مستطیل نقطه $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۰)

۳) $۷/۲$ ۲) $۹/۶$ ۳) $۱۱/۴$ ۴) $۱۲/۸$

۱۱۹- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$، کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۲)

۱) ۶ ۲) $۶/۵$ ۳) ۷ ۴) $۷/۵$

۱۲۰- نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۲۱- خطی از نقاط $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ می‌گذرد و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی وسط AB از مبدأ چقدر است؟ (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۱۲۲- معادله‌ی سه ضلع مثلثی به صورت $AB: x+۲y=۳$، $AC: y=۲x-۱$ و $BC: x+y=۴$ است. طول ارتفاع AH کدام است؟ (گزینه۲-تجربی ۹۲)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۲۳- فاصله‌ی خط $y=\sqrt{۳}x-۱$ از خطی موازی آن‌که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چقدر است؟ (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۱) $۰/۵$ ۲) $۰/۲۵$ ۳) $۰/۲$ ۴) $۰/۱$

۱۲۴- نقاط $A(-۲,۳)$ و $B(۰,-۲)$ و $C(۲,۰)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه‌ی AM کدام است؟ (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۳) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۱۲۵- دو ضلع یک مربع بر دو خط به معادلات $۲x+\sqrt{۵}y=۳$ و $۵y+۲\sqrt{۵}x=۰$ قرار دارند، محیط این مربع چقدر است؟ (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۶- معادله‌ی دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $۲x+y=۱$ و $۲y-۳x+۵=۰$ می‌باشند. اگر یک رأس آن نقطه‌ی $(-۳,۲)$ باشد، فاصله محل برخورد قطرهای آن از مبدأ مختصات به کدام فاصله است؟ (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵

۱۲۷- دو نقطه بر روی نیم‌ساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x+۲y=۰$ به فاصله‌ی $۲\sqrt{۵}$ هستند. اگر این دو نقطه را A و B بنامیم، مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ نقطه‌ی C روی محور y ها به عرض ۳ است. (گزینه۲- تجربی ۹۲)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $\frac{۱۹۰}{۳}$ ۴) $\frac{۹۵}{۳}$

۱۲۸- خطی از مبدأ می‌گذرد و بر خطی که $A(۲,۱)$ را به $B(۰,-۳)$ وصل می‌کند، عمود است، این خط، خط $x=۴$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۲)*

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۸ ۴) -۸

۱۲۹- دو نقطه روی خط $y=۲x+۱$ قرار دارند که از نیم‌ساز ربع اول و سوم به فاصله‌ی $۴\sqrt{۲}$ هستند. طول این نقاط کدام است؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۴)*

۳) ۹ و -۷ ۲) ۷ و -۹ ۳) ۹ و ۷ ۴) ± ۸

۱۳۰- مرکز مربعی، نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و معادله‌ی یک ضلع آن $۴x-۳y=۱$ است. مساحت این مربع کدام است؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۴)*

۱) ۳/۲۴ ۲) ۳/۶ ۳) ۹/۶۴ ۴) ۱۲/۹۶

۱۳۱- رئوس مثلثی نقاط $A(۳,۱)$، $B(۱,۲)$ و $C(-۱,۴)$ هستند. امتداد ارتفاع CH محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۴)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۲- مثلثی با رئوس $A(۲,۶)$، $B(-۲,۵)$ و $C(۲,۳)$ مفروض است. طول میانه‌ی AM کدام است؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۴)*

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۳۳- اضلاع مربعی روی خطوط $x-y=۲$ و $y=x+۱$ قرار دارند. طول قطر آن کدام است؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۴)*

۲) ۳ ۲) $\frac{۶}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ ۴) ۶

۱۳۴- اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ از خط $۳y=۴x+a$ برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ *(گزینه ۲ - تجربی ۹۵)*

۳) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۱۳۵- خط به معادله $y=ax+b$ قرینه خط $۳y-۴x=۲$ نسبت به $y=۲$ است $a.b$ کدام است؟ *(سنجش - ریاضی ۹۱)*

۱) $-\frac{۳۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۴۰}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۳۶- نقطه $A(۶,۱)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن $۲y-۳x=۱۲$ و $۳y+x=۷$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟ *(سنجش - ریاضی ۹۱)*

۴) $(۲,۳)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(۳,۲)$ ۴) $(۳,۳)$

۱۳۷- دسته خطوط به معادلات $mx+(۲m-۱)y+۳m=۱$ از نقطه‌ی ثابت A می‌گذرند، فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟ *(سنجش - ریاضی ۹۲)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۳۸- نقطه‌ی M با کدام طول بر روی خط $y=۲x-۱$ انتخاب شود به طوری که مجموع فواصل آن از دو نقطه $(۲,۰)$ و $(۰,۱)$ برابر ۳ باشد؟ *(سنجش - ریاضی ۹۴)*

۱) $۰/۸\pm\frac{۲\sqrt{۷}}{۱۵}$ ۲) $۱\pm\frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$ ۳) $۰/۸\pm\frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$ ۴) $۱\pm\frac{۲\sqrt{۷}}{۱۵}$

۱۳۹- دو ضلع متوازی‌الاضلاعی منطبق بر خطوط $۲y+۳x+۱=۰$ ، $۳y+۲x+۴=۰$ و نقطه‌ی $(۳,۴)$ یک رأس آن است. مختصات مرکز آن کدام است؟ *(سنجش - ریاضی ۹۴)*

۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۴,۳)$ ۴) $(۲,۱)$

پاسخنامه

فصل ۱

پاسخنامه درس اول (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی)

۱- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} S_{۲۰}=۳S_{۱۲} \\ a_۳=۶ \end{cases} \to \begin{cases} \frac{۲۰}{۲}(۲a+۱۹d)=۳\times\frac{۱۲}{۲}(۲a+۱۱d) \\ a+۲d=۶ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} ۲a+d=۰ \\ a+۲d=۶ \end{cases} \to a=-۲ \quad , \quad d=۴ \to a_{۱۰}=a+۹d=۳۴$$

۲- گزینه‌ی ۱

صورت کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت t و مخرج کسر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت $t^۳$ است.

$$\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+...+t+۱}{t^۹+t^۶+t^۳+۱}=\frac{\frac{t^{۱۲}-۱}{t-۱}}{\frac{t^{۱۲}-۱}{t^۳-۱}}=\frac{t^۳-۱}{t-۱}=t^۲+t+۱ \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$t=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{۵}=۲t+۱ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} ۴t^۲+۴t+۱=۵ \to t^۲+t=۱ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \to \text{جواب}=۱+۱=۲$$

۳- گزینه‌ی ۳

اگر تعداد جملات دنباله را $n=۲k$ با قدر نسبت q در نظر بگیریم در این صورت جملات فرد این دنباله خود یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q^۲$ و تعداد آن‌ها k می‌باشد پس داریم:

$$۳\times(\text{مجموع جملات فرد})=(\text{مجموع کل جملات})$$

$$۳\times\frac{\cancel{a}\cancel{(۱-(q^۲)^k)}}{۱-q^۲}=\frac{\cancel{a}\cancel{(۱-q^{۲k})}}{۱-q} \Rightarrow \frac{۳}{\cancel{(۱-q)}(۱+q)}=\frac{۱}{\cancel{۱-q}} \to q+۱=۳ \to q=۲$$

۴- گزینه‌ی ۴

$$a_۷+a_۸+...+a_{۱۷}+a_{۱۸}=S_{۱۸}-S_۶=\frac{۱۸(۱۸-۱۵)}{۶}-\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}=۹-(-۹)=۱۸$$

۵- گزینه‌ی ۲

$$۴,a_۲,a_۳,a_۴,۳۲۴$$

$$a_۵=۳۲۴ \to ۴\times q^۴=۳۲۴ \to q^۴=۸۱ \to q=۳ \quad (\text{اعداد مثبت هستند})$$

$$S_۵=\frac{۴(۳^۵-۱)}{۳-۱}=۴۸۴$$

۶- گزینه‌ی ۳

صورت کسر مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t)$ و تعداد جملات ۹ می‌باشد و مخرج کسر مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t^۳)$ و تعداد جملات ۳ تا می‌باشد.

$$\frac{t^{۸}-t^{۷}+t^{۶}\ldots-t+۱}{t^{۶}-t^{۳}+۱}=\frac{\dfrac{۱(\cancel{(-t)^{۹}}-۱)}{-t-۱}}{\dfrac{۱(\cancel{(-t^{۳})^{۳}}-۱)}{-t^{۳}-۱}}=\frac{-(t^{۳}+۱)}{-(t+۱)}=t^{۲}-t+۱ \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$t=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\rightarrow ۲t-۱=\sqrt{۱۷}\xrightarrow{\text{به‌توان}\ ۲}۴t^{۲}-۴t+۱=۱۷\rightarrow t^{۲}-t=۴ \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت برابر است با $۴+۱=۵$

۷ـ گزینهٔ $\boxed{۴}$

$$\begin{cases}a_۱+a_۲+a_۳=۱۰\\ a_۴+a_۵=۱۲\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۳a_۱+۳d=۱۰\\ ۲a_۱+۷d=۱۲\end{cases}\rightarrow d=\frac{۱۶}{۱۵}$$

۸ـ گزینهٔ $\boxed{۴}$

جمله‌ی هفتم $(a_۷)$ وسط دو جمله‌ی $a_۳$ و $a_{۱۱}$ و همچنین وسط دو جمله‌ی $a_۶$ و $a_۸$ می‌باشد پس داریم:

$$a_۳+a_۶+a_۸+a_{۱۱}=۲a_۷+۲a_۷=۴a_۷=۴\times۲۰=۸۰$$

۹ـ گزینهٔ $\boxed{۱}$

اگر جمله‌ی وسط این سه جمله را a بگیریم در این صورت این سه جمله را می‌توان به صورت $a-d,\ a,\ a+d$ در نظر گرفت پس داریم:

$$(a-d)+a+(a+d)=۲۴\rightarrow ۳a=۲۴\rightarrow a=۸$$

$$(a-d)\times a\times(a+d)=۱۲۰\xrightarrow{a=۸}(۸-d)\times۸\times(۸+d)=۱۲۰\rightarrow(۶۴-d^{۲})=۱۵$$

$$\rightarrow -d^{۲}=-۶۴+۱۵\rightarrow d^{۲}=۴۹\rightarrow d=-۷$$

۱۰ـ گزینهٔ $\boxed{۲}$

$$d=a_۲-a_۱=a_۳-a_۲\rightarrow ۲m-۱-m=m-۴-۲m+۱\rightarrow m=-۱$$

$$\rightarrow a_۱=-۱,\ a_۲=-۳\rightarrow d=-۳-(-۱)=-۲$$

$$S_۹=\frac{۹(۲a_۱+۸d)}{۲}=\frac{۹(-۲-۱۶)}{۲}=-۸۱$$

۱۱ـ گزینهٔ $\boxed{۱}$

$$d=\frac{a_{۱۲}-a_۵}{۱۲-۵}=\frac{۳۳-۱۲}{۷}=\frac{۲۱}{۷}=۳$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۱۲\rightarrow a_۱+۴\times۳=۱۲\rightarrow a_۱=۰$$

$$a_۵+a_۶+a_۷+a_۸+a_۹=S_۹-S_۴=\frac{۹(۲\times a_۱+۸d)}{۲}-\frac{۴(۲\times a_۱+۳d)}{۲}=\frac{۹}{۲}(۲۴)-\frac{۴}{۲}(۹)=۹۰$$

