

حسابان ۱

پایه می یازدهم « رشته می ریاضی فنریک »

فصل ۲ : تابع

پاواناساد

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره می دوّم متوسطه

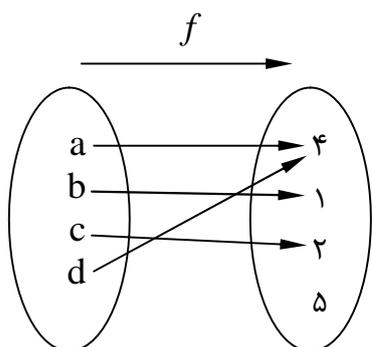
استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

آشنایی با مفهوم تابع به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و ... لازم و ضروری است. در پایه‌ی دهم با این مفهوم به صورت مقدماتی آشنا شدید. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اول : یادآوری مفهوم تابع

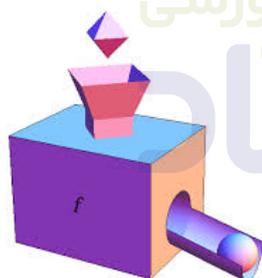


دامنه (A)

هم دامنه (B)

هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی A را دقیقاً به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت دهد را یک **تابع** از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B می نامند.

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی A را **دامنه** و مجموعه‌ی B را **هم دامنه** یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.



$$f : A \rightarrow B$$

در ریاضیات، تابع را به روش های مختلفی نمایش می دهند. مهمترین این روش ها عبارتند از :

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، که با **روش پیکانی** یا نمودار ون نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود، یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

$$A = D_f = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$R_f = \{1, 2, 4\}$$

تذکر: مجموعه‌ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه‌ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضو هایی از مجموعه‌ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

تمرین ۱: تمام تابع هایی را بنویسید که از $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{p, q\}$ تعریف می شوند. سپس تعداد آنها را تعیین کنید.

تمرین ۲: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

حل : طبق تعریف تابع ، هر عضو B می تواند حداکثر از ۴ عضو A به دست آمده باشد و چون B دو عضو دارد ، پس حداکثر توابعی که از A به B تعریف می شوند برابر $16 = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ باشند^۱.

۲: نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه‌ای از زوج های مرتب^۲ را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اول آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که در آن مولفه های اول، اعضای دامنه و مولفه های دوّم، اعضای برد می باشند.

به عنوان مثال، تابعی که در ابتدا اشاره کردیم، با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f = \{(x, y) \mid x \in D_f, y \in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اول برابر باشند، باید مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند^۳.

۱. به طور کلی اگر مجموعه‌ی A دارای m عضو و مجموعه‌ی B دارای n عضو باشد. حداکثر n^m تابع از A به B وجود دارد.

۲. هر دو تایی به شکل (a, b) که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. a را مؤلفه‌ی اول (طول) و b را مؤلفه‌ی دوّم (عرض) می نامند.

تمرین ۳: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f = \{(3, 2), (5, 8), (-3, 2), (2, 4), (1, 2)\}$$

۳: نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع f که از مجموعه ی A به مجموعه ی B تعریف شده است. رابطه ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. **ضابطه** یا قانون تابع می گوئیم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f : A \rightarrow B$$

$$y = f(x)$$

به عنوان مثال اگر تابع به هر عضو مجموعه ی $A = R$ مربع آن را نسبت دهد، در این صورت می توان نوشت.

$$f : R \rightarrow [0, +\infty)$$

$$y = f(x) = x^2$$

تذکر: خروجی هر عضو دامنه مانند x را با y یا $f(x)$ نمایش می دهند.

مثال الف: اگر گفته شود که تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-6}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه ی تابع

باید $R - \{3\}$ باشد.

مثال ب: اگر گفته شود که تابع $g(x) = \sqrt{4-x}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه ی تابع باید $(-\infty, 4]$ باشد.

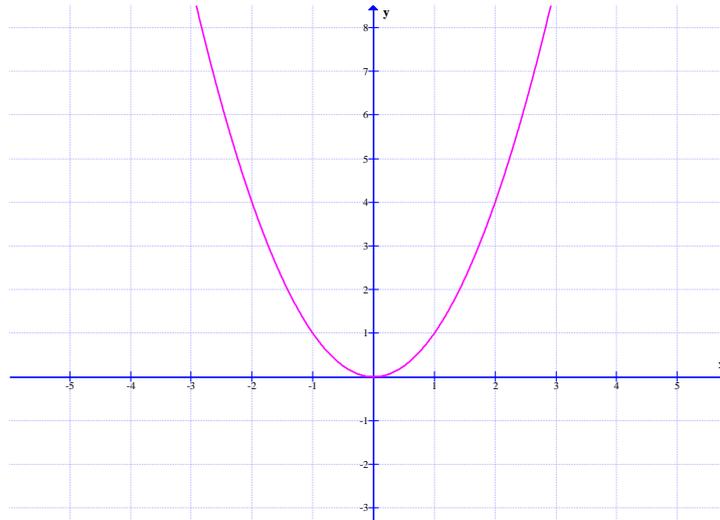
تمرین ۴: تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارد؟

۴: نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

اگر مجموعه ی f ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a, b) \in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

³. اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

برای مثال نمودار تابع $f(x) = x^2$ به شکل زیر است. که قبلاً آن را سهمی نامیده ایم.



از دیدگاه هندسی، یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط قائم)

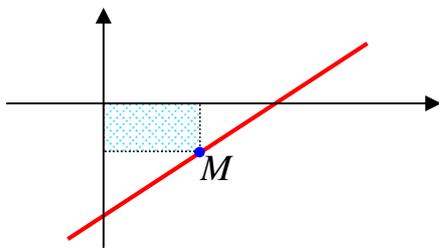
تمرین ۵: نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

سامانه آموزشی

الف) $f(x) = \sqrt{x}$

ب) $f(x) = \frac{1}{x}$

ج) $f(x) = |x|$



تمرین ۶: در شکل مقابل یک مستطیل به محور های

مختصات و خط $2y + x = 1$ محدود شده است، معادله ی

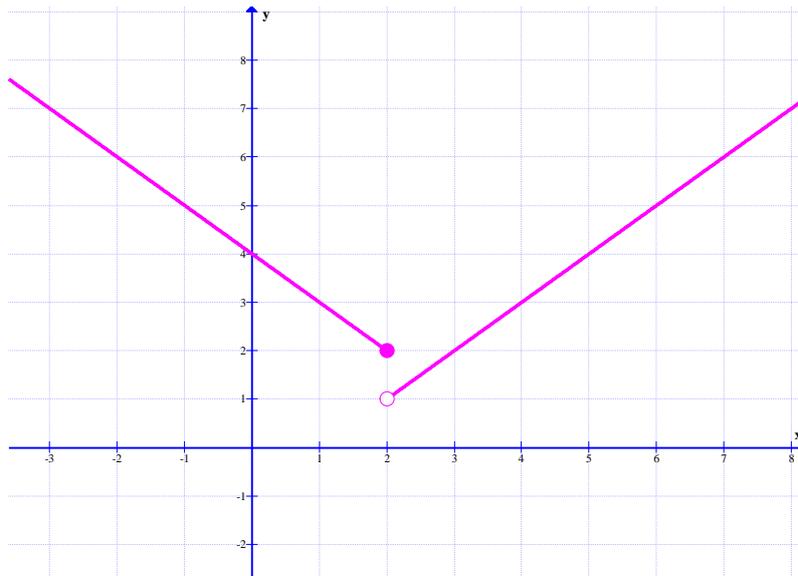
تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به x وابسته کند.

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه

تعریف کرد. تابع زیر نمونه ای از یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 2 \\ 4 - x & x \leq 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز به شکل زیر است.



روش رسم این تابع را توضیح دهید؟

مثال ۱: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [0, +\infty)$$

مثال ۲: تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$D_s = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}$$

$$R_s = \{1, 0, -1\}$$

تمرین ۷: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -2x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

تمرین برای حل:

۸: معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه ی (۳, ۵) و (-۱, -۳) بگذرد.

