

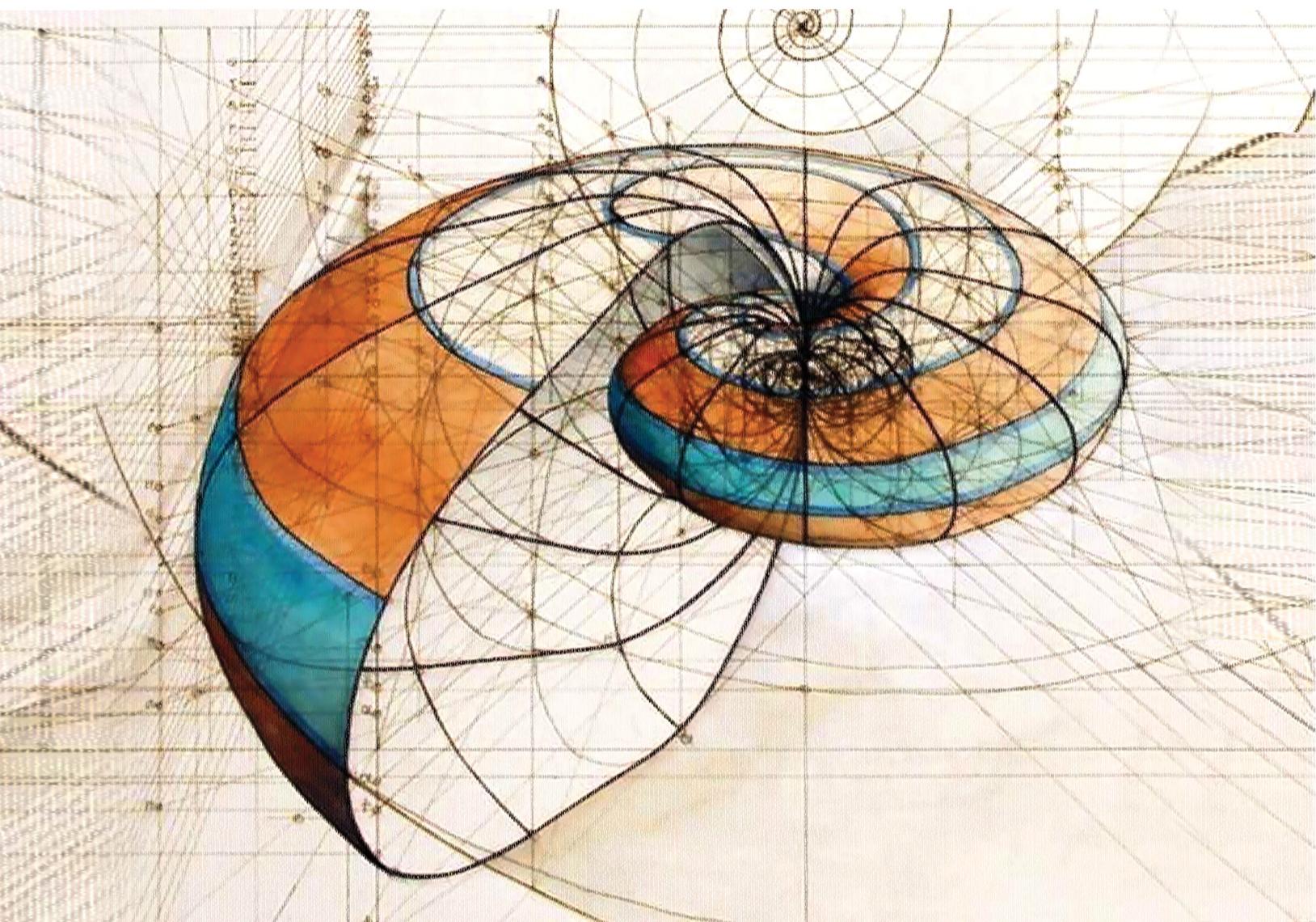


آموزش و فکر

multivitamin

حسابان (۱)

kelk-m.com



به کلک: عباس امیدوار - حسنیه شریفی

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

تابع



- آشنایی بیشتر با تابع ۱
- انواع تابع ۲
- وارون تابع ۳
- اعمال روی توابع ۴

فصل





درس ۱

هم‌دامنه

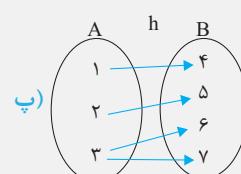
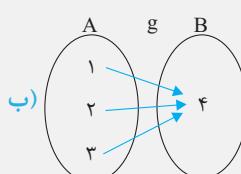
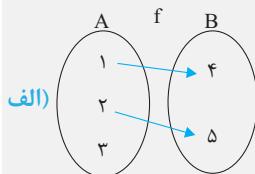
۱-۱



(نمایش پیکانی تابع)

در سال گذشته یاد گرفتیم که هرگاه تمام اعضای مجموعه A را بوسیله پیکان‌هایی (فلش‌هایی) به اعضای مجموعه B مرتبط سازیم به طوری که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد، گوییم یک تابع از مجموعه A به مجموعه B با نمودار ون نمایش داده شده است و آن را به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: کدامیک از نمودارهای ون زیر نمایش یک تابع از A به B است، در صورت تابع بودن آن را به صورت مجموعه زوج مرتب بنویسید.



پاسخ

(الف) f یک تابع نیست، چون از عضو ۳ در A پیکانی خارج نشده است.

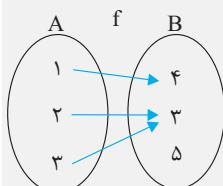
(ب) g یک تابع است و نمایش زوج مرتب آن به صورت $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ است.

(پ) h یک تابع نیست چون از عضو ۳ در A دو پیکان خارج شده است.

نتیجه

هرگاه f از A به B یک تابع باشد لزومی ندارد به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وصل شود.

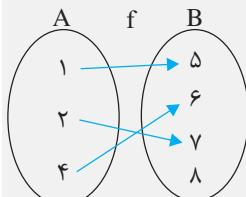
مثال ۲: نمودار ون زیر نمایش یک تابع از A به B است.



تذکر

هرگاه f تابعی از A به B باشد، آنگاه مجموعه A دامنه تابع و مجموعه تمام اعضایی از B که بوسیله نوک فلش مشخص شده است، برد تابع می‌گویند.

مثال ۳: در نمایش نمودار ون تابع f ، دامنه و برد را مشخص کنید.



پاسخ با توجه به نمودار ون رسم شده داریم:

$$D_f = \{1, \dots, \dots\} \quad \text{دامنه تابع}$$

$$R_f = \{5, \dots, \dots\} \quad \text{برد تابع}$$

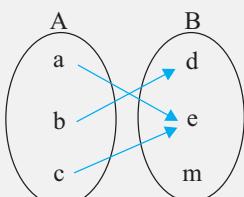
تعريف همدامنه: هرگاه f تابعی از A به B باشد، مجموعه B را همدامنه تابع می‌گویند.

تذکره

برد تابع همواره زیر مجموعه یا مساوی همدامنه می‌باشد.

مثال

۴: در تابع زیر وضعیت برد و همدامنه را مشخص کنید.



$$R_f = \{ \dots, \dots \} \subset \text{همدامنه} = \{ \dots, \dots, \dots \}$$

پاسخ

تذکره

همدامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواه شامل برد درنظر گرفت.

مثال

۵: در تابع $f(x) = x^2$ همدامنه را بیابید.

پاسخ می‌دانیم که $D_f = \mathbb{R}$ است، از طرفی $x \in [0, +\infty)$ پس $f(x) = x^2$ همدامنه تابع خواهد بود مثلاً می‌توان $(-\infty, 0]$ را همدامنه درنظر گرفت.

تذکره

هرگاه f تابعی از A به B با ضابطه‌ای مشخص شود دامنه تابع را ضابطه تابع مشخص نمی‌کند دامنه همان مجموعه A است.

مثال

۶: تابع $f(x) = x^2$ با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده است، دامنه و برد تابع را بیابید.

پاسخ

$$D = [0, 2] \quad \text{و} \quad \text{هم دامنه} = \dots \dots \dots$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \dots \leq x^2 \leq \dots \rightarrow R_f = [\dots, \dots]$$

تذکره

هرگاه در یک تابع فقط ضابطه مشخص گردد و اشاره به دامنه آن نشود در این صورت دامنه و برد تابع از روی ضابطه مشخص می‌گردد. همچنین همدامنه نیز مجموعه‌ای شامل برد خواهد بود.

تذکره

مثال

۷: در تابع $y = -2x^2$ دامنه، برد و همدامنه را مشخص کنید.

پاسخ دامنه تابع \mathbb{R} است، حال برد تابع را بدست می‌آوریم:

چون تابع درجه دوم است و ضریب x^2 مثبت، پس دارای کمترین مقدار است و این مقدار به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید:

$$x = \dots \dots \rightarrow y = (\dots \dots)^2 - 2(\dots \dots) = -1$$

$$\dots \dots \dots \rightarrow R_f = [-1, +\infty) \quad \text{پس} \quad \text{بنابراین همدامنه هر مجموعه‌ای شامل} \quad [-1, +\infty) \quad \text{می‌باشد مانند} \dots \dots \dots$$



۲-۱

تابع به عنوان یک ماشین

می‌دانیم تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به صورت (x, y) است که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته نامیده شده و بر حسب x بیان می‌شود که به آن ضابطه تابع می‌گویند.

بنابراین می‌توان تابع f را نمایشی از ورودی‌ها و خروجی‌های یک ماشین درنظر گرفت که در آن ورودی، همان دامنه، کار ماشین، ضابطه تابع و خروجی، بُرد تابع است.

مثال ۸: فرض کنید ماشینی به نام f در ورودی خود اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از ورود هر عدد، مربع آن را با 3 جمع کرده و حاصل را از دستگاه خارج می‌کند.

(الف) با ورود عدد -2 – به ماشین چه عددی از آن خارج می‌شود.

(ب) اگر خروجی عدد 4 باشد ورودی آن چه اعدادی می‌تواند باشد.

(پ) با ورود x به ماشین f خروجی y را بر حسب x بیابید.

(ت) مجموعه خروجی‌های این ماشین چه مجموعه‌ای است.

(ث) اگر مجموعه ورودی‌ها و خروجی‌های این ماشین را به صورت زوج مرتب در نظر بگیریم مجموعه حاصل یک تابع است، نمودار این تابع را رسم کنید.

پاسخ

(الف)



(ب) اگر ورودی دستگاه را X بگیریم در این صورت چون کار دستگاه این است که مربع هر عدد را با 3 جمع می‌کند و آن را خارج می‌نماید پس خروجی $y = x^2 + 3$ است، از طرفی طبق فرض مسئله خروجی برابر با 4 است، پس داریم:

$$x^2 + 3 = 4 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$

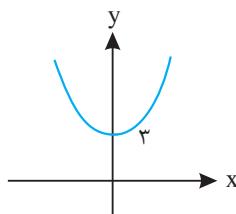
$$y = x^2 + 3 \quad (\text{پ})$$

(ت) می‌دانیم ضابطه تابع به صورت $y = x^2 + 3$ است، پس داریم:

$$x^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + 3 \geq 3 \rightarrow R_f = [3, +\infty)$$

پس خروجی دستگاه بازه $[3, +\infty)$ می‌باشد.

(ث) نمودار تابع $y = x^2 + 3$ را رسم می‌کنیم:



برابری دو تابع

تعریف دو تابع برابر: هرگاه نمودارهای دو تابع بر یکدیگر منطبق شوند آن دو تابع با یکدیگر مساویند.

پیچه

۱: در نمایش زوج مرتب هنگامی دو تابع برابرند که تمام زوج مرتب‌های آن‌ها یکسان باشد.

۲: هرگاه ضابطه‌های دو تابع f و g مشخص شده باشند در صورتی دو تابع f و g برابر یکدیگرند که:

اولاً: دامنه آن‌ها یکسان باشند: $D_f = D_g$

ثانیاً: برای هر عضو از این دامنه یکسان مانند x مقادیر تابع f و g یکسان باشد $(f(x) = g(x))$

مثال ۹: کدام دو تابع با هم برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{|x|} \\ g(x) = |x| \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f(x) = (\sqrt{x})^2 \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۵)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \end{cases} \quad (۶)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۷)$$

پاسخ

بررسی گزینه ۱: «۱»

چون $x^2 \geq 0$ پس زیر رادیکال همواره نامنفی است، بنابراین $D_f = \mathbb{R}$ ، از طرفی ... $D_g = \mathbb{R}$ است.

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \rightarrow f(x) \dots g(x)$$

پس تابع f با g برابر

بررسی گزینه ۲: «۲»

$$D_f = \mathbb{R} - \{...\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{...\}$$

پس D_f D_g است. از طرفی داریم:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} & x > 0 \\ & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} & x > 0 \\ & x < 0 \end{cases}$$

پس تابع f با g برابر است.

بررسی گزینه ۳: «۳»

و ... D_g می‌باشد پس D_g D_f بنابراین تابع f با g برابر

بررسی گزینه ۴: «۴»

$$D_f = \mathbb{R} - \{...\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{...\}$$

بنابراین D_g D_f پس تابع f با g برابر

پس گزینه صحیح است.



تمرین

محل انجام محاسبات

جاهای خالی را پر کنید.

-۱

تابع	$y = 5x - 1$	$y = x^2 + 1$	$y = x + 2$	$y = 7x - 9$
دامنه	$\{-1, 2, 3\}$	$(-2, 1]$	$(-3, 7]$	
برد				$[-3, 7)$
همدامنه				

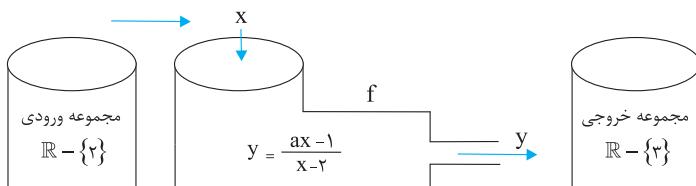
ماشین g دارای ویژگی‌های زیر است:

-۲

(۱) ورودی این ماشین اعداد حقیقی است.

(۲) اگر هر عدد کوچکتر یا مساوی -1 را به آن بدهیم همان عدد را به ما تحویل می‌دهد.(۳) با ورود اعداد 3 و 0 عدد 2 از ماشین خارج می‌شود.(۴) با ورود اعداد بزرگتر از 3 ، مریع آن اعداد از دستگاه خارج می‌شود.(۵) به ازای هر عدد بین 3 و 1 که وارد دستگاه شود مقدار ثابتی از آن خارج می‌شود.

(الف) ضابطه این دستگاه را پیدا کنید.

(ب) اگر مجموعه ورودی‌ها و خروجی‌های این ماشین را با زوج مرتب نمایش دهیم
مجموعه حاصل یک تابع است، نمودار این تابع رارسم کنید.در ماشین زیر a را چنان بپایید که خروجی از دستگاه مجموعه $\{3\} - \mathbb{R}$ باشد. -۳

$$\text{هر گاه توابع } f \text{ و } g \text{ با ضابطه‌های } \begin{cases} x=2 \\ x \neq 2 \end{cases} \text{ برابرند.} \quad -۴$$

باشند، مقدار b چقدر است؟

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 + ax + 2} \text{ و } g(x) = x + c \text{ برابر} \quad -۵$$

به ازای چه مقادیری از a دو تابع f و g با ضابطه‌های 1 و 2 برابرند؟

(۶) با توجه به ضابطه داده شده از توابع f و g ، تساوی دو تابع را بررسی کنید.

$$\text{(الف)} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} \\ g(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} \\ g(x) = \sqrt{x-1} + 1 \end{cases} \quad -۶$$

$$\text{دامنه توابع } f \text{ و } g \text{ با ضابطه‌های } 1 \text{ و } 2 \text{ را چنان} \quad -۷$$

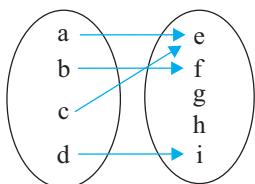
تعریف کنید که این دو تابع باهم برابر باشند.