۱۲ـ گزینهٔ $\boxed{۳}$

$$(\text{جدید})S_{۱۰}=\frac{۱۰(۲a_۱+۹(d+۲))}{۲}=\frac{۱۰(۲a_۱+۹d+۱۸)}{۲}=\frac{۱۰(۲a_۱+۹d)}{۲}+\frac{۱۸۰}{۲}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)+۹۰$$

$$=(\text{قدیم})S_{۱۰}+۹۰$$

۱۳ـ گزینهٔ $\boxed{۲}$

$$a_۹=\frac{۱}{۲}a_۵\rightarrow a_۱+۸d=\frac{۱}{۲}(a_۱+۴d)\rightarrow ۲a_۱+۱۶d=a_۱+۴d\rightarrow a_۱=-۱۲d \qquad (۱)$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=۰\xrightarrow{(۱)}\frac{n}{۲}(-۲۴d+(n-۱)d)=۰$$

$$\rightarrow\frac{n}{۲}(-۲۵d+nd)=۰\rightarrow\frac{n}{۲}(d(-۲۵+n))=۰\xrightarrow{n,d\neq ۰}-۲۵+n=۰\rightarrow n=۲۵$$

۱۴ـ گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$۴,a,۹,b\rightarrow a_۳=a_۱q^۲\rightarrow q^۲=\frac{۹}{۴}\quad(۱)$$

$$\frac{S_۸}{S_۴}=\frac{\frac{\cancel{a_۱}(۱-q^۸)}{\cancel{۱-q}}}{\frac{\cancel{a_۱}(۱-q^۴)}{\cancel{۱-q}}}=\frac{(۱-q^۴)(۱+q^۴)}{۱-q^۴}=۱+q^۴\xlongequal{(۱)}۱+(\frac{۹}{۴})^۲=\frac{۹۷}{۱۶}$$

۱۵ـ گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$a_n=۲n-۵\rightarrow\begin{cases}a_۱=-۳\\a_۲=-۱\end{cases}\rightarrow d=۲$$

$$\begin{cases}S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(-۶+(n-۱)۲)=\frac{n}{۲}(۲n-۸)=n(n-۴)\\S_{۲n}=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)=n(-۶+(۲n-۱)۲)=n(۴n-۸)=۴n(n-۲)\end{cases}$$

$$\frac{S_{۲n}}{S_n}=\frac{۴\cancel{n}(n-۲)}{\cancel{n}(n-۴)}=\frac{۴n-۸}{n-۴}$$

۱۶ـ گزینه‌ی $\boxed{۳}$

$$S_{۲n}=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)=n(۲a_۱+۲nd-d)=۲a_۱n+۲n^۲d-nd=۲n^۲d+(۲a_۱-d)n$$

$$\xrightarrow{S_{۲n}=۲n^۲+۵n}d=۱\quad,\quad ۲a_۱-d=۵$$

$$\rightarrow a_۱=۳$$

۱۷ـ گزینه‌ی $\boxed{۱}$

صورت کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $-q^۲$ و تعداد جملات ۸ تا می‌باشد و مخرج کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $q^۴$ و تعداد جملات ۴ تا می‌باشد.

$$\frac{۱-q^۲+q^۴-\dots-q^{۱۴}}{۱+q^۴+q^۸+q^{۱۲}}=\frac{۱\left(\frac{۱-(-q^۲)^۸}{۱-(-q^۲)}\right)}{۱\left(\frac{۱-(q^۴)^۴}{۱-q^۴}\right)}=\frac{\frac{\cancel{۱-q^{۱۶}}}{۱+q^۲}}{\frac{\cancel{۱-q^{۱۶}}}{۱-q^۴}}=\frac{(۱-q^۲)\cancel{(۱+q^۲)}}{\cancel{۱+q^۲}}=۱-q^۲\qquad(۱)$$

از طرفی داریم:

$$q=۱-\sqrt{۲}\longrightarrow q^۲=۱+۲-۲\sqrt{۲}\rightarrow q^۲=۳-۲\sqrt{۲}\qquad(۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که حاصل عبارت برابر است با: $-۲+۲\sqrt{۲}$

۱۸ـ گزینه‌ی ۴

دنباله‌ی $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{30}$ یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_3 و قدر نسبت $\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_3(2)^3}{a_3} = 8$ می‌باشد اگر مجموع جملات این دنباله را با S' نمایش دهیم داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{a_3 \times \frac{8^{10}-1}{8-1}}{a_1 \times \frac{2^{30}-1}{2-1}} = \frac{\cancel{a_1} \times (2)^2 \times \frac{\cancel{2^{30}-1}}{7}}{\cancel{a_1} \times \frac{\cancel{2^{30}-1}}{1}} = \frac{4}{7}$$

۱۹ـ گزینه‌ی ۳

$$a_3 + a_{13} = 24 \xrightarrow{a_3 + a_{13} = a_1 + a_{15}} a_1 + a_{15} = 24$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15 \times 24}{2} = 180$$

۲۰ـ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} a_{10} - a_5 = 20 \to a_1 + 9d - a_1 - 4d = 20 \to 5d = 20 \to d = 4 \\ a_8 + a_{12} = 76 \to a_1 + 7d + a_1 + 11d = 76 \to 2a_1 + 18d = 76 \xrightarrow{d=4} \to a_1 = 2 \end{cases}$$

$$S_n > 200 \to \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 200 \to \frac{n}{2}(\cancel{4} + 4n - \cancel{4}) > 200$$

$$\to 2n^2 > 200 \to n^2 > 100 \to n > 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 11$$

پس باید حداقل ۱۱ جمله را جمع کنیم.

۲۱ـ گزینه‌ی ۲

$$a_{19} = 2a_{30} \to a_1 + 18d = 2(a_1 + 29d) \to a_1 + 40d = 0 \to a_1 = -40d \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \xrightarrow{S_n = 0} 2a_1 + (n-1)d = 0 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow -80d + (n-1)d = 0 \to d(-80 + (n-1)) = 0 \to (n-1) - 80 = 0 \to n = 81$$

۲۲ـ گزینه‌ی ۳

$$\begin{matrix} a_n = an + 3 \\ S_n = bn^2 + 2n \end{matrix} \xrightarrow{n=1} \begin{cases} a_1 = a + 3 \\ S_1 = b + 2 = a_1 \end{cases} \longrightarrow a + 3 = b + 2 \to a - b = -1 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{n=2} \begin{cases} a_2 = 2a + 3 \\ S_2 = 4b + 4 = a_1 + a_2 \longrightarrow 4b + 4 = a + 3 + 2a + 3 \to 3a - 4b = -2 \end{cases} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow a = -2 \ , \ b = -1$$

پس $a + b = -3$ می‌باشد.

۲۳ـ گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 5 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 17 \end{cases} \longrightarrow a_1 = -1 \ , \ d = 2$$

$$S_{18} = \frac{18(2a_1 + (18-1)d)}{2} = \frac{18(-2 + 34)}{2} = 288$$

۲۴ـ گزینه‌ی $\boxed{3}$

$$a_8 = S_8 - S_7 = (8^2 - 3\times 8) - (7^2 - 3\times 7) = 40 - 28 = 12$$

۲۵ـ گزینه‌ی $\boxed{2}$

صورت کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t)$ و دارای ۱۲ جمله است. مخرج کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t^3)$ و دارای ۴ جمله است.

$$\frac{1-t+t^2-t^3+\dots-t^{11}}{1-t^3+t^6-t^9} = \frac{1\,\frac{((-t)^{12}-1)}{-t-1}}{1\,\frac{((-t^3)^4-1)}{-t^3-1}} = \frac{\frac{\cancel{t^{12}-1}}{-(t+1)}}{\frac{\cancel{t^{12}-1}}{-(t^3+1)}} = t^2-t+1 \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$t = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \to 2t = 1-\sqrt{21} \to 2t-1 = -\sqrt{21} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4t^2-4t+1 = 21 \to 4t^2-4t = 20 \to t^2-t = 5 \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت برابر ۶ است.

۲۶ـ گزینه‌ی $\boxed{1}$

مجموع $n+2$ جمله‌ی اول دنباله‌ی $1,3,5,7,\dots$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{n+2}{2}\big(2(1)+(n+2-1)\times 2\big) = \frac{n+2}{2}(2+2n+2) =$$

$$\frac{(n+2)2(n+2)}{2} = (n+2)^2$$

۲۷ـ گزینه‌ی $\boxed{3}$

دنباله‌ی داده شده دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدر نسبت ۴ می‌باشد پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(10+(n-1)\times 4) > 900 \to \frac{n}{2}\times(6+4n) > 900$$

$$\to n(3+2n) > 900 \to 2n^2+3n-900 > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} \begin{cases} n > 21 \\ n < \frac{-90}{4} \ \text{(غیرقابل قبول است)} \end{cases}$$

پس باید حداقل ۲۲ جمله را جمع کرد تا حاصل از ۹۰۰ بیشتر شود.

۲۸ـ گزینه‌ی $\boxed{2}$

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $a_1 = 2$ و مجموع سه جمله‌ی آن $a_1+a_2+a_3 = 26$ در نظر بگیریم در این صورت یک دنباله‌ی هندسی به صورت a_1, t_1, a_2, t_2, a_3 طبق فرض مسئله می‌سازیم پس داریم:

$$a_1+a_2+a_3 = 26 \to \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 26 \to \frac{2\cancel{(1-q)}(1+q+q^2)}{\cancel{1-q}} = 26$$

$$\to 1+q+q^2 = 13 \to q^2+q-12 = 0 \to \begin{cases} q = 3 \\ q = -4 \ \text{(غیرقابل قبول است)} \end{cases}$$

پس سه جمله‌ی اول دنباله به صورت $2,6,18$ می‌باشد حال جملات دنباله‌ی جدید را پیدا می‌کنیم:

$$t_1^2 = a_1a_2 \to t_1^2 = 2\times 6 = 12 \to t_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t_2^2 = a_2a_3 \to t_2^2 = 6\times 18 = 108 \to t_2 = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$S_5 = a_1+t_1+a_2+t_2+a_3 = 2+2\sqrt{3}+6+6\sqrt{3}+18 = 26+8\sqrt{3} = 2(13+4\sqrt{3})$$

پاسخنامه درس دوم – (معادلات درجه دوم) فصل اول

۲۹ـ گزینه‌ی $\boxed{۲}$

اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد باید معادله تلاقی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y=(m+۳)x^۲+mx \\ y=۲x-۴ \end{cases} \to \{(m+۳)x^۲+mx=۲x-۴ \to (m+۳)x^۲+(m-۲)x+۴=۰$$

حال Δ معادله‌ی تلاقی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta=۰ \to \Delta=(m-۲)^۲-۴(۴)(m+۳)=۰ \to m=-۲,۲۲$$

۳۰ـ گزینه‌ی $\boxed{۳}$

$$x(۵x+۳)=۲ \to ۵x^۲+۳x-۲=۰ \to \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{۳}{۵} \\ \alpha\beta=-\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

حال معادله درجه‌ی دومی می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۲}$ باشد.