۹: تابع f با مشخصات زیر داده شده است. نمودار تابع f را رسم کنید و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

الف: $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$ باشد.

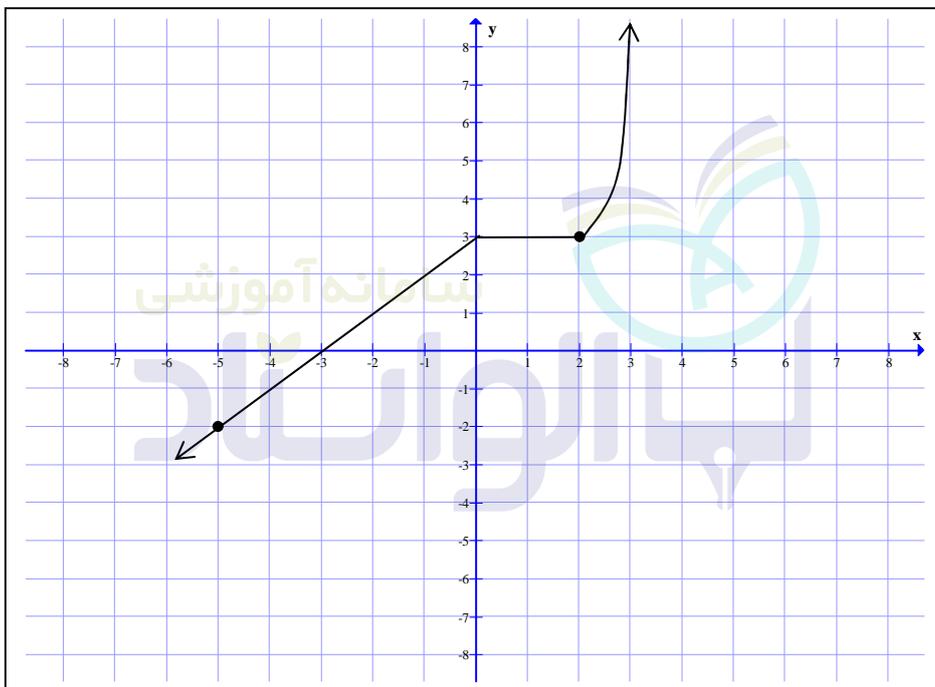
ب: دامنه‌ی تابع f برابر همه‌ی اعداد حقیقی است.

ج: تابع f در بازه‌ی $[0, 2]$ ثابت باشد.

د: تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ه: روی اعداد منفی، تابع خطی است.

حل:



برای تعیین معادله‌ی تابع وقتی که $x \leq 0$ باشد. طبق مسئله دو نقطه‌ی $(0, 3)$ و $(-5, -2)$ را داریم و چون

تابع خطی است. پس:

$$m = \frac{3 + 2}{0 + 5} = 1$$

$$y = 1(x - 0) + 3 \rightarrow y = x + 3$$

در نهایت معادله‌ی کلی تابع به شکل زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

۱۰: اگر $f(x) = 2^x$ نشان دهید که: $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

۱۱: کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف: برد و هم دامنه ی یک تابع می توانند یکی باشند.

ب: هم دامنه ی تابع زیر مجموعه ای از برد آن است.

ج: بی شمار تابع وجود دارد که دامنه ی آن بازه ی $[0, 3]$ است.

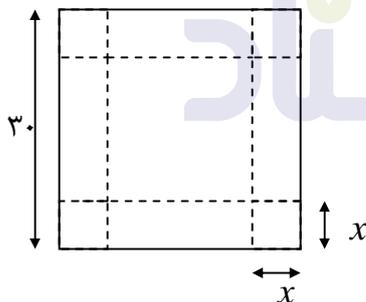
۱۲: فرض کنید، تعداد افرادی که طی یک مدت معین به وسیله ی یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور

زیر باشد. (در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است.)

$$n(t) = \frac{9500t + 2000}{1+t}$$

الف: تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند، چقدر است؟

ب: پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟



۱۳: از چهار گوشه ی مقوایی مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتی متر،

مربع های دیگری به ضلع x سانتی متر جدا می کنیم. سپس لبه

های مقوا را از روی خط چین تا می کنیم تا جعبه ای (بدون در)

به دست آید. حجم جعبه را به صورت تابعی از x بنویسید.

قسمت سوم: روش رسم نمودار تابع چند ضابطه ای

برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای کافی است که نمودار هر ضابطه را به طور مجزا رسم کرده و روی

هرکدام از نمودارها قسمت هایی را که در دامنه شان است، پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.

تمرین ۱۴: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & x < -1 \end{cases}$$

تمرین ۱۵: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < 1 \\ 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

قسمت چهارم: تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. ($D_f = D_g$)

ب) به ازای هر x عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. ($f(x) = g(x)$)

به عبارتی دیگر، دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودارهای آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق شوند.

سامانه آموزشی

مثال ۱: دو تابع زیر مساوی نیستند زیرا دامنه ی یکسان ندارند.

$$f(x) = x + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$D_f = R \quad \text{و} \quad D_g = R - \{1\} \quad \Rightarrow \quad D_f \neq D_g$$

مثال ۲: دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا با اینکه دامنه ی یکسان دارند. ولی مقادیر نابرابر دارند.

$$f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$$D_f = D_g = R \quad \text{و} \quad f(x) \neq g(x)$$

مثال ۳: دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ بنابر تعریف فوق مساوی هستند. زیرا

$$D_f = D_g = R \quad \text{اولاً: دامنه ی هر دو تابع مجموعه های مساوی هستند.}$$

ثانیاً: به ازای هر x عضو دامنه، مقادیر دو تابع برابر هستند. $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$

تمرین برای حل :

۱۶ : در هر مورد ، تساوی دو تابع داده شده را بررسی کنید.

الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$

ب) $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

ج) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

د) $f = \{(1, 2), (5, 7)\}$ و $g = \{(1, 7), (5, 2)\}$

ه) $f(x) = x|x|$ و $g(x) = x^2$

۱۷ : دو تابع زیر مساویند. مقدار a را بیابید.

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & x \neq -1 \\ 3a + 7 & x = -1 \end{cases}$ و $g(x) = x + 2$

۱۸ : کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف : اگر دامنه ی دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب : اگر دو تابع مساوی باشند، آنگاه بردهای مساوی دارند.

پ : اگر نمودار های دو تابع کاملاً بر هم منطبق باشند، آن دو تابع مساویند.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوم: انواع توابع

در این درس با انواع مختلفی توابع آشنا می شویم. شناخت انواع توابع جهت مدل سازی پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

قسمت اول: معادلات و توابع

بسیاری از توابع را با یک معادله بیان می کنند، مثلاً می نویسند.

$$y = x^2 + 3x - 1$$

ولی توجه داشته باشیم یک معادله با دو متغیر x و y الزاماً یک تابع نیست. برای مثال معادله $y = x^2 + 3x - 1$ یک تابع نیست.

$$x^2 + y^2 = 4$$

طبق تعریف تابع، یک معادله با دو متغیر y و x ، هنگامی یک تابع مشخص می کند که اگر (a, b) و (a, c) در آن صدق کنند، باید $b = c$ باشد. یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) \in f \\ (a, c) \in f \end{array} \right\} \rightarrow b = c$$

و اگر نتوان نتیجه گرفت که $b = c$ ، معادله $y = x^2 + 3x - 1$ داده شده تابع نمی باشد.

تمرین ۱: کدام یک از معادلات زیر، تابع است.