تست‌های درس اول (آشنایی بیشتر با تابع)

۱-۱ هم‌دامنه / ۲-۱ تابع به عنوان ماشین

-۱۹۱

تابع با نمودار مقابل مفروض است. مجموعه‌های هم‌دامنه و برد به ترتیب چند عضو دارد؟



۵, ۴ (۱)

۵, ۵ (۲)

۳, ۵ (۳)

۳, ۳ (۴)

-۱۹۲

کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) برد و هم‌دامنه می‌توانند یکی باشند.

 ۳) بی‌شمار تابع وجود دارد که برد آن $\{1\}$ باشد.

-۱۹۳

اگر هم‌دامنه f مجموعه‌ی $\{-1, 0, 3\}$ باشد، کدام گزینه در مورد دامنه تابع صحیح است؟

۲) حداقل ۲ عضو دارد.

۴) می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد.

۱) حداکثر ۲ عضو دارد.

۳) فقط ۲ عضو دارد.

-۱۹۴

$$\begin{cases} f : A \rightarrow \{-1, 0, 3\} \\ \text{آن گاه مجموعه } A \text{ کدام می‌تواند باشد?} \\ f(x) = 3 - x \end{cases}$$

 ۱) $\{-3, 1\}$ (۱)

 ۲) $\{0, 4\}$ (۲)

 ۳) $\{0, 1\}$ (۳)

 ۴) $\{3, 4, 6\}$ (۴)

-۱۹۵

$$\begin{cases} f : \{-1, 1\} \rightarrow B \\ \text{آن گاه مجموعه } B \text{ کدام نمی‌تواند باشد?} \\ f(x) = 4x - 1 \end{cases}$$

 ۱) $(-5, 3)$ (۱)

 ۲) $(-\infty, 4]$ (۲)

 ۳) $[-1, +\infty)$ (۳)

 ۴) $(-6, +\infty)$ (۴)

-۱۹۶

$$\begin{cases} f : [-1, 1] \rightarrow B \\ \text{آن گاه } B \text{ کدام مجموعه زیر می‌تواند باشد?} \\ f(x) = |x| + 1 \end{cases}$$

 ۱) $(1, 2)$ (۱)

 ۲) $[-2, 1)$ (۲)

 ۳) $[1, 2]$ (۳)

 ۴) $[0, 2)$ (۴)

-۱۹۷

ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت، آن عدد را مربع (مجدور) کرده و یک واحد از آن کم می‌کند به ازای ورودی ۲، خروجی کدام خواهد بود؟

۱) ۱ (۴)

۲) ۳ (۳)

۳) ۲ (۲)

۴) ۴ (۱)

-۱۹۸

ماشین تابع f با دامنه \mathbb{R} ، خروجی ۵ را تحويل داده است. برای یافتن ورودی، ابتدا از ۵ یک واحد کم کرده و سپس حاصل بر ۲ تقسیم شده است. $f(5)$ کدام است؟

۱) ۱۱ (۴)

۲) ۵ (۲)

۳) ۸ (۳)

۴) ۲ (۱)

۱-۳ برابر دو تابع

-۱۹۹

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ضابطه‌ی تابع f به صورت

 ۱) $-x + f(x)$ (۴)

 ۲) $x + f(x)$ (۳)

 ۳) $xf(x)$ (۲)

 ۴) $-xf(x)$ (۱)



-۲۰۰ تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2|$ برابر کدام یک از توابع است؟

$$\frac{|6x - 12|}{6} \quad (4)$$

$$\frac{(x - 2)^2}{|x - 2|} \quad (3)$$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right| \quad (2)$$

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right| \quad (1)$$

$$x > 1 \quad (4)$$

$$x \geq 1 \quad (3)$$

$$x > 0 \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (1)$$

-۲۰۱ اگر دو تابع $g(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ و $f(x) = x + 1$ برابر باشند، باید:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{x^2 - x}{|x|} \quad (3)$$

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| \quad (2)$$

$$\frac{x^2 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad (1)$$

-۲۰۲ تابع $f(x) = |x + 1|$ با تابع $g(x)$ برابر است، $g(x)$ برابر است با:

$$y = 2x - |x| \quad (4)$$

$$y = |x| - 2x \quad (3)$$

$$y = x - 2|x| \quad (2)$$

$$y = 2|x| - x \quad (1)$$

-۲۰۳ تابع $y = |2x - |x||$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۲۰۴ اگر دو تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$ و $f(x) = 2x - 1$ برابر باشند، مقدار k کدام است؟

$$14 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$x = m \quad \begin{cases} n & x = m \\ \frac{x^2 + \lambda}{x - m} & x \neq m \end{cases}$$

-۲۰۵ اگر $f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{x^2 + \lambda}{x - m} & x \neq m \end{cases}$ دو تابع f و g برابر باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

-۲۰۶ به ازای چند مقدار صحیح a ، دو تابع $g(x) = |x^2 + 2ax + 13|$ و $f(x) = x^2 + 2ax + 13$ برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$-7 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۲۰۷ دو تابع $g(x) = \frac{ax + b}{x^2 + cx + 4}$ و $f(x) = \frac{3}{x - 2}$ برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$-7 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۲۰۸ دو تابع $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ و $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ برابرند. مقدار $a+2b$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

-۲۰۹ به ازای چند مقدار a دو تابع $g(x) = a^3 - a + 2$ و $f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2a}{x^2 + x - a}$ برابرند.

$$2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

-۲۱۰ اگر دو تابع $g(x) = \frac{x - 2c}{x^3 - 5x^2 + ax - b}$ و $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ برابر باشند. حاصل $a - b + 2c$ کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

-۲۱۱ اگر تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax + b}{x+1} & x \neq -1 \\ \frac{c}{x-1} & x = -1 \end{cases}$$

کدام است؟

-۳ (۴)

-۱ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

 -۲۱۲ اگر دو تابع f با ضابطه

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1\} \quad g(x) = 2 \quad f(x) = \frac{ax^3 + b}{2x^3 - c}$$

باهم برابر باشند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)





درس ۲

توابع گویا ۱-۲

خودرویی ۱۵ کیلومتر اول یک مسیر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت و بقیه آن را با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. اگر X مسافتی باشد که خودرو بعد از ۱۵ کیلومتر طی می‌کند.

الف تابعی بیابید که سرعت متوسط این خودرو را بر حسب X بیان کند.

ب اگر این خودرو ۳۰ کیلومتر را با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی کند سرعت متوسط چقدر است؟

پ اگر بخواهیم سرعت متوسط ۷۰ کیلومتر بر ساعت را داشته باشیم این خودرو باید چند کیلومتر را با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی کند؟

۵ تعریف تابع گویا:

هر تابع مانند $f(x)$ که بتوان ضابطه آن را به صورت $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای هستند و $q(x) \neq 0$ را یک تابع گویا می‌نامند.

تابع مثال فوق یک تابع گویا است.

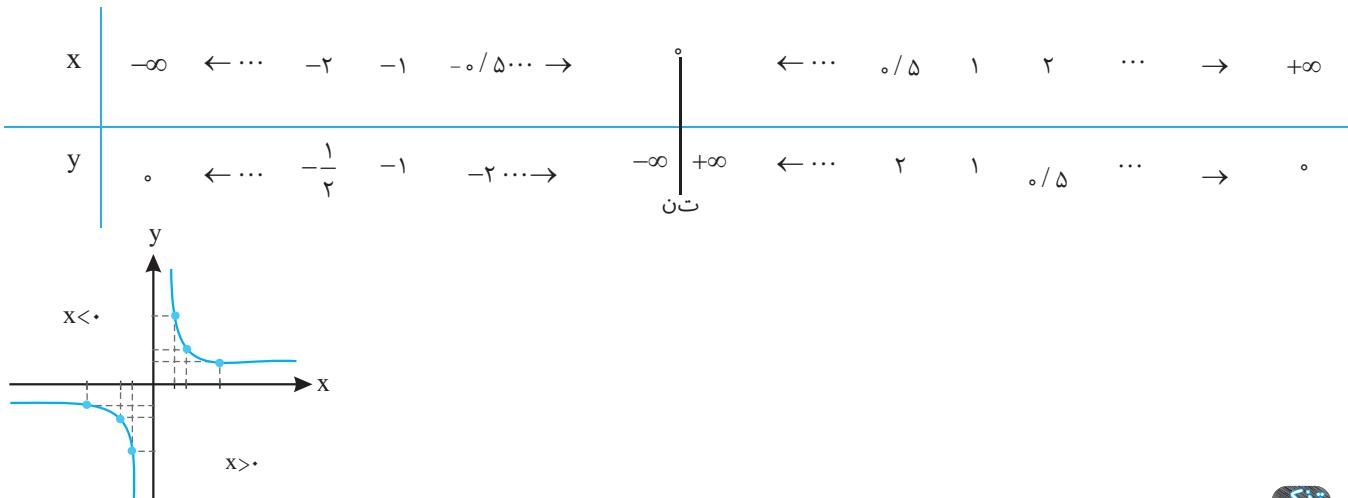
مثال ۱: هر یک از توابع زیر ضابطه یک تابع گویا هستند.

$$\text{(الف)} \quad y = \frac{1}{x}$$

$$\text{(ب)} \quad y = \frac{5x - 1}{2x + 1}$$

$$\text{(پ)} \quad y = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x^2 - 7x}$$

садه‌ترین نوع این توابع، تابع با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ است. که به ازای $x = 0$ تعریف نشده و نمودار آن به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود.



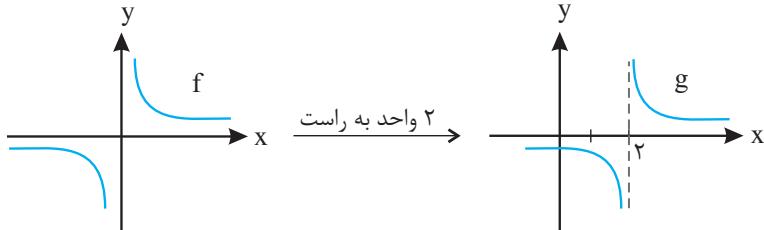
ندگر

در نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ برای $x > 0$ هر چه مقادیر x را زیاد می‌کنیم تابع به صفر نزدیک می‌شود و هر چقدر x را به صفر نزدیک می‌کنیم تابع به مثبت بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

در نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ برای $x < 0$, هر چه مقادیر x را کمتر کنیم مقدار y به صفر و هر چقدر x را به صفر نزدیک کنیم تابع به منفی بی‌نهایت نزدیک می‌گردد.

مثال ۲: نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{1}{x-2}$ را به کمک انتقال تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ رسم کنید.

پاسخ با توجه به ضابطه f و g می‌توان نتیجه گرفت که $(x-2)$ است، پس برای رسم تابع g کافی است نمودار f را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، پس داریم:

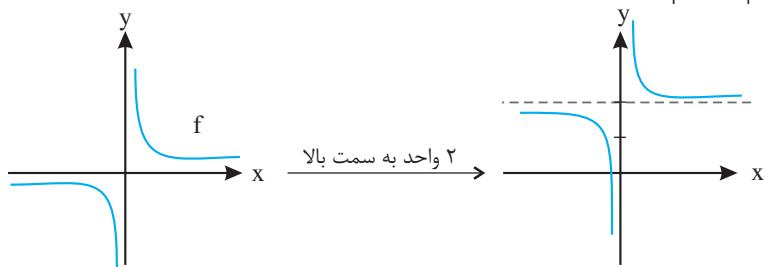


مثال ۳: نمودارتابع g با ضابطه $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا ضابطه g را ساده‌تر می‌نماییم:

$$g(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$$

پس 2 و $\frac{1}{x}$ ، حال به کمک انتقال نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



۵ دامنه تابع گویا:

تابع گویا به ازای X هایی که مخرج کسر را صفر می‌کنند تعریف نشده است، بنابراین دامنه این تابع $\{$ ریشه‌های مخرج $\}$ است.

مثال ۴: دامنه تابع گویا با ضابطه‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $y = \frac{7x-4}{2x-5}$

(ب) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^3 + x + 1}$

(پ) $y = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}$

(ت) $y = \frac{x}{x-2} + \frac{5}{x^2 - 3x}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشه مخرج را بدست می‌آوریم:

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

(ب)

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$x^3 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = -3 < 0$$

پس معادله فوق ریشه ندارد و $D = \mathbb{R}$ است.

(پ) $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$ ریشه مخرج

(ت)

پس $D = \mathbb{R} - \{\dots, \dots\}$ است.

$\begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = \dots \\ x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \end{cases}$

(ت) این تابع از مجموع دو تابع کسری تشکیل شده پس داریم:

پس $D = \dots - \{\dots, \dots, \dots\}$ است.



نکته

برای پیدا کردن دامنه توابع گویا در صورت ساده شدن کسر مجاز به این کار نیستیم زیرا ممکن است دامنه تغییر کند.

پاسخ

مثال ۵: نشان دهید دو تابع $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ باهم مساوی نیستند.

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow D_f = \dots$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \rightarrow D_g = \dots$$

پس $D_f \neq D_g$ ، از طرفی داریم:

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} \xrightarrow{\text{باهم}} g(x) = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$$

چون شرط اول تساوی دو تابع برقرار نبود پس دو تابع f و g باهم مساوی نیستند.

مثال ۶: دامنه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

پاسخ

(الف) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

(ب) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \dots$ یا $x = \dots \rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{\dots, \dots\}$: ریشه مخرج

$x+1 = 0 \rightarrow x = \dots$: مخرج کسر کوچک

$$1 + \frac{1}{x+1} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{x+1+1}{x+1} = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0 \rightarrow x+2 = 0 \rightarrow x = \dots$$

پس $D = \mathbb{R} - \{\dots, \dots\}$ است.

(الف)

(ب)

(الف)

(ب)

مثال ۷: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x-1$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ تعریف شده‌اند.

(الف) نشان دهید توابع f و g با یکدیگر برابرند.

(ب) نمودار تابع f رارسم کنید.

پاسخ

$$D_f = \dots$$

(الف) ابتدا دامنه تابع f را بدست می‌آوریم:

اگر ضابطه f را با استفاده از دامنه‌اش ساده کنیم داریم:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 = g(x)$$

بنابراین چون $D_f = D_g$ و برای هر x از دامنه f و g ، $f(x) = g(x)$ پس این دو تابع باهم مساوی هستند.

(ب) نمودار تابع f را می‌توان به کمک نمودار تابع g رسم نمود.

نکته

در تعیین دامنه تابع گویا در کاربردهای واقعی، ممکن است با محدودیت‌های بیشتری مواجه باشیم.

پاسخ

مثال ۸: اگر هزینه پاکسازی X درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای بوسیله تابع f با ضابطه $y = \frac{255X}{100-X}$ محاسبه شود که در آن X

درصد آلودگی و y هزینه پاکسازی بر حسب میلیون تومان است.

دامنه این تابع را در این حالت (واقعی) بیابید.

(پاسخ) در این تابع، علاوه بر این که مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد محدودیت‌های زیر نیز وجود دارد.

(اولاً) X نمی‌تواند منفی یا صفر باشد یعنی $0 < X$.