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{(-\frac{۳}{۵})^۲-۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲}=\frac{۲۹}{۴} \\ P=\frac{۱}{\alpha^۲}\cdot\frac{۱}{\beta^۲}=(\frac{۱}{\alpha\beta})^۲=(\frac{۱}{-\frac{۲}{۵}})^۲=\frac{۲۵}{۴} \end{cases}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \to x^۲-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۲۹x+۲۵=۰$$

پس $k=-۲۹$ می‌باشد.

۳۱ـ گزینه‌ی $\boxed{۱}$

برای آنکه تابع درجه دوم داده شده از ناحیه اول نگذرد دو حالت زیر وجود دارد:

حالت اول: $\Delta>۰$ و ضریب $x^۲$ منفی $(a-۳<۰)$

اگر $\Delta>۰$ باشد معادله حتماً دارای دو ریشه منفی است پس:

$$\begin{cases} \Delta=a^۲-۴(a-۳)(-۱)>۰ \to a^۲+۴a-۱۲>۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} a>۲ \text{ یا } a<-۶ & (۱) \\ P>۰ \to P=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{a-۳}>۰ \to a-۳<۰ \to a<۳ & (۲) \\ S<۰ \to S=\frac{-b}{a}=\frac{-a}{a-۳}<۰ \xrightarrow{(۲)} -a>۰ \to a<۰ & (۳) \end{cases}$$

از بازه‌های (۱) و (۲) و (۳) که اشتراک بگیریم، داریم $a<-۶$.

حالت دوم: $\Delta\le۰$ و ضریب $x^۲$ منفی $(a-۳<۰(۴))$

$$\Delta=a^۲-۴(a-۳)(-۱)\le۰ \to a^۲+۴a-۱۲\le۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} -۶\le a\le۲ \qquad (۵)$$

از بازه‌های (۴) و (۵) که اشتراک بگیریم، داریم $-۶\le a\le۲$.

اجتماع دو حالت بالا مجموعه جواب می‌باشد پس $a\le۲$.

۳۲- گزینه‌ی ۳

$$۲x^۲-۳x-۴=۰\to\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=(\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=-\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}\\ P=(\frac{۱}{\alpha}+۱).(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{-۲}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=-\frac{۱}{۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\longrightarrow x^۲-Sx+P=۰\longrightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\xrightarrow{\times ۴}۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۳۳- گزینه‌ی ۴

باید معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز منفی باشد پس داریم:

$$\begin{cases}۱)\Delta>۰\to(۲(m+۱))^۲-۴(m-۲)(۱۲)>۰\to ۴(m-۵)^۲>۰\to m\neq ۵\\ ۲)S<۰\to\frac{۲(m+۱)}{m-۲}<۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}}-۱<m<۲\\ ۳)P>۰\to\frac{۱۲}{m-۲}>۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}}m>۲\end{cases}$$

حال اگر از سه مجموعه‌ی فوق اشتراک بگیریم مجموعه جواب $\varnothing$ می‌باشد.

۳۴- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases}\Delta>۰\to ۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)>۰\to a^۲-۳a-۱۰=۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}}a<-۲\ \text{یا}\ a>۵ & (۱)\\ S>۰\to S=\frac{۲(a-۲)}{۱}>۰\to a>۲ & (۲)\\ P>۰\to P=\frac{۱۴-a}{۱}>۰\to a<۱۴ & (۳)\end{cases}$$

از (۱) و (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم پس $۵<a<۱۴$.

۳۵- گزینه‌ی ۴

$$۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰\to\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{m+۱}{۲}=S\\ \alpha\beta=\frac{\frac{۱}{۸}}{۲}=\frac{۱}{۱۶}=P\end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲\longrightarrow\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=۲\longrightarrow\sqrt{(\frac{m+۱}{۲})+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}}=۲\longrightarrow\sqrt{(\frac{m+۱}{۲})+\frac{۲}{۴}}=۲$$

$$\to\sqrt{\frac{m+۲}{۲}}=۲\xrightarrow{\text{به توان۲}}\frac{m+۲}{۲}=۴\to m=۶$$

۳۶- گزینه‌ی ۲

$$۲x^{۲}-۳x-۱=۰\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}\\ P=(\alpha^{۲}\beta)(\alpha\beta^{۲})=(\alpha\beta)^{۳}=(-\frac{۱}{۲})^{۳}=-\frac{۱}{۸}\end{cases}$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow x^{۲}+\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۸}=۰\xrightarrow{\times ۸}۸x^{۲}+۶x-۱=۰$$

پس $k=۶$ می‌باشد.

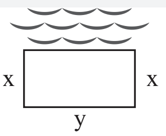
۳۷- گزینه‌ی ۲

اگر ریشه‌های معادله $x^{۲}-۸x+m=۰$ را α و β در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases}\alpha-\frac{\beta}{۲}=۵\\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۸\end{cases}\longrightarrow\beta=۲\ ,\ \alpha=۶$$

از طرفی $\alpha.\beta=m$ پس $m=۱۲$.

۳۸- گزینه‌ی ۲



$$\begin{cases}S=xy\\ ۲x+y=۸۸\rightarrow y=۸۸-۲x\end{cases}\rightarrow S=x(۸۸-x)-۲x^{۲}+۸۸x$$

حال طول رأس سهمی فوق را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸۸}{۲(-۲)}=۲۲\rightarrow y=۸۸-۲(۲۲)=۴۴$$

ماکزیمم $S=۲۲\times۴۴=۹۶۸$

۳۹- گزینه‌ی ۱

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases}۱)\ \Delta>۰\rightarrow\Delta=(a+۳)^{۲}-۴a(-۱)>۰\rightarrow a^{۲}+۱۰a+۹>۰\rightarrow a>-۱\ \text{یا}\ a<-۹\\ ۲)\ P>۰\rightarrow\frac{-۱}{a}>۰\longrightarrow a<۰\\ ۳)\ S<۰\rightarrow\frac{-(a+۳)}{a}<۰\longrightarrow a>۰\ \text{یا}\ a<-۳\end{cases}$$

حال از سه مجموعه فوق اشتراک می‌گیریم پس $a<-۹$ است.

۴۰- گزینه‌ی ۱

معادله باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد یعنی $P<۰$ پس داریم:

$$P=\frac{۱-m}{m+۲}<۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}}m<-۲\ \text{یا}\ m>۱$$

۴۱- گزینه‌ی $\boxed{3}$

α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ است پس $\alpha\beta=-1$ و $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ پس داریم:

$$8x^2-mx-8=0\rightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8}\rightarrow(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{m}{8}\rightarrow\\ \alpha^3\beta^3=-1\end{cases}$$

$$(\frac{1}{2})^3-3(-1)(\frac{1}{2})=\frac{m}{8}\rightarrow\frac{1}{8}+\frac{3}{2}=\frac{m}{8}\rightarrow m=13$$

۴۲- گزینه‌ی $\boxed{3}$

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}\rightarrow x-\sqrt{3}=\sqrt{2}\xrightarrow{\text{به‌توان}2}x^2-2\sqrt{3}x+3=2\rightarrow$$

$$x^2+1=2\sqrt{3}x\xrightarrow{\text{به‌توان}2}x^4+2x^2+1=12x^2\rightarrow x^4-10x^2+1=0$$

۴۳- گزینه‌ی $\boxed{3}$

اگر x ریشه‌ی معادله‌ی $x^2+mx-m-1=0$ باشد و y ریشه معادله جدید، آن‌گاه $y=x-2$ پس $x=y+2$ است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(y+2)^2+m(y+2)-m-1=0\rightarrow y^2+4y+4+my+2m-m-1=0$$

$$\rightarrow y^2+(m+4)y+m+3=0\xrightarrow{\text{تغییرمتغیر}}x^2+(m+4)x+m+3=0$$

۴۴- گزینه‌ی $\boxed{2}$

دو عدد مورد نظر را x و y در نظر می‌گیریم پس داریم: $2x-y=6$

$$\begin{cases}2x-y=6\rightarrow y=2x-6\\ \text{حاصل ضرب}\ xy=x(2x-6)=2x^2-6x\end{cases}$$

برای پیدا کردن کمترین مقدار حاصلضرب کافی است طول رأس معادله درجه دوم فوق را محاسبه کنیم:

$$\text{رأس سهمی}\quad x=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2(2)}=\frac{3}{2}\rightarrow y=2(\frac{3}{2})-6=-3$$

$$|x-y|=\left|\frac{3}{2}-(-3)\right|=\left|\frac{3}{2}+3\right|=\left|\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}$$

۴۵- گزینه‌ی $\boxed{3}$

$$x^2+3x-1=0\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\quad,\quad x^2+3x-1=0\rightarrow\begin{cases}\alpha^2+3\alpha=1\\ \beta^2+3\beta=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+2}+\frac{1}{\beta^3+3\beta^2+2}=\frac{1}{\alpha(\alpha^2+3\alpha)+2}+\frac{1}{\beta(\beta^2+3\beta)+2}=\frac{1}{\alpha(1)+2}+\frac{1}{\beta(1)+2}$$

$$=\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}=\frac{\beta+2+\alpha+2}{(\alpha+2)(\beta+2)}+\frac{(\alpha+\beta)+4}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{-3+4}{-1-6+4}=-\frac{1}{3}$$

۴۶- گزینه‌ی $\boxed{4}$

$$x^2-3x+1=0\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن به صورت α^2-1 و β^2-1 باشد.

$$\begin{cases} S=(\alpha^{۲}-۱)+(\beta^{۲}-۱)=(\alpha^{۲}+\beta^{۲})-۲=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta-۲=۹-۲-۲=۵ \\ P=(\alpha^{۲}-۱)(\beta^{۲}-۱)=(\alpha\beta)^{۲}-(\alpha^{۲}+\beta^{۲})+۱=(\alpha\beta)^{۲}-(\alpha+\beta)^{۲}+۲\alpha\beta+۱=-۵ \end{cases}$$

پس داریم:

$$x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow x^{۲}-۵x-۵=۰$$

۴۷- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

ابتدا با جابجایی ضرایب معادله‌ای را پیدا می‌کنیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله $۲x^{۳}-۳x^{۲}+ax+b=۰$ باشد:

$$۲x^{۳}-۳x^{۲}+ax+b=۰\rightarrow bx^{۳}+ax^{۲}-۳x+۲=۰\xrightarrow{\times ۳}۳bx^{۳}+۳ax^{۲}-۹x+۶=۰$$