الف) $y = x^2 + 1$

ج) $x^2 + y^2 = 1$

ب) $y = x^3 - 2$

د) $y = x^2 + 2x$

حل:

¹ . در برخی از تساوی های از جمله تساوی های زیر نمی توان نتیجه گرفت $b = c$

الف) $b^2 = c^2 \nrightarrow b = c$

ب) $|b| = |c| \nrightarrow b = c$

ج) $[b] = [c] \nrightarrow b = c$

جزء صحیح یک عدد حقیقی مانند x که با نماد $[x]$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد. $[x]$ با خود x برابر است. مثلاً $[5] = 5$

اگر x عدد صحیح نباشد. $[x]$ با بزرگترین عدد صحیح قبل از x برابر است. مثلاً $[2/5] = 2$ و $[-3/5] = -4$

الف:

$$\left. \begin{array}{l} (a,b) \in f \rightarrow b = a^2 + 1 \\ (a,c) \in f \rightarrow c = a^2 + 1 \end{array} \right\} \rightarrow b = c$$

معادله ی $y = x^2 + 1$ ، تابع است.

ب:

$$\left. \begin{array}{l} (a,b) \in f \rightarrow b = a^3 - 2 \\ (a,c) \in f \rightarrow c = a^3 - 2 \end{array} \right\} \rightarrow b = c$$

معادله ی $y = x^3 - 2$ ، تابع است.

ج:

$$\left. \begin{array}{l} (a,b) \in f \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \\ (a,c) \in f \rightarrow a^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \rightarrow b^2 = c^2 \rightarrow b = c$$

معادله ی $x^2 + y^2 = 1$ ، تابع نیست.

د:

$$\left. \begin{array}{l} (a,b) \in f \rightarrow b = a^2 + 2a \\ (a,c) \in f \rightarrow c = a^2 + 2a \end{array} \right\} \rightarrow b = c$$

معادله ی $y = x^2 + 2x$ ، تابع است.

تمرین ۲: کدام یک از معادلات زیر یک تابع مشخص می کند.

۱) $-x^2 + y = 4$

۴) $x = 1$

۲) $x - y^2 = 4$

۵) $y = -2$

۳) $y^2 = x^2$

۶) $y = |x|$

تمرین ۳: آیا ضابطه ی زیر یک تابع است؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۴ : کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند.

۱) $x = |y| + 3$

۴) $y = \frac{3x - 1}{x + 5}$

۲) $1 + \sqrt{y} = x$

۵) $y = x^2 - 6x$

۳) $y = |x| - 1$

۶) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 5$

۵ : ضابطه‌ی زیر یک تابع است. مقدار a را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & x \leq 1 \\ 3x + 5 & x \geq 1 \end{cases}$$

سامانه آموزشی

قسمت دوم : توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $Q(x)$ غیرصفر باشد، را

تابع گویا می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، گویا هستند.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 5} \text{ و } f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{5 - x^3} \text{ و } f(r) = \frac{1 - r}{3r - 7} \text{ و } f(k) = 5k - 1$$

همچنین هر یک از توابع زیر گویا نمی باشند. (چرا؟)

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{2x - 9} \text{ و } f(u) = \sqrt{5u^2 + 3}$$

دامنه‌ی هر تابع گویا ، برابر مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

$$D_f = R - \{ \text{ریشه های مخرج} \}$$

مثال : دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 5x}$ را تعیین کنید.

حل :

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 5$$

$$D_f = R - \{0, 5\}$$

تمرین ۶: دامنه ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \frac{x+3}{2x-10}$

ج) $f(x) = \frac{1-x}{x^3-9x^2}$

ب) $f(x) = \frac{5}{4x^2-9}$

د) $f(x) = \frac{5x-1}{25+x^2}$

تمرین ۷: معادله ی تابعی را بنویسید که دامنه ی آن $R - \{3\}$ باشد.

قسمت سوم: توابع رادیکالی (ریشه ی دوم)

هر تابع به شکل $f(x) = \sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x) \geq 0$ باشد، را یک تابع رادیکالی می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، رادیکالی هستند.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1} \quad \text{و} \quad f(u) = \sqrt{3 - u}$$

همچنین هر یک از توابع زیر رادیکالی نمی باشند. (چرا؟)

$$f(x) = 2\sqrt{5}x^3 + 2x + 1 \quad \text{و} \quad f(r) = 5r^2 + 3$$

دامنه ی هر تابع رادیکالی، برابر زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن زیر رادیکال منفی نشود.

$$D_f = \{x | P(x) \geq 0\}$$

مثال: دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را تعیین کنید.

حل:

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

تمرین ۹: دامنه ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = 1 + \sqrt{6-3x}$

ج) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

ب) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

د) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{x-5}$

تمرین ۱۰: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $[-۳, +\infty)$ باشد.

تمرین ۱۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{۲-x}$

ب) $g(x) = ۱ + \sqrt{x-۳}$

تمرین برای حل:

۱۲: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-۱}{۲-x}$

ت) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$

ج) $f(x) = \frac{۵x-۳}{\sqrt{۲x-۴}}$

ب) $f(x) = \sqrt{۳x+۱}$

ث) $f(x) = \frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ح) $f(x) = \sqrt{۳x-x^۲}$

پ) $f(x) = \frac{-۳x}{x^۲+۱}$

ج) $f(x) = \sqrt{۸-x}$

۱۳: نمودار توابع زیر را رسم نموده و سپس دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ x-۲ & x \leq ۰ \end{cases}$ پ) $f(x) = \sqrt{x-۲} + ۵$

ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & x > ۰ \\ \sqrt{x+۲} & -۲ \leq x \leq ۰ \end{cases}$ ت) $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{x} & x < ۰ \\ -\sqrt{x+۲} & x \geq ۰ \end{cases}$

۱۴: تابعی گویا بنویسید که دامنه‌ی آن $R - \{۱\}$ باشد.

۱۵: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(۱, +\infty)$ باشد.

۱۶: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(-\infty, ۲]$ باشد.

۱۷: نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ با دامنه‌ی $D_f = [-۵, ۵] - \{۰\}$ را رسم کنید.

۱۸: نمودار توابع $y = -۳ + \sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

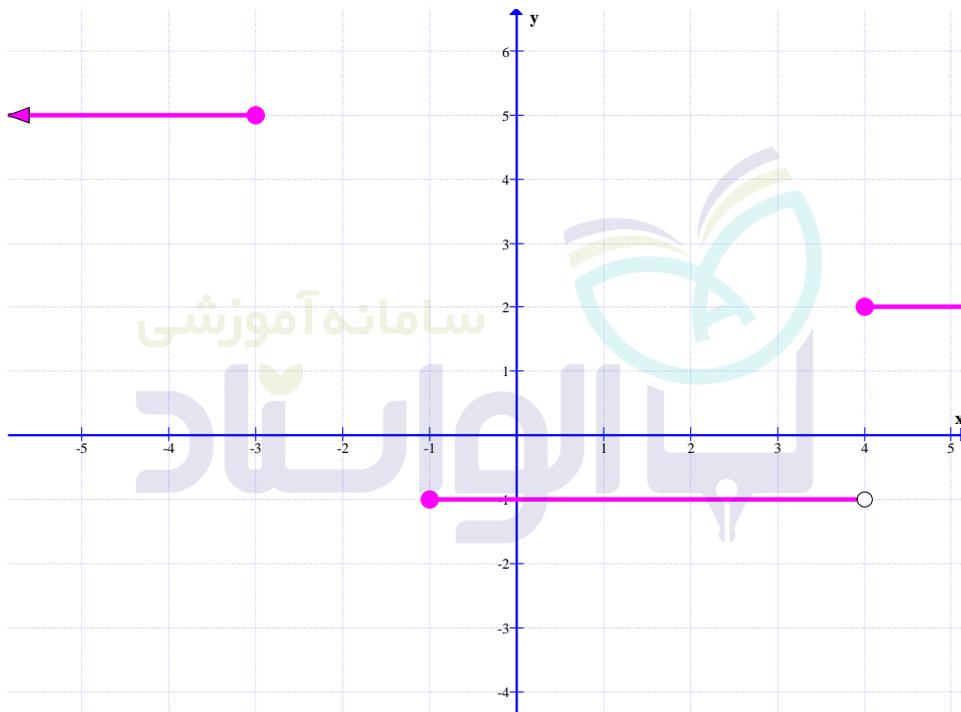
قسمت چهارم : تابع پله ای و تابع جزء صحیح

هر تابع که بتوان دامنه ی آن را به تعدادی بازه ، طوری تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها

تابع ثابت باشد، را تابع پله ای می نامند. مانند تابع زیر

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & x \geq 4 \end{cases}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.