(ثانیاً) y (هزینه پاکسازی) نیز مثبت است چون $0 < X$ است صورت کسر y نیز مثبت و در نتیجه باید مخرج کسر آن نیز مثبت باشد. یعنی:

$$100 - x > 0 \rightarrow x < 100$$

$$D = (\dots, \dots)$$

حال اگر از دو وضعیت بالا اشتراک بگیریم دامنه این تابع بدست می‌آید:

مثال ۹: اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2x + 7}{x^2 + ax + 1}$ برابر \mathbb{R} شود حدود a را بیابیم.

پاسخ هنگامی دامنه تابع f برابر \mathbb{R} است که مخرج کسر ریشه نداشته باشد. چون معادله مخرج کسر درجه دوم است، پس باید Δ آن منفی باشد، بنابراین داریم:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \rightarrow \Delta = a^2 - 4 < 0 \rightarrow a^2 < 4 \rightarrow -2 < a < 2$$

مثال ۱۰: اگر دامنه تابع $y = \frac{x+3}{x^2 + ax + b}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱۲(۴)

۱۶(۳)

۸(۲)

۴(۱)

پاسخ با توجه به این که در دامنه تابع فقط عدد -2 از مجموعه اعداد حقیقی خارج شده پس مخرج کسر دارای یک ریشه -2 است و این یعنی معادله برابر با صفر است، پس داریم:

$x = \frac{-a}{2} = -2 \rightarrow a = 4$ هم چنین می‌دانیم هرگاه $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ است، پس داریم: پس $a + b = 0$ و $b = 0$ است، بنابراین گزینه صحیح است.

مثال ۱۱: تابع $y = \frac{3x-1}{x+2}$ مفروض است اگر ضابطه این تابع را به عنوان کار دستگاه f درنظر بگیریم:

(الف) آیا از این دستگاه عدد 1 خارج می‌شود؟

(ب) از دستگاه f چه اعدادی نمی‌توانند خارج شود؟

(پ) برد تابع با ضابطه داده شده را بیابیم.

پاسخ

(الف) کافی است به جای y (خروجی) عدد 1 را قرار دهیم تا مقدار ورودی x را بیابیم.

$$y = \frac{3x-1}{x+2} \xrightarrow{y=1} \frac{3x-1}{x+2} = 1 \rightarrow 3x-1 = x+2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

پس اگر $x = \frac{3}{2}$ وارد دستگاه شود عدد 1 خارج می‌شود.

(ب) برای پیدا کردن اعدادی که نمی‌توانند از دستگاه خارج شوند کافی است x را بحسب y بدست آوریم:

$$y = \frac{3x-1}{x+2} \rightarrow yx + 2y = 3x - 1 \rightarrow yx - 3x = -2y - 1 \rightarrow x(y-3) = -2y - 1 \rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-3}$$

اگر $y = 3$ باشد مخرج کسر $x = \frac{-2y-1}{y-3}$ برابر با صفر می‌شود و x تعريف نمی‌شود پس از این دستگاه عدد 3 نمی‌تواند خارج شود.

(پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت که هر عددی از دستگاه خارج می‌شود به غیر از 3 پس $R_y = \mathbb{R} - \{3\}$.

مثال ۱۲: تابع f با ضابطه $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ مفروض است:

(الف) دامنه تابع را بدست آورید.

(ب) ضابطه تابع را تا حدامکان ساده کنید.

(پ) اگر ضابطه این تابع به عنوان کار دستگاه g درنظر گرفته شود آیا عدد 1 از دستگاه خارج می‌شود؟

پاسخ

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow D = R - \{1, -1\}$$

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

(ب)



$$\frac{x-2}{x-1} = 1 \rightarrow x-2 = x-1 \rightarrow -2 = -1$$

پ) برای پیدا کردن ورودی دستگاه کافی است به جای y عدد یک را قرار دهیم:
پس $y = 1$ نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

مثال ۱۳: تابع f با ضابطه $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ مفروض است.

(الف) آیا از دستگاه f ، $y = 1$ خارج می‌شود؟

(ب) اگر $y = m$ از دستگاه خارج شود m باید چه شرطی داشته باشد؟

(پ) برد تابع را بیابید.



$$\frac{x^2 + 1}{x} = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

(الف) در ضابطه تابع به جای y عدد ۱ را قرار می‌دهیم تا ورودی دستگاه را بیابیم:

چون Δ منفی است، معادله جواب ندارد بنابراین $y = 1$ نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

$$\frac{x^2 + 1}{x} = m \rightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \xrightarrow{(1)} \Delta = (-m)^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = m^2 - 4$$

(ب)

$$m^2 - 4 \geq 0 \rightarrow m \leq -2 \quad \text{یا} \quad m \geq 2$$

هنگامی معادله درجه دوم (۱) دارای جواب است که $\Delta \geq 0$ باشد، پس

(پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت بُرد تابع برابر است با:

مثال ۱۴: دامنه هر یک از توابع کسری که شامل قدرمطلق هستند را بیابید.

(الف) $y = \frac{x-3}{|x|-2}$

(ب) $y = \frac{x^2-x}{|x-1|+5}$



(الف) ابتدا ریشهٔ مخرج کسر را بدست می‌آوریم:

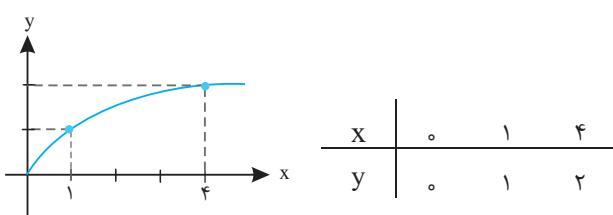
$$x = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

(ب) می‌دانیم $|x| - 5$ همواره یک عبارت نامنفی است پس جمع آن با ۵ نمی‌تواند برابر با صفر باشد، بنابراین مخرج کسر همواره مخالف با صفر است، پس $D = \mathbb{R}$ است.

۲-۲ توابع رادیکالی (تابع ریشه‌ی دوم)

می‌دانیم تنها اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و ضابطه آن را به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود:



دامنه و برد تابع $y = \sqrt{x}$ برابر $[0, +\infty]$ است.

مثال ۱۵: با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ تابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را بیابید.

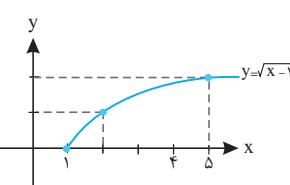
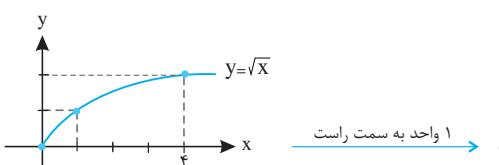
(الف) $y = \sqrt{x-1}$

(ب) $y = -\sqrt{x} + 2$

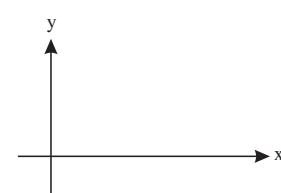
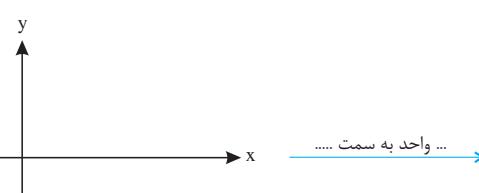
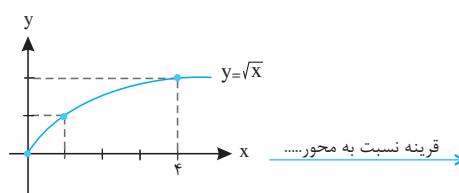
(پ) $y = \sqrt{x+3}$

(ت) $y = \sqrt{x-1} + 3$

پاسخ (الف)

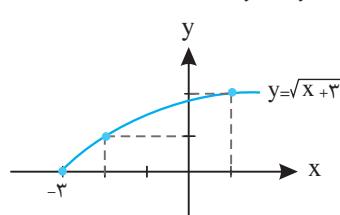
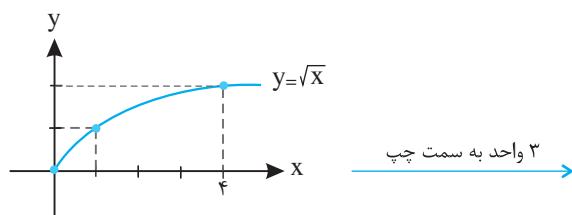


پس $R_y = [0, +\infty)$ و $D_y = [1, +\infty)$ می‌باشد.



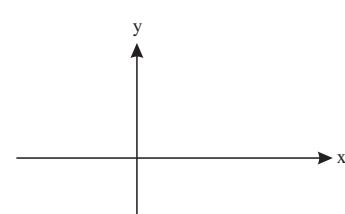
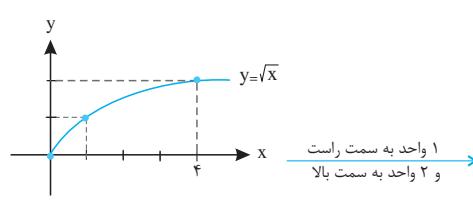
ب)

بنابراین $R_y = \dots\dots\dots$ و $D_y = \dots\dots\dots$ خواهد بود.



پس $R_y = \dots\dots\dots$ و $D_y = \dots\dots\dots$ خواهد بود.

ت)



پس $R_y = \dots\dots\dots$ و $D_y = \dots\dots\dots$ می باشد.

۵ رسم تابع f با ضابطه $y = \sqrt{ax + b}$

با توجه به این که اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، ابتدا دامنه تابع $y = \sqrt{ax + b}$ را بدست می آوریم بدین ترتیب که زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم سپس به کمک نقطه یابی در دامنه بدست آمده تابع را رسم می کنیم.

مثال ۱۶: هر یک از توابع زیر را رسم کنید، سپس برد آنها را بدست آورید.

(الف) $y = \sqrt{5 - x}$

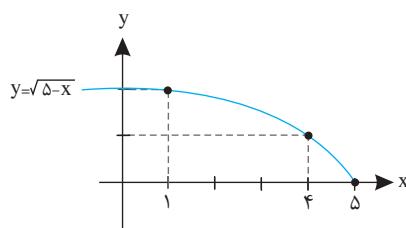
(ب) $y = \sqrt{2x - 3} - 1$

پاسخ

(الف) ابتدا دامنه تابع را بدست می آوریم:

$$5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow D = (-\infty, 5]$$

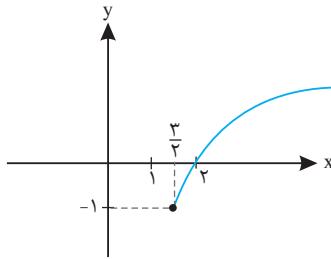
x	1	4	5
y	2	1	0



پس $R = [0, +\infty)$ می باشد.

$$2x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \rightarrow D = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

x	$\frac{3}{2}$	2
y	-1	0



پس $R = [-1, +\infty)$ می باشد.

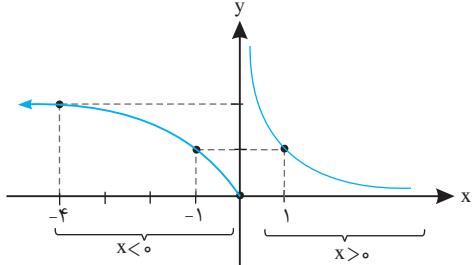
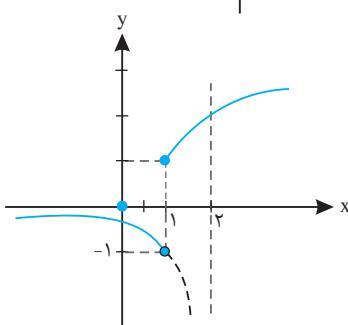
ب)



(الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

(ب) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{4x - 3} & x \geq 1 \\ \frac{1}{x-2} & x < 1 \end{cases}$

پاسخ

(الف) با توجه به نمودار رسم شده $R_y = \dots$ (ب) با توجه به نمودار رسم شده $R_y = \dots$

نکته

برای تعیین دامنه هر تابع به فرم $y = \sqrt[n]{f(x)}$ (زوج) کافی است نامعادله $f(x) \geq 0$ را حل کنیم.

(الف) $y = \sqrt{-3x + 5}$

(ب) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

(پ) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

(ت) $y = \sqrt{5 - |x|}$

مثال ۱۸: دامنه تابع زیر را بیابید.

پاسخ

(الف) $-3x + 5 \geq 0 \rightarrow -3x \geq -5 \rightarrow x \leq \frac{5}{3} \rightarrow D_y = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

(ب) $\frac{x-2}{x-1} \geq 0 \rightarrow$ جدول تعیین علامت $x \geq \dots$ یا $x \leq \dots$

پس $D = \cup \dots$ می باشد.

(پ) $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \rightarrow$ جدول تعیین علامت $x \geq \dots$ یا $x \leq \dots$

پس $D = \dots$

(ت) $5 - |x| \geq 0 \rightarrow |x| \leq 5 \rightarrow \dots \leq x \leq \dots$

بنابراین $D = \dots$ **مثال ۱۹:** اگر دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 - x + (a-2)}$ برابر \mathbb{R} شود، حدود a را بیابید.

پاسخ

 $x^2 - x + (a-2) \geq 0$ هنگامی دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 - x + (a-2)}$ برابر \mathbb{R} است که عبارت $x^2 - x + (a-2)$ همواره نامنفی باشد. یعنی $0 \geq x^2 - x + (a-2)$ مثبت باشد.پس باید Δ این عبارت همواره کوچکتر یا مساوی صفر و ضریب x^2 مثبت باشد. پس داریم:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a-2) \leq 0 \rightarrow \dots$$

مثال ۲۰: دامنه تابع $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 2x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ

ضابطه تابع دارای دو رادیکال است که عبارت‌های زیر رادیکال هر یک، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \rightarrow -2x \geq -1 \rightarrow x \leq \dots \\ 3 - \sqrt{1 - 2x} \geq 0 \rightarrow 3 \geq \sqrt{1 - 2x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 \geq 1 - 2x \rightarrow x \geq \dots \end{cases}$$

حال اگر از دو عبارت بالا اشتراک بگیریم دامنه تابع به صورت D بدست می‌آید که در این دامنه عدد صحیح وجود دارد پس گزینه صحیح است.

مثال ۲۱: دامنه تابع $y = \sqrt{2 + |x| - x^2}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

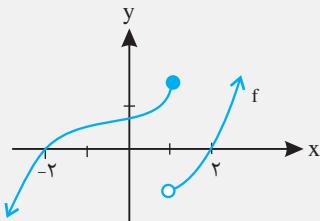
پاسخ

برای تعیین دامنه زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2 + |x| - x^2 \geq 0 \xrightarrow{|x|=a} 2 + a - a^2 \geq 0 \rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \rightarrow (a - 2)(a + 1) \leq 0$$

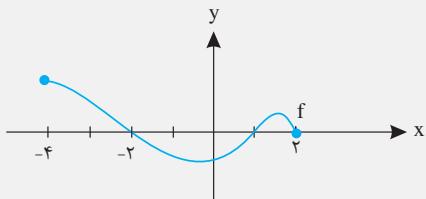
$$\rightarrow (|x| - 2)(|x| + 1) \leq 0 \rightarrow |x| - 2 \leq 0 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

پس $D = [-2, 2]$ بنابراین در دامنه تابع ۳ عدد صحیح نامنفی وجود دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

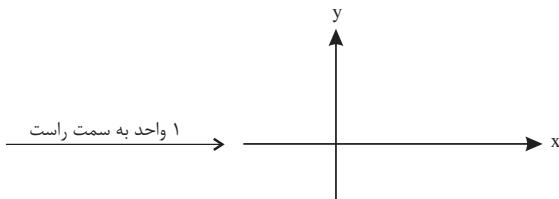
مثال ۲۲: اگر نمودار f به صورت زیر رسم شود، دامنه تابع $y = 2\sqrt{-f(x)} + 1$ را بیابید.