با توجه به اینکه معادله‌ی $cx^{۳}+dx^{۲}-۹x+۶=۰$ نیز ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله داده شده است پس باید:

$$\begin{cases} c=۳b \\ d=۳a \end{cases}\rightarrow \frac{a+b}{c+d}=\frac{a+b}{۳b+۳a}=\frac{۱}{۳}$$

۴۸- گزینه‌ی $\boxed{۲}$

$$۲x(۲-x)=-۳\rightarrow -۲x^{۲}+۴x+۳=۰\rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=۲ \\ \alpha\beta=\frac{-۳}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{۲۸}{۹} \\ P=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=(\frac{۱}{\alpha\beta})^{۲}=\frac{۴}{۹} \end{cases}$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow x^{۲}-\frac{۲۸}{۹}x+\frac{۴}{۹}=۰\xrightarrow{\times ۹}۹x^{۲}-۲۸x+۴=۰$$

۴۹- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

می‌دانیم $(ax+by)^{۲}\le(a^{۲}+b^{۲})(x^{۲}+y^{۲})$ پس داریم:

$$(۴x+۳y)^{۲}\le(۴^{۲}+۳^{۲})(x^{۲}+y^{۲})\rightarrow ۷^{۲}\le ۲۵(x^{۲}+y^{۲})\rightarrow x^{۲}+y^{۲}\ge\frac{۴۹}{۲۵}$$

۵۰- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

$$۳x^{۲}+x-۱=۰\rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{۱}{۳} \\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

کافی است در معادله‌ی خواسته شده که ریشه‌های آن $\frac{۲\beta}{\alpha}$ و $\frac{۲\alpha}{\beta}$ است فقط S را پیدا کنیم.

$$S=\frac{۲\beta}{\alpha}+\frac{۲\alpha}{\beta}=\frac{۲\beta^{۲}+۲\alpha^{۲}}{\alpha\beta}=\frac{۲((\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta)}{\alpha\beta}=-\frac{۱۴}{۳}$$

پس $k=\frac{۱۴}{۳}$ است.

۵۱ـ گزینه‌ی ۱

چون ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند پس $P=1$ است بنابراین:

$$P=\frac{a^2-6}{a}=1\to a^2-a-6=0\to a=3 \quad \text{یا} \quad a=-2$$

اگر $a=3\to 3x^2+5x+3=0\to \Delta<0\to$ $a=3$ غیرقابل قبول است

اگر $a=-2\to -2x^2+5x-2=0\to \Delta=9>0\to$ $a=-2$ قابل قبول است

$$-2x^2+5x-2=0\to |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{9}}{|-2|}=\frac{3}{2}$$

۵۲ـ گزینه‌ی ۳

$$2x^2+4x-3=0\to\begin{cases}(2\alpha+1)+(2\beta+1)=\frac{-b}{a}=-2\to 2(\alpha+\beta)+2=-2\to\alpha+\beta=-2\\ (2\alpha+1)(2\beta+1)=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}\to 4(\alpha\beta)+2(\alpha+\beta)+1=-\frac{3}{2}\to\\ 4(\alpha\beta)-4+1=-\frac{3}{2}\to\alpha\beta=\frac{3}{8}\end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه دومی را می‌سازیم که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ باشد.

$$\begin{cases}S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{\frac{3}{8}}=\frac{-16}{3}\\ P=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$x^2-Sx+P=0\to x^2+\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}=0\to 3x^2+16x+8=0$$

۵۳ـ گزینه‌ی ۴

$$2x^2-5x-k=0\longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{5}{2}\\ \alpha\beta=-\frac{k}{2}\end{cases}$$

حال اگر ۲ واحد به ریشه‌ها اضافه کنیم ریشه‌ها به صورت $\alpha+2$ و $\beta+2$ تبدیل می‌شود پس داریم:

$$(\alpha+2)(\beta+2)-\alpha\beta=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4-\alpha\beta=2(\frac{5}{2})+4=9$$

۵۴ـ گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases}y=ax^2-x+2\\ y=x^2+ax\end{cases}\longrightarrow ax^2-x+2=x^2+ax\to(a-1)x^2-(a+1)x+2=0$$

مجموع ضرایب معادله‌ی فوق برابر با صفر است پس ریشه‌های آن به صورت $x_1=1$ و $x_2=\frac{2}{a-1}$ است پس اگر $a-1>0$ باشد یعنی $a>1$ هر دو ریشه‌ی معادله‌ی تلاقی مثبت است. واضح است که با این شرط عرض این نقاط نیز مثبت خواهد بود.

۵۵- گزینه‌ی $\boxed{۲}$

حاصلضرب ریشه‌ها باید برابر با یک باشد (ریشه‌ها معکوس یکدیگرند) پس داریم:

$$P=۱\rightarrow \frac{m^{۲}-۶}{m}=۱\rightarrow m^{۲}-m-۶=۰\rightarrow m=۳ \text{ یا } m=-۲$$

اگر $m=۳$ باشد معادله به صورت $۳x^{۲}+۵x+۳=۰$ است که ریشه ندارد پس $m=-۲$ می‌باشد.

۵۶- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$x^{۴}+m(x^{۲}+۳)=m^{۲}-۲x^{۲}\rightarrow x^{۴}+(m+۲)x^{۲}+(۳m-m^{۲})=۰$$

$$\xrightarrow{x^{۲}=y} y^{۲}+(m^{۲}+۲)y+(۳m-m^{۲})=۰ \qquad (۱)$$

معادله‌ی درجه چهارم داده شده دارای دو جواب است پس باید معادله‌ی (۱) دارای دو جواب مختلف‌العلامه باشد که ریشه‌ی منفی آن برای معادله درجه چهارم جواب ندارد.

$$P<۰\rightarrow P=\frac{۳m-m^{۲}}{۱}<۰\rightarrow m(۳-m)<۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} m<۰ \qquad m>۳$$

۵۷- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$۲x^{۲}-۵x+m-۱=۰\rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۵}{۲}\\ \alpha\beta=\frac{m-۱}{۲}\end{cases}$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=۵\rightarrow (\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۵\rightarrow (\frac{۵}{۲})^{۳}-۳(\frac{m-۱}{۲})(\frac{۵}{۲})=۵$$

$$\rightarrow \frac{-۱۵}{۴}(m-۱)=۵-\frac{۱۲۵}{۸}\rightarrow -\frac{۱۵}{۴}(m-۱)=-\frac{۸۵}{۸}\rightarrow m-۱=\frac{-\frac{\cancel{۸۵}^{۱۷}}{\cancel{۸}^{۲}}}{-\frac{\cancel{۱۵}^{۳}}{\cancel{۴}}}$$

$$\rightarrow m-۱=\frac{۱۷}{۶}\rightarrow m=\frac{۱۷}{۶}+۱=\frac{۲۳}{۶}$$

۵۸- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

نمودار تابع درجه دوم باید محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌هایی مختلف‌العلامه قطع کند تا نمودار از چهار ناحیه دستگاه مختصات عبور کند.

$$P<۰\rightarrow P=\frac{m^{۲}-۴}{۱}<۰\rightarrow m^{۲}-۴<۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} -۲<m<۲$$

۵۹- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

فرض کنیم α و βریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۵x-۱=۰$ باشند:

$$۲x^{۲}-۵x-۱=۰\rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۵}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}+۳x-m=۰$ به صورت $\beta-۲$ و $\alpha-۲$ است. حال ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$(\alpha-۲)(\beta-۲)=-\frac{m}{۲}\rightarrow \alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۴=-\frac{m}{۲}\rightarrow \frac{۱}{۲}-۲(\frac{۵}{۲})+۴=-\frac{m}{۲}$$

$$\rightarrow -\frac{۱}{۲}=-\frac{m}{۲}\rightarrow m=۱$$

۶۰ـ گزینه‌ی $\boxed{۴}$

فرض کنیم α و βریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-(a+۱)x+۲a=۰$ باشند:

$$۲x^۲-(a+۱)x+۲a=۰\rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{a+۱}{۲}=S\\ \alpha\beta=\dfrac{۲a}{۲}=a=P\end{cases}$$

$$\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}=\sqrt{۳}\rightarrow \sqrt{\frac{a+۱}{۲}-۲\sqrt{a}}=\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}$$

$$\frac{a+۱}{۲}-۲\sqrt{a}=۳\xrightarrow{\times۲}a-۴\sqrt{a}-۵=۰\xrightarrow{\sqrt{a}=t}t^۲-۴t-۵=۰\rightarrow\begin{cases}t=-۱\\ t=۵\end{cases}$$

$$t=۵\rightarrow\sqrt{a}=۵\rightarrow a=۲۵$$

۶۱ـ گزینه‌ی $\boxed{۴}$

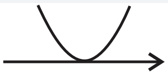
ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲x^۲-(m+۱)x+m-\frac{۱}{۲}=۰\xrightarrow{\times۲}۴x^۲-۲(m+۱)x+۲m-۱=۰$$

$$\begin{cases}۱)\,\Delta>۰\rightarrow\Delta=(-۲(m+۱))^۲-۴(۴)(۲m-۱)>۰\rightarrow m^۲-۶m+۵>۰\rightarrow m<۱ \text{ یا } m>۵\\ ۲)\,P>۰\rightarrow\dfrac{۲m-۱}{۴}>۰\rightarrow ۲m-۱>۰\rightarrow m>\dfrac{۱}{۲}\\ ۳)\,S>۰\rightarrow\dfrac{۲(m+۱)}{۴}>۰\rightarrow m>-۱\end{cases}$$

اگر از سه مجموعه فوق اشتراک بگیریم $m>۵$ خواهد بود.

۶۲ـ گزینه‌ی $\boxed{۳}$

نمودار تابع باید به صورت  باشد پس Δ معادله‌ی درجه دوم $x^۲+ax+a^۲-۱۲=۰$ برابر صفر است.

$$\Delta=a^۲-۴(a^۲-۱۲)=۰\rightarrow -۳a^۲+۴۸=۰\rightarrow a^۲=۱۶\rightarrow a=\pm۴$$

۶۳ـ گزینه‌ی $\boxed{۴}$

اگر α و βریشه‌های معادله‌ی $۹x^۲-۲۵ax+۴a=۰$ باشند داریم:

$$۹x^۲-۲۵ax+۴a=۰\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{۲۵a}{۹}=S\\ \alpha\beta=\dfrac{۴a}{۹}=P\end{cases}$$

$$\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|=\frac{۱}{۶}\rightarrow\sqrt{S-۲\sqrt{P}}=\frac{۱}{۶}\rightarrow\sqrt{\frac{۲۵a}{۹}-۲\sqrt{\frac{۴a}{۹}}}=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\text{2·H¼U ¾M}}$$

$$\frac{۲۵a}{۹}-۲\times\frac{۲}{۳}\sqrt{a}=\frac{۱}{۳۶}\xrightarrow{\times۳۶}۱۰۰a-۴۸\sqrt{a}-۱=۰\xrightarrow{\sqrt{a}=t}$$

$$۱۰۰t^۲ - ۴۸t - ۱ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} t = \frac{۱}{۲} \\ t = -\frac{۱}{۵۰} \quad \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$$

$$t = \frac{۱}{۲} \to \sqrt{a} = \frac{۱}{۲} \to a = \frac{۱}{۴}$$

۶۴- گزینه‌ی ۲

$$۵x^۴ - ۴۲x^۲ - ۲۷ = ۰ \to (۵x^۲ + ۳)(x^۲ - ۹) = ۰ \to x^۲ - ۹ = ۰ \to x = ۳ \text{ یا } x = -۳$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}x_۱ + ۱ = \frac{۱}{۲} \times ۳ + ۱ = \frac{۵}{۲} \\ \frac{۱}{۲}x_۲ + ۱ = \frac{۱}{۲} \times (-۳) + ۱ = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \to (x - \frac{۵}{۲})(x + \frac{۱}{۲}) = ۰ \to x^۲ - ۲x - \frac{۵}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲ - ۸x - ۵ = ۰$$

۶۵- گزینه‌ی ۳

مجموع ضرایب معادله‌ی داده شده برابر صفر است. پس یکی از ریشه‌های آن ۱ می‌باشد بنابراین چند جمله‌ای داده شده بر $(x - ۱)$ بخش‌پذیر است.

$$x^۳ + ۳x^۲ + (m - ۶)x - m + ۲ = (x - ۱)(x^۲ + ۴x - ۲ + m)$$

با توجه به فرض مسئله باید معادله‌ی درجه دوم $x^۲ + ۴x - ۲ + m = ۰$ دارای دو ریشه منفی باشد.

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \to \Delta = ۱۶ - ۴(-۲ + m) > ۰ \to ۲۴ - ۴m > ۰ \to m < ۶ & (۱) \\ S < ۰ \to -۴ < ۰ \\ P > ۰ \to -۲ + m > ۰ \to m > ۲ & (۲) \end{cases}$$

اگر از دو مجموعه‌ی (۱) و (۲) اشتراک بگیریم داریم $۲ < m < ۶$.

۶۶- گزینه‌ی ۴

تابع محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس معادله‌ی $x^۲ + ax + ۲a - ۳ = ۰$ دارای دو ریشه مثبت است.

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \to a^۲ - ۴(۲a - ۳) > ۰ \to a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \to a < ۲ \text{ یا } a > ۶ \\ S > ۰ \to -a > ۰ \to a < ۰ \\ P > ۰ \to ۲a - ۳ > ۰ \to a > \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

اگر از سه مجموعه فوق اشتراک بگیریم مجموعه جواب $\varnothing$ است.

۶۷- گزینه‌ی ۴

شرط این که معادله دارای دو ریشه منفی باشد این است که:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \to \Delta = ۱۶ - ۴(m + ۲)(m - ۱) > ۰ \to -m^۲ - m + ۶ > ۰ \to -۳ < m < ۲ \\ P > ۰ \to \frac{m - ۱}{m + ۲} > ۰ \to m < -۲ \text{ یا } m > ۱ \\ S < ۰ \to \frac{-۴}{m + ۲} < ۰ \to m > -۲ \end{cases}$$

اشتراک از سه مجموعه‌ی فوق، جواب به صورت $۱ < m < ۲$ است.

۶۸- گزینه‌ی ۳

$$۶(۴)^{\frac{۲}{x}} - ۱۳(۶)^{\frac{۲}{x}} + ۶(۹)^{\frac{۲}{x}} = ۰ \xrightarrow{\div (۹)^{\frac{۲}{x}}} ۶(\frac{۴}{۹})^{\frac{۲}{x}} - ۱۳(\frac{۶}{۹})^{\frac{۲}{x}} + ۶ = ۰$$

$$\rightarrow 6\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{x}} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 6 = 0 \rightarrow 6\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}\right)^2 - 13\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = A} 6A^2 - 13A + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{x} = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{x} = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{حاصل‌ضرب} = (2)(-2) = -4$$

۶۹- گزینه‌ی $\boxed{2}$

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ باشند:

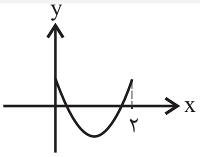
$$2x^2 - mx + m - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{m}{2} \\ \alpha\beta = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

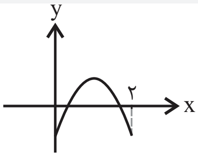
$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \xrightarrow{\times 4}$$

$$m^2 - 4m + 4 = 16 \rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$$

به ازای $m = 6$ معادله‌ی $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ریشه حقیقی ندارد پس $m = -2$ است.

۷۰- گزینه‌ی $\boxed{3}$





در هر دو حالت بالا $f(0)f(2) > 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} f(0) = (m+2)(0)^2 - 4(0) + (m+2) = m+2 \\ f(2) = (m+2)(2)^2 - 4(2) + (m+2) = 5m+2 \end{cases} \rightarrow (m+2)(5m+2) > 0 \rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -\frac{2}{5} \qquad (1)$$

از طرفی معادله دو ریشه دارد پس $\Delta > 0$ است بنابراین:

$$\Delta = 16 - 4(m+2)^2 > 0 \rightarrow (m+2)^2 < 4 \rightarrow -4 < m < 0 \qquad (2)$$

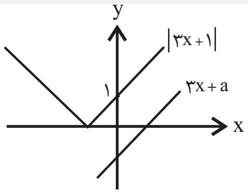
از طرفی رأس سهمی باید در بازه‌ی $(0, 2)$ باشد پس:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(m+2)} = \frac{2}{m+2} \rightarrow 0 < \frac{2}{m+2} < 2 \rightarrow m > -1 \qquad (3)$$

حال اگر از (۱) ، (۲) و (۳) اشتراک بگیریم داریم: $-\frac{2}{5} < m < 0$

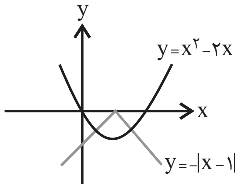
۷۱- گزینه‌ی $\boxed{1}$

اگر $a < 1$ باشد در این صورت $3x + a$ نمودار $|3x+1|$ را قطع نمی‌کند.



۷۲- گزینه‌ی ۳

$$x^2+|x-1|=2x \to x^2-2x=-|x-1|$$



با توجه به نمودارهای رسم شده معادله داده شده ۲جواب دارد.

پاسخنامه تست‌های درس سوم (معادلات گویا و گنگ)

۷۳- گزینه‌ی ۲

$$x^2+4x+3=a \to a=\sqrt{a+2} \longrightarrow a^2=a+2 \to a^2-a-2=0$$

$$\to \begin{cases} a=-1 & \text{غ‌ق‌ق} \\ a=2 \to x^2+4x+3=2 \to x^2+4x+1=0 \to \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\dfrac{c}{a}=1 \end{cases}$$

۷۴- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} 11\times\dfrac{40}{100}=4/4 \\ 4\times\dfrac{70}{100}=2/8 \end{cases} \longrightarrow 4/4+2/8=7/2 \ \text{میزان کل رنگ}$$

فرض کنیم با تبخیر x کیلوگرم غلظت محلول به ٪۵۰ می‌رسد پس داریم:

$$\frac{7/2}{15-x}=\frac{50}{100} \to 15-x=14/4 \to x=0/6$$

۷۵- گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه عبارت را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x+10\ge 0 \to x\ge -5 \\ x-3\ge 0 \to x\ge 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+7\ge 0 \to x\ge -\dfrac{7}{3} \\ 3-x\ge 0 \to x\le 3 \end{cases}$$

تنها عدد $x=3$ در دامنه عبارت قرار دارد که در معادله صدق می‌کند پس معادله یک جواب دارد.

۷۶- گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases} |x-2|\ge 0 \\ \sqrt{x-1}\ge 0 \\ 1\ge 1 \end{cases} \longrightarrow |x-2|+\sqrt{x-1}+1\ge 1 \to \ \text{معادله جواب ندارد}$$

۷۷- گزینه‌ی ۲

$$(9-x^2)\sqrt{2-x}=0 \to \begin{cases} \sqrt{2-x}=0 \to x=2 \\ 9-x^2=0 \to x^2=9 \to \begin{cases} x=3 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

معادله دارای دو ریشه است.

۷۸– گزینه‌ی $\boxed{۴}$

ابتدا شرط دامنه را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳x+۳\ge ۰ \to x\ge -۱ \\ x-۳\ge ۰ \to x\ge ۳ \\ \sqrt{x-۳}-۳\ge ۰ \to \sqrt{x-۳}\ge ۳ \to x-۳\ge ۹ \to x\ge ۱۲ \end{cases}$$

پس دامنه‌ی عبارت به صورت $x\ge ۱۲$ است پس داریم:

$$\sqrt{۳x+۳}=\sqrt{x-۳}-۳ \xrightarrow{\text{به‌توان}۲} ۳x+۳=x-۳+۹-۶\sqrt{x-۳}$$

$$\longrightarrow ۲x-۳=-۶\sqrt{x-۳} \qquad (۱)$$

با توجه به شرط دامنه داریم:

$$\begin{cases} x\ge ۱۲ \to ۲x\ge ۲۴ \to ۲x-۳\ge ۲۱ \\ x\ge ۱۲ \to x-۳\ge ۹ \to \sqrt{x-۳}\ge ۳ \xrightarrow{\times(-۶)} -۶\sqrt{x-۳}\le -۱۸ \end{cases}$$

سمت چپ تساوی (۱) از ۲۱ بزرگتر یا مساوی است و سمت راست آن از -۱۸ کوچکتر یا مساوی است پس معادله جواب ندارد.

۷۹– گزینه‌ی $\boxed{۴}$

دو عبارت رادیکالی داده شده نامنفی‌اند و مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است. پس هر یک از آنها برابر صفر می‌باشد.

$$\begin{cases} ۳x^۲-۷x+۲=۰ \\ ۲x^۲+۴x-ax-۲a=۰ \end{cases} \to \begin{cases} x=۲ \text{ یا } x=\frac{۱}{۳} \\ (x+۲)(۲x-a)=۰ \to x=-۲ \text{ یا } x=\frac{a}{۲} \end{cases}$$

معادله وقتی جواب دارد که دو معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی مشترک باشند پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{۲}=۲ \to a=۴ \\ \text{یا} \\ \frac{a}{۲}=\frac{۱}{۳} \to a=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

۸۰– گزینه‌ی $\boxed{۳}$

اگر $x^۲-۲x=A$ بگیریم آن‌گاه داریم:

$$\frac{۱}{A}+\frac{۲}{A-۳}=-\frac{۳}{۲} \to \frac{A-۳+۲A}{A(A-۳)}=-\frac{۳}{۲} \to ۳A^۲-۹A=-۶A+۶$$

$$\to ۳A^۲-۳A-۶=۰ \xrightarrow{\div ۳} A^۲-A-۲=۰ \longrightarrow \begin{cases} A=-۱ \\ A=۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^۲-۲x=-۱ \to x^۲-۲x+۱=۰ \to x_۱^۲+x_۲^۲=S^۲-۲P=۴-۲=۲ \\ x^۲-۲x=۲ \to x^۲-۲x-۲=۰ \to x_۱'^۲+x_۲'^۲=S'^۲-۲P'=۴+۴=۸ \end{cases}$$

پس مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۱۰ است.