تمرین ۱۹ : در یک پارکینگ، هزینه ی پارک خودرو بر اساس مدت زمان توقف خودرو ، به این صورت

محاسبه می شود.

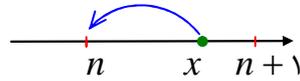
$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ 4 & 2 \leq t < 3 \\ 5 & 3 \leq t < 4 \\ 6 & t \geq 4 \end{cases}$$

این تابع نمونه ای از یک تابع پله ای است. نمودار این تابع را رسم کنید.

جزء صحیح و ویژگی های آن

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x را جزء صحیح x می نامند و آن

را با نماد $[x]$ نمایش می دهند. ($n \in \mathbb{Z}$)



$$n \leq x < n+1 \leftrightarrow [x] = n$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱. $[2/3] =$ ۲. $[-5] =$ ۳. $[-5/7] =$ ۴. $[\frac{5}{7}] =$ ۵. $[-\sqrt{2}] =$

توجه ۱: برای هر عدد حقیقی x داریم.

$$[x+k] = [x] + k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

توجه ۲: برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$IF \ x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0$$

$$IF \ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1$$

تمرین ۲۰: معادله $[x] + [x-2] = 4$ را حل کنید.

حل:

$$[x] + [x-2] = 4 \rightarrow [x] + [x] - 2 = 4 \rightarrow 2[x] = 6 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

تمرین ۲۱: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $[x+1] + [x+2] = 5$

۲) $[x+1] + [x-2] = 4$

حل ۲:

$$[x+1] + [x-2] = 4 \rightarrow [x] + 1 + [x] - 2 = 4 \rightarrow 2[x] = 5 \rightarrow [x] = \frac{5}{2}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

تابع $f(x) = [x]$ را تابع جزء صحیح می نامند. در واقع توابع جزء صحیح گونه ی خاصی از توابع پله ای می باشند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح، در یک فاصله ی معین بازه هایی به شکل $[a, b)$ را طوری انتخاب می کنیم که جزء صحیح اعداد هر یک، عدد صحیح مشخصی باشد.

دامنه ی تابعی مانند تابع فوق مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد صحیح است.

مثال: نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در فاصله ی $[-2, 3)$ رسم کنید.

حل: فاصله ی $[-2, 3)$ را طوری به بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. که جزء صحیح تمام اعضای هر بازه یکسان باشد.

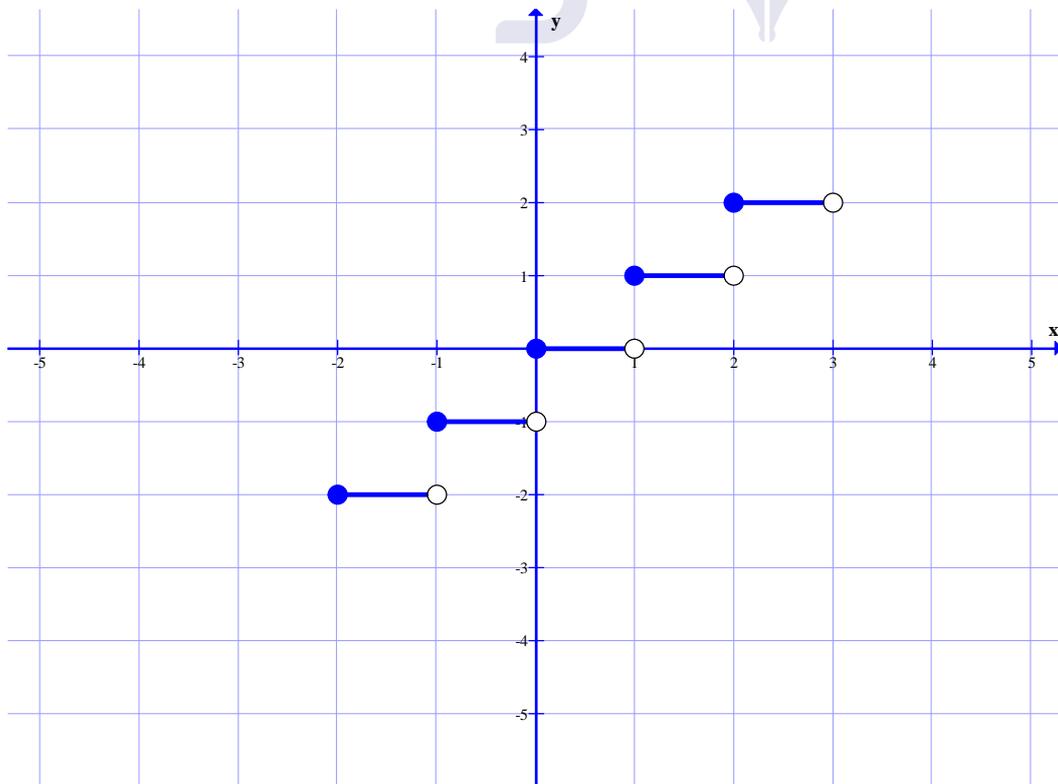
$$-2 \leq x < -1 \xrightarrow{f(x)=[x]} y = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \xrightarrow{f(x)=[x]} y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \xrightarrow{f(x)=[x]} y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{f(x)=[x]} y = 1$$

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{f(x)=[x]} y = 2$$



تمرین ۲۲ : نمودار تابع $y = [x - 1]$ را در فاصله $[-2, 3]$ رسم کنید.

حل :

$$-2 \leq x < -1 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = -3$$

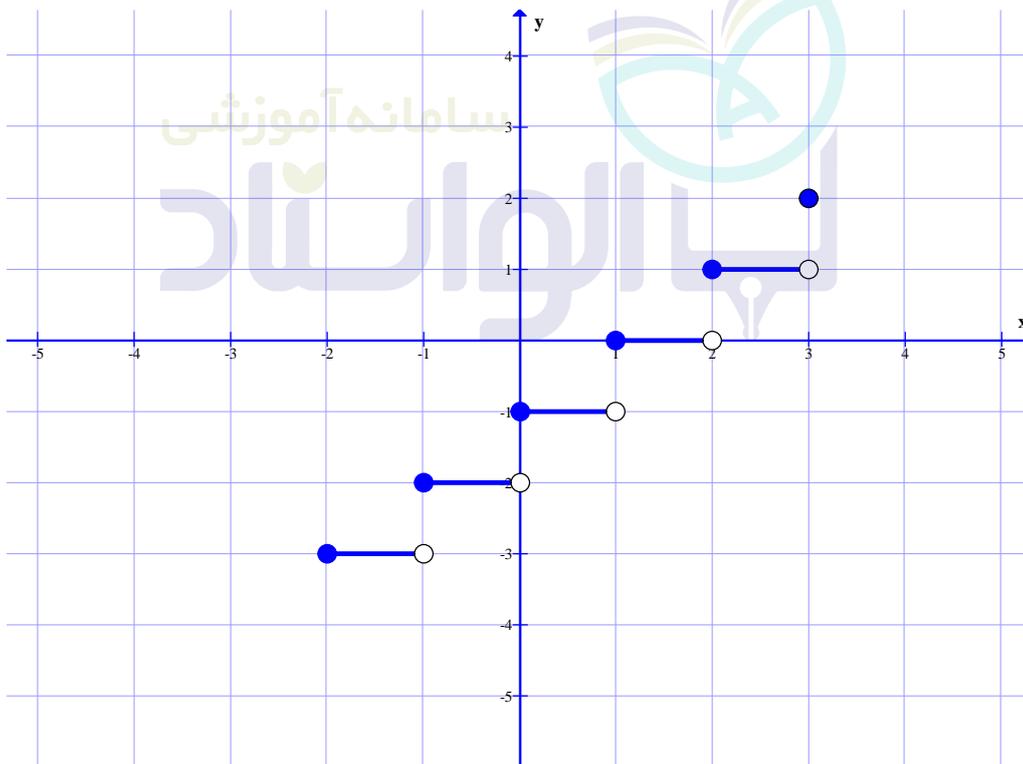
$$-1 \leq x < 0 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = -2$$

$$0 \leq x < 1 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = -1$$

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = 0$$

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = 1$$

$$x = 3 \xrightarrow{f(x)=[x]-1} y = 2$$



تمرین ۲۳: نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در فاصله ی $(-2, 1)$ رسم کنید.