با توجه به ضابطه $y = 2\sqrt{-f(x)} + 1$ باید $0 \leq f(x)$ باشد، بنابراین دامنه تابع آن قسمتی از نمودار f است که زیر محور x ها و روی آن باشد، بنابراین:

$$D_y = (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$$

مثال ۲۳: اگر نمودار f به صورت زیر رسم شود، دامنه تابع g با ضابطه $y = \sqrt{xf(x-1)}$ را بیابید.


با توجه به نمودار f ابتدا نمودار $(-1, x)f$ را رسم می‌کنیم:



برای پیدا کردن دامنه تابع دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول:

اگر $x \geq 0$ باشد باید $0 \geq (-1, x)f$ باشد، پس قسمتی از نمودار $(-1, x)f$ که در آن $x \geq 0$ و نمودار بالای محور x ها و روی آن است را مشخص می‌کنیم، پس $D_1 = \dots$

حالت دوم:



اگر $x \leq 0$ باشد باید $f(x) \leq 0$ باشد پس قسمتی از نمودار $f(x)$ که در آن $x \leq 0$ و نمودار و روی است را مشخص می‌کنیم، پس $D_2 = \dots$ اجتماع D_1 و D_2 دامنه تابع g می‌باشد، بنابراین:

$$D_g = D_1 \cup D_2 = \dots$$

مثال ۲۴: دامنه تابع رادیکالی زیر را بیابید.

(الف) $y = \sqrt{|2x - 1| - 1}$

(ب) $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1} - 1}$

پاسخ
(الف)

$$|2x - 1| - 1 \geq 0 \rightarrow |2x - 1| \geq 1 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq \dots \\ 2x - 1 \leq \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dots \\ x \leq \dots \end{cases} \rightarrow D = (\dots, \dots, \dots)$$

$$\sqrt{2x + 1} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2x + 1} = 1 \rightarrow x = \dots \quad (1)$$

$$2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dots \quad (2)$$

ب) برای محاسبه دامنه تابع ابتدا ریشه مخرج را بدست می‌آوریم:

از طرفی زیر رادیکال نیز باید نامنفی باشد، پس داریم:

بنابراین دامنه تابع برابر است با $D = \dots$.

معادلات و توابع

۳-۲

برخی از معادلات دارای دو متغیر x و y هستند و یک رابطه بین x و y را نشان می‌دهند مانند $x^2 + y^2 = 7$ و $y = x - 3$. سؤال این است که آیا همه معادلات ضابطه یک تابع را مشخص می‌کنند؟ بگذارید دو مثال بالا را بررسی کنیم تا پی به جواب سؤال بالا ببریم.

معادله $x^2 + y^2 = 1$ ضابطه یک تابع را مشخص نمی‌کند. فرض کنید f مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها است که بین مؤلفه‌های آن رابطه $x^2 + y^2 = 1$ برقرار است. اگر در این معادله به جای X به طور مثال عدد صفر را قرار دهیم، داریم:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

بنابراین می‌توان گفت در f دو نقطه $(0, 1)$ و $(0, -1)$ وجود دارد، پس رابطه $x^2 + y^2 = 1$ ضابطه یک تابع نیست.

اما در معادله $y = x - 3$ ، فرض کنید g مجموعه زوج مرتب‌هایی باشد که بین مؤلفه‌های آن رابطه $y = x - 3$ برقرار است بنابراین در g می‌توان y را برحسب x به صورت رو به رو نوشت:

و این یعنی برای هر x فقط یک y وجود دارد یعنی در مجموعه زوج مرتب‌های g تمام مؤلفه‌های اول همگی متفاوت هستند.

تذکر

گاهی اوقات برای آن که بررسی کنیم یک معادله داده شده ضابطه یک تابع است باشد. این معادله دو عبارت نامنفی برابر با صفر است پس هر یک برابر با صفر می‌باشد.

$$x^4 - 2x^2 + 1 + y^2 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$$

مثال ۲۵: آیا معادله $x^4 - 2x^2 + 1 + y^2 = 0$ ضابطه یک تابع است؟

پاسخ

مجموع دو عبارت نامنفی برابر با صفر است پس هر یک برابر با صفر می‌باشد.

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

حال اگر f مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی باشد که ضابطه آن به صورت داده شده باشد f را می‌توان به صورت $\{(1, 0), (-1, 0)\}$ نوشت پس رابطه $x^4 - 2x^2 + 1 + y^2 = 0$ تابع است.

گاهی اوقات برای اثبات این که معادله‌ای، ضابطه یک تابع است کافی است از برهان خلف استفاده کنیم یعنی فرض کنیم معادله داده شده ضابطه تابع نباشد پس در آن دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) که در معادله داده شده صدق می‌کند سپس به تناظر $c = b$ بررسیم.

مثال ۲۶: نشان دهید معادله $x^3 + y^3 = y$ ضابطه یک تابع است.

پاسخ فرض کنیم (a, b) و (c, d) دو زوج مرتب باشند که در معادله داده شده صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases} a = b^3 + b \\ a = c^3 + c \end{cases} \rightarrow b^3 + b = c^3 + c \rightarrow (b^3 - c^3) + (b - c) = 0$$

تجزیه $\xrightarrow{(b - c)(b^2 + bc + c^2) + (b - c) = 0}$ فاکتورگیری $\xrightarrow{(b - c)(b^2 + bc + c^2 + 1) = 0}$ (۱)

عبارت (۱) مخالف صفر است پس باید $b - c = 0$ باشد یعنی $c = b$. بنابراین به تناظر رسیدیم پس معادله داده شده تابع است.

۴-۲ توابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزار تومان و برای هر ساعت ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداقل زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد.

الف) ضابطه تابع را بباید که نرخ توقف را به ازای هر ساعت ممکن نشان دهد.

ب) نمودار این تابع رارسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dots & 0 < x \leq 3 \\ 2500 & 3 \leq x < 4 \\ \dots & 4 \leq x < 5 \\ \dots & 5 \leq x < 6 \\ \dots & 6 \leq x < 7 \\ \dots & 7 \leq x < 8 \end{cases}$$

تعريف تابع پله‌ای: به توابعی مانند تابع فوق که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به طوری که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌گویند.

یکی از توابع پله‌ای معروف تابع جزء صحیح اعداد را تعریف می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌نمائیم سپس به معرفی این تابع می‌پردازیم.

تعريف جزء صحیح: برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را نماد $[x]$ نمایش داده و آن را جزء صحیح x یا براکت x می‌خوانند.

مثال ۲۷: جزء صحیح اعداد زیر را حساب کنید.

$$(a) ۷ \quad (b) -\sqrt{2} \quad (c) \frac{2}{3} \quad (d) -5 \quad (e) 0 \quad (f) -4$$

پاسخ

الف) بزرگترین عدد صحیحی که از $3/2$ بزرگتر نباشد عدد -3 است. $(-2 < 3/2 < -3)$ پس: $[-2/3] = -3$

ب) می‌دانیم $4/1 \approx 4$ است پس $6/5 \approx \sqrt{2}$ بزرگترین عدد صحیحی که از $\sqrt{2}$ بزرگتر نباشد عدد -6 است یعنی $[-4\sqrt{2}] = -4\sqrt{2}$

پ) بزرگترین عدد صحیحی که از -5 بزرگتر نباشد (یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از -5 کوچکتر یا مساوی باشد) عدد -5 است. پس $[-5] = -5$

ت) با توجه به قسمت «پ» $= 0$ است.

ث) می‌دانیم $7/1 \approx 7$ است پس $27/3 \approx 9$ بزرگترین عدد صحیحی که از 9 کوچکتر یا مساوی باشد عدد 8 است. پس $[27/3] = 8$

ج) با توجه به قسمت «پ» و «ت» $= 7$ است.

نتیجه

۱: مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره کوچکتر مساوی آن است: $\forall x \in \mathbb{R}: [x] \leq x$

۲: اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $x = [x]$ است.



مثال ۲۸: معادله $x = [3x] - [4x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴) بی‌شمار

پاسخ سمت راست معادله داده شده، مجموع و تفاضل چند عدد صحیح است که حاصل آن همیشه برابر با یک عدد صحیح می‌باشد بنابراین سمت چپ تساوی یعنی x نیز باید یک عدد صحیح باشد. پس داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 3x \in \mathbb{Z} \rightarrow [3x] = 3x$$

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 4x \in \mathbb{Z} \rightarrow [4x] = 4x$$

$$x = 3x - 4x + 4 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

بنابراین داریم:

پس گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲۹: اگر $x = -\frac{11}{3}$ باشد، حاصل $[x] - [2x]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴) ۴

$$\left[-\frac{11}{3} \right] = \dots$$

بیشتر نباشد عدد -۴ است. یعنی:

$$\left[-\frac{22}{3} \right] = \dots$$

از طرفی $\frac{22}{3} = 2x$ و بزرگترین عدد صحیحی که از $\frac{22}{3}$ بیشتر نباشد عدد -۸ است، پس:

$$\left[-\frac{11}{3} \right] - \left[-\frac{22}{3} \right] = \dots$$

پس داریم:

پس گزینه صحیح است.

نتیجه ۳: هر گاه $n \leq x < n+1$ و آن گاه $n \in \mathbb{Z}$ باشد، $[x] = n$ و بالعکس.

مثال ۳۰: جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \rightarrow [x] = \dots$

(ب) $-1 < x < 2/5 \rightarrow [x] = \dots$

(پ) $2/3 < x < 3/4 \rightarrow [x] = \dots$

پاسخ

(الف) $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \rightarrow 1 < x < 2 \rightarrow [x] = \dots$

(ب)

$-1 < x < 2/5 \rightarrow$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \rightarrow [x] = \dots \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = \dots \\ 1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = \dots \\ 2 \leq x < 2/5 \rightarrow [x] = \dots \end{cases}$$

$2/3 \leq x < 3/4 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2/3 \leq x < 3 \rightarrow [x] = \dots \\ 3 \leq x < 3/4 \rightarrow [x] = \dots \end{cases}$$

(پ)

مثال ۳۱: مجموعه جواب معادله $x + \frac{1}{2} = 2$ را بیابید.

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = 2 \rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{2} < 3 \rightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq x < 3 - \frac{1}{2} \rightarrow \dots$$

پاسخ

مثال ۳۲: جواب معادله $\left[\frac{1-x}{x} \right] = 2$ کدام است؟

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) ۴$$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) ۳$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) ۲$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) ۱$$

$$\left[\frac{1-x}{x} \right] = 2 \rightarrow 2 \leq \frac{1-x}{x} < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} - \frac{x}{x} < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} - 1 < 3 \xrightarrow{+1} \dots \leq \frac{1}{x} < \dots \xrightarrow{\text{معکوس گردد}} \dots$$

پاسخ

پس گزینه صحیح است.

$$\left[x^2 + x \right] = -1 \quad \text{باشد، آن‌گاه} \quad \text{کدام است؟}$$

مثال

۲(۴)

۱(۳)

۰(۲)

-۱(۱)

$$\left[x^2 + x \right] = -1 \rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0.$$

پاسخ

$$\begin{cases} x^2 + x \geq -1 \rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x < 0 \end{cases} \quad \text{جهد تعیین علامت} \quad \text{(عبارت } x^2 + x \text{ همواره نامنفی است چون } < \Delta \text{ و ضریب } x^2 \text{ مثبت است)}$$

 بنابراین $0 < x < -1$ می‌باشد.

$$-1 < x < 0 \quad \text{به توان ۲ (توان زوج) } \rightarrow x^2 < 1$$

 پس ... $\left[x^2 \right]$ یعنی گزینه صحیح است.

نتیجه

۳: برای هر عدد حقیقی x داریم: $x \leq x - [x] < x + 1$ و یا به عبارتی $[x] \leq x < [x] + 1$.

$$\text{مثال ۳۴: معادله } x + |x - 2| = [x] \text{ چند ریشه دارد؟}$$

۰(۱)

۱(۲)

۲(۳)

۴) بی‌شمار

$$x + |x - 2| = [x] \rightarrow x - [x] = -|x - 2|$$

پاسخ

طبق نتیجه ۴: می‌دانیم $x - [x] \leq 0$ از طرفی $-|x - 2| \leq 0$ می‌باشد بنابراین تساوی در صورتی صحیح است که $= 0 = x - [x]$ پس $x = 2$, بنابراین گزینه صحیح است.

نکته

اگر $m \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه:

ا) $[x + m] = [x] + m$ اگر $n \in \mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{مثال ۳۵: معادله } [x] + [x + 3] - [4 + x] = 2 \text{ چند جواب دارد؟}$$

۲(۱)

۳(۲)

۱(۳)

۴) بی‌شمار

$$[x] + [x + 3] - [4 + x] = 2 \rightarrow [x] + [x] + 3 - 4 - [x] = 2 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

پاسخ

پس گزینه (۴) صحیح است.

نتیجه

برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\text{مثال ۳۶: مجموعه جواب معادله } [2[x]] + x = -9 \text{ کدام است؟}$$

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴) بی‌شمار

$$[2[x]] + x = -9 \rightarrow \dots + [x] = -9 \rightarrow \dots [x] = -9 \rightarrow [x] = \dots \rightarrow \dots$$

پاسخ

پس گزینه صحیح است.

نکته

ب) اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x] + [-x] = -1$ و بالعکس
الف) اگر $x \in \mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x] + [-x] = 0$

اثبات

$$[x] = n \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} n < x < n + 1 \xrightarrow{x(-)} -n - 1 < -x < -n \rightarrow [-x] = -n - 1$$

$$[x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$$



مثال ۳۷: معادله $5[x] + 2[-x] = 3$ چند جواب دارد؟

(۴) بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: برای حل معادله دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$5[x] + 2[-x] = 3 \rightarrow 5x - 2x = 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

حالت اول $x \in \mathbb{Z}$

$$5[x] + 2[-x] = 3 \rightarrow 3[x] + 2([-x]) = 3 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 3[x] + (-2) = 3 \rightarrow [x] = \frac{5}{3}$$

حالت دوم $x \notin \mathbb{Z}$

اما $[x]$ نمی‌تواند برابر با یک عدد غیرصحیح باشد پس معادله فقط یک جواب صحیح دارد.
پس گزینه (۲) صحیح است.

نکته

اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه:

- Ⓐ $[x] > n \rightarrow x \geq n + 1$
- Ⓑ $[x] \geq n \rightarrow x \geq n$
- Ⓒ $[x] < n \rightarrow x < n$
- Ⓓ $[x] \leq n \rightarrow x < n + 1$

مثال ۳۸: مجموعه جواب نامعادله $[x] > 3$ کدام است؟

(-∞, 3) (۴)

[2, +∞) (۳)

[3, +∞) (۲)

[4, +∞) (۱)

$$[x] > 3 \rightarrow x \geq 4$$

پاسخ

پس گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۳۹: مجموعه جواب نامعادله $[x^2] < 2$ کدام است؟

(-√2, √2) (۴)

(-∞, √2) (۳)

[-√2, 2) (۲)

[-1, 1] (۱)

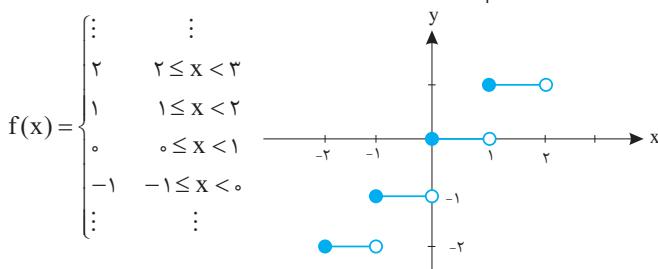
$$[x^2] < 2 \rightarrow x^2 < 2 \rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

پاسخ

پس گزینه (۴) صحیح است.

