

1- مجموع اعداد فرد مضرب 3 و کوچکتر از 100 را بیابید .

2 -مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی زیر برابر 126- است ؟

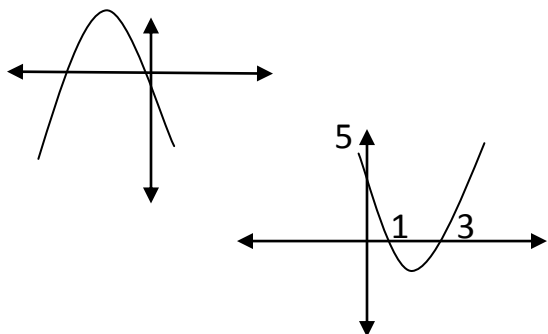
... و 24 و 12- و 6

3- به ازای چه مقادیری از m معادله $mx^2 - (4m - m^3)x - m + 5 = 0$ دو ریشه دارد که قرینه یکدیگرند .

4- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد .

5- به ازای کدام مقادیری از a معادله $x^2 - 2(a - 2)x + 14 - a = 0$ درجه دوم دو ریشه مثبت دارد؟

6- نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. تعداد ریشه ها و علامت a, b, c را مشخص کنید.



7 -ضابطه سهمی زیر را بنویسید .

8- معادله و نامعادله های زیر را حل کنید .

الف) $\sqrt{x + 1} = |x - 1|$

ب) $x^2 < |x|$

9- نقاط $A(2,3)$ و $B(2,-1)$ و $C(4,1)$ سه رأس مثلث هستند

الف) طول میانه BM را بدست آورید .

ب) معادله میانه BM را بدست آورید .

10 - نقطه های $A(0,2)$ و $B(k, k + 2)$ و $C(6,10)$ و $D(n, k)$ متوازی الاضلاع ABCD هستند. طول قطر BD را پیدا کنید .

11- قرینه نقطه $A(-1,2)$ را نسبت به نقطه $O(2, -1)$ بدست آورید .

12- مساحت و محیط مربعی که دو ضلع آن روی خط های $2x - y = 3$ و $4x - 2y + 7 = 0$ قرار دارد را بیابید.

موفق باشید

پاسخ تشریحی

سوال 1

حل: اعداد فرد مضرب 3 و کوچکتر از 100 به زیر هستند :

99 و ... و 15 و 9 و 3

که یک دنباله حسابی با قدرنسبت 6 است. حالا تعداد جملات این دنباله را مشخص می کنیم. برای پیدا کردن شماره جمله می توانید از رابطه زیر استفاده کنید :

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{99 - 3}{6} + 1 = \frac{96}{6} + 1 = 16 + 1 = 17$$

حالا مجموع جملات را بدست می آوریم :

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(3 + 99) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(102)$$

$$\Rightarrow s_{17} = 17 \times 51 = 867$$

سوال 2

... و 24 و -12 و 6

حل : جمله اول دنباله هندسی 6 و قدر نسبت آن $q = \frac{-12}{6} = -2$ است. مجموع n جمله اول این دنباله -126 است یعنی:

$$s_n = -126$$

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow -126 = \frac{6((-2)^n - 1)}{-2 - 1} \Rightarrow -126 = \frac{6((-2)^n - 1)}{-3}$$

$$\Rightarrow -126 = -2((-2)^n - 1) \Rightarrow 63 = (-2)^n - 1 \Rightarrow 64 = (-2)^n$$

$$\Rightarrow (-2)^6 = (-2)^n \Rightarrow n = 6$$

سوال 3

حل : دوریشه قرینه یکدیگرند . بنابراین مجموع ریشه ها برابر صفر می شود . بنابر رابطه مجموع ریشه ها داریم :

$$s = 0 \Rightarrow s = \frac{-b}{a} = -\frac{-(4m - m^3)}{m} = 0 \frac{m(4 - m^2)}{m} = 0$$

می دانیم کسری صفر است که صورتش صفر باشد بنابر این :

$$\Rightarrow (4m - m^3) = 0 \Rightarrow m(4 - m^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \quad m = -2 \end{cases}$$

دوریشه قرینه یکدیگرند . بنابراین حاصل ضرب ریشه ها منفی است . باتوجه رابطه حاصل ضرب ریشه داریم :

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-m+5}{m} < 0$$

برای حل نامعادله کسری از جدول تعیین علامت استفاده می کنیم. ابتدا ریشه صورت ومخرج را بدست می آوریم. برای رسم جدول به صورت سریع علامت بزرگترین جمله صورت را در علامت بزرگترین جمله مخرج ضرب می کنیم. علامت بدست آمده را در جدول از سمت راست قرار می دهیم وسپس علامت ها را یکی در میان عوض می کنیم .

$$-m + 5 = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ صورت ریشه}$$

$$m = 0 \text{ مخرج ریشه}$$

m		0		5	
	-	ن	+	0	-
$\frac{-m+5}{m}$					

بنابراین جواب نامعادله با توجه به جدول $m > 5$, $m < 0$ قابل قبول است ودربین جواب هایی که برای m بدست آمد فقط $m = -2$ قابل قبول است .

سوال 4

حل :

فرض می کنیم ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ ، α و β باشند بنابراین ریشه های معادله ای را که می خواهیم بنویسیم را x_1 و x_2 می نامیم. معادله درجه دومی که قرار است بنویسیم ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ است پس:

$$x_1 = 2\alpha$$

*

$$x_2 = 2\beta$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ را بدست می آوریم :

$$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$p = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{4}$$

حالا مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله جدید را به کمک α, β و p محاسبه می کنیم و به جای x_1 و x_2 از مقدار مساوی آن استفاده می کنیم یعنی روابط * پس :

$$S = x_1 + x_2 = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = 2\alpha \times 2\beta = 4\alpha\beta = 4 \times \frac{-5}{4} = -5$$

می توانیم معادله جدید را به کمک رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم :

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 5 = 0$$

سوال 5

حل : برای اینکه دوریشه مثبت باشد باید مجموع و حاصل ضرب ریشه ها مثبت باشند . یعنی $\Delta > 0$, $s > 0$, $p > 0$

$$s = \frac{-b}{a} = -\frac{-2(a-2)}{1} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{14-a}{1} = 14 - a > 0 \Rightarrow 14 > a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2(a-2))^2 - 4 \times (14-a) = 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a$$

$$= 4a^2 - 16a + 16 - 56 + 4a = 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow 4(a^2 - 3a - 10) > 0$$

نامعادله درجه دوم را به کمک جدول تعیین علامت حل می کنیم :

$$a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 5, a = -2$$

m		-2		5		

Δ		+	0	-	0	+

باتوجه به جدول جواب نامعادله $a > 5, a < -2$ است. از 3 جواب شرطهای بدست آمده اشتراک می گیریم و نتیجه محدوده a را مشخص می کند :

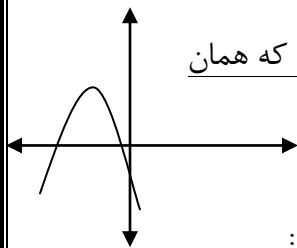
$$5 < a < 14$$

سوال 6

حل : چون نمودار با محور طول ها در دو نقطه بر خورد کرده است ، بنابر این معادله دارای دو ریشه است .

نمودار با محور عرض ها در قسمت پایین محور یعنی قسمت منفی بر خورد کرده است ، پس عرض از مبدا که همان

c است منفی است . سهمی دارای ماکزیمم است در نتیجه a منفی است .



طول راس سهمی منفی است . همچنین a نیز منفی است . پس باتوجه به علامت x ، b نیز منفی است :

$$x = \frac{-b}{2a} < 0 \stackrel{a < 0}{\Rightarrow} b > 0$$

سوال 7

حل : باتوجه به نمودار داده شده محور طول ها در دو نقطه $x = 1$, $x = 3$ قطع شده است . بنابراین فرمول کلی سهمی باتوجه به نکاتی که در جزوه آمده به صورت زیر است :

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{x_1=1, x_2=3} y = a(x - 1)(x - 3)$$

نقطه $(0,5)$ روی نمودار قرار دارد ، بنابراین در معادله سهمی صدق می کند .

حالا مقدار بدست آمده را در رابطه سهمی جاگذاری می کنیم:

$$y = a(x - 1)(x - 3) \xrightarrow{a=\frac{5}{3}} y = \frac{5}{3}(x - 1)(x - 3) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + 5$$

ضابطه سهمی بدست آمد .

سوال 8

حل :

الف) $\sqrt{x+1} = |x-1|$

برای حل معادله طرفین را به توان 2 می رسانیم تا رادیکال از بین برود:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (|x-1|)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

جواب $x = 0$ قابل قبول است . زیرا در معادله صدق می کند ولی $x = -1$ قابل قبول نیست زیرا با جاگذاری در معادله تساوی برقرار نمی شود .

ب) $x^2 < |x|$

حل: چون x^2 نامنفی است بنابراین ویژگی قدر مطلقى زیر را بکار می بریم:

$$|A| > K \Rightarrow \begin{cases} A > K \\ \text{یا} \\ A < -K \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$|x| > x^2 \Rightarrow \begin{cases} x > x^2 \Rightarrow x - x^2 > 0 & 1 \\ \text{یا} \\ x < -x^2 \Rightarrow x + x^2 < 0 & 2 \end{cases}$$

برای حل نامعادله های 1 و 2 از جدول تعیین علامت استفاده می کنیم:

$$1) \quad x - x^2 > 0$$

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	0	1
$x - x^2$	- 0	+ 0 -

باتوجه به نامعادله 1 جواب بازه (0,1) است.

$$2) \quad x + x^2 < 0$$

$$x + x^2 = 0 \Rightarrow x(1 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	0
$x + x^2$	+ 0 -	0 +

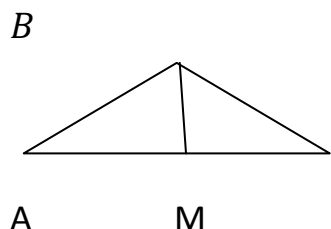
باتوجه به نامعادله 2 جواب بازه (-1,0) است. باتوجه به جواب های بدست آمده جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in (0,1) \cup (-1,0)$$

سوال 9

حل الف:

نقاط $A(2,3)$ و $B(2,-1)$ و $C(4,1)$ سه راس مثلث هستند. برای بدست آوردن طول میانه BM ابتدا مختصات نقطه M را بدست می آوریم:



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow M(3,2)$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

حل ب:

برای بدست آوردن معادله میانه BM ابتدا مختصات نقطه M را لازم داریم که در الف بدست آوردیم سپس شیب میانه BM را محاسبه می کنیم و در پایان به کمک شیب و نقطه معادله را می نویسیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$M(3,2) \leftarrow y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

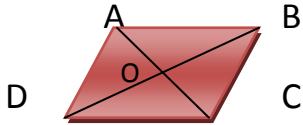
حالا شیب BM را بدست می آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{-1 - 2}{2 - 3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

به کمک رابطه معادله خط معادله میانه را می نویسیم:

$$y = m(x - x_B) + y_B = 3(x - 2) - 1 = 3x - 6 - 1 \rightarrow y = 3x - 7$$

معادله میانه BM $y = 3x - 7$



حل:

می دانیم در متوازی الاضلاع قطر ها یکدیگر را نصف می کنند. بنابراین نقطه ی وسط قطر AC و وسط قطر BD است بنابراین می توانیم رابطه زیر را استفاده کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 0 + 6 = k + n$$

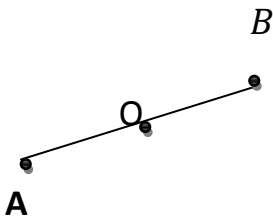
$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 10 = k + 2 + k \Rightarrow 10 = 2k \Rightarrow k = 5$$

$$k + n = 6 \Rightarrow 5 + n = 6 \Rightarrow n = 6 - 5 \Rightarrow n = 1$$

$$B(k, k + 2) = (5, 5 + 2) = (5, 7)$$

$$D(n, k) = (1, 5)$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$



حل : نقطه B قرینه نقطه A نسبت به نقطه O است. بنابراین نقطه O وسط پاره خط AB

است. پس:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow 4 = 1 + x_B \Rightarrow x_B = 3$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow -2 = 2 + y_B \Rightarrow -4 = y_B$$

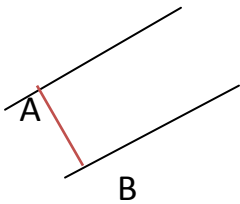
$$\Rightarrow B(3, -4)$$

حل :

$$2x - y = 3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$4x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

پس دو خط باهم موازی هستند، یعنی دو ضلع رو به رو ی هم هستند . در نتیجه فاصله این دو خط طول ضلع مربع خواهد بود :



فاصله دو خط موازی از رابطه زیر بدست می آید:

$$AB = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{c=7, c'=3} AB = \frac{|7 - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

حالا مساحت مربع را محاسبه می کنیم :

$$s = (AB)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

محیط مربع را بدست می آوریم :

$$P=4 AB = 4 \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$