حل: طول بازه ها را $\frac{1}{2}$ قرار می دهیم.

$$-2 \leq x < -\frac{3}{2} \rightarrow -4 \leq 2x < -3 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = -4$$

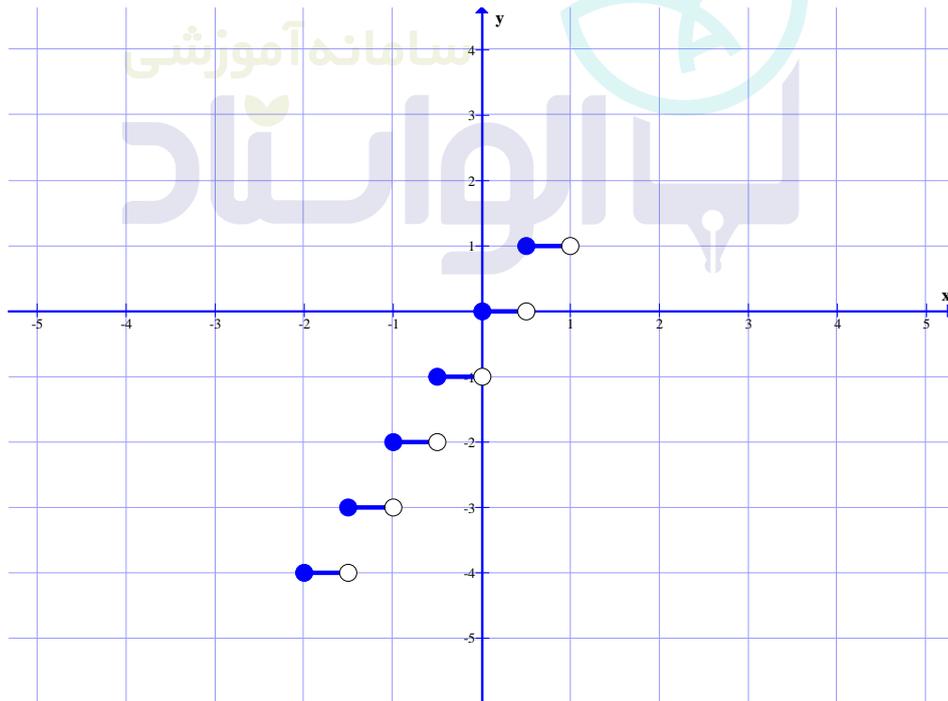
$$-\frac{3}{2} \leq x < -1 \rightarrow -3 \leq 2x < -2 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = -3$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \rightarrow -2 \leq 2x < -1 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \rightarrow -1 \leq 2x < 0 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq 2x < 1 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq 2x < 1 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \xrightarrow{f(x)=[2x]} y = 1$$



۲. برای رسم نمودار هر تابع به شکل $f(x) = [nx]$ طول بازه ها را $\frac{1}{n}$ ، همچنین برای رسم نمودار هر تابع به

شکل $f(x) = [\frac{1}{n}x]$ طول بازه ها را n انتخاب کنید. مثلاً برای رسم نمودار تابع $f(x) = [3x]$ طول بازه ها را $\frac{1}{3}$ و

برای رسم نمودار تابع $f(x) = [\frac{1}{4}x]$ طول بازه ها را ۴ انتخاب کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

تمرین برای حل :

۲۴: نمودار تابع $y = [x]$ را در فاصله $-2 \leq x < 2$ را رسم کنید.

۲۵: نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در فاصله $-3 \leq x \leq 3$ رسم کنید.

۲۶: نمودار توابع زیر را در فاصله $(-2, 3)$ رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + 1$

ب) $y = [\frac{1}{2}x]$

ج) $y = 2[x] - 1$

۲۷: نمودار تابع $y = [2x] + 1$ را در فاصله $(-1, 1)$ رسم کنید.

۲۸: نمودار تابع $y = [x] + [-x]$ را رسم کنید.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس سوم: تابع یک به یک و وارون یک تابع

در این درس ابتدا با مفهوم تابع یک به یک و سپس وارون تابع آشنا می شویم.

قسمت اول: تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع $f = \{(1,5), (2,7), (6,0), (-1,9)\}$ یک به یک است.

تابع $g = \{(1,5), (2,7), (6,0), (-1,5)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h = \{(1,5), (2,7), (6,0), (1,5)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید. سامانه آموزشی

الف) $f(x) = 3x - 5$

ب) $g(x) = 4 - x^2$

حل: کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \rightarrow 3x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_1) = g(x_2) \rightarrow 4 - (x_1)^2 = 4 - (x_2)^2 \rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \rightarrow x_1 = x_2$

لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a = b$

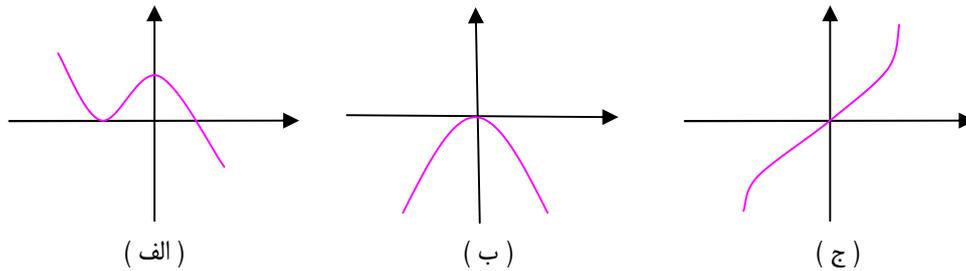
$$a^2 = b^2 \rightarrow a = b \quad \text{و} \quad |a| = |b| \rightarrow a = b \quad \text{و} \quad [a] = [b] \rightarrow a = b$$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک

استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها (x ها) ، نمودار آن را

در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

تمرین برای حل:

۱: اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

۲: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



۳: ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

۴: نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ یک به یک است.

۵: با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

الف) $f(x) = 2[x] + 1$

ب) $g(x) = 2x^3 - 5$

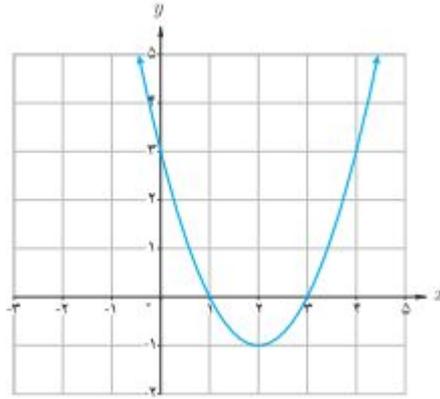
۶: آیا هر تابع درجه ی ۲ (سهمی) ، یک به یک است؟ چرا؟

۷: نمودار سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید. به نظر شما با محدود کردن دامنه ی این تابع