۸۱– گزینه‌ی $\boxed{۳}$

ابتدا دامنه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰\ge ۰ \to -(x^۲(x-۴)-۲۵(x-۴))\ge ۰ \to -(x-۴)(x^۲-۲۵)\ge ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} (-\infty,-۵]\cup[۴,۵]$$

$$-x^۲+۶x-۸=-(x-۲)(x-۴)\geq ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} [۲,۴]$$

تنها عددی که در اشتراک دو محدوده‌ی بالا قرار دارد $x=۴$ است که در معادله صدق می‌کند پس معادله فقط یک جواب دارد.

۸۲- گزینه‌ی ۱

$$x^۲-۴x+\sqrt{x}+۲=۰ \to x(x-۴)+(\sqrt{x}+۲)=۰ \to x(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)+(\sqrt{x}+۲)=۰$$
$$\to (\sqrt{x}+۲)(x\sqrt{x}-۲x+۱)=۰$$

می‌دانیم $\sqrt{x}+۲\neq ۰$ است پس $x\sqrt{x}-۲x+۱=۰$ است.

$$t=\sqrt{x} \longrightarrow t^۳-۲t^۲+۱=۰ \longrightarrow (t-۱)(t^۲-t-۱)=۰$$

معادله‌ی $t-۱=۰$ دارای یک ریشه و معادله‌ی $t^۲-t-۱=۰$ دارای دو ریشه است که یکی از ریشه‌ها منفی است که غیرقابل قبول است پس معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه است.

۸۳- گزینه‌ی ۴

$$\frac{x^۲+x}{x^۲-x-۲}+\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۱}=\frac{۱}{۲} \to \frac{x\cancel{(x+۱)}}{(x-۲)\cancel{(x+۱)}}+\frac{(x+۲)\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}=\frac{۱}{۲}$$
$$\to \frac{x}{x-۲}+\frac{x+۲}{x+۱}=\frac{۱}{۲} \to \frac{x^۲+x+x^۲-۴}{x^۲-x-۲}=\frac{۱}{۲} \to ۴x^۲+۲x-۸=x^۲-x-۲$$
$$\to ۳x^۲+۳x-۶=۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲+x-۲=۰ \to \begin{cases} x=-۲ \\ x=۱ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۸۴- گزینه‌ی ۱

$$x^۲-۲x-۲=y \to \frac{۱}{y}-\frac{۱}{y-۳}=\frac{۳}{۲} \to \frac{y-۳-y}{y^۲-۳y}=\frac{۳}{۲} \to ۳y^۲-۹y=-۶$$
$$\to ۳y^۲-۹y+۶=۰ \xrightarrow{\div ۳} y^۲-۳y+۲=۰ \to \begin{cases} y=۱ \\ y=۲ \end{cases}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} x^۲-۲x-۲=۱ \to x^۲-۲x-۳=۰ \to x_۱=-۱\ ,\ x_۲=۳ \\ x^۲-۲x-۲=۲ \to x^۲-۲x-۴=۰ \to \begin{cases} x'_۱+x'_۲=۲ \\ x'_۱\ x'_۲=-۴ \end{cases} \end{cases}$$
$$x_۱^۲+x_۲^۲+(x_۱'^۲+x_۲'^۲)=(-۱)^۲+(۳)^۲+((x'_۱+x'_۲)^۲-۲x'_۱x'_۲)=۱+۹+(۲^۲-۲(-۴))=۲۲$$

۸۵- گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی عبارت را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x+۴\geq ۰ \to x\geq -۲ \\ ۱-x\geq ۰ \to x\leq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\leq x\leq ۱$$

تنها عدد صحیح در محدوده‌ی فوق که در معادله صدق می‌کند $x=-۱$ است.

۸۶- گزینه‌ی ۴

$$۱+\sqrt{۱+x^۲}=\sqrt{۱+x} \xrightarrow{\text{به‌توان۲}} ۱+۱+x^۲+۲\sqrt{۱+x^۲}=۱+x$$
$$\to ۲\sqrt{۱+x^۲}=-x^۲+x-۱$$

سمت راست تساوی همواره منفی ($\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ منفی است) و سمت چپ تساوی همواره مثبت است پس معادله جواب ندارد.

۸۷- گزینه‌ی $\boxed{۲}$

$$\sqrt{x^۲-۴}+۴=x(۴-x)\rightarrow\sqrt{x^۲-۴}+x^۲-۴x+۴=۰\rightarrow\sqrt{x^۲-۴}+(x-۲)^۲=۰$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر باشد باید همزمان هر دوی آنها صفر باشند.

$$\begin{cases}\sqrt{x^۲-۴}=۰\rightarrow x=\pm۲\\(x-۲)^۲=۰\rightarrow x=۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x=۲$$

۸۸- گزینه‌ی $\boxed{۲}$

$$\frac{۲a}{x-x^۲}+\frac{۱}{x-۱}=۱\longrightarrow\frac{۲a}{x(۱-x)}+\frac{۱}{-(۱-x)}=۱\rightarrow\frac{۲a-x}{x(۱-x)}=۱\rightarrow$$

$$۲a-x=x-x^۲\rightarrow x^۲-۲x+۲a=۰$$

چون معادله ریشه مضاعف دارد پس دلتای عبارت صفر است.

$$\Delta=۴-۸a=۰\rightarrow۸a=۴\rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۸۹- گزینه‌ی $\boxed{۲}$

$$x(\sqrt{x+۲}-x)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\\sqrt{x+۲}-x=۰\end{cases}$$

$$\sqrt{x+۲}-x=۰\rightarrow\sqrt{x+۲}=x\xrightarrow{x\geq۰}x+۲=x^۲\rightarrow x^۲-x-۲=۰\rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=-۱\quad\text{غقق}\end{cases}$$

پس معادله دو جواب دارد.

۹۰- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

$$x=-۱\rightarrow-۲-\sqrt{-۳-a}=-۴\rightarrow\sqrt{-۳-a}=۲\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}-۳-a=۴\rightarrow a=-۷$$

$$\text{معادله}:۲x+۴=\sqrt{۳x+۷}\longrightarrow۴x^۲+۱۶x+۱۶=۳x+۷\rightarrow۴x^۲+۱۳x+۹=۰$$

$$\longrightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=-\frac{۹}{۴}\quad\text{غقق}\end{cases}$$

۹۱- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

$$\frac{t-۱}{۲x}=\frac{x+۱}{x^۲-۲x}\rightarrow(t-۱)x(x-۲)=۲x(x+۱)\xrightarrow{x\neq۰}$$

$$(t-۱)(x-۲)=۲(x+۱)\rightarrow(t-۱)x-۲(t-۱)=۲x+۲\rightarrow x=\frac{۲t}{t-۳}$$

برای این‌که معادله جواب نداشته باشد باید x بدست آمده در تساوی فوق مخرج یکی از کسرهای معادله داده شده را صفر کند. پس داریم:

$$\begin{cases}\frac{۲t}{t-۳}=۰\rightarrow t=۰\\\frac{۲t}{t-۳}=۲\rightarrow۲t=۲t-۶\rightarrow۰=-۶\ \text{برقرارنیست}\end{cases}$$

از طرفی اگر $t=۳$ باشد مخرج $\frac{۲t}{t-۳}$ نیز برابر صفر است. پس به ازای $t=۰$ یا $t=۳$ معادله جواب ندارد.

۹۲- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{به‌توان۲}}x+\cancel{\sqrt{x}}+x-\cancel{\sqrt{x}}+۲\sqrt{x^۲-x}=۲$$

$$\rightarrow۲x+۲\sqrt{x^۲-x}=۲\rightarrow\sqrt{x^۲-x}=۱-x\xrightarrow{\text{طرفین به‌توان۲}}x^۲-x=x^۲-۲x+۱\rightarrow x=۱$$

پاسخنامه تست‌های درس چهارم (قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۹۳- گزینه‌ی ۱

$$y=\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{4x^2+4x+1}+ax+b=|x+1|-|2x+1|+ax+b$$

$$\xrightarrow{-1\le x\le -\frac{1}{2}} y=x+1+2x+1+ax+b=(3+a)x+(b+2)=3$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 3+a=0\rightarrow a=-3 \\ b+2=3\rightarrow b=1 \end{cases} \rightarrow a-b=-4$$

۹۴- گزینه‌ی ۳

$$\left||x^2-13|-10\right|=2\rightarrow \begin{cases} |x^2-13|-10=2\rightarrow |x^2-13|=12 \\ |x^2-13|-10=-2\rightarrow |x^2-13|=8 \end{cases}$$

$$|x^2-13|=12\rightarrow \begin{cases} x^2-13=12\rightarrow x^2=25\rightarrow x=\pm 5 \\ x^2-13=-12\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

$$|x^2-13|=8\rightarrow \begin{cases} x^2-13=8\rightarrow x^2=21\rightarrow x=\pm\sqrt{21} \\ x^2-13=-8\rightarrow x^2=5\rightarrow x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

۹۵- گزینه‌ی ۴

۹۶- گزینه‌ی ۳

$$|x+3|=3|x|+1$$

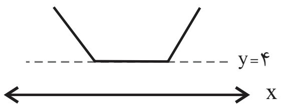
الف) $x\ge 0\rightarrow \quad x+3=3x+1 \quad\rightarrow\quad x=1$

ب) $-3\le x<0 \quad\rightarrow\quad x+3=-3x+1 \quad\rightarrow\quad x=-\frac{1}{2}$

ج) $x<-3 \quad\rightarrow\quad -x-3=-3x+1 \quad\rightarrow\quad 2x=4 \quad\rightarrow\quad x=2$ غیرقابل قبول است زیرا جواب بدست آمده در محدوده قرار ندارد

۹۷- گزینه‌ی ۲

$$|2x-2|+2|x+3|=m\rightarrow |x-1|+|x+3|=\frac{m}{2}$$



اگر نمودار $|x-1|+|x+3|$ را رسم کنیم کمترین مقدار برابر ۴ است پس زمانی معادله ریشه دارد که $4<\frac{m}{2}$ باشد پس $m<8$ است.

۹۸- گزینه‌ی ۱

اگر $x<0:\ x^2+2x-6-3x=0\rightarrow x^2-x-6=0\rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{غقق} \\ x=-2 \end{cases}$

اگر $x\ge 0:\ x^2+2x-6+3x=0\rightarrow x^2-5x-6=0\rightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{غقق} \\ x=6 \end{cases}$

مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ می‌باشد.