تعریف تابع جز صحیح: تابعی که به ازای هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و ضابطه آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند.

این تابع را با توجه به تعریف جزء صحیح می‌توان به صورت تابع پله‌ای زیر نوشت و آن را رسم کرد:



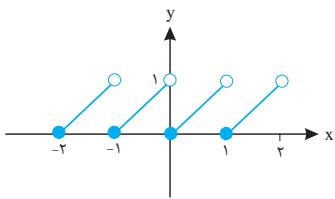
نتیجه

دامنه تابع $f(x) = [x]$ برابر با \mathbb{R} و برد آن \mathbb{Z} است.

دوتابع معروف:

تابع $y = x - [x]$ (۱)

نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



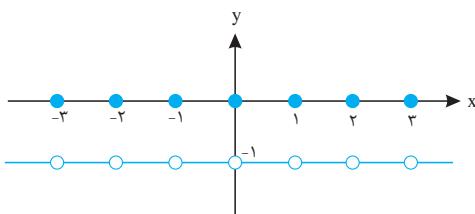
$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ x - 0 & 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

نتیجه دامنه تابع $f(x) = x - [x]$ برابر \mathbb{R} و برد آن $(0, 1]$ می‌باشد.

تابع $y = [x] + [-x]$

با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$y = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



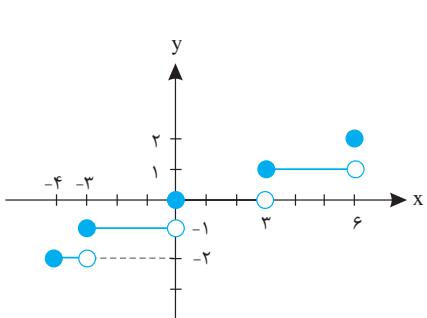
بنابراین نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:

رسم توابع : $y = [ax + b]$

مثال ۴۰: نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{3} \right]$ را در فاصله $[-4, 6]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا این تابع را با توجه به فاصله $[-4, 6]$ به صورت زیر به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$-4 \leq x < 6 \xrightarrow{\div 3} -\frac{4}{3} \leq \frac{x}{3} \leq 2$$

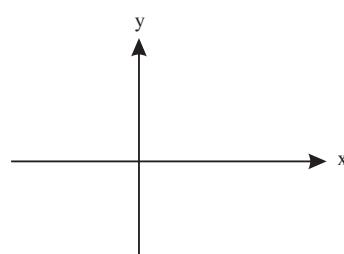


$$\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq \frac{x}{3} < -1 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = -2 & ; -4 \leq x < -3 \\ -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = -1 & ; -3 \leq x < 0 \\ 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 0 & ; 0 \leq x < 3 \\ 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 1 & ; 3 \leq x < 6 \\ \frac{x}{3} = 2 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 2 & ; x = 6 \end{cases}$$

مثال ۴۱: نمودار تابع $y = [3x]$ را در فاصله $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ رسم کنید.

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} -1 \leq 3x \leq 2$$

$$\begin{cases} -1 \leq 3x < 0 \rightarrow [3x] = \dots & ; \dots \leq x < \dots \\ 0 \leq 3x < 1 \rightarrow [3x] = \dots & ; \dots \leq x < \dots \\ 1 \leq 3x < 2 \rightarrow [3x] = \dots & ; \dots \leq x < \dots \\ 3x = 2 \rightarrow [3x] = \dots & ; x = \dots \end{cases}$$



پاسخ



مثال

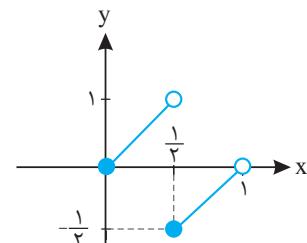
۴۲: نمودار تابع $y = x - [2x]$ را در فاصله $[0, 1]$ رارسم کنید.

پاسخ

$$0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq 2x < 2$$

$$\begin{cases} 0 \leq 2x < 1 \rightarrow [2x] = 0 &; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 \leq 2x < 2 \rightarrow [2x] = 1 &; \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$y = x - [2x] = \begin{cases} x & \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - 1 & \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



نکته

تابع $y = ax + b$ یک تابع پله‌ای است که طول هر پله آن برابر باشد و از نقطه $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ شروع و ارتفاع هر پله آن یک است.

تذکر

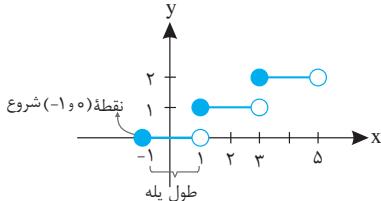
در تابع $y = ax + b$ اگر $a > 0$ باشد پله‌ها افزایشی و اگر $a < 0$ باشد پله‌ها کاهشی است.

مثال ۴۳: هر یک از نمودارهای زیر رارسم کنید.

(الف) $y = \left[\frac{x+1}{2} \right]$

(ب) $y = \left[\frac{-x+1}{3} \right]$

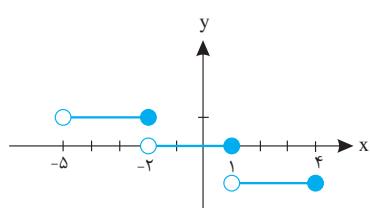
پاسخ



(الف) در تابع $y = \left[\frac{x+1}{2} \right] = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right]$ از $a = \frac{1}{2}$ پس یک تابع پله‌ای افزایشی است که از

نقطه $(-1, 0)$ شروع می‌شود، طول هر پله $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:

(ب) در تابع $y = \left[\frac{-x+1}{3} \right] = \left[-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right]$ از $a = -\frac{1}{3} < 0$ پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطه $(1, 0)$ شروع می‌شود،



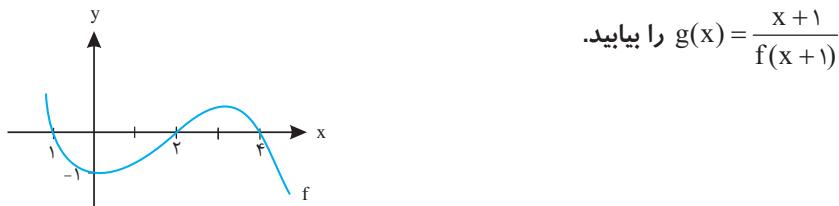
طول هر پله $\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:

تمرین

-۱ نمودار تابع $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}}$ رارسم کنید.

-۲ اگر نمودار تابع چند جمله‌ای f به صورت زیر باشد، دامنه تابع g با ضابطه

$$g(x) = \frac{x+1}{f(x+1)}$$



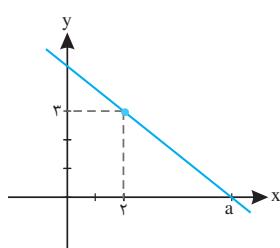
-۳ مقدار a را چنان بیابید که دامنه و برد تابع f با ضابطه $y = \frac{ax-3}{x+4}$ یکسان باشد.

-۴ برد هر یک از توابع زیر را بیابید.

(الف) $y = \frac{5x-1}{3x-2}$

(ب) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$

-۵ خطی مطابق شکل زیر از نقطه $(2,3)$ می‌گذرد و محور طولها را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند.



(الف) ضابطه تابعی را بیابید که مساحت مثلث در شکل را برحسب a بیان کند.

(ب) دامنه تابع را بیابید.

-۶ حدود a را چنان بیابید که دامنه تابع زیر برابر \mathbb{R} شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2a+1} & x \leq 2 \\ \frac{x+3}{x-a} & x \geq 2 \end{cases}$$

-۷ تابع گویای f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و دامنه $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ را درنظر بگیرید:

(الف) نمودار تابع رارسم کنید. (ب) مجموعه برد تابع را بیابید.

-۸ دامنه تابع $y = \frac{x^2-1}{x^2+ax+b}$ و برد آن به صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است

مقدار n را بیابید.

-۹ نمودارهای زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

(الف) $y = \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$

(ب) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$



محل انجام محاسبات

-۱۰ دامنه توابع زیر را بیابید.

$$(الف) y = \frac{x+1}{2x - |x-1|}$$

$$(ب) y = \frac{x+3}{|x-2| - |3x-1|}$$

-۱۱ اگر دامنه تابع $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x+a}$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a را بیابید.

-۱۲ دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$$

$$2) y = \sqrt{4-|x-1|}$$

$$3) y = \sqrt{\frac{x}{5} + 4 - |x|}$$

$$4) y = \sqrt{3 - \sqrt{1-4x}}$$

$$5) y = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}$$

$$6) y = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}$$

-۱۳ هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$1) y = \sqrt{-x+3} + 2$$

$$2) y = -\sqrt{2x-4} + 1$$

$$3) y = \sqrt{3x-1}$$

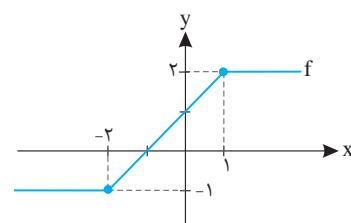
-۱۴ هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$1) y = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$3) y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$$

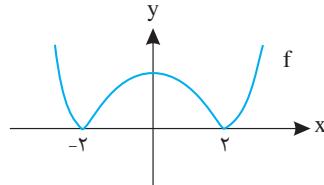
-۱۵ نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است، دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید.



$$y = \sqrt{f(x)-1} \quad (\text{الف})$$

$$y = \sqrt{\frac{f(x+1)}{x}} \quad (\text{ب})$$

-۱۶ با توجه به نمودار f تمام دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ را بیابید.



-۱۷ نشان دهید هر یک از معادلات زیر یک تابع است.

$$(الف) x = y + \sqrt{y}$$

$$(ب) |x| + |y| = x$$

$$(پ) x = 2y - |y-1|$$

$$(ت) y^3 + 3y^2 + 3y + x = 5$$

-۱۸ نشان دهید هر یک از معادلات زیر ضابطه یک تابع نیست.

$$\text{(الف)} |x| + |y| = 2$$

$$\text{(ب)} y^2 - 2y = x$$

$$\text{(پ)} x^2 + \sqrt{y^3 - y} = 0$$

$$\text{(ت)} y = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

-۱۹ با پیدا کردن تمام زوج مرتب‌هایی که در معادلات زیر صدق می‌کند مشخص کنید کدام معادله ضابطه یک تابع را مشخص می‌کند.

$$\text{(الف)} |x| + (y - 1)^2 = 0$$

$$\text{(ب)} |x| + 2|y| = 5 ; x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(پ)} x^4 - 2x^2 + y^2 - 10y + 26 = 0$$

$$\text{(ت)} 5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4 = 0$$

-۲۰ کدام یک از معادلات زیر یک تابع است.

$$\text{(الف)} y = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 1 \\ x^2 \pm 3x & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{(ب)} y = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x^2 + 1 & x > -1 \end{cases}$$

$$\text{(پ)} y = \begin{cases} 2x^2 + 3 & x \leq 1 \\ 4x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a + x & |x| \leq 1 \\ x^2 + bx & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{اگر } f(x) \text{ تابع باشد مقادیر } a, b \text{ را بیابید.} \quad -۲۱$$

$$\text{اگر } f(-\frac{1}{2}) \text{ را بدست آورید.} \quad -۲۲$$

$$\left[\left| \frac{b}{2} - 3 \right| \right] + \left[[a+1] \right] \quad \text{اگر } -1 < a \leq -2 \text{ و } -4 \leq b \leq -2 \text{ باشد، حاصل چقدر است؟} \quad -۲۳$$

$$\text{وقتی } 2 < x < 0 \text{ باشد حاصل } \left[x^2 - 2x \right] \quad -۲۴$$

$$\left[\frac{x}{5} \right] \quad \text{اگر } \left| \frac{x}{5} \right| < \left| 10 - 2x \right| \text{ باشد آن گاه چه عددی می‌تواند باشد؟} \quad -۲۵$$



محل انجام محاسبات

- ۲۶- حاصل $\left[\sqrt{n^2 + 12n + 35} \right]$ به ازای هر عدد طبیعی n برابر چیست؟

- ۲۷- اگر $(\sqrt{2} + 1)^A + (\sqrt{2} - 1)^A = 1156$ باشد، حاصل $\left[(1 + \sqrt{2})^A \right]$ را بیابید.

- ۲۸- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 2x + 4[x] = 19$$

$$2) [3x + 7] = x - 2$$

$$3) [2x^2] + x - 3 = 0$$

$$4) 2[x]^3 - 9[x] + 1 = 0$$

$$5) \left[x + \frac{3}{4} \right] + \left[x - \frac{1}{4} \right] = 5$$

$$6) \frac{5x^3 - 4x}{[x] + [-x] + 1} = 0$$

$$7) 3x^3 - 7x - 7 = \frac{11}{[x] + [-x]}$$

$$8) x + 2[x] = -3 / 7$$

$$9) \frac{[x] - 1}{x - [x]} = 0$$

$$10) x - [x] = [-x] + x^3$$

- ۲۹- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) [2x - 1] < 5$$

$$2) [-x + 2] > 1$$

$$3) [x]^3 - 4[x] < 0$$

$$4) |[2x - 1]| \leq 3$$

$$5) 2/3 < x + [x] < 2/9$$

$$6) [-2x] \geq \frac{7}{3}$$

- ۳۰- دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) y = \sqrt{[x] - 1}$$

$$2) y = \sqrt{\frac{[x] - 5}{2 - [x]}}$$

$$3) y = \sqrt{\frac{2 - [x]}{x + |x|}}$$

$$4) y = \frac{x + 3}{[x] + [-x]}$$

- ۳۱- برد توابع زیر را بیابید.

$$1) y = \left[2x + \frac{1}{6} \right] - \left[2x - \frac{5}{6} \right]$$

$$2) y = \left[\frac{1}{x^2 + x - 2} \right]$$

$$3) y = \begin{cases} x - [x] & x \notin \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$4) y = x - \frac{1}{5}[\Delta x]$$

-۳۲ هر یک از نمودارهای زیر رارسم کنید.

$$1) y = x \left[\frac{x}{2} \right]; [-1, 4]$$

$$2) y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1; [-2, 6)$$

$$3) y = |x| + [x]; [-1, 1)$$

$$4) y = \left[x^2 \right]; [-1, 2)$$

$$5) y = \frac{[x]}{|x|}; [-1, 0)$$

$$6) y = \left[\sqrt{x} \right]; [0, 9)$$

$$7) y = |x| \cdot [x]; [-1, 2)$$

$$8) y = [x][2x]; [0, 2)$$

-۳۳ به روش هندسی تعداد ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$1) x^3 - x + [x] = 0$$

$$2) [x] + [-x] - x + 1 = 0$$

$$3) f(x) + [f(x)] = \frac{6x+1}{x+2} \text{ اگر } f(x) \text{ آنگاه حاصل } (1) \text{ چقدر است؟}$$

-۳۵ یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های پستی از یک تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و برای ارسال بسته‌ها از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می‌کنند. اگر $f(x)$ ضابطه تابع هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرم باشد. ضابطه آن را به صورت یک تابع جزء صحیح بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{x^2 + 1} & x > 1 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^3 + ax}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases} \text{ فرض کنیم} \quad 36$$



تست‌های درس دوم (أنواع تابع)



۱-۲ توابع گویا

-۲۱۳ بُرد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ بصورت مجموعه $\{-1, 1, 2\}$ است، دامنه‌ی آن کدام است؟

$$\left\{-3, -1, 0\right\} \quad (4) \quad \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} \quad (3) \quad \left\{1, 3, 4\right\} \quad (2) \quad \left\{-4, 0, -1\right\} \quad (1)$$

-۲۱۴ اگر دامنه‌ی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+a-5}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

$$\frac{25}{4} \quad (4) \quad \frac{23}{4} \quad (3) \quad -6 \quad (2) \quad -5 \quad (1)$$

-۲۱۵ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{x} + \frac{x+4}{\frac{x}{x+1} + 1}$ برابر است با:

$$D_f = R - \{0, -1, -3, -4\} \quad (1) \quad D_f = R - \{0, -1, -4\} \quad (3)$$

-۲۱۶ بُرد تابع $f(x) = \frac{3-x}{4x+1}$ کدام است؟

$$R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad (4) \quad R - \{1\} \quad (3) \quad R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \quad (2) \quad R \quad (1)$$

-۲۱۷ اگر $x < -1$ باشد، بُرد تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ کدام است؟

$$(-\infty, 1) \quad (4) \quad (-\infty, 1] \quad (3) \quad [1, +\infty) \quad (2) \quad (1, +\infty) \quad (1)$$

-۲۱۸ بُرد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3+4}{x^3+2}$ کدام بازه است؟

$$[1, 4] \quad (4) \quad (1, 2) \quad (3) \quad (1, 2] \quad (2) \quad [1, 2) \quad (1)$$

-۲۱۹ بُرد تابع $y = \frac{1+2x-x^3}{1+x}$ کدام فاصله است؟

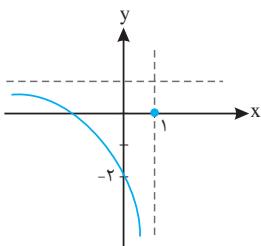
$$R \quad (4) \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (3) \quad [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad (2) \quad [-1, 3] \quad (1)$$

-۲۲۰ بُرد تابع $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x-|x|}$ کدام است؟

$$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad (4) \quad \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \quad (3) \quad (-\infty, -1) \quad (2) \quad (-\infty, 0) \quad (1)$$

-۲۲۱ بُرد تابع $y = \frac{1}{x^4+x^2+1}$ به صورت بازه‌ی $[a, \beta]$ است. $\alpha + \beta$ کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$



گزینه ۲ - تبریز (۹۵)

۲ (۴)

[-۱, ۱] (۴)

۴ (۴)

- ۲۲۲ - شکل مقابل قسمتی از نمودار $xy - ax + cy - b = ۰$ است، bc کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)

- ۲۲۳ - نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

[-۱, ۱) (۳)

۳ (۳)

[-۱, ۰] (۲)

[-۱, ۰) (۱)

- ۲۲۴ - برد تابع $y = (x - |x|) \frac{1}{x^2 + 1}$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

- ۲۲۵ - تعداد جوابهای معادله $x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۲-۲ توابع رادیکالی تابع ریشه دوم

- ۲۲۶ - دامنه و برد تابع $y = \sqrt{-2x + 7}$ از روی نمودار آن برابر است با:

$$\begin{cases} D_f = \left[\frac{7}{2}, +\infty \right) \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} D_f = \left(-\infty, \frac{7}{2} \right] \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} D_f = \left[\frac{7}{2}, +\infty \right) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} D_f = \left(-\infty, \frac{7}{2} \right] \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad (۱)$$

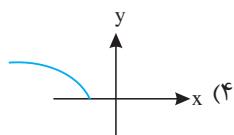
۳ (۴)

۲۷۷ (۳)

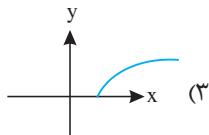
۸ (۲)

۷ (۱)

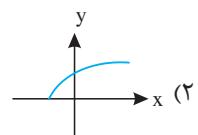
- ۲۲۷ - با انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ به نمودار $f(\lambda)$ چیست؟ رسیده‌ایم، مقدار $f(\lambda)$ چیست؟



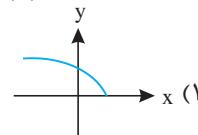
۱ (۴)



۲ (۳)

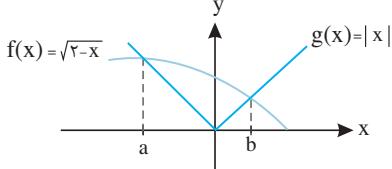


۴ (۲)



۰ (۱)

- ۲۲۸ - نمودار $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ به کدام صورت است؟



R (۴)

۵ (۲)

۷ (۴)

۲ (۱)

۳ (۳)

- ۲۲۹ - معادله $x^3 - 1 = \sqrt{x+1}$ چند جواب دارد؟

-۲ < x < ۲ (۳)

-۱ < x < ۱ (۲)

x ≥ ۲ یا x ≤ -۲ (۱)

- ۲۳۰ - با توجه به شکل زیر فاصله بین b, a چقدر است؟

۴ (۲)

۲ (۱)

۳ (۳)

- ۲۳۱ - دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$ کدام گزینه است؟

x ≥ ۲ (۱)

۰ (۱)

 $[-1, 1) \quad (4)$ $[0, 1) \quad (3)$ $\left[-1, \frac{2}{3}\right] \quad (2)$ $\left[0, \frac{2}{3}\right) \quad (1)$ $-5 \quad (4)$ $5 \quad (3)$ $-1(2) \quad (2)$ $1(1) \quad (1)$

-۲۳۴ - به ازای کدام مجموعه مقادیر a دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2 + a}$ می‌باشد؟

 $\emptyset \quad (4)$ $\{0\} \quad (3)$ $[0, +\infty) \quad (2)$ $(0, +\infty) \quad (1)$ $-9 \quad (4)$ $9 \quad (3)$ $-3(2) \quad (2)$ $3(1) \quad (1)$

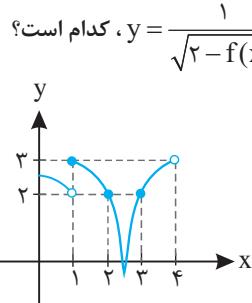
-۲۳۵ - برد تابع $y = \sqrt{ax - 3|x|}$ است. $R_f = \{b\}$ به صورت $a^2 - b$ کدام است؟ (دامنه f بیش از یک عضو دارد)

 $-9 \quad (4)$ $-7(3) \quad (3)$ $-5(2) \quad (2)$ $-3(1) \quad (1)$

-۲۳۶ - اگر تابع $g(x) = |x-a|\sqrt{x+2}$ و $f(x) = \sqrt{(x-a)^2(x-b)}$ باهم برابر باشند مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

 $-9 \quad (4)$ $-7(3) \quad (3)$ $-5(2) \quad (2)$ $-3(1) \quad (1)$

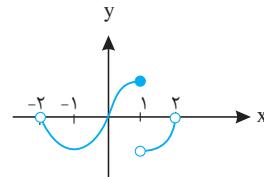
-۲۳۷ - اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ [بازه‌ی $[-2, 3]$]

 $-2(4)$ $2(2) \quad \text{صفر}$ $2(2) \quad (2)$ $4(1) \quad (1)$ 

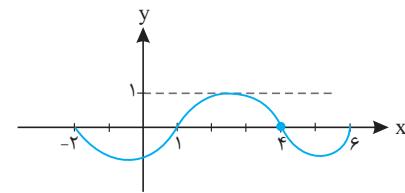
-۲۳۸ - مطابق شکل، نمودار تابع f با ضابطهٔ $y = \frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}$ در دامنهٔ تعریفش رسم شده است. دامنهٔ تابع $y = f(x)$ کدام است؟

 $(-\infty, 4) \quad (1)$ $(1, 2) \quad (2)$ $(2, 3) \quad (3)$ $R - [2, 3] \quad (4)$ $2(4)$ $1(3)$ $-2(2)$ $-1(1)$

-۲۳۹ - دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a-|x+b|}}$ بازه‌ی $(-1, 3)$ است. مقدار b کدام است؟

 $[-1, 0] \cup \{1\} \quad (1)$ $[-1, 0] \quad (2)$ $[-1, 1] \quad (3)$ $(-2, 0] \cup [1, 2) \quad (4)$ $-1(4)$ $1(3)$ $-\frac{3}{2}(2)$ $\frac{3}{2}(1)$

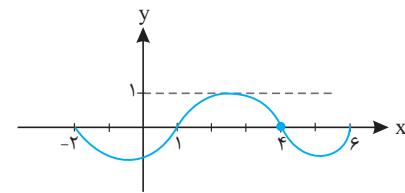
-۲۴۰ - نمودار تابع $y = \sqrt{(x^2 - 1)f(x)}$ به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y = f(x)$ کدام است؟

 $[-1, 0] \cup \{1\} \quad (1)$ $[-2, 2] \quad (2)$ $[-3, 3] \quad (3)$ $[-1, 3] \quad (4)$

-۲۴۱ - اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + 3x + a}$ تنها شامل یک مقدار حقیقی باشد، آن مقدار چه قدر است؟

 $-1(4)$ $1(3)$ $-\frac{3}{2}(2)$ $\frac{3}{2}(1)$

-۲۴۲ - نمودار تابع $y = f(x) = \sqrt{f(3-|x|)}$ به صورت زیر است دامنهٔ تابع y کدام است؟

 $[-1, 4] \quad (1)$ $[-2, 2] \quad (2)$ $[-3, 3] \quad (3)$ $[-1, 3] \quad (4)$

۳-۲ معادلات و توابع

- ۲۴۳ - اگر رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 4ax + 1 & x \leq 1 \\ 4ax^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ معرف یک تابع باشد، کدام است؟

۵ (۴)

 ϕ (۳)

R (۲)

۷ (۱)

 در کدام گزینه‌ی زیر y تابعی از x است؟

$x^3 - y^3 = 1$ (۴)

$x^3 - y^3 = 1$ (۳)

$x^3 - y^3 = 1$ (۲)

$x^3 + y^3 = 1$ (۱)

کدام رابطه یک تابع است؟

$xy^3 - x = 1$ (۴)

$|y - 1| + x = 0$ (۳)

$y + y^3 = x^3 + 1$ (۲)

$x = y^3 - 3y^2$ (۱)

کدام یک از روابط زیر تابع نمی‌باشد؟

$x^3 + y^3 + 4x + 2y + 5 = 0$ (۲)

$|y| = -4x^3 + 4x - 1$ (۱)

$y^3 + 4yx = x - 1$ (۴)

$y = \sqrt{x^2 - 4} \pm \sqrt{4 - x^2}$ (۳)

کدام یک از روابط‌های زیر تابع است؟

$|x| - |y| = 0$ (۲)

$|x| + |y^3 - 1| = 0$ (۱)

$x^3 + y^3 - 2x + 3y + \frac{13}{4} = 0$ (۴)

$x^3 + y^3 - 2x + 3y + 1 = 0$ (۳)

کدام یک از روابط زیر تابع نیست؟

$|y| = -x^3 + 2x - 1$ (۲)

$y = \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{9 - x^2}$ (۱)

$x^3 + xy = 0$ (۴)

$x^3 + y^3 + 2x + 4y + 5 = 0$ (۳)

 در کدام یک از روابط زیر y تابعی بر حسب x است؟

$x^3 + y^3 + 2x = 1$ (۴)

$x = 2y + 2|y| + 1$ (۳)

$x^3 + y^3 + 2y = 1$ (۲)

$x = 3y + 2|y| + 1$ (۱)

کدام رابطه یک تابع نیست؟

$y + \sqrt{y} = \sqrt{x}$ (۴)

$y - \sqrt{y} = \sqrt{x}$ (۳)

$2y + |y| = x$ (۲)

$2y - |y| = x$ (۱)

 به ازای کدام مقدار a رابطه غیرتنهی $x^3 + y^3 = -8x + 2y - a$ تابع است.

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۹ (۲)

۴ (۱)

۴-۲ توابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

 - ۲۵۲ - می‌دانیم $(1 + \sqrt{2})(a + \sqrt{5}) = 2$ ، جزء صحیح عدد a کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

 - ۲۵۳ - اگر $[x + 2[x]] = 4$ باشد، مقدار x کدام است؟

۴ معادله جواب ندارد.

 $1 \leq x \leq 2$ (۳)

 $0 \leq x \leq 1$ (۲)

 $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ (۱)

 - ۲۵۴ - اگر $a + [b] = 4/2$ و $b - [a] = 2/4$ باشد، حاصل $a + [b] = 4/2$ کدام است؟

۳/۶ (۴)

۴/۶ (۳)

۵/۶ (۲)

۵ (۱)



۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

- ۲۵۵ اگر $11 < |2x - 3|$ باشد، چند مقدار صحیح خواهد داشت؟ [تابع جزء صحیح است]

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

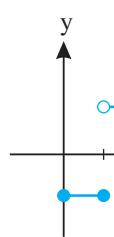
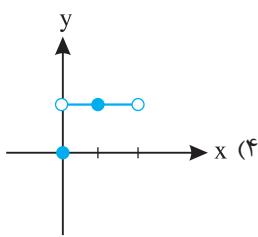
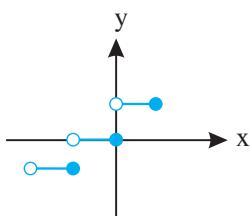
۱۱ (۱)

- ۲۵۶ مجموعه $A = \left\{ \left[3x + \frac{1}{2} \right] \mid |x + 1| < 2 \right\}$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

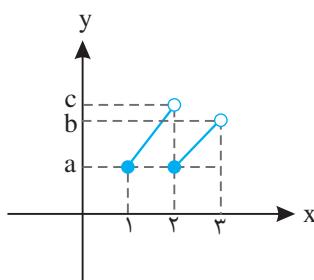
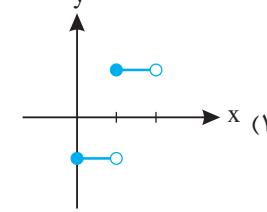
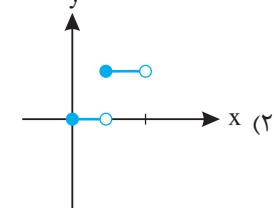
۳ (۳)

۲ (۲)

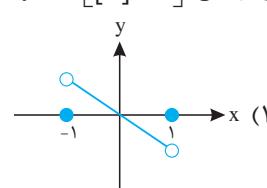
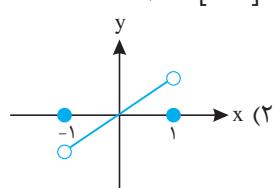
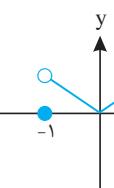
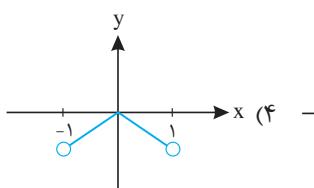
- ۲۵۷ مجموعه جواب معادله $x^2 + 4x = -4$ بازه‌ی (a, b) است، مقدار $b - a$ کدام است؟ [علامت جزء صحیح است]

- ۲۵۸ نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟

- [x] (۱)
- [-x] (۲)
- [-x] (۳)
- 1 + [x] (۴)

- ۲۵۹ نمایش هندسی تابع $y = 2[x] - 1$ در فاصله $0 \leq x < 2$ کدام است؟- ۲۶۰ نمودار تابع $y = \frac{x}{[x]}$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- ۴/۵ (۱)
- ۳/۵ (۲)
- ۴ (۳)
- ۳ (۴)

- ۲۶۱ نمودار تابع $y = x[x] - x$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (۳)- ۲۶۲ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x + [x] + [-x]}$ کدام است؟ $\mathbb{R} - \{0\}$ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) صفر

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

- ۲۶۳ معادله $x = [x] + \frac{1}{4}$ در بازه $[-2, 4]$ ، چند ریشه دارد؟ [علامت جزء صحیح است]

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- ۲۶۴ معادله $x^2 + [x] = 0$ چند جواب دارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

-۲۶۵ ریشه معادله $1 - 2x + [x] = 0$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

-۲۶۶ نمودار تابع $y = [3x - 1]$ در بازه‌ی $[0, 1]$ از چند قسمت تشکیل شده است؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

-۲۶۷ برد تابع $y = [x] + [-x]$ کدام است؟

$$\{1, 0\} \quad (4)$$

$$\{-1, 0\} \quad (3)$$

$$0 \quad (2)$$

$$\{-1\} \quad (1)$$

-۲۶۸ معادله‌ی $1, \frac{y}{2}$ در بازه‌ی $[0, 1]$ چند جواب دارد؟

$$2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

-۲۶۹ دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{2})(3 - [x])}$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

$$[1, 3] \quad (4)$$

$$[2, 4) \quad (3)$$

$$[1, 3) \quad (2)$$

$$[\sqrt{2}, 3] \quad (1)$$

-۲۷۰ معادله $\frac{x}{2} + \left[\frac{x-4}{2} \right] = 3$ چند ریشه دارد؟

$$3 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ هیچ}$$

-۲۷۱ معادله $x + \sqrt{x} - \sqrt{x} = 4$ چند جواب دارد؟

$$3 \quad (4)$$

$$0 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۲۷۲ مجموعه‌ی جواب معادله a, b بازه‌ی $[a, b] - [x] + [3x] = 0$ است، مقدار $b - a$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است)

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

-۲۷۳ حاصل عبارت $\left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی x کدامیک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟ (نماد جزء صحیح است).