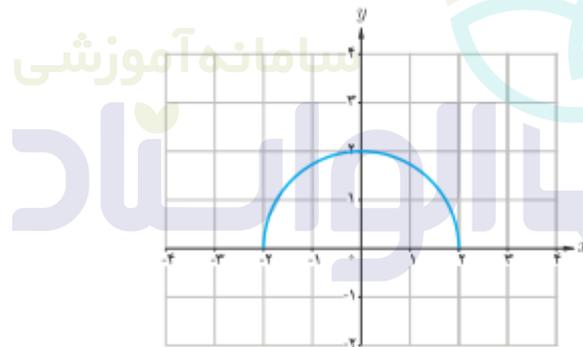
روی کدام یک از بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

الف) $[0, 2]$

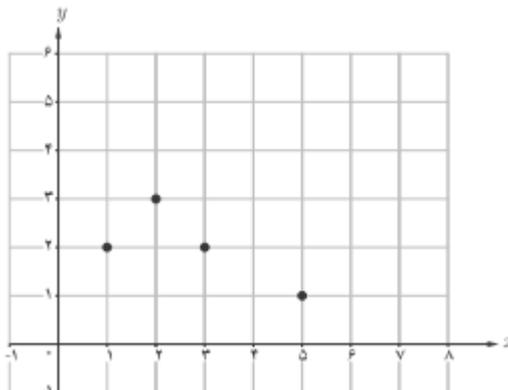
ب) $[1, 4]$



۸: با حذف بخشی از نمودار نیم دایره ی داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



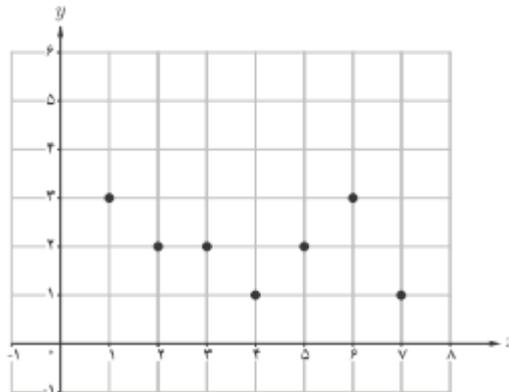
۱۰: نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف: چرا این نمودار، یک تابع یک به یک نیست؟

ب: با حذف تنها یک نقطه، نمودار را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. به نظر شما مسئله چند جواب دارد؟

۱۱ : نمودار یک تابع به صورت زیر است.



الف : آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

ب : اگر بخواهیم تعدادی از نقاط این نمودار را حذف کنیم و یک تابع یک به یک به دست آوریم، به نظر شما حداکثر چند نقطه می توان باقی بماند.

۱۲ : تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

سامانه آموزشی

قسمت دوم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اول و دوم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اول) مجموعه ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدید را تابع معکوس می نامند. مانند :

$$f = \{(1, 7), (3, 4), (9, 0)\}$$

$$g = \{(7, 1), (4, 3), (9, 0)\} \quad \text{تابع معکوس } f$$

حالت دوم) مجموعه ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$$f = \{(1, 7), (3, 4), (9, 4)\}$$

$$g = \{(7, 1), (4, 3), (4, 9)\}$$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با f^{-1} نمایش می دهند.

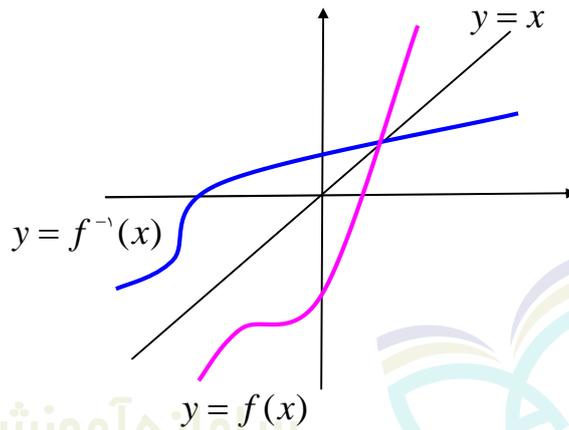
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است. ($D_{f^{-1}} = R_f$)

ج) برد تابع f^{-1} برابر دامنه‌ی تابع f است. ($R_{f^{-1}} = D_f$)

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) متقارن هستند.

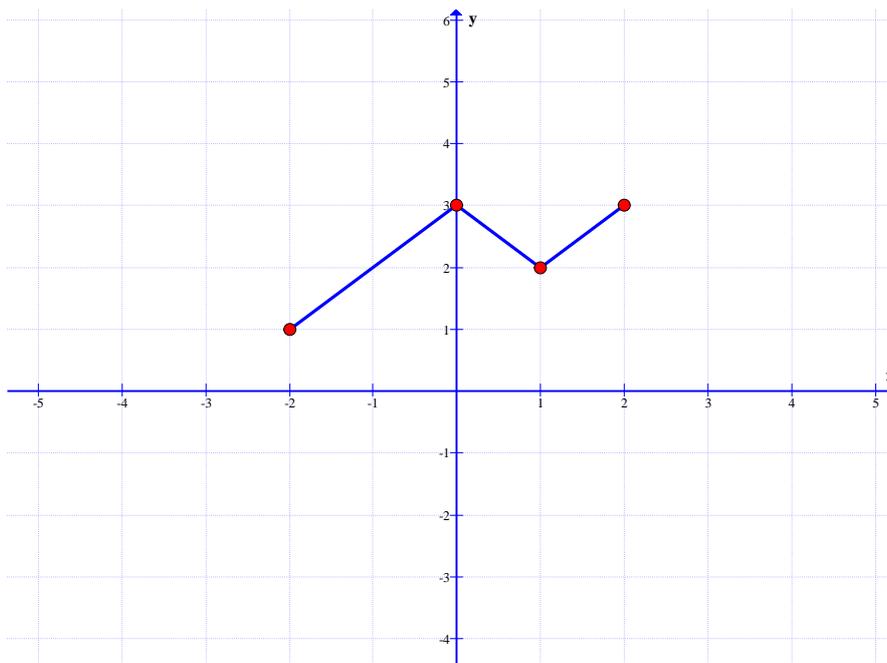


تمرین ۱۳: وارون تابع $f = \{(2,3), (-2,1), (-1,2)\}$ را به دست آورید.

تمرین ۱۴: نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

ب: آیا این تابع وارون پذیر است؟ چرا؟

الف: نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.



تمرین برای حل:

تمرین ۱۵: کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f = \{(2,1), (0,3), (5,7), (-2,6)\}$

ب) $g = \{(2,5), (0,1), (5,7), (-2,1)\}$

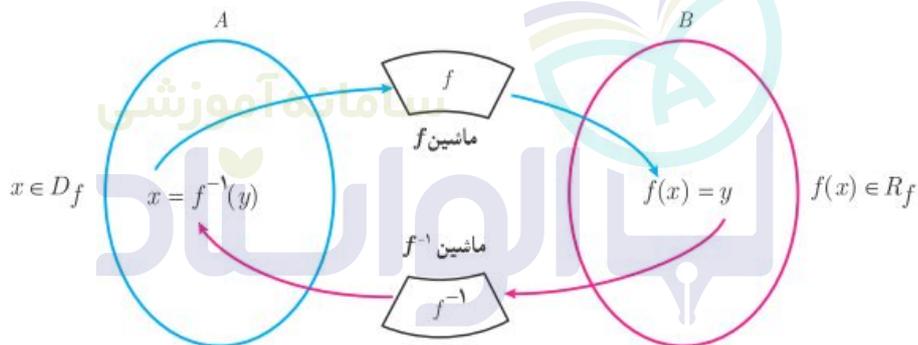
قسمت سوم: روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد. دو روش متداول است.

