۱- اگر $f(x) = x - ۴$ و $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱۶}{x + ۴} & x \neq -۴ \\ k & x = -۴ \end{cases}$ ، k را طوری تعیین کنید که به‌ازای هر x ، $.f(x) = g(x)$

واضح است که به ازای $k = -۸$ دو تابع کاملاً با هم برابر می‌شوند.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۴) = -۸ \\ g(-۴) = k \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \rightarrow k = -۸$$

۲- a و b را طوری محاسبه کنید که نمودارهای دو تابع $y = ax^۲ + x + b$ و $y = x + ۳a$ همدیگر را روی محور عرض‌ها در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کنند.

طول هر نقطه روی محور عرض‌ها برابر صفر است.

نقطه تقاطع $A = (۰,-۱)$

$$A \in \; y = ax^۲ + x + b \rightarrow -۱ = b$$

$$A \in \; y = x + ۳a \rightarrow -۱ = ۳a \rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$$

۳- مقدار a را طوری بیابید که $f = \left\{ \left(a^۲ , ۳\right) ، \left(a^۲ - ۴ , ۵\right) ، (a + ۲ , ۵) ، (۲a , ۳) \right\}$ یک تابع باشد.

I) دو زوج $\left(a^۲ , ۳\right)$ و $(a + ۲ , ۵)$ را در نظر می‌گیریم. چون y ها متفاوت است پس باید:

$$a^۲ \neq a + ۲ \Rightarrow a \neq ۲ , -۱$$

II) در دو زوج $(۲a , ۳)$ و $\left(a^۲ - ۴ , ۵\right)$ هم y ها متفاوت است، پس باید:

$$a^۲ - ۴ \neq ۲a \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۴ = ۰ \Rightarrow a \neq ۱ \pm\sqrt{۵}$$

بنابراین a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به جز $۱\pm\sqrt{۵}$ و ۱- و ۲

۴- ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ جدول زیر را نوشته سپس با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $f\ (x - ۳)$

ب) $f\ (۱ + a)$

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۵	۷	۹	۱۱	۱۳

$y = ۲x + ۱$ ۰/۵

الف) $f\ (x - ۳) = ۲(x - ۳) + ۱ = ۲x - ۵$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

ب) $f\ (۱ + a) = ۲(۱ + a) + ۱ = ۲a + ۳$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

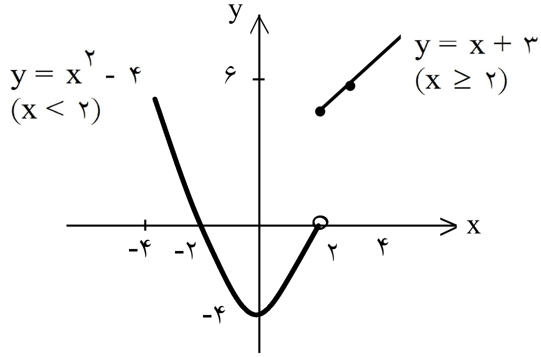
۵- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x < ۲ \\ x + ۳ & x \geq ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < ۲ \Rightarrow y = x^۲ - ۴ \\ x \geq ۲ \Rightarrow y = x + ۳ \end{cases}$$

x	-۲	۰	۲
y	۰	-۴	۰

x	۲	۳
y	۵	۶



۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x < ۰ \\ x - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ داده شده است.

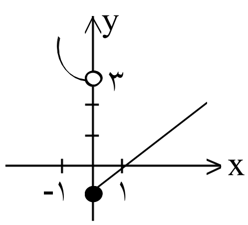
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حاصل $f(f(-۱))$ را به‌دست آورید.