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

-۲۷۴ تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - 1 = 0$ برابر کدام است؟

$$(4) \text{ بی‌شمار}$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۲۷۵ مجموعه جواب معادله $\left[\frac{2x-1}{2} \right] - \left[\frac{1-2x}{2} \right] = 3$ کدام است؟

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \quad (4)$$

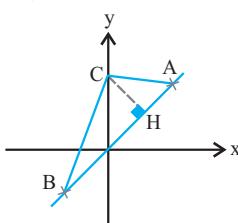
$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \quad (2)$$

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right] \quad (1)$$



۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹۰

مختصات هر نقطه روی نیمساز اول و سوم به صورت (x, x) است پس داریم:

$$\frac{|x+2x|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5} \rightarrow \frac{3|x|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \rightarrow |x| = \frac{10}{3} \rightarrow x = \pm \frac{10}{3}$$

$$A\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \quad B\left(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right) \quad C = (0, 3)$$

حال فاصله‌ی AB را از خط C بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} C(0, 3) \\ AB: y = x \end{cases} \rightarrow CH = \frac{|3 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{20}{3}\sqrt{2}$$

$$S = \frac{CH \times AB}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{20}{3}\sqrt{2}}{2} = 10.$$

پاسخنامه درس ۱ فصل ۲ (آشنایی بیشتر با تابع)

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹۱

$$f(x) = \{e, f, g, h, i\}$$

$$f'(x) = \{e, f, i\}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹۲

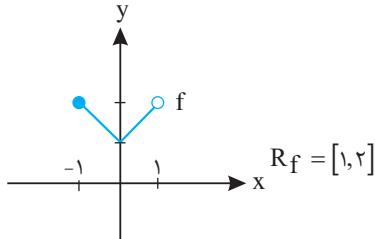
$$\begin{cases} f(x) = -1 \rightarrow 3 - x = -1 \rightarrow x = 4 \\ f(x) = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \\ f(x) = 3 \rightarrow 3 - x = 3 \rightarrow x = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

با توجه به گزینه‌ها $D = \{0, 4\}$, $R = \{-1, 3\}$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹۳

$$\begin{cases} f(-1) = 4(-1) - 1 = -5 \\ f(1) = 4(1) - 1 = 3 \end{cases} \rightarrow R_f = \{-5, 3\} \subset [-1, +\infty)$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹۴

با توجه به نمودار f داریم:

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ -y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow d = \frac{|(-1)(1) + (-1)(1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow d = \sqrt{2}$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $(-1, -1)$ از خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم) بدست می‌آوریم:

$$d = \frac{|(-1)(1) + (-1)(1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow d = \sqrt{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸۵

ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط $3y - 4x - a = 0$ بدست می‌آوریم:

$$d = \frac{|3(2) - 4(-1) - a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10 - a|}{\sqrt{25}} = \frac{|10 - a|}{5} \rightarrow \frac{|10 - a|}{5} = 2 \rightarrow |10 - a| = 10 \rightarrow \begin{cases} 10 - a = 10 \rightarrow a = 0 \\ 10 - a = -10 \rightarrow a = 20. \end{cases}$$

مجموع مقادیر برای a برابر ۲۰ است.

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸۶

فرض کنید نقطه‌ی A روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد پس می‌توان مختصات آن را به صورت $A(x, 2x+1)$ در نظر گرفت فاصله‌ی این نقطه تا نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|x(1) + (2x+1)(-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-x - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + 1|}{\sqrt{2}} \text{ طبق فرض } 4\sqrt{2}$$

$$\rightarrow |x + 1| = 8 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 8 \\ x + 1 = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -9 \end{cases}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸۷

خط موازی با -1 $y = \sqrt{3}x - 1$ که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y = \sqrt{3}x$ است که فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸۸

دو خط داده شده با هم موازیند پس فاصله‌ی بین دو خط طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3 \rightarrow x - y - \frac{3}{2} = 0 \\ y = x + 1 \rightarrow x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|\frac{-3}{2} - 1\right|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸۹

دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی دو خط است، بنابراین:

$$d = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \text{طول قطر} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) = 3$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۵

$$f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{x^3 + \lambda}{x - m} & x \neq m \end{cases} \longrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x - m} & x \neq m \end{cases}$$

با توجه به ضابطه f و g می‌توان نتیجه گرفت که $m = -2$ است.

$$f(-2) = g(-2)$$

$$\begin{cases} g(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12 \\ f(-2) = n \end{cases} \longrightarrow n = 12$$

$$m + n = (-2) + (12) = 10 \quad \text{پس}$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۶

دو تابع f و g هنگامی با هم برابرند که همواره ≥ 0 باشد یعنی عبارت درجه دوم $x^2 + 2ax + 13 \geq 0$ پس باید $\Delta \leq 0$ باشد.

$$\Delta = (2a)^2 - 4(1)(13) = 4a^2 - 52 \xrightarrow{\Delta \leq 0}$$

$$4a^2 - 52 \leq 0 \longrightarrow a^2 \leq 13 \longrightarrow -\sqrt{13} \leq a \leq \sqrt{13}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در این فاصله قرار دارند عبارتند از: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

۴
۳
۲
۱
۲۰۷

گذاشت $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$, $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ است بنابراین مخرج کسر تابع g

باید فقط یک ریشه‌ی 2 باشد.

$$x^2 + cx + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} (2)^2 + 2c + 4 = 0 \rightarrow 2c = -8 \rightarrow c = -4$$

$$g(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 4x + 4} = \frac{ax + b}{(x-2)^2} \quad \text{بنابراین:}$$

با توجه به ضابطه f , هنگامی که f مساوی است که $x = 2$ ریشه‌ی

صورت کسر g نیز باشد پس داریم:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \rightarrow b = -2a$$

$$g(x) = \frac{ax + b}{(x-2)^2} = \frac{ax - 2a}{(x-2)^2} = \frac{a(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2}$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{پس} \quad f(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$b = -2a = -6 \longrightarrow a + b + c = 2 - 6 - 4 = -8$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۸

همچنین داریم: $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$\begin{cases} g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1} \\ = \frac{x(a+b) + (a-b)}{x^2 - 1} \end{cases} \xrightarrow{f=g} \quad f = g$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \longrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \rightarrow a + 2b = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

۴
۳
۲
۱
۱۹۷

$$x \xrightarrow{f} x^2 - 1 \Rightarrow 2 \xrightarrow{f} 2^2 - 1 = 3$$

۴
۳
۲
۱
۱۹۸

اگر $x = f(\delta)$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به فرض داریم:

$$\frac{x-1}{2} = \delta \longrightarrow x-1 = 10 \longrightarrow x = 11$$

پس $f(\delta) = 11$ می‌باشد.

۴
۳
۲
۱
۱۹۹

$$g(x) = | -x | = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$xf(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = xf(x)$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۰

تابع $g(x) = \frac{|6x-12|}{x}$ با تابع داده شده برابر است زیرا $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و

$$g(x) = \frac{|x-2|}{|x|} = |x-2| \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۱

دو تابع f و g هنگامی با هم برابرند که $D_f = D_g = (1, +\infty)$ است.

۴
۳
۲
۱
۲۰۲

دامنه‌ی تابع f برابر \mathbb{R} است پس باید دامنه‌ی تابع $|g|$ نیز برابر با \mathbb{R} باشد که فقط گزینه‌ی (۱) این شرط را دارد (مخرج کسر آن هیچ‌گاه صفر نمی‌شود)

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1$$

$$\longrightarrow |g(x)| = |x+1|, \quad D_g = D|g| = \mathbb{R}$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۳

دامنه‌ی تمام تابع داده شده برابر با \mathbb{R} است پس داریم:

$$y = |2x - |x|| = \begin{cases} |2x - x| & x \geq 0 \\ |2x + x| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |x| & x \geq 0 \\ |3x| & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۱ با تابع فوق مساوی است زیرا:

$$y = 2|x| - x = \begin{cases} 2x - x & x \geq 0 \\ -2x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases} \quad \text{گزینه‌ی ۱}$$

۴
۳
۲
۱
۲۰۴

چون تابع f و g با یکدیگر مساویند پس $f(1) = g(1)$ است بنابراین:

$$\begin{cases} f(1) = 2(1) - 1 = 1 \\ g(1) = k \end{cases} \Rightarrow k = 1$$



پاسخنامه درس ۲ فصل ۲ (أنواع تابع)

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۰۹

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۳

$$\begin{cases} f(x) = -1 \rightarrow \frac{x}{x+2} = -1 \rightarrow x+2 = -2 \rightarrow x = -4 \\ f(x) = 1 \rightarrow \frac{x}{x+2} = 1 \rightarrow x+2 = 2 \rightarrow x = 0 \\ f(x) = 2 \rightarrow \frac{x}{x+2} = 2 \rightarrow x+2 = 1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

D = \{-4, 0, -1\}

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۴

چون دامنه تابع f به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ است پس مخرج تابع f فقط دارای یک ریشه b است.

بنابراین مخرج برابر صفر است.

$$\Delta = (-2)^3 - 4(1)(a - \Delta) = 0 \rightarrow 9 - 4a + 2\Delta = 0 \rightarrow a = \frac{2\Delta}{4}$$

$$x^3 - 3x + \frac{2\Delta}{4} - \Delta = 0 \rightarrow x^3 - 3x + \frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$. a - b = \frac{2\Delta}{4} \text{ و در نتیجه } b = \frac{3}{2} \text{ پس}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۵

$$\begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ \frac{x}{x+1}+1=0 \rightarrow \frac{x+1}{x+1}=0 \rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, -1, -3\}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۶

برد تابع به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ است پس در این تابع $R = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۷

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \\ x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{x+1} > 0 \rightarrow 1 - \frac{2}{x+1} > 1$$

پس $1, +\infty$ ، بنابراین $f(x) > 1$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۸

$$y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2} = \frac{(x^2 + 2) + 2}{x^2 + 2} = 1 + \frac{2}{x^2 + 2}$$

$$x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 2} < 0 \rightarrow \frac{2}{x^2 + 2} \leq 1$$

$$\frac{+1}{x^2 + 2} \rightarrow 1 < 1 + \frac{2}{x^2 + 2} \leq 2 \rightarrow R = (1, 2]$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^2 + x - a)}{x^2 + x - a} = 2 & \xrightarrow{f=g} \\ g(x) = a^3 - a + 2 & \end{cases} \begin{cases} a^3 - a + 2 = 2 \rightarrow a^3 - a = 0 \\ a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

از طرفی باید $D_f = D_g = \mathbb{R}$ باشد پس مخرج کسر تابع f باید مخالف صفر باشد بنابراین Δ مخرج منفی است.

$$x^3 + x - a = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 4a < 0 \rightarrow a < -\frac{1}{4}$$

با توجه به رابطه فوق فقط $a = -1$ قابل قبول است.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۹

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

پس ۱ و ۲ ریشه‌های مخرج تابع g است.

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + ax - b = 0 \\ \xrightarrow{x=1} 1 - 5 + a - b = 0 \rightarrow a - b = 4 \\ x^3 - 5x^2 + ax - b = 0 \\ \xrightarrow{x=2} 8 - 20 + 2a - b = 0 \rightarrow 2a - b = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = \mu \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x - 2c}{x^3 - 5x^2 + \lambda x - \mu} = \frac{x - 2c}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$f(x) = g(x) \rightarrow x - 2c = x - 2 \rightarrow c = 1$$

پس $a - b + 2c = \lambda - 4 + 2 = 6$ است.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۰

تابع $f(x) = x$ با تابع $g(x) = x$ پس داریم:

$$f(-1) = g(-1) \rightarrow \frac{c}{-1-1} = -1 \rightarrow c = 2$$

$$x \neq -1 \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow \frac{x^3 + ax + b}{x+1} = x$$

$$\rightarrow x^3 + ax + b = x^3 + x \rightarrow a = 1, b = 0$$

پس حاصل $a - b + c = 1 - 0 + 2 = 3$ می‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۱

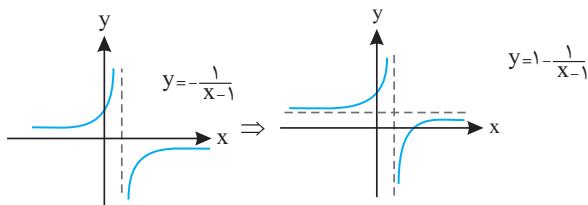
دو تابع f و g با هم مساویند پس $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ است پس $x = -1$ ریشه مخرج تابع f است.

$$2x^3 - c = 0 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)^3 - c = 0 \rightarrow -2 - c = 0 \rightarrow c = -2$$

همچنین $f(x) = g(x)$ پس داریم:

$$\frac{ax^3 + b}{2x^3 + 2} = 2 \rightarrow ax^3 + b = 4x^3 + 4 \rightarrow a = 4, b = 4$$

پس $a + b + c = 4 + 4 - 2 = 6$ است


۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۴

$$y = (x - |x|) \frac{1}{x^2 + 1} = \begin{cases} (x - x) \frac{1}{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ (x - (-x)) \frac{1}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases}$$

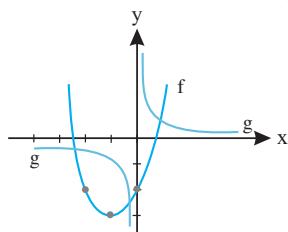
$$x < 0 : y = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x^2 + 1}{2x} \rightarrow \frac{2}{y} = x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{x + \frac{1}{x} \leq -2}{y} \rightarrow \frac{2}{y} \leq -2 \rightarrow \frac{2}{y} + 2 \leq 0 \rightarrow \frac{2y + 2}{y} \leq 0$$

$$-1 \leq y < 0 \rightarrow R = [-1, 0]$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۵

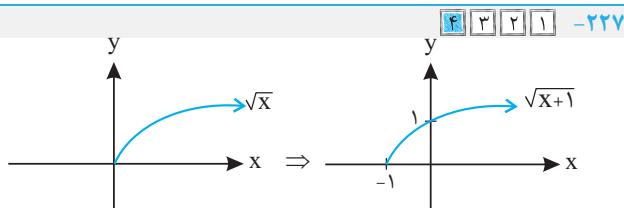
دو تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = x^3 + 2x - 2$ را رسم می‌کنیم، محل تلاقی نمودار این دو تابع، جواب معادله می‌باشد.



با توجه به نمودارهای رسم شده تعداد جواب‌های معادله سه تا می‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۶

$$\left\{ \begin{array}{l} D_f : -2x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{7}{2} \rightarrow D = \left(-\infty, \frac{7}{2} \right] \\ R_f : \sqrt{-2x + 7} \geq 0 \rightarrow R = [0, +\infty) \end{array} \right.$$


۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۸

$$f(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow f(\lambda) = \sqrt{\lambda+1} = 3$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۹

تابع ۱ $g(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(x) = x^3 - 1$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱۹

$$y = \frac{1+2x-x^2}{1+x^2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} y + yx^2 = 1+2x-x^2$$

$$\rightarrow (1+y)x^2 - 2x + (y-1) = 0$$

هنگامی معادله‌ی درجه‌ی دوم بالا دارای جواب است که $\Delta \geq 0$ باشد پس:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(y+1)(y-1) \geq 0 \rightarrow 1-y^2 + 1 \geq 0$$

$$\rightarrow y^2 \leq 2 \rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۰

به ازای $x \geq 0$ همواره $|x| = x$ است پس دامنه‌ی تابع برابر اعداد حقیقی منفی است یعنی $x < 0$ پس داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 - 2x}{x - |x|} \xrightarrow{x < 0} f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2x} \\ &= \frac{x(3x-2)}{2x} = \frac{3x-2}{2} \end{aligned}$$

$$x < 0 \rightarrow 3x < 0 \rightarrow 3x - 2 < -2 \rightarrow \frac{3x-2}{2} < -1 \rightarrow R = (-\infty, -1)$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۱

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{1}{(x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \rightarrow (x^2 + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4} \rightarrow (x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} < \frac{1}{(x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 \rightarrow R = (0, 1]$$

. $\alpha + \beta = 1$ و $\beta = 1$ و $\alpha = 0$ پس

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۲

$$xy - ax + cy - b = 0 \rightarrow y(x+c) = ax + b \rightarrow y = \frac{ax+b}{x+c}$$

با توجه به نمودار رسم شده مقدار تابع برای $x = 1$ وجود ندارد پس $x = 1$ ریشه‌ی مخرج است.

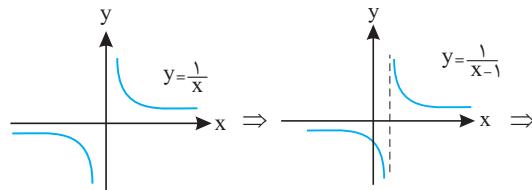
$$x + c = 0 \xrightarrow{x=1} c = -1$$

از طرفی تابع از نقطه‌ی $(0, -2)$ عبور می‌کند پس داریم:

$$y = \frac{ax+b}{x-1} \xrightarrow{(0, -2)} -2 = \frac{b}{-1} \rightarrow b = 2 \Rightarrow bc = -2$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۳

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-1)-1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1}$$





چون برد تابع $y = \sqrt{ax - 3|x|}$ مجموعه $\{b\}$ باشد لذا این تابع یک تابع ثابت است. از طرفی صفر جزو دامنه تابع است پس $f(0) = b$ می‌باشد لذا b از طرفی برای هر X مثبت و هر X منفی تابع باید تابع ثابت صفر باشد. بنابراین:

$$x > 0 : \sqrt{ax - 3x} = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 - b = 9 - 0 = 9$$

$$x < 0 : \sqrt{ax + 3x} = 0 \rightarrow a = -3$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۶

برای آن که دو تابع f و g باهم برابر باشند باید $D_f = D_g$ باشد.

$$D_g = [-2, +\infty) \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

پس دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & a & b \\ \hline (x-a)(x-b) & - & + & & \\ \hline x & -2 & b & a & + \\ \hline (x-a)(x-b) & - & + & + & + \end{array} \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a \geq -2 \end{cases} \rightarrow a + b \geq -4$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۷

عبارت $6 + bx + ax^2$ باید در بازه $[-2, 3]$ نامنفی باشد.
پس با توجه به جدول تعیین علامت باید $-2 < x < 3$ ریشه‌های عبارت باشند:

$$ax^2 + bx + 6 = (x+2)(3-x) = -x^2 + x + 6$$

$$\rightarrow a = -1, b = 1 \rightarrow a + b = 0$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۸

با توجه به ضابطه $f(x) < 2$ داریم:
با توجه به نمودار رسم شده در فاصله $2 < x < 3$ ، نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y = 2$ قرار می‌گیرد.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۹

$$a - |x+b| > 0 \rightarrow |x+b| < a \rightarrow -a < x+b < a$$

$$\rightarrow -a - b < x < a - b$$

از طرفی طبق فرض، دامنه تابع بازه $(-1, 3)$ است پس داریم:

$$\begin{cases} -a - b = -1 \\ a - b = 3 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = -1$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۴۰

$x^2 - 1$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-	-	+	-	-
$(x^2 - 1)f(x)$	-	+	0	-	-

جواب

$$D = [-1, 0] \cup \{1\}$$

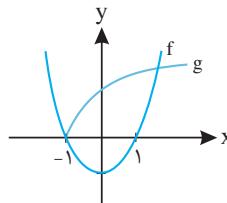
۴ ۳ ۲ ۱ -۲۴۱

باید $a = 0$ و $\Delta = 0$ باشد پس داریم:

$$\Delta = (3)^2 - 4(a)(a) = 0 \rightarrow 9 - 4a^2 = 0 \rightarrow a = \pm \frac{3}{2} \quad a < 0 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}} \rightarrow f(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}(x-1)^2} \rightarrow D_f = \{1\}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۴۲

ابندا دامنه تابع $y = \sqrt{f(3 - |x|)}$ را بدست می‌آوریم:

این دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله دارای دو جواب می‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۰

$$b, a \text{ ریشه‌های معادله } |x| = \sqrt{2-x} \text{ است.}$$

$$\sqrt{2-x} = |x| \rightarrow 2-x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

→ $b = 1, a = -2 \rightarrow b, a = 3$ فاصله‌ی

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۱

$$x^2 - |x| - 2 \geq 0 \rightarrow (|x| - 2)(|x| + 1) \geq 0$$

همواره مثبت

$$\rightarrow |x| - 2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۲

$$\sqrt{x} : x \geq 0 \quad ۱$$

$$\sqrt{1-x} : 1-x > 0 \rightarrow x < 1 \quad ۲$$

$$\frac{-1-x}{3x-2} : \frac{-1-x}{3x-2} \geq 0 \rightarrow -1 \leq x < \frac{2}{3} \quad ۳$$

حال اگر از ۱ و ۲ و ۳ و اشتراک بگیریم:

$$D = \left[0, \frac{2}{3} \right)$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۳

برای آن که دامنه تابع به صورت $[1, +\infty)$ باشد باید جدول تعیین علامت به صورت

x	1	2
$(x-2)(x^2+ax+b)$	-	+

باشد بنابراین ۱ و ۲ ریشه‌های $x^2 + ax + b = 0$ هستند:

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -1$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 4 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -4$$

$$\rightarrow a = -3, b = 2$$

پس $b - a = 5$ است.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۴

دامنه تابع f به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \\ x^2 + a \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -a \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

با توجه به این که دامنه تابع f بازه $(-\infty, 0)$ است پس $a = 0$ می‌باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲۵

$$x^2 + y^2 = -ax + 2y - a \rightarrow x^2 + ax + y^2 + 2y = -a$$

$$\rightarrow x^2 + ax + 16 + y^2 + 2y + 1 = -a + 16 + 1$$

$$\rightarrow (x+4)^2 + (y+1)^2 = -a + 17$$

هنگامی رابطه بالا تابع است که $-a + 17 = 0$ باشد پس $a = 17$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۲

$$(1+\sqrt{2})(a+\sqrt{5})=2 \Rightarrow a+\sqrt{5}=\frac{2}{1+\sqrt{2}} \quad \text{گویاکردن}$$

$$a+\sqrt{5}=2(\sqrt{2}-1)$$

$$\rightarrow a=2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{5} \simeq 0 / 8-2 / 2 \simeq -1 / 4 \rightarrow [a]=-2$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۳

$$[x+2[x]]=4 \rightarrow 3[x]=4 \rightarrow [x]=\frac{4}{3} \quad \text{غیرممکن}$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۴

$$a+[b]=4/2 \rightarrow [a+[b]] = [4/2] \rightarrow [a]+[b]=4$$

$$b-[a]=2/4 \rightarrow [b-[a]] = [2/4] \rightarrow [b]-[a]=2$$

$$\rightarrow \begin{cases} [a]=1 \\ [b]=3 \end{cases} \rightarrow a=1/2, b=3/4 \rightarrow a+b=4/6$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۵

$$|2x-3| < 11 \rightarrow -11 < 2x-3 < 11 \rightarrow -8 < 2x < 14 \rightarrow -4 < x < 7$$

$$\rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{x}{3} < \frac{7}{3} \rightarrow -1/3 < \frac{x}{3} < 2/3 \rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = -2, -1, 0, 1, 2$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۶

$$|x+1| < 2 \rightarrow -3 < x < 1 \rightarrow -8/5 < 3x + \frac{1}{2} < 3/5$$

$$\rightarrow \left[3x + \frac{1}{2} \right] = -9, -8, -7, \dots, 3$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۷

$$[x^2 + 4x] = -4 \rightarrow -4 \leq x^2 + 4x < -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x \geq -4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0 \rightarrow (x+2)^2 \geq 0 \\ \text{به ازای هر } x \text{ همواره برقرار است} \end{array} \right.$$

$$x^2 + 4x < -3 \rightarrow x^2 + 4x + 3 < 0$$

$$\text{جدول تعیین علامت} \rightarrow -3 < x < -1 \quad (2)$$

اگر از (1) و (2) اشتراک بگیریم مجموعه جواب به صورت $(-3, -1)$ می‌باشد.
پس $b-a=2$ است و $b=-1$ و $a=-3$ می‌باشد.

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۸

$$y = 2[x] - 1 = \begin{cases} 2(0) - 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2(1) - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۹

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = x \xrightarrow{1 \leq x < 2}$$

$$f(3-|x|) \geq 0 \rightarrow 1 \leq 3 - |x| \leq 4 \quad \text{باتوجه به نمودار}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 - |x| \geq 1 \rightarrow |x| \leq +2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 3 - |x| \leq 4 \rightarrow |x| \geq -1 \end{cases} \quad \text{بدیهی است}$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۳

این رابطه هنگامی تابع است که مقادیر تابع برای $x = 1$ در هر دو ضایعه برابر باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = 4ax + 1 \rightarrow f_1(1) = 4a + 1 \\ f_2(x) = 4ax^2 + 2 \rightarrow f_2(1) = 4a + 2 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow f_1(1) = f_2(1) \rightarrow 4a + 1 = 4a + 2 \rightarrow$$

غیر ممکن

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۴

این رابطه تابع نیست (1)

این رابطه تابع نیست (2)

این رابطه تابع نیست (3)

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۵

این رابطه تابع نیست (1)

$$\rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{این رابطه تابع نیست}$$

گزینه (3)

$$x = -1 \rightarrow |y-1| = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{این رابطه تابع نیست}$$

گزینه (4)

$$x = 1 \rightarrow y^2 - 3y^2 = 0 \rightarrow y^2(y-3) = 0 \quad \text{این رابطه تابع نیست}$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۶

$$y^2 + 4yx = x - 1$$

به رابطه رویه رو توجه کنید:

$$x = 1 \rightarrow y^2 + 4y = 0 \rightarrow y = 0 \quad \text{یا} \quad y = -4$$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۷

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{13}{4} = 0 \rightarrow -$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ y + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

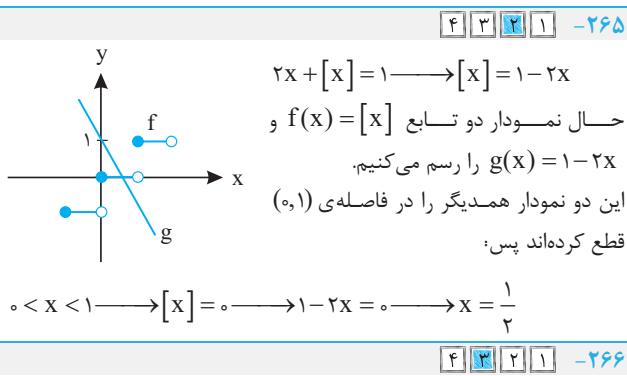
پس $f = \left\{ (1, -\frac{3}{2}) \right\}$

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۸

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۴۹

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۰

[۴ ۳ ۲ ۱] -۲۵۱



$$-1 \leq x \leq 1 \rightarrow -3 \leq 3x \leq 3$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} -3 \leq 3x < -2 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = -3 \\ -1 \leq x < -\frac{2}{3} \end{cases} \\ -2 \leq 3x < -1 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = -2 \\ -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \end{cases} \\ -1 \leq 3x < 0 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = -1 \\ -\frac{1}{3} \leq x < 0 \end{cases} \\ 0 \leq 3x < 1 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = 0 \\ 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{cases} \\ 1 \leq 3x < 2 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = 1 \\ \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \end{cases} \\ 2 \leq 3x < 3 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = 2 \\ \frac{2}{3} \leq x < 1 \end{cases} \\ 3x = 3 &\rightarrow \begin{cases} y = [3x] = 3 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۷

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۸

$$\begin{cases} 2x - [2x] = [x] + [-x] \\ 0 \leq 2x - [2x] < 1 \\ [x] + [-x] = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 3$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۹

$$([x] - \sqrt{2})(3 - [x]) \geq 0 \rightarrow \sqrt{2} \leq [x] \leq 3$$

$\rightarrow [x] = 2 \text{ یا } 3 \rightarrow 2 \leq x < 4 \rightarrow D_f = [2, 4]$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۷۰

$$\begin{aligned} 1 \leq y < 2 &\rightarrow a = 1, c = 2 \\ 2 \leq x < 3 &\rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = \frac{x}{2} \rightarrow 2 \leq x < 3 \\ 1 \leq y < \frac{3}{2} &\rightarrow a = 1, b = \frac{3}{2} \\ a + b + c = 4/5 &\text{ پس} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۱

$$y = \begin{cases} 0 & x = -1 \\ x[-1-x] & -1 < x < 0 \\ x[-x] & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 0 & x = -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

با توجه به ضبطه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

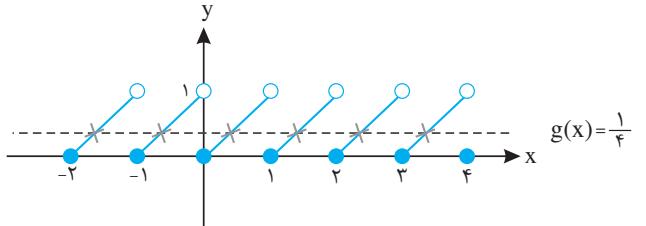
۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۲

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ پس داریم:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x-1} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۳

نمودارهای دو تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = x - [x]$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:

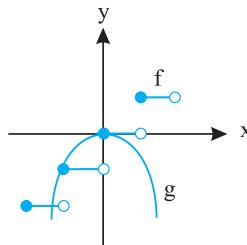


با توجه به نمودارهای رسم شده در بازه‌ی $[-2, 4]$ در ۶ نقطه این دو نمودار همدیگر را قطع می کنند.

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶۴

$$x^{\sqrt{2}} + [x] = 0 \rightarrow [x] = -x^{\sqrt{2}}$$

نمودار دو تابع $[x] = -x^{\sqrt{2}}$ و $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ را رسم می کنیم.



با توجه به نمودارهای رسم شده معادله سه جواب دارد.