۹۹- گزینه‌ی ۲

دامنه‌ی عبارت برابر است با:
$$x-۱\geq ۰ \longrightarrow x\geq ۱$$

پس با توجه به دامنه‌ی عبارت $|x+۱|=x+۱$ می‌باشد پس داریم:

$$x+۱+\sqrt{x-۱}=۳x+۲ \to \sqrt{x-۱}=۲x+۱ \xrightarrow{\text{به‌توان}۲}$$
$$x-۱=۴x^۲+۴x+۱ \to ۴x^۲+۳x+۲=۰$$

چون Δ معادله‌ی درجه دوم فوق منفی است. پس معادله جواب ندارد.

۱۰۰- گزینه‌ی ۳

$$\text{اگر}\quad x\geq ۰:\ ax+x=۱ \to x=\frac{۱}{a+۱} \xrightarrow{x>۰} \frac{۱}{a+۱}>۰ \to a>-۱$$
$$\text{اگر}\quad x<۰:\ ax-x=۱ \to x=\frac{۱}{a-۱} \xrightarrow{x<۰} \frac{۱}{a-۱}<۰ \to a<۱$$

چون می‌خواهیم معادله دو جواب داشته باشد پس a در هر دو شرط صدق کند پس $-۱<a<۱$ و یا به عبارتی $|a|<۱$ است.

۱۰۱- گزینه‌ی ۳

با توجه به نامعادله‌ی $\left|\frac{۲x+۱}{x-۱}\right|<a$ باید $a>۰$ باشد پس داریم:

$$\frac{|۲x+۱|}{|x-۱|}<a \to |۲x+۱|<a|x-۱| \to |۲x+۱|<|ax-a| \xrightarrow{\text{به‌توان}۲}$$
$$(۲x+۱)^۲<(ax-a)^۲ \to (۲x+۱)^۲-(ax-a)^۲<۰ \to \big((۲x+۱)-(ax-a)\big)\big((۲x+۱)+(ax-a)\big)<۰$$
$$\big((۲-a)x+(۱+a)\big)\big((۲+a)x+(۱-a)\big)<۰ \qquad (۱)$$

برای آن‌که جواب نامعادله $(-\infty,b)$ باشد باید عبارت (۱) نامعادله درجه‌ی اول باشد پس یا $۲-a=۰$ و یا $۲+a=۰$ است، چون $a>۰$ است $a=۲$ می‌باشد پس نامعادله‌ی (۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$۳(۴x-۱)<۰ \to x<\frac{۱}{۴} \to b=\frac{۱}{۴} \to a+b=\frac{۹}{۴}$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۴

$$۲x-|x-۲|>x^۲ \longrightarrow \begin{cases} ۲x-(x-۲)>x^۲ & x\geq ۲ \\ ۲x+(x-۲)>x^۲ & x<۲ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^۲-x-۲<۰ & x\geq ۲ \\ x^۲-۳x+۲<۰ & x<۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{cases} -۱<x<۲\ ,\ x\geq ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{جواب ندارد} \\ ۱<x<۲\ ,\ x<۲ \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱<x<۲ \end{cases}$$

پس نقطه میانی بازه $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۰۳- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم $|a|+|b|\geq |a\pm b|$ پس داریم:
$$|۲x-۱|+|۲x+۶|\geq |۲x-۱-۲x-۶|=|-۷|=۷$$

۱۰۴- گزینه‌ی ۴

$$\sqrt{۴x^۲+۱۲x+۹}+۲\sqrt{x^۲-۴x+۴}=۵ \to |۲x+۳|+۲|x-۲|=۵$$
$$\to |۲x+۳|+|۲x-۴|=۵$$

از طرفی $|۲x+۳|+|۲x-۴|\geq |۲x+۳-۲x+۴|=۷$ پس این معادله جواب ندارد.

۱۰۵- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه است، از طرفی علامت y همواره مثبت است پس ضابطه $y=\left||x|-۲\right|$ است.

۱۰۶- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

$$\begin{cases} x<-۲\to y=-۲x-۴+۳-۳x+x=-۴x-۱ \\ -۲\le x\le ۱\to y=۲x+۴+۳-۳x+x=۷ \\ x>۱\to y=۲x+۴-۳+۳x+x=۶x+۱ \end{cases}$$

بنابراین در بازه‌ی $[-۲,۱]$ تابع ثابت است.

۱۰۷- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

$$\frac{۴x-۸}{|x-۲|}=x\to\frac{۴(x-۲)}{|x-۲|}=x\to\begin{cases} x>۲\to x=۴ \\ x<۲\to x=-۴ \end{cases}$$

۱۰۸- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

$$y=۰\to -|x-۴|+۱=۰\to |x-۴|=۱\to\begin{cases} x-۴=۱\to x=۵ \\ x-۴=-۱\to x=۳ \end{cases}$$

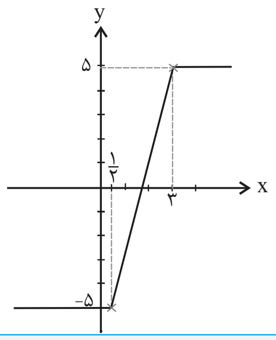
۱۰۹- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

$$۱<x<۲\to -۳(x-۲)+(x-۱)=k\to -۲x+۵=k\to x=\frac{۵-k}{۲}$$

$$۱<\frac{۵-k}{۲}<۲\xrightarrow{\times ۲}۲<۵-k<۴\to -۴<k-۵<-۲\xrightarrow{+۵}۱<k<۳$$

۱۱۰- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$y=|۲x-۱|-۲|x-۳|$



با توجه به نمودار رسم شده بیشترین مقدار تابع ۵ است.

۱۱۱- گزینه‌ی $\boxed{۴}$

با توجه به نکته $ab\ge ۰\leftrightarrow |a|+|b|=|a+b|$ داریم:

$$|۲x|+|۱۰-x|=|x+۱۰|\longrightarrow ۲x(۱۰-x)\ge ۰\longrightarrow ۰\le x\le ۱۰$$

بنابراین جواب‌های صحیح معادله اعداد ۰ تا ۱۰ است که مجموعشان برابر ۵۵ است.

مجموع اعداد صحیح در محدوده‌ی فوق برابر ۵۵ است.

۱۱۲- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$x<۰\to y=-۲x+۲-x=-۳x+۲$

$۰\le x<۱\to y=-۲x+۲+x=-x+۲$

$x\ge ۱\to y=۲x-۲+x=۳x-۲$

بنابراین خط $y=-x+۲$ بر نمودار تابع در بازه‌ی $[۰,۱)$ منطبق است.

۱۱۳- گزینه‌ی ۴

$$\left||x-۱|-۲\right|=۱\to\begin{cases}|x-۱|-۲=۱\to|x-۱|=۳\to\begin{cases}x-۱=۳\to x=۴\\x-۱=-۳\to x=-۲\end{cases}\\|x-۱|-۲=-۱\to|x-۱|=۱\to\begin{cases}x-۱=۱\to x=۲\\x-۱=-۱\to x=۰\end{cases}\end{cases}$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۱

ریشه‌ی عبارت داخل قدر مطلق طول رأس می‌باشد.

$$۱+bx=۰\to x=-\frac{۱}{b}\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}b=-۲$$

از طرفی نمودار از نقطه‌ی $(۰,-۲)$ نیز عبور می‌کند پس داریم:

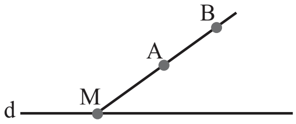
$$y=۱+a|۱-۲x|\xrightarrow{(۰,-۲)}-۲=۱+a|۱|\to a+۱=-۲\to a=-۳$$

پس $a+b=-۵$ می‌باشد.

پاسخنامه تست‌های درس پنجم (آشنایی با هندسه تحلیلی)

۱۱۵- گزینه‌ی ۲

کافی است نقطه‌ی تقاطع خط d با امتداد خط AB را بیابیم.



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۷-۳}{۴-۲}=۲\to\ \text{معادله‌ی خط}\ AB:y=۲x-۱$$

$$\begin{cases}y=۲x-۱\\d:y=x-۱\end{cases}\to۲x-۱=x-۱\to x=۰$$

۱۱۶- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases}۳y+۴x=۸\\۲y-۳x=۱۱\end{cases}\to x=-۱,y=۴\to B(-۱,۴)$$

نقطه‌ی A رأس مقابل به رأس B می‌باشد پس وسط پاره‌خط AB وسط قطر است.

$$M=(\frac{-۱+۷}{۲},\frac{۴+۶}{۲})=(۳,۵)$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۳

دو خط داده شده با هم موازیند پس فاصله‌ی بین دو خط طول ضلع مربع است.

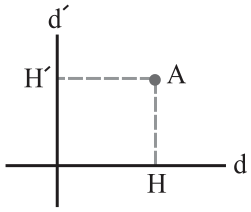
$$\begin{cases}۲x-۲y=۳\to x-y-\frac{۳}{۲}=۰\\y=x+۱\to x-y+۱=۰\end{cases}$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\left|-\frac{۳}{۲}-۱\right|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{\left|-\frac{۵}{۲}\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۲

چون شیب دو خط داده شده عکس قرینه یکدیگرند پس معادله‌ی دو ضلع مجاور عمود بر هم داده شده است رأس A روی هیچ یک از این خطوط قرار ندارند پس برای پیدا کردن طول و عرض مستطیل فاصله‌ی نقطه‌ی A را از هر یک از خطوط بدست آوریم:



$$x+۲y-۶=۰ \rightarrow AH'=\frac{|۸(۱)+۵(۲)-۶|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$۲x-y-۷=۰ \rightarrow AH=\frac{|۸(۲)+۵(-۱)-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$S=(\frac{۱۲}{\sqrt{۵}})\times(\frac{۴}{\sqrt{۵}})=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} m_{AC}=\frac{۵-۲}{۲-۰}=\frac{۳}{۲} \\ m_{BC}=\frac{۰-۲}{۳-۰}=-\frac{۲}{۳} \end{cases} \rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ در راس } C \text{ قائمه است}$$

$$AC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

$$BC=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

$$S=\frac{AC\times BC}{۲}=\frac{\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}}{۲}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۴

فاصله‌ی نقطه‌ی A از ضلع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases} A(۳,-۱) \\ x-۲y+۵=۰ \end{cases} \longrightarrow AH=\frac{|۳(۱)-۱(-۲)+۵|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

$$\text{ضلع مربع}=۲(۲\sqrt{۵})=۴\sqrt{۵} \longrightarrow S=(۴\sqrt{۵})^۲=۸۰$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۳

$$(۱,۲) \text{ و } (-۱,۳) \rightarrow m=\frac{۳-۲}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲} \rightarrow \text{معادله‌ی خط}: y-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۱)$$

حال محل تلاقی خط را با محورهای مختصات بدست می‌آوریم:

$$x=۰ \rightarrow y-۲=-\frac{۱}{۲}(۰-۱) \rightarrow y=\frac{۵}{۲} \rightarrow A(۰,\frac{۵}{۲})$$

$$y=۰ \rightarrow ۰-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۱) \rightarrow x=۵ \rightarrow B(۵,۰)$$

مختصات M وسط AB برابر است با $M(\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۴})$.

$$OM=\sqrt{(\frac{۵}{۲})^۲+(\frac{۵}{۴})^۲}=۵\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۴})^۲}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۲

رأس A محل برخورد دو خط AB و AC است.

$$\begin{cases} x+۲y=۳ \\ -۲x+y=-۱ \end{cases} \longrightarrow x=۱, y=۱ \to A(۱,۱)$$

$$\begin{cases} A(۱,۱) \\ BC: x+y-۴=۰ \end{cases} \longrightarrow AH=\frac{|۱(۱)+۱(۱)-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۱۲۳- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

خط موازی با $y=\sqrt{۳}\,x-۱$ که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y=\sqrt{۳}\,x$ است که فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-\sqrt{۳})^۲}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۱۲۴- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

$$C,B \text{ وسط } M \to M(\frac{۲+۰}{۲},\frac{۰-۲}{۲})=(۱,-۱)$$

$$\begin{cases} A(-۲,۳) \\ M(۱,-۱) \end{cases} \longrightarrow AM=\sqrt{(۱-(-۲))^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

۱۲۵- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی این دو خط است:

$$\begin{cases} ۲x+\sqrt{۵}\,y=۳ \\ ۵y+۲\sqrt{۵}\,x=۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ۲x+\sqrt{۵}\,y-۳=۰ \xrightarrow{\times\sqrt{۵}} ۲\sqrt{۵}\,x+۵y-۳\sqrt{۵}=۰ \\ ۲\sqrt{۵}\,x+۵y=۰ \end{cases}$$

$$\text{طول ضلع مربع} \quad d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۳\sqrt{۵}-۰|}{\sqrt{(۲\sqrt{۵})^۲+۵^۲}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}}=۱$$

$$\text{محیط مربع}=۴\times۱=۴$$

۱۲۶- گزینه‌ی $\boxed{۳}$

نقطه‌ی $A(-۳,-۳)$ روی این دو ضلع نیست پس اول محل برخورد این دو ضلع را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲x+y=۱ \\ ۲y-۳x+۵=۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ۲x+y=۱ \\ -۳x+۲y=-۵ \end{cases} \longrightarrow x=۱\,,\ y=-۱ \longrightarrow C(۱,-۱)$$

نقطه‌ی M محل برخورد قطرها وسط AC قرار دارد.

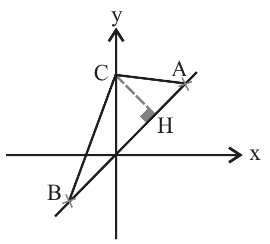
$$M(\frac{-۳+۱}{۲},\frac{-۳-۱}{۲})=(-۱,-۲) \to Mo=\sqrt{(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$

۱۲۷- گزینه‌ی $\boxed{۱}$

مختصات هر نقطه روی نیمساز اول و سوم به صورت (x,x) است پس داریم:

$$\frac{|x+۲x|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۲\sqrt{۵} \to \frac{۳|x|}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵} \to |x|=\frac{۱۰}{۳} \to x=\pm\frac{۱۰}{۳}$$

$$A(\frac{۱۰}{۳},\frac{۱۰}{۳}) \qquad B(-\frac{۱۰}{۳},-\frac{۱۰}{۳}) \qquad C=(۰,۳)$$



حال فاصله‌ی C را از خط AB بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} C(۰,۳) \\ AB:\ y=x \end{cases} \longrightarrow CH=\frac{|۳-۰|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$AB=\sqrt{\left(\frac{۱۰}{۳}-(-\frac{۱۰}{۳})\right)^۲+\left(\frac{۱۰}{۳}-(-\frac{۱۰}{۳})\right)^۲}=\sqrt{۲\times(\frac{۲۰}{۳})^۲}=\frac{۲۰}{۳}\sqrt{۲}$$

$$S=\frac{CH\times AB}{۲}=\frac{\frac{۳}{\cancel{\sqrt{۲}}}\times\frac{۲۰}{\cancel{۳}}\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}=۱۰$$

۱۲۸- گزینهٔ $\boxed{۲}$

$$m_{AB}=\frac{-۳-۱}{۰-۲}=+۲$$

پس معادله‌ی خطی که عمود بر خط AB است و از مبدأ می‌گذرد به صورت $y=-\frac{۱}{۲}x$ می‌باشد ومحل برخورد این خط با خط $x=۴$ برابر است با:

$$y=-\frac{۱}{۲}x\xrightarrow{x=۴}y=-۲$$

۱۲۹- گزینهٔ $\boxed{۲}$

فرض کنید نقطه‌ی A روی خط $y=۲x+۱$ قرار دارد پس می‌توان مختصات آن را به صورت $A(x,۲x+۱)$ در نظر گرفت فاصله‌ی این نقطه تا نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d=\frac{|x(۱)+(۲x+۱)(-۱)|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-x-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{|x+۱|}{\sqrt{۲}}\underset{}{\overset{\text{طبق‌فرض}}{=\!=}}۴\sqrt{۲}$$

$$\longrightarrow|x+۱|=۸\rightarrow\begin{cases}x+۱=۸\\x+۱=-۸\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=۷\\x=-۹\end{cases}$$

۱۳۰- گزینهٔ $\boxed{۴}$

فاصله‌ی مرکز مربع تا اضلاع مربع برابر با نصف طول ضلع مربع است.

$$AH=\frac{|۴(۱)-۳(۴)-۱|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۹}{۵}\rightarrow \text{طول ضلع مربع}=\frac{۱۸}{۵}$$

$$\text{مساحت}=(\frac{۱۸}{۵})^۲=۱۲/۹۶$$

۱۳۱- گزینهٔ $\boxed{۳}$

$$m_{AB}=\frac{۲-۱}{۱-۳}=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{CH\perp AB}m_{CH}=۲\rightarrow CH \qquad \text{معادله خط}: y-۴=۲(x+۱)$$

محل تلاقی خط CH با محور y ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x=۰\rightarrow y-۴=۲(۰+۱)\rightarrow y=۶$$

۱۳۲- گزینهٔ $\boxed{۲}$

M وسط BC است پس داریم:

$$M(\frac{-۲+۲}{۲},\frac{۳+۵}{۲})=(۰,۴)$$

$$AM=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۶-۴)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۱۳۳- گزینهٔ $\boxed{۱}$

دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی دو خط است، بنابراین:

$$\begin{cases}x-y-۲=۰\\x-y+۱=۰\end{cases}\longrightarrow d=\frac{|-۲-۱|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\text{طول ضلع مربع}\longrightarrow\text{طول قطر}=(\frac{۳}{\sqrt{۲}})(\sqrt{۲})=۳$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۱

ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط $۳y-۴x-a=۰$ بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)-a|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{|۱۰-a|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{|۱۰-a|}{۵}\xrightarrow{d=۲}\frac{|۱۰-a|}{۵}=۲$$

$$\longrightarrow|۱۰-a|=۱۰\longrightarrow\begin{cases}۱۰-a=۱۰\rightarrow a=۰\\ ۱۰-a=-۱۰\rightarrow a=۲۰\end{cases}$$

مجموع مقادیر برای a برابر ۲۰ است.

۱۳۵- گزینه‌ی ۲

دو خط $y_۱=ax+b$ و $y_۲=\frac{۴}{۳}x+\frac{۲}{۳}$ نسبت به خط $y=۲$ متقارند پس به ازای هر مقدار x داریم $\frac{y_۱+y_۲}{۲}=۲$ لذا $y_۱+y_۲=۴$ است:

$$(ax+b)+(\frac{۴}{۳}x+\frac{۲}{۳})=۴\rightarrow(a+\frac{۴}{۳})x+(b+\frac{۲}{۳})=۴\rightarrow$$

$$\begin{cases}a+\frac{۴}{۳}=۰\rightarrow a=-\frac{۴}{۳}\\ b+\frac{۲}{۳}=۴\rightarrow b=۴-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۳}\end{cases}\longrightarrow ab=\frac{-۴۰}{۹}$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases}۲y-۳x=۱۲\\ ۳y+x=۷\end{cases}\longrightarrow x=-۲,\ y=۳\rightarrow B(-۲,۳)$$

نقطه‌ی A رأس مقابل به B است و محل تلاقی قطرها وسط AB است پس:

$$M(\frac{-۲+۶}{۲},\frac{۳+۱}{۲})=(۲,۲)$$

۱۳۷- گزینه‌ی ۴

$$mx+(۲m-۱)y+۳m=۱\rightarrow m(x+۲y+۳)-y-۱=۰$$

دسته خطوط فوق از نقطه‌ی ثابت A می‌گذرد پس باید ضریب m ضریب عددی برابر صفر باشد.

$$\begin{cases}x+۲y+۳=۰\xrightarrow{y=-۱}x-۲+۳=۰\rightarrow x=-۱\\ -y-۱=۰\rightarrow y=-۱\end{cases}\longrightarrow A(-۱,-۱)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,-۱)$ را از خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم) بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|(-۱)(۱)+(-۱)(۱)|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{گویا شود}}d=\sqrt{۲}$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۳

نقطه M را به صورت $M(x,۲x-۱)$ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$MA=\sqrt{(x-۲)^۲+(۲x-۱)^۲}=\sqrt{۵x^۲-۸x+۵}$$

$$MB=\sqrt{(x-۰)^{۲}+(۲x-۱-۱)^{۲}}=\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}$$

$$MA+MB=۳\rightarrow\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۵}+\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}=۳\longrightarrow$$

$$\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۵}=۳-\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}\xrightarrow{\text{توان۲}}\cancel{۵x^{۲}}-\cancel{۸x}+۵=۹+\cancel{۵x^{۲}}-\cancel{۸x}+۴-۶\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}$$

$$\longrightarrow ۶\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}=۸\longrightarrow ۳\sqrt{۵x^{۲}-۸x+۴}=۴\xrightarrow{\text{توان۲}}$$

$$۹(۵x^{۲}-۸x+۴)=۱۶\rightarrow ۴۵x^{۲}-۷۲x+۳۶=۱۶\rightarrow$$

$$۴۵x^{۲}-۷۲x+۲۰=۰\rightarrow x_{۱},x_{۲}=۰/۸\pm\frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۵}$$

۱۳۹ـ گزینه‌ی $\boxed{۴}$

نقطه برخورد دو ضلع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳y+۲x=-۴\\ ۲y+۳x=-۱\end{cases}\longrightarrow x=۱\ ,\ y=-۲\longrightarrow A(۱,-۲)$$

نقطه‌ی A رأس مقابل به $C(۳,۴)$ است پس مختصات مرکز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M(\frac{x_A+x_C}{۲}\ ,\ \frac{y_A+y_C}{۲})=(۲,۱)$$