روش اول) تعویض متغیرها: در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \sqrt{2x_1 - 3} = \sqrt{2x_2 - 3} \rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$$

$$\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y = \sqrt{2x - 3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt{2y - 3} \rightarrow x^2 = 2y - 3 \rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$$

روش دوم) بازگردانی اعمال: در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اولویت می نویسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

مثال ۱: ثابت کنید که تابع $f(x) = 2x + 1$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

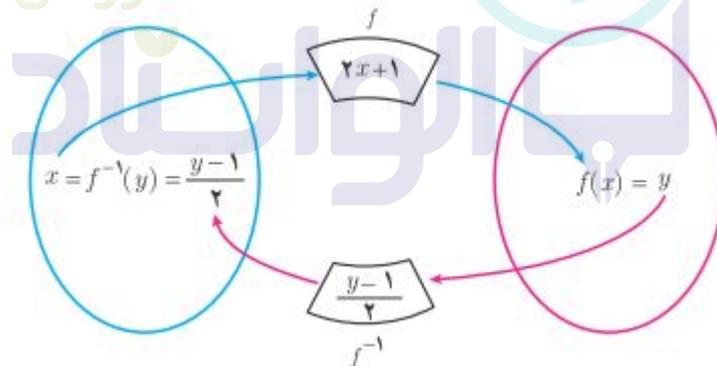
$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 2x + 1 \rightarrow y \\ y &\xleftarrow{-1} x - 1 \xleftarrow{\div 2} \frac{x - 1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

مراحل کار را می توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.



مثال ۲: ثابت کنید که تابع $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\rightarrow \sqrt{2x_1 - 3} = \sqrt{2x_2 - 3} \rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \\ &\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{-3} 2x - 3 \xrightarrow{\text{root}} \sqrt{2x - 3} \rightarrow y \\ y &\xleftarrow{\text{sqr}} x^2 \xleftarrow{+3} x^2 + 3 \xleftarrow{\div 2} \frac{x^2 + 3}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

تمرین ۱۶: وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = x + 5$

پ) $f(x) = 2x + 3$

ب) $f(x) = 4x$

ت) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

تمرین برای حل :

۱۷: ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 5x - 2$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

ج) $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$

۱۸: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x) = 3x^2 + 1$

ج) $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$

ب) $f(x) = 3x - 1$

د) $f(x) = 3|x| + 5$

۱۹: به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه‌ی تابع وارون را برای هر کدام که

وارون پذیرند، را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x+5)^2$; $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1|+1$; $x \geq 2$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۲۰: اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن بعد از t ثانیه از رابطه ی زیر به دست می آید.

الف: دامنه و برد h را به دست آورید. (h بر حسب متر)

$$h(t) = 100 - 5t^2$$

ب: چرا h تابعی یک به یک است؟

پ: تابع وارون h را به دست آورید.

۲۱: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم،

$$x < f(x)$$

۲۲: وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

۲۳: نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

۲۴: تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه ی فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند، تابعی بنویسید که درجه ی سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه ی فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

ترفند تقلیل متغیر برای تعیین یک به یک بودن تابع و محاسبه ی معکوس

گاهی تعیین یک به یک بودن تابع و به دنبال آن تعیین معکوس آن^۱ برای تابعی که ضابطه ی آن داده شده باشد، مشکل است. برای تسهیل کار می توان از **ترفند تقلیل متغیر** استفاده کرد. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۱: نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

حل:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \rightarrow f(x) = (x+1)^3 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 + 1)^3 - 1 = (x_2 + 1)^3 - 1 \rightarrow (x_1 + 1)^3 = (x_2 + 1)^3$$

^۱. در صورت معکوس پذیر بودن

$$\rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \rightarrow x_1 = x_2$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{\text{توان}^3} (x+1)^3 \xrightarrow{-1} (x+1)^3 - 1 \\ \sqrt[3]{x+1} - 1 &\xleftarrow{-1} \sqrt[3]{x+1} \xleftarrow{\sqrt[3]{\quad}} x+1 \xleftarrow{+1} x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

مثال ۲: نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$$

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} \rightarrow f(x) = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{\sqrt{(x-1)}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} \rightarrow f(x) = \sqrt{((\sqrt{x-1}+1))^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{-1} x-1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{x-1} \xrightarrow{+1} \sqrt{x-1} + 1 \\ (x-1)^2 + 1 &\xleftarrow{+1} (x-1)^2 \xleftarrow{\text{توان}^2} x-1 \xleftarrow{-1} x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1$$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس چهارم : اعمال روی توابع

در این درس اعمال رایج روی توابع را تعریف می کنیم و مسائلی را پیرامون آن حل می کنیم.

قسمت اول : اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه ی مشترک آنها تعریف کرد.

۱ : جمع دو تابع

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

۲ : تفریق دو تابع

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

۳ : ضرب دو تابع

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

۴ : تقسیم دو تابع

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

مثال : اگر $f(x) = x^2 + 5x + 6$ و $g(x) = x^2 + 3x$ ، تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(f + g)(x)$

۵) $(f^2)(x)$

۲) $(f - g)(x)$

۶) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

۳) $(g - f)(x)$

۷) D_{f+g}

۴) $(f \times g)(x)$

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

$$۱) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 3x)$$

$$= x^2 + 5x + 6 + x^2 + 3x = 2x^2 + 8x + 6$$

$$۲) (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 3x)$$

$$= x^2 + 5x + 6 - x^2 - 3x = 2x + 6$$

$$۳) (g - f)(x) = g(x) - f(x) = (x^2 + 3x) - (x^2 + 5x + 6)$$

$$= x^2 + 3x - x^2 - 5x - 6 = -2x - 6$$

$$۴) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 + 5x + 6) \times (x^2 + 3x)$$

$$= x^4 + 3x^3 + 5x^3 + 15x^2 + 6x^2 + 18x = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 18x$$

$$۵) (g \times f)(x) = g(x) \times f(x) = (x^2 + 5x + 6) \times (x^2 + 5x + 6)$$

$$= x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x^3 + 25x^2 + 30x + 6x^2 + 30x + 36$$

$$= x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$$

$$۶) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x}$$

$$۷) D_{f+g} = D_f \cap D_g = R \cap R = R$$

توابع f و g هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه ی هر دو مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$۸) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = R \cap R - \{0, -3\} = R - \{0, -3\}$$

توجه داشته باشید که ریشه های مخرج $x = 0$ و $x = -3$ تابع g می باشند.

$$x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -3$$

$$۷) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \{1, 3, 2\} - \{2\} = \{1, 3\}$$

x	۱	۳
$f(x)$	۷	-۴
$g(x)$	۶	۵
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{۷}{۶}$	$-\frac{۴}{۵}$

$$۸) \frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{۷}{۶} \right), \left(۳, -\frac{۴}{۵} \right) \right\}$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f = \{(1,1), (2,4), (3,6), (0,6)\}$ و $g = \{(1,-1), (2,5), (-1,2), (3,0)\}$

در هر مورد دامنه‌ی تابع داده شده را تعیین و سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f + g$ ۳) $f \cdot g$ ۵) f^2

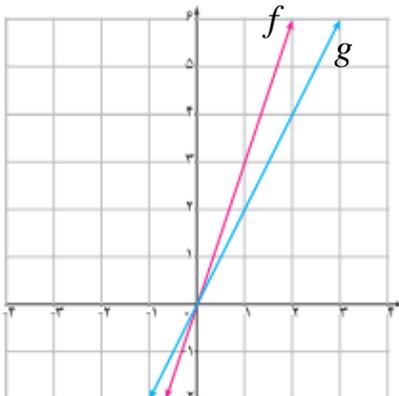
۲) $f - g$ ۴) $\frac{f}{g}$ ۶) \sqrt{g}

۲ : اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = x^2 + 2x - 3$ باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f + g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(2f - 3g)(2)$

۳ : اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{x - 1}$ ، ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع $f + g$ را تعیین کنید.

۴ : اگر $u(x) = \sqrt{x + 1}$ و $v(x) = x - 1$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع $f(x) = (\frac{u}{v})(x)$ را تعیین کنید.