رسم سهمی ۰/۲۵

رسم خط ۰/۲۵

الف)



ب) $f(f(-۱)) = f(۴) = ۳$ ۰/۲۵

۰/۲۵

۷- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $f(x) = ax^۲ + bx$ از نقطه‌ی $(۳,۵)$ بگذرد و تساوی $f(-۱) = ۳$ برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (۳,۵) \Rightarrow ۵ = ۹a + ۳b \quad ۰/۲۵ \\ (-۱,۳) \Rightarrow ۳ = a - b \quad ۰/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۷}{۶} \quad ۰/۲۵ \\ b = -\frac{۱۱}{۶} \quad ۰/۲۵ \end{cases}$$

۸- آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۵x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x - ۵} \end{cases}$$

مساوی نیستند. زیرا دامنه‌ها برابر نیستند. ۰/۲۵

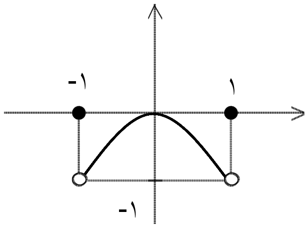
$D_f = (-\infty, ۰] \cup [۵, +\infty)$ ۰/۲۵ , $D_g = [۵, +\infty)$ ۰/۲۵

۹- اگر دو تابع $f(x) = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$ و $g(x) = a + \frac{b}{x + ۲}$ مساوی باشند، a , b را حساب کنید.

$$g(x) = a + \frac{b}{x + ۲} = \frac{ax + ۲a + b}{x + ۲} = f(x) \Rightarrow \frac{ax + ۲a + b}{x + ۲} = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ ۲a + b = -۱ \Rightarrow ۶ + b = -۱ \Rightarrow b = -۷ \end{cases}$$

۱۰- نمودار تابع $y = x^۲[[x] - x]$ روی بازه‌ی $[-۱ , ۱]$ را رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

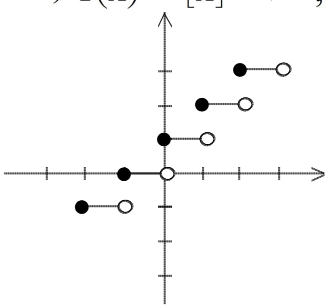


۱۱- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + ۱ \quad , \quad -۲ \leq x < ۳$

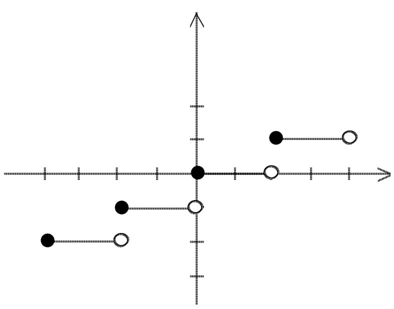
ب) $f(x) = \left[\frac{۱}{۲}x\right] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$

الف) $f(x) = [x] + ۱ \quad , \quad -۲ \leq x < ۳$



$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۱$
$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۰$
$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۱$
$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۲$
$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۳$

ب) $f(x) = \left[\frac{۱}{۲}x\right] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$



$-۴ \leq x < -۲ \qquad -۲ \leq \frac{۱}{۲}x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۸$

$-۲ \leq x < ۰ \qquad -۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۰ \Rightarrow f(x) = -۱$

$۰ \leq x < ۲ \qquad ۰ \leq \frac{۱}{۲}x < ۱ \Rightarrow f(x) = ۰$

$۲ \leq x < ۴ \qquad ۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۱$

۱۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x - ۱}{۲ - x}$ ب) $f(x) = \frac{-۳x}{x^۲ + ۱}$ پ) $f(x) = \frac{۲x + ۳}{x^۲ + x - ۱۲}$

ت) $f(x) = \sqrt{۳x + ۱}$ ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$ ج) $f(x) = \sqrt{۸ - x}$

ب) $D_f = R$

پ) $(x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۳ \end{cases}$

$D_f = R - \{-۴ , ۳\}$

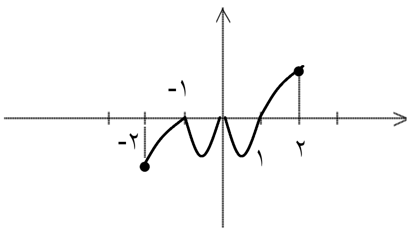
ت) $۳x + ۱ \geq ۰ \quad , \quad x \geq -\frac{۱}{۳}$

$D_f = [-\frac{۱}{۳}, \infty)$

ث) $D_f = [0 , \infty)$

ج) $D_f = (-\infty , 8]$

۱۳- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2 - x}}$ را بیابید.

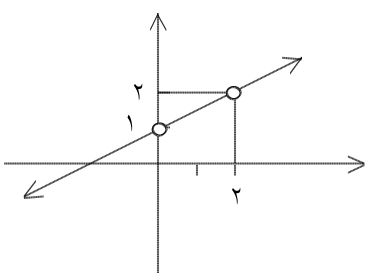


$$\frac{f(x)}{x^2 - x} \geq 0$$

x	$-\infty$ تا -2	-2 تا -1	-1	-1 تا 0	0	0 تا 1	1	1 تا 2	2 تا $+\infty$
$f(x)$		-	•	-		-	•	+	
$x^2 - x$		+		+	•	-	•	+	
P		-	•	-	ت.ن	+	ت.ن	+	

$D_f = (0 , 1) \cup (1 , 2] \cup \{-1\}$

۱۴- نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه‌ی آنرا بنویسید.



ضابطه تابع خطی که از نقاط $A(0 , 1)$ و $B(2 , 2)$ می‌گذرد را حساب می‌کنیم.

$f(x) = ax + b$

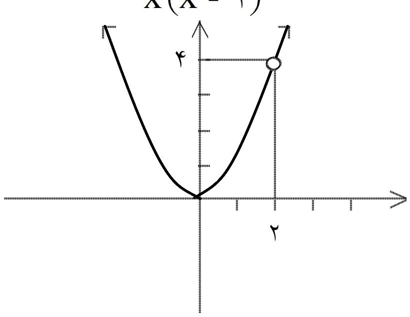
$A(0 , 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$

$B(2 , 2) \Rightarrow 2a + b = 2 \xrightarrow{b = 1} 2a + 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

چون تابع در $x = 0$ و $x = 2$ توخالی است، بنابراین در x و $(x - 2)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$y = \frac{x(x - 2)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}{x(x - 2)}$$

۱۵- نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه‌ی آنرا بنویسید.



ضابطه‌ی یک تابع سهمی که رأس آن $S(0 , 0)$ و از نقطه‌ی $A(2 , 4)$ می‌گذرد را به دست می‌آوریم.

$f(x) = ax^۲ + bx + c$

$S(۰ , ۰) \Rightarrow C = ۰$

راس سهمی $x_۰ = \frac{-b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

$y = ax^۲ \xrightarrow[y = ۴]{x = ۲} ۴ = a(۲)^۲ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = x^۲$

چون تابع در $x = ۲$ توخالی است بنابراین در $(x - ۲)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$y = \frac{(x - ۲)x^۲}{x - ۲}$

۱۶- مقدار x را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) $۴x^۲ + [x] + [-x] = ۰$

$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$

$x \in Z \Rightarrow ۴x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$ ق ق

$x \notin Z \Rightarrow ۴x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$ ق ق

۱۷- اگر دامنه دو تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱۱x + ۱۰}$ و $g(x) = \sqrt{|x - a| - b}$ برابر باشند a , b را حساب کنید.

$x^۲ - ۱۱x + ۱۰ \geq ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱۰) \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱۰$ یا $x \leq ۱$

$|x - a| - b \geq ۰ \Rightarrow |x - a| \geq b \Rightarrow x - a \geq b$ یا $x - a \leq -b \Rightarrow x \geq a + b$ یا $x \leq a - b$

$\begin{cases} a + b = ۱۰ \\ a - b = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۱۱ \Rightarrow a = ۵/۵ \Rightarrow b = ۴/۵$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{۳x - x^۲}$ باشد، دامنه $f(۱ - ۲x)$ را حساب کنید.

$۳x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ \Rightarrow ۰ \leq ۱ - ۲x \leq ۳ \xrightarrow{-۱} -۱ \leq -۲x \leq ۲ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۱}{۲} \geq x \geq -۱$

$D_{f(۱-۲x)} = \left[-۱ , \frac{۱}{۲}\right]$

۱۹- دامنه‌ی تابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \frac{۱}{\sqrt{-x}}$ ب) $g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{۳ - |x|}}$

الف) $\begin{cases} ۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \\ -x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-۲ , ۰)$

ب) $\begin{cases} -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \\ ۳ - |x| > ۰ \Rightarrow |x| < ۳ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = (-۳ , ۰]$

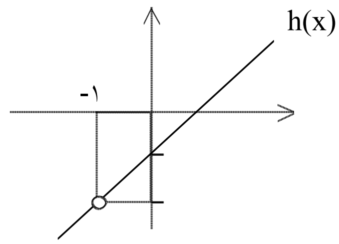
۲۰- اگر $f(x) = x^۲ - ۱$ و $g(x) = x + ۱$ باشد، نمودار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را رسم کنید.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=x-۱$$

$$D_h=R-\{-۱\}$$

$$h(x)=x-۱\xrightarrow{x\neq -۱}y\neq -۲$$

x	۰	۱
y	-۱	۰



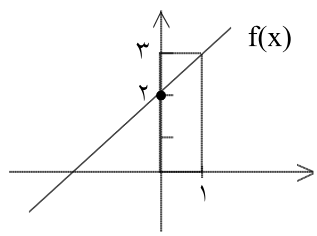
۲۱- نمودار $f(x)=\dfrac{x^{۳}+۸}{x^{۲}-۲x+۴}$ را رسم کنید.

$x^{۲}-۲x+۴=۰\Rightarrow\Delta=۴-۱۶=-۱۲<۰\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد

$$D=R$$

$$f(x)=\frac{(x+۲)\left(x^{۲}-۲x+۴\right)}{x^{۲}-۲x+۴}\Rightarrow f(x)=x+۲$$

x	۰	۱
y	۲	۳



۲۲- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۱-|x-۵|}$ ب) $g(x)=\dfrac{x+۴}{|x-۲|-۷}$

الف) $۱-|x-۵|\geq ۰\Rightarrow|x-۵|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x-۵\leq ۱\Rightarrow ۴\leq x\leq ۶$

$D_f=[۴\,,\,۶]$

ب) $|x-۲|-۷=۰\Rightarrow|x-۲|=۷\Rightarrow x-۲=\pm ۷\Rightarrow x=۹\,,\,-۵$

$D_g=R-\{۹\,,\,-۵\}$

۲۳- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۵+|x-۲|}{۳-|x+۳|}}$

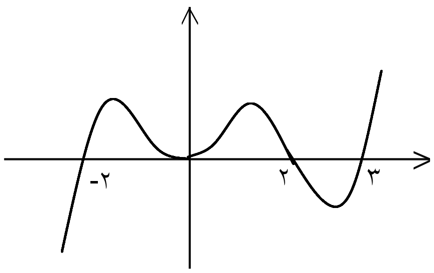
ب) $g(x)=\sqrt{x-|x|}$

الف) $\dfrac{۵+|x-۲|}{۳-|x+۳|}\geq ۰\xrightarrow{\text{همواره مثبت است } ۵+|x-۲|}۳-|x+۳|>۰\Rightarrow|x+۳|<۳$

$\Rightarrow -۳<x+۳<۳\xrightarrow{-۳}-۶<x<۰\Rightarrow D_f=(-۶\,,\,۰)$

ب) $x - |x| \geq ۰ \Rightarrow x \geq |x| \xrightarrow{\text{غیرممکن است } x > |x|} x = |x| \Rightarrow x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰ , +\infty)$

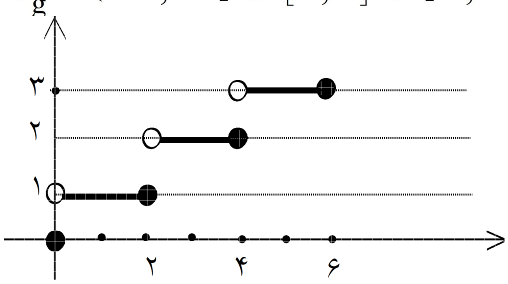
۲۴- با توجه به نمودار $f(x)$ دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را حساب کنید.



x		-۲		۰		۲		۳	
f(x)	-	•	+	•	+	•	-	•	+
x	-		-	•	+		+		+
xf(x)	+	•	-	•	+	•	-	•	+
xf(x) ≥ ۰	ج	ج		ج	ج	ج		ج	ج

$xf(x) \geq ۰$

$D_g = (-\infty , -۲] \cup [۰ , ۲] \cup [۳ , +\infty)$



۲۵- ضابطه‌ی تابعی را بیابید که نمودار آن به‌صورت مقابل باشد.

اولاً چون محور x ها دو واحد، دو واحد تقسیم‌بندی شده است، پس باید داخل براکت $\frac{x}{۲}$ داشته باشیم. از طرفی چون نقاط توپر سمت راست پاره‌خط‌هاست. پس باید $-\frac{x}{۲}$ داخل براکت داشته باشیم. حال اگر $y = \left[-\frac{x}{۲}\right]$ را در نظر بگیریم. در بازه‌ی $۰ \leqslant x < ۲$ به‌صورت $y = -۱$ در می‌آید. در حالی‌که نمودار به‌صورت $y = ۱$ است پس کافی است $y = -\left[\frac{-x}{۲}\right]$ را در نظر بگیریم. این تابع تمام شرایط نمودار را دارد.

۲۶- با توجه به تساوی‌های زیر حدود x را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $[x + ۳] = ۵$ ب) $[۳x] = ۹$ ج) $[x + [x]] = ۸$ د) $[x + ۵[x]] = ۱۸$

الف) $[x + ۳] = ۵ \Rightarrow ۵ \leq x + ۳ < ۶ \xrightarrow{-۳} ۲ \leq x < ۳$

ب) $[۳x] = ۹ \Rightarrow ۹ \leq ۳x < ۱۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳ \leq x < \frac{۱۰}{۳}$

ج) $[x] + [x] = ۸ \Rightarrow ۲[x] = ۸ \Rightarrow [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leq x < ۵$

د) $[x] + ۵[x] = ۱۸ \Rightarrow ۶[x] = ۱۸ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \leq x < ۵$

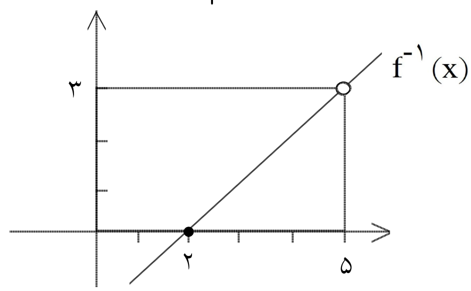
۲۷- وارون تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} - x - ۶}{x - ۳}$ را رسم کنید.

$$D_f = R - \{۳\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x - ۳)} = x + ۲$$

x	۰	۳
y	۲	۵

$\xrightarrow{\text{در تابع وارون}}$

x	۲	۵
y	۰	۳



۲۸- اگر $f(x) = ۳x - ۹$، دامنه‌ی $g(x) = \dfrac{f(x)}{f^{-۱}(۳x)}$ را حساب کنید.

$$y = ۳x - ۹ \Rightarrow y + ۹ = ۳x \xrightarrow{\div ۳} \frac{y + ۹}{۳} = x \Rightarrow \frac{y}{۳} + ۳ = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{۳} + ۳$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۳} + ۳$$

$$f^{-۱}(۳x) = \frac{۳x}{۳} + ۳ = x + ۳$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^{-۱}(۳x)} = \frac{۳x - ۹}{x + ۳} \Rightarrow D_g = R - \{-۳\}$$

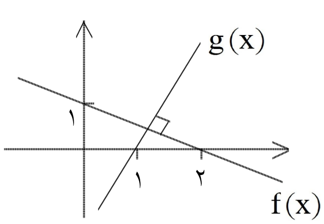
۲۹- اگر $f(x) + f^{-۱}(۲) = ۷x + ۱۴$ باشد، وارون تابع f را بنویسید.

$$\left(۲ , f^{-۱}(۲)\right) \in f^{-۱} \Rightarrow \left(f^{-۱}(۲) , ۲\right) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-۱}(۲) \\ f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ + f^{-۱}(۲) = ۷f^{-۱}(۲) + ۱۴$$

$$\Rightarrow ۶f^{-۱}(۲) = -۱۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = -۲ \xrightarrow{f^{-۱}(۲) = -۲} f(x) - ۲ = ۷x + ۱۴ \Rightarrow f(x) = ۷x + ۱۶$$

$$y = ۷x + ۱۶ \Rightarrow y - ۱۶ = ۷x \Rightarrow \frac{y - ۱۶}{۷} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - ۱۶}{۷} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x - ۱۶}{۷}$$

۳۰- ضابطه‌ی وارون تابع $g(x)$ را بنویسید.



شیب تابع f را حساب می‌کنیم.

$$\begin{matrix} A(۲ , ۰) \\ B(۰ , ۱) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱ - ۰}{۰ - ۲} = -\frac{۱}{۲}$$

از آن‌جا که f و g عمود برهم هستند شیب g قرینه و معکوس شیب f است.

$$m' = ۲ \Rightarrow y - y_۱ = m'(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۲ \Rightarrow g(x) = ۲x - ۲$$

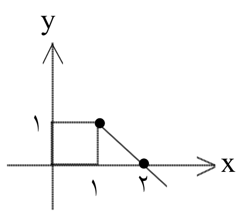
$$y = ۲x - ۲ \Rightarrow y + ۲ = ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y+۲}{۲} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+۲}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{x+۲}{۲}$$

۳۱- وارون‌پذیری تابع $f(x) = -|x - ۱| + ۱$ را با شرط $x \geq ۱$ بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیر بودن، دامنه و ضابطه‌ی وارون آن‌را به دست آورید.

چون $x \geq ۱$ است، پس حاصل $(x - ۱)$ نامنفی بوده و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$f(x) = -(x - ۱) + ۱ = -x + ۱ + ۱ = -x + ۲$$

با رسم نمودار، معلوم می‌شود که تابع f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.



$$y = -x + ۲ \Rightarrow x = ۲ - y \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ - x$$

ضمناً از روی نمودار متوجه می‌شوید که برد آن $(-\infty , ۱]$ است، پس دامنه‌ی $f^{-۱}$ هم برابر همین بازه است.

۳۲- یک به یک بودن تابع $y = (x + ۲)^۳ - ۲$ را بررسی کرده و وارون آن‌را به دست آورید.

$$f(x_۱) = f(x_۲) \leftrightarrow x_۱ = x_۲$$

$$(x_۱ + ۲)^۲ - ۲ = (x_۲ + ۲)^۳ - ۲ \quad (۰/۲۵)$$

$x_۱ + ۲ = x_۲ + ۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \quad (۰/۲۵)$ تابع یک به یک است

$$\Rightarrow y = (x + ۲)^۳ - ۲ \Rightarrow y + ۲ = (x + ۲)^۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y + ۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$$

تابع وارون $\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x + ۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$

۳۳- تابع معکوس تابع مقابل را بدست آورید. $y = ۸x^۳ + ۱۲x^۲ + ۶x + ۵$

$$y = (۲x + ۱)^۳ + ۴ \Rightarrow y - ۴ = (۲x + ۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y - ۴} = ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[۳]{y - ۴} - ۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{\sqrt[۳]{x - ۴} - ۱}{۲}$$

۳۴- معکوس‌پذیری هر یک از توابع زیر را بررسی، ضابطه‌ی تابع معکوس آن‌ها را (در صورت وجود) بیابید.

الف : $f(x) = x^۴ - ۲x^۲$ و $x \in [۰ , ۱]$

ب : $f(x) = |x - ۱|$ و $x \in [۱ , +\infty)$

ج : $f(x) = x^۲ - ۲x$ و $x \in [۱ , +\infty)$

د : $f(x) = ۳x + |x|$ و $x \in [۰ , +\infty)$

الف)

$$y=(x^{۲}-۱)^{۲}-۱\Rightarrow (x^{۲}-۱)^{۲}=y+۱\Rightarrow |x^{۲}-۱|=\sqrt{y+۱}\xrightarrow{۰\leqslant x\leqslant ۱}$$

$$۱-x^{۲}=\sqrt{y+۱}\Rightarrow x^{۲}=۱-\sqrt{y+۱}\Rightarrow |x|=\sqrt{۱-\sqrt{y+۱}}\xrightarrow{۰<x<۱}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{۱-\sqrt{y+۱}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x+۱}}$$

ب)

$$x\geqslant ۱\Rightarrow f(x)=x-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۱ \text{ و } x\geqslant ۰$$

ج)

$$y=(x-۱)^{۲}-۱\Rightarrow y+۱=(x-۱)^{۲}\Rightarrow |x-۱|=\sqrt{y+۱}\xrightarrow{x\geqslant ۱}x=۱+\sqrt{y+۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۱}$$

د)

$$x\geqslant ۰\Rightarrow f(x)=۴x\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۴} \text{ و } D_{f^{-۱}}=[۰\,,+\infty)$$

۳۵- ابتدا یک‌به‌یک بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۰\\ x^{۲}+۱ & x\geqslant ۰\end{cases}$ را بررسی کنید، سپس در صورت وجود، معکوس تابع f را تعیین کنید.

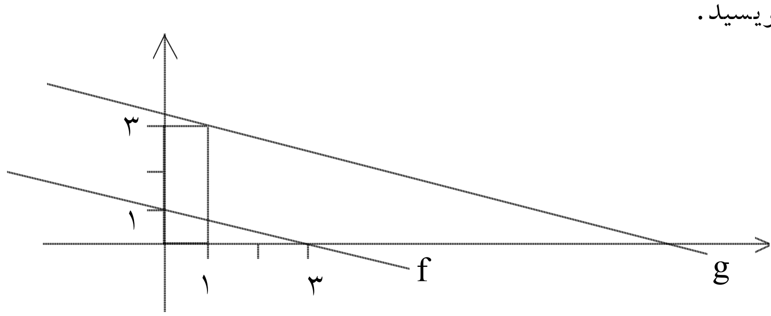
با بررسی یک به یک بودن شاخه‌ها و $R_{۱}\cap R_{۲}=\varnothing$ پس تابع یک به یک است و

$$y_{۱}=x+۱\Rightarrow x=y_{۱}-۱$$

$$y_{۲}=x^{۲}+۱\Rightarrow |x|=\sqrt{y_{۲}-۱}\xrightarrow{x\geqslant ۰}x=\sqrt{y_{۲}-۱} \qquad R_{۲}=[۱\,,+\infty)$$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}x-۱ & x<۱\\ \sqrt{x-۱} & x\geqslant ۱\end{cases}$$

۳۶- اگر دو تابع f و g موازی باشند، ضابطه‌ی $g^{-۱}$ را بنویسید.



$$\left.\begin{matrix}A(۰\,,۱)\\ B(۳\,,۰)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m=\frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}}=\frac{۱-۰}{۰-۳}=-\frac{۱}{۳}$$

چون دو خط موازی هستند بنابراین شیب g نیز برابر $-\frac{۱}{۳}$ است.

$$C(۱\,,۳)\Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}+۳\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}$$

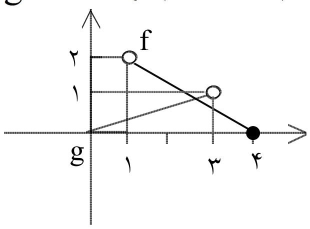
$$y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۳}x=\frac{۱۰}{۳}-y\longrightarrow x=۱۰-۳y\longrightarrow y=۱۰-۳x$$

$\Rightarrow g^{-۱}(x) = ۱۰ - ۳x$

۳۷- اگر $f = \left\{(-۴ , ۱۳),(-۱ , ۷),(۰ , ۵),\left(\frac{۵}{۲} , ۰\right),(۳ , -۵)\right\}$ و $g = \{(-۴ , -۷),(-۲ , -۵),(۰ , -۳),(۳ , ۰),(۵ , ۲),(۹ , ۶)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(-۴ , ۶),(۰ , ۲),(۳ , -۵)\}$
$(f-g)(x) = \{(-۴ , ۲۰),(۰ , ۸),(۳ , -۵)\}$

$\frac{f}{g}(x) = \left\{\left(-۴ , -\frac{۱۳}{۷}\right),\left(۰ , -\frac{۵}{۳}\right)\right\}$



۳۸- با توجه به نمودار f و g نمودار و ضابطه $f+g$ را بنویسید.

دامنه‌ی $f+g$:

$Df = (۱ , ۴]$
$D_g = [۰ , ۳) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (۱ , ۴] \cap [۰ , ۳) = (۱ , ۳)$

ضابطه $f+g$:

$g: \begin{cases} A(۰ , ۰) \\ B(۳ , ۱) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱ - ۰}{۳ - ۰} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{۱}{۳}x$

$f: \begin{cases} C(۱ , ۲) \\ D(۴ , ۰) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۲}{۴ - ۱} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۲}{۳}(x - ۴)$

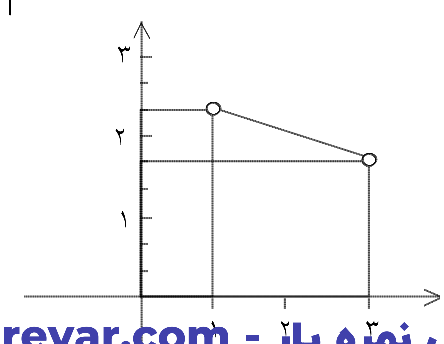
$\Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳} = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۸}{۳}$

نمودار $f+g$:

$(f+g)(x) = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۸}{۳}$

x	۱	۳
y	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$



۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۲ & x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳-۲x & x\geq ۱ \\ ۵x+۳ & x<۱ \end{cases}$ باشد توابع $f\pm g$ را محاسبه نمایید.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} ۲x+۱+۳-۲x & x\geqslant ۱ \\ ۳x-۲+۵x+۳ & x<۱ \end{cases}\Rightarrow f(x)+g(x)=\begin{cases} ۴ & x\geqslant ۱ \\ ۸x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} ۲x+۱-۳+۲x & x\geqslant ۱ \\ ۳x-۲-۵x-۳ & x<۱ \end{cases}\Rightarrow f(x)-g(x)=\begin{cases} ۴x-۲ & x\geqslant ۱ \\ -۲x-۵ & x<۱ \end{cases}$$

۴۰- برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع‌های fog و gof و دامنه‌ی آن‌ها را مشخص نمایید.

$$f(x)=x+۲ \quad , \quad g(x)=x^۲-۳$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(x^۲-۳\right)=x^۲-۳+۲=x^۲-۱$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x+۲)=(x+۲)^۲-۳=x^۲+۴x+۱$$

$$D_f=R \qquad\qquad D_g=R$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid x^۲-۳\in R\}=R$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in R \mid x+۲\in R\}=R$$