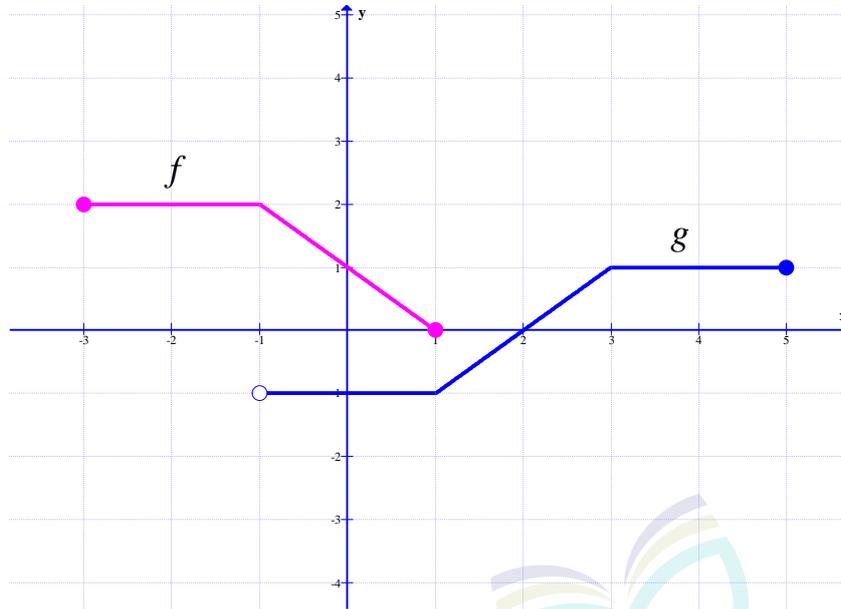
۵ : ثابت کنید که حاصل جمع و تفریق دو تابع خطی، خطی است.

۶ : در شکل مقابل، نمودارهای دو تابع f و g رسم شده اند.

الف: ضابطه‌ی این دو تابع را بنویسید.

ب : ضابطه‌ی دو تابع $f + g$ و $f - g$ را به دست آورید.

۷: در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. ابتدا مقدار $(f + g)(0)$ و سپس نمودار $f + g$ را رسم کنید.



۸: اگر $f = \{(1, 2), (3, 5), (5, 7), (7, 9), (4, 4)\}$ باشد، تابع $f^{-1} + 2f$ را با عضوهایش بنویسید.

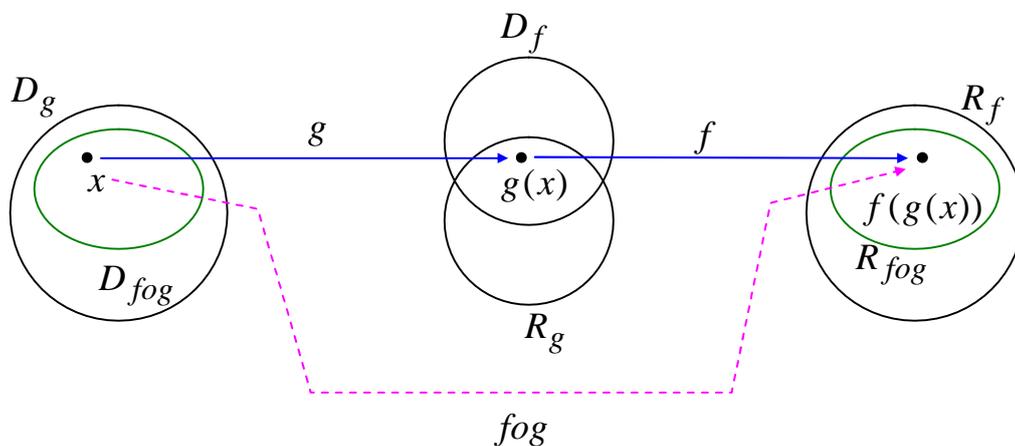


قسمت دوم: ترکیب توابع

هرگاه f و g دو تابع باشند، ترکیب تابع f در g که به صورت $f \circ g$ نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



مثال: اگر $g(x) = 2x^2 - x + 1$ و $f(x) = x + 3$ مقدار m را طوری تعیین کنید که

$$(fog)(m) = (gof)(m)$$

حل:

$$(fog)(m) = f(g(m)) = f(2m^2 - m + 1) = 2m^2 - m + 4$$

$$(gof)(m) = g(f(m)) = g(m + 3) = 2(m + 3)^2 - (m + 3) + 1 = 2m^2 + 11m + 16$$

$$\Rightarrow 2m^2 - m + 4 = 2m^2 + 11m + 16 \rightarrow m = -1$$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (3,7), (4,6), (0,9)\}$ و $g = \{(-1,5), (8,1), (2,4), (0,0)\}$ ابتدا دامنه ی تابع

fog را تعیین نموده و سپس این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل: با توجه به تعریف دامنه ی تابع fog جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$$D_f = \{1,3,4,0\} \text{ و } D_g = \{-1,8,2,0\}$$

$x \in D_g$	$g(x)$
-1	$5 \notin D_f$
8	$1 \in D_f$
2	$4 \in D_f$
0	$0 \in D_f$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{8,2,0\}$$

اکنون برای تعیین fog به شکل زیر عمل می کنیم.

$$(fog)(8) = f(g(8)) = f(1) = 2$$

$$(fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 6$$

$$(fog)(0) = f(g(0)) = f(0) = 9$$

$$\Rightarrow fog = \{(8,2), (2,6), (0,9)\}$$

تمرین برای حل:

۹: توابع $g(x) = 2x - 3$ و $f(x) = \sqrt{x+1}$ داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف) $(gof)(x)$

ب) D_{fog}

۱۰: اگر $g(x) = x^2 - 4x - 1$ و $f(x) = 2x - 1$ باشد. توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

ج: برای هر دو تابع f و g داریم $f \times g = g \times f$

ح: اگر برای هر دو تابع f و g داشته باشیم $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ آنگاه دو تابع f و g

وارون همدیگرنند.

۱۹: اگر $f(x) = 2x + 5$ آنگاه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f^{-1}(x)$

ج) $(f \circ f^{-1})(x)$

ب) $(f \circ f)(x)$

د) $(f^{-1} \circ f)(x)$

۲۰: اگر $f = \{(0,4), (3,2), (5,6), (7,0)\}$ مطلوب است تعیین تابع $f \circ f^{-1}$

۲۱: با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f + g)(2)$

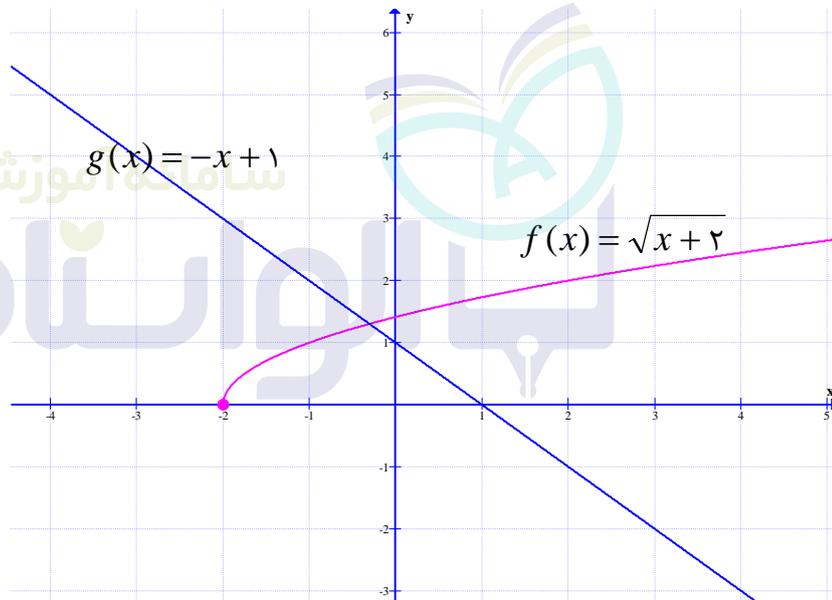
ب) $(f + g)(-3)$

پ) $(f \times g)(\frac{1}{2})$

ت) $(f \circ g)(-4)$

ث) $(\frac{f}{g})(0)$

ج) $(g \circ f)(-1)$



تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان