حسابان ۱

پایه ی یازدهم «رشته ی ریاضی فیزیک»

فصل ۴ : مثلثات

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

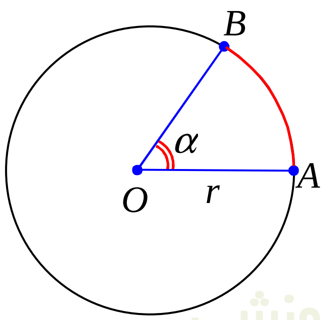
مهر ۱۳۹۹

درس اوّل : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سالهای گذشته با مفهوم زاویه آشنا شده اید. به یاد می آورید که برای اندازه گیری زاویه از درجه استفاده می شود. در واقع درجه یکی واحدهای اندازه گیری زاویه است. استفاده از درجه در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد، لذا از واحد های دیگر نیز استفاده می شود. در اینجا در پی آن هستیم که رادیان را به عنوان واحد دیگر اندازه گیری زاویه را معرفی نماییم. استفاده از رادیان در برخی مسائل ضروری است.

قسمت اوّل : آشنایی با رادیان

یک رادیان برابر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی از یک دایره است که طول کمان روبرو به آن زاویه، برابر شعاع دایره باشد.



$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = ۱ \ rad$$

تمرین ۱ : در یک دایره به شعاع ۵ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۰ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین۲ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۲ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۱ : اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان برابر خارج قسمت اندازه‌ی طول کمان روبرو به آن زاویه بر اندازه ی شعاع آن است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

تمرین ۳ : نشان دهید که محیط یک دایره به شعاع r برابر ۲π رادیان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi \ rad$$

تمرین۴ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۹۰ درجه (ربع دایره) چند رادیان است؟

حل :

$$\frac{۳۶۰}{۲\pi}=\frac{۹۰}{\alpha}\rightarrow\alpha=\frac{۲\pi\times۹۰}{۳۶۰}=\frac{\pi}{۲}\,rad$$

تمرین۵ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۱۸۰ درجه (نیم دایره) چند رادیان است؟ چرا؟

تمرین۶ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین۷ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۲ : یک دایره (دوران کامل) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

تمرین برای حل :

۸ : اندازه‌ی زاویه های ۱۲۰ درجه و ۴۵ درجه را برحسب رادیان به دست آورید.

۹ : اندازه‌ی زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را برحسب درجه به دست آورید.

۱۰ : اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در یک دایره ۱/۵ رادیان و طول کمان روبرو به آن زاویه ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱ : حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت به اندازه‌ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

***

قسمت دوّم : رابطه‌ی بین رادیان و درجه

نظر به اینکه یک دایره کمانی برابر ۳۶۰ درجه و ۲π می باشد. با تشکیل تناسب می توان، رابطه‌ی زیر بین اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه و اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان بیان کرد.

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

نتیجه ۱ : برای تبدیل واحد های اندازه‌ی زاویه از رابطه‌ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۱ : اندازه‌ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۲ : اندازه‌ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۳ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

نتیجه ۲ : زاویه‌ای که اندازه‌ی آن یک درجه باشد، اندازه‌ی آن بر حسب رادیان برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است. بنابراین :

یک درجه = $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان

***

تمرین برای حل :

۱۴ : اندازه‌ی زاویه ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

۱۵ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه را برحسب درجه به دست آورید.

۱۶ : یک دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید و روی آن زاویه های منطبق بر محور های مختصات را برحسب رادیان مشخص کنید.

۱۷ : جدول زیر را کامل کنید.

زاویه برحسب درجه	۱۳۵			۱۵
زاویه برحسب رادیان		$-\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	

۱۸ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، یک زاویه‌ی مرکزی به اندازه‌ی ۲۰ درجه رسم شده است.

الف : اندازه‌ی این زاویه را برحسب رادیان بدست آورید.

ب : طول کمان روبرو به این زاویه را تعیین کنید.

۱۹ : درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبرو به زاویه‌ی π رادیان، تقریباً برابر ۳/۱۴ سانتی متر است.

ب) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان ، در ربع دوّم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ج) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی برابر ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث ، کوچکتر از اندازه ی هر یک از ساق های آن است.

د) زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۹}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان ، زاویه های یک مثلث را تشکیل می دهند.

***

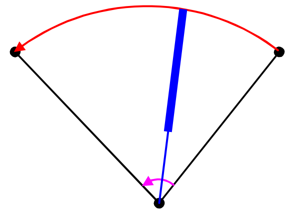
حل چند مسئله کاربردی

تمرین ۲۰ : طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاکن، کمانی به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه طی می کند.

الف : اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب : طول کمان طی شده توسط نوک برف پاکن چند سانتی متر است؟ ($\pi = ۳/۱۴$)

حل :

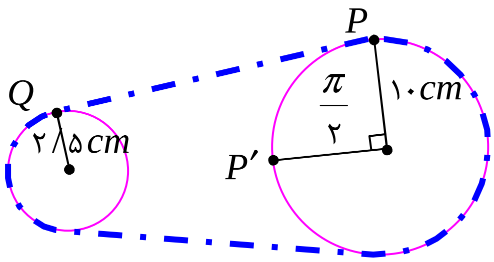


الف) $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\theta=\frac{L}{r}$

$$\frac{۲\pi}{۳}=\frac{L}{۲۴}\rightarrow L=\frac{۲\pi\times ۲۴}{۳}=۱۶\pi\approx ۵۰/۲۴\ \ cm$$

تمرین ۲۱ : در شکل مقابل، یـک تـسمه دو قرقـره بـه شعاع های۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است. بررسی کنید کـه وقتـی قرقـره‌ی بزرگتـر $\frac{\pi}{۲}$ رادیـان مـی چرخد، (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قـرار مـی گیـرد) قرقره‌ی کوچکتر چند رادیان می چرخد؟ ($\pi\ rad\ =۳/۱۴\ \ rad$)



حل : ابتدا مسافتی را که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگتر طی می کند، به دست می آوریم.

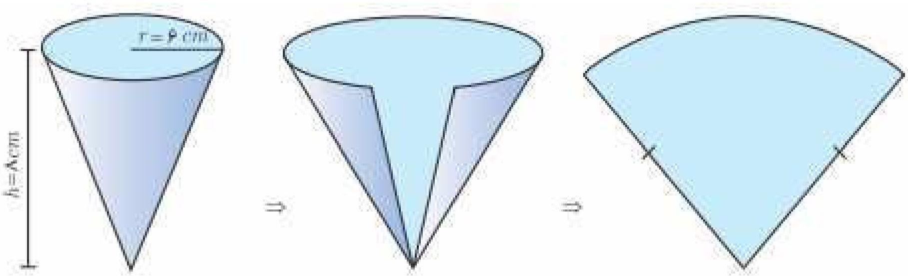
$$\theta=\frac{\overset{\frown}{PP'}}{R}\rightarrow \overset{\frown}{PP'}=R\theta=۱۰\times\frac{\pi}{۲}=۵\pi=۱۵/۷\ cm$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچکتر نیز ۵π سانتی متر حرکت می کنـد. برای این قرقره داریم:

$$\alpha=\frac{L}{r}=\frac{۵\pi}{۲/۵}=۲\pi\ \ rad$$

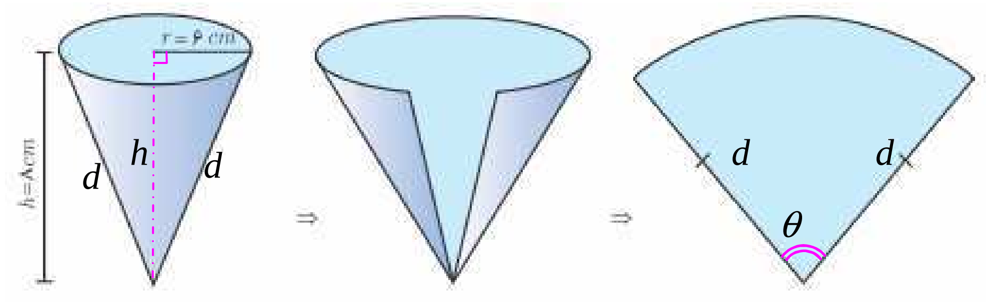
بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگتر ربع دور می چرخد، قرقره‌ی کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطـه‌ی Q به مکان خود باز می گردد.

تمرین ۲۲ : در شکل زیر، یک مخروط و گسترده‌ی آن را مشاهده می کنید.



شعاع قاعده‌ی مخروط ۶ و ارتفاع آن ۸ سانتی متر است.تعیین کنید که اندازه‌ی زاویه‌ی قطاع[1] حاصل از گسترده‌ی این مخروط چند رادیان است؟

حل :



$$d^{۲} = r^{۲} + h^{۲} \to d^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \to d = ۱۰\ cm$$

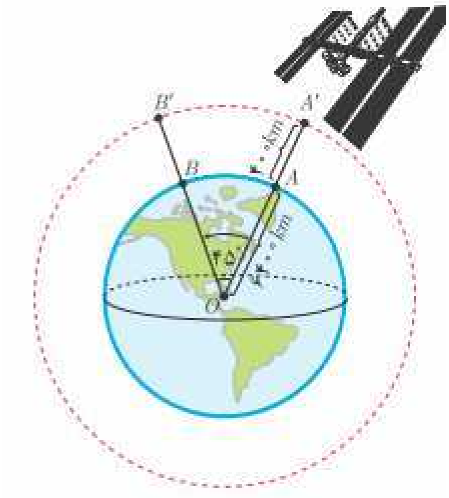
از طرفی واضح است که طول کمان مروبط به قطاع برابر محیط دایره است. لذا اگر طول کمان را برابر L فرض کنیم، آنگاه داریم:

$$L = ۲\pi r = ۲\pi(۶) = ۱۲\pi$$

و در نهایت :

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶}{۵}\pi \quad rad$$

تمرین ۲۳ : ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵ درجه می سازد، رصد می شود. تعیین کنید که این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می دهد؟ شعاع تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



حل :

[1]. به ناحیه ای از دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است، قطاع گفته می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{۴۵}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{\pi}{۴}\rightarrow\angle\alpha=\frac{\pi}{۴}\quad rad$$

$$\alpha=\frac{L}{r}\rightarrow\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۴۰۰+۴۰۰}\rightarrow\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۸۰۰}\rightarrow\overset{\frown}{A'B'}=\frac{۶۸۰۰\pi}{۴}\approx ۵۳۳۸\quad km$$

***

جداول مقادیر نسبت های مثلثاتی تعدادی از زاویه ها

الف) زاویه های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

تمرین۲۴ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A=۲\sin\frac{\pi}{۶}+\tan\frac{\pi}{۴}-\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۶}+۴\sin\frac{\pi}{۲}$$

ب) زاویه های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱−	۰
cos		۱	۰	۱−	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

تمرین۲۵ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B=\sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi-۲\tan\frac{\pi}{۴}-\sqrt{۳}\tan ۲\pi+۴\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

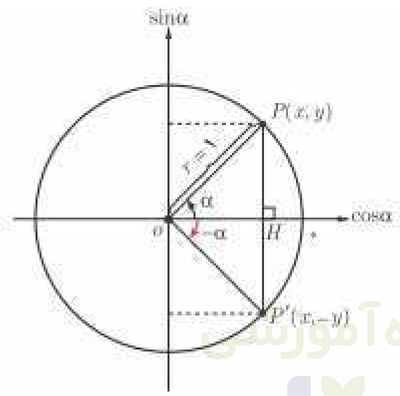
درس دومّ : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

در این درس با معرفی روابط جدید، تلاش می می کنیم که مقدار نسبت های مثلثاتی برخی از زاویه ها را بـه کمک مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه هایی که قبلاً با آنها آشنا شده ایم، محاسبه نماییم.

قسمت اوّل : نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر α یک زاویه روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینه‌ی آن است. با توجه به شکل مقابل بین نسبت هـای مثلثاتی زاویه‌ی α و قرینه‌ی آن یعنی $-\alpha$ رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$



تمرین۱ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۳۰- درجه را به دست آورید.

تمرین۲ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos(-\frac{\pi}{۳}) \times \cos(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۴}) =$

ب) $\dfrac{\cos(-۹۰^\circ) + \sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ) - \cos(-۳۶۰^\circ)} =$

ج) $\cot(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۳}) =$

د) $\cos(-۴۵^\circ) \times \cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ) \times \sin(-۶۰^\circ) =$

***

قسمت دوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد[1]. اگر β و α دو زاویـه‌ی متمم باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha$$

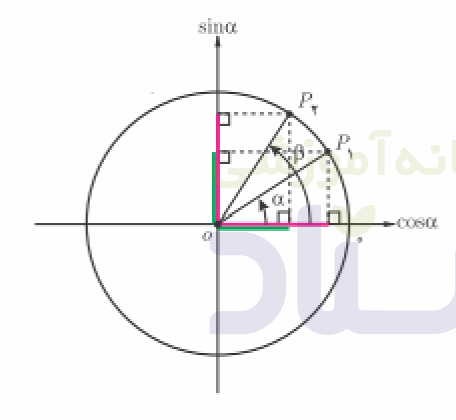
بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و متمم آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، مـی تـوان رابطـه‌ی زیـر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan(\alpha)$$



تمرین۳ : متمم زاویه های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{\pi}{۷}$

ب) -۲۵°

تمرین۴ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin ۷۲^\circ=\cos(\quad)$

ب) $\tan\frac{۵\pi}{۱۴}=\cot(\quad)$

تمرین ۵ : اگر $\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$، حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$\cos(۷۵^\circ)=$

---

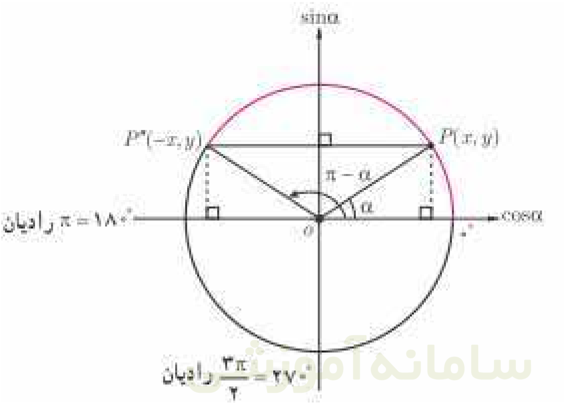
[1] و به طور کلی مجموع آنها $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشند.

قسمت سوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها۱۸۰ درجه یا π رادیان[2] باشد. اگر β و αدو زاویه‌ی مکمل باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha+\beta=\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\pi-\alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و مکمل آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می تـوان رابطـه‌ی زیـر را نوشت :



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

تمرین۸ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۹: حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\tan\frac{۲\pi}{۳}=$

ب) $\cos\frac{۳\pi}{۴}=$

پ) $\sin ۱۲۰^\circ =$

ت) $\cot(-۱۲۰^\circ)=$

ث) $\cos(۱۳۵^\circ)=$

تمرین۱۰ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

---

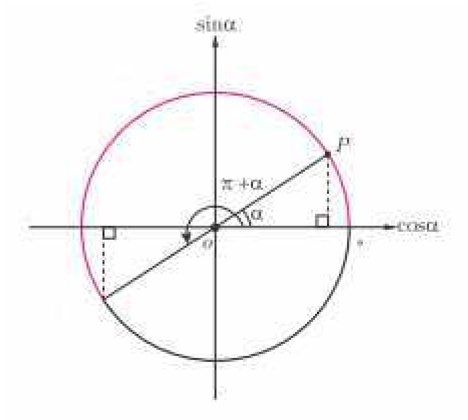
[2]. و به طور کلی مجموع آنها $۲k\pi+\pi$ رادیان باشند.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۱۸۰ درجه یا π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta-\alpha=\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\pi+\alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot(\alpha)$$

تمرین۱۱ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cot\frac{۵\pi}{۴}=$

ب) $\cos(-\frac{۴\pi}{۳})=$

پ) $\sin ۲۲۵^\circ=$

ت) $\tan(۲۲۵^\circ)=$

ث) $\sin(-\frac{۷\pi}{۶})=$

تمرین۱۲ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

قسمت پنجم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. در ایـن صـورت مـی تـوان نوشت، $\beta-\alpha=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}+\alpha$$

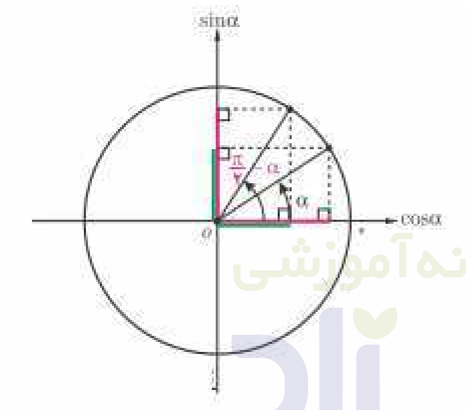
لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan(\alpha)$$



تمرین۱۳ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

$$\sin(\frac{۲\pi}{۳})=$$

تمرین۱۴ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را به دست آورید.

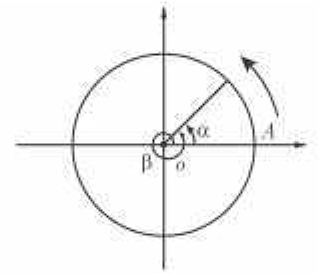
***

قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۳۶۰ درجه یا 2π رادیان شود. در این صورت مـی تـوان نوشت، $\beta-\alpha=2\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=2\pi+\alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos(\alpha)$$
$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$$
$$\cot(2\pi+\alpha)=\cot(\alpha)$$

تمرین۱۵ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin(405^\circ)=$

ب) $\cos(\frac{5\pi}{3})=$

***

روش سریع محاسبه‌ی نسبت های مثلثاتی

بر اساس آنچه که داشتیم ، می توان روابط دیگری را بررسی کرد که به طور مختصر این روابط را بـه شـکل زیر عنوان می کنیم.

الف) اگر زاویه‌ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

ب) در نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مـضربهای فرد π را حذف کنیم،باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(3\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

ج) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(۳\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه‌ی α، ربعی که زاویه‌ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده وجلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=+\cos\alpha$$ ربع دوّم

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$ ربع سوّم

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=+\cot\alpha$$ ربع اوّل

توجه ۱ : اگر $n\in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\sin\alpha$$

$$\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cos(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha$$

توجه۲ : با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

***

تمرین۱۶: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan ۱۲۰^\circ =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ) =$

۴) $\cos(-۱۵۰^\circ) =$

۵) $\sin(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha) =$

۶) $\sin(\alpha - ۳\pi) =$

تمرین۱۷ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ) + \cot(۳۰^\circ).\cos(۲۱۰^\circ) - \tan(-۱۳۵^\circ) = -\frac{۳}{۲}$$

تمرین۱۸ : در تساوی زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

$$\sin(x) = \cos(۱۰^\circ + x)$$

حل : دو زاویه باید متمم همدیگر باشند. پس :

$$x + ۱۰ + x = ۹۰ \rightarrow ۲x = ۸۰ \rightarrow x = ۴۰$$

***

تمرین برای حل:

۱۹ : مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) =$

ب) $\tan(\frac{۱۱}{۶}\pi) =$

ج) $\cos(\frac{۲۵\pi}{۳})$

۲۰ : نشان دهید که $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos(\pi - \theta) = ۰$

۲۱ : مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-۳۰^\circ)\cot(۱۵۰^\circ) - \tan(۱۳۵^\circ) =$

ب) $\frac{\sin(۲۴۰^\circ)\times\cos(۱۲۰^\circ) + \cos(-۲۷۰^\circ)\times\sin(۳۰^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ)\times\cos(-۱۳۵^\circ) + \tan(۴۵^\circ)} =$

۲۲ : حاصل $\tan(۲۰^\circ) + \tan(۴۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) + ... + \tan(۱۸۰^\circ)$ را به دست آورید.

۲۳ : حاصل $\dfrac{\sin(۳۰۰^\circ)}{۱-\cos(۲۴۰^\circ)}$ را به دست آورید.

۲۴ : مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A=\frac{\cos(۲۴۰^\circ)+\sin(-۱۵۰^\circ)}{\tan(-۴۵^\circ)}$$

۲۵ : درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\times\cos(\frac{\pi}{۲}-x)+\cos(x-۲\pi)\times\sin(x-\pi)+\tan(-x)\times\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=۱$$

ب) $۳\sin(۷۰^\circ)+\sin(۵۵^\circ)+\cos(۲۱۵^\circ)+۲\cos(۱۶۰^\circ)=\cos(۲۰^\circ)$

۲۶ : رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(۲۳۰^\circ)-۲\sin(۱۴۰^\circ)+\sin(۴۱۰^\circ)+\cos(-۵۰^\circ)+\sin(۴۰^\circ)=۰$$

۲۷ : آیا دو زاویه می توان یافت که سینوس یکسان داشته باشند؟ چرا؟ برای کسینوس چطور؟

۲۸ : درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

۱) $\sin(۸۴۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ)$

۲) $\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos(۳۶^\circ)$

۳) $\tan(-۱۰۰۰^\circ)=\tan(۸۰^\circ)$

۴) $\sin(۸۷۵^\circ)=\sin(۱۵۵^\circ)$

۵) $\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)=۰$

۶) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+\cos\alpha=۱$

۷) $\cos(۷)=\cos(-۷)$

۸) $\tan(\pi-\theta)=\tan\pi-\tan\theta$

۲۹ : در تساوی های زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

الف) $\sin(x)=\cos(۲۰^\circ+x)$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{۱۸})=\cot(\frac{۲\pi}{۹}+x)$

***

درس سوّم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با برخی از اتحاد های مهم مثلثاتی از جمله اتحاد های زیر آشنا شده اید.

۵. $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	۳. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۱. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
۶. $\tan\alpha.\cot\alpha=1$	۴. $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	۲. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نتیجه : اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

ب) $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

ج) $\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$

د) $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

در این درس، نسبت های مثلثاتی زاویه هایی که به صورت مجموع یا تفاضل دو زاویه نوشته می شوند (که زاویه های مرکب نیز گفته می شوند)، بر حسب نسبت های مثلثاتی آن دو زاویه را محاسبه می کنیم.

قسمت اوّل : محاسبه‌ی نسبت های مثلثاتی زاویه های مجموع و تفاضل دو زاویه

برای هر دو زاویه‌ی β و α ثابت می شود که :

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta$

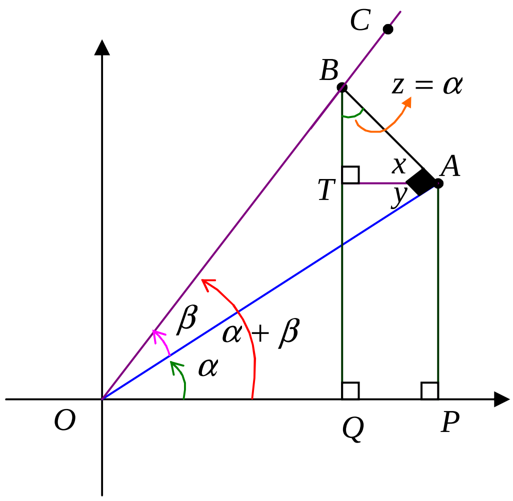
۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$

۵) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

۶) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

تمرین ۱ : رابطه های فوق را ثابت کنید.



اثبات : فرض کنید که نیم خط OA با محور طول ها زاویه‌ی α و با نیم خط OC زاویه‌ی β بسازند. از A بر OA عمودی خارج می کنیم تا OC را در نقطه‌ی B قطع کند. از A عمود AP و از B عمود BQ را بر محور طول ها رسم می کنیم. همچنین از A عمود AT را بر BQ فرود می آوریم.

$$\begin{cases} AT \perp BQ \\ BQ \perp OP \end{cases} \rightarrow AT \parallel OP \rightarrow \alpha = y \xrightarrow{x+y=۹۰\,,\,z+x=۹۰} y = z = \alpha$$

حال چون چهار ضلعی $ATQP$ مستطیل است ، پس $TQ = AP$

همچنین

$$\Delta OBQ : \sin(\alpha+\beta) = \frac{BQ}{OB}$$

$$\Delta ABT : \cos\alpha = \frac{BT}{AB} \rightarrow BT = AB.\cos\alpha$$

$$\Delta OAP : \sin\alpha = \frac{AP}{OA} \rightarrow AP = OA.\sin\alpha$$

$$\Delta OAB : \sin\beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\Delta OAB : \cos\beta = \frac{OA}{OB}$$

لذا در نهایت داریم.

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BQ}{OB} = \frac{BT+TQ}{OB} = \frac{BT+AP}{OB} = \frac{AB.\cos\alpha + OA.\sin\alpha}{OB}$$

$$= \frac{AB.\cos\alpha}{OB} + \frac{OA.\sin\alpha}{OB} = \frac{AB}{OB}.\cos\alpha + \frac{OA}{OB}.\sin\alpha = \sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha$$

$$= \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

به روش مشابه داریم :

$$\Delta OBQ : \cos(\alpha+\beta) = \frac{OQ}{OB}$$

$$\Delta ABT : \sin\alpha = \frac{AT}{AB} \rightarrow AT = AB.\sin\alpha$$

$$\Delta OAP : \cos\alpha = \frac{OP}{OA} \rightarrow OP = OA.\cos\alpha$$

$$\Delta OAB : \cos\beta = \frac{OA}{OB}$$

$$\Delta OAB : \sin\beta = \frac{AB}{OB}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OQ}{OB} = \frac{OP-QP}{OB} = \frac{OP-AT}{OB} = \frac{OA.\cos\alpha - AB.\sin\alpha}{OB}$$

$$= \frac{OA.\cos\alpha}{OB} - \frac{AB.\sin\alpha}{OB} = \frac{OA}{OB}.\cos\alpha - \frac{AB}{OB}.\sin\alpha = \cos\beta.\cos\alpha - \sin\beta.\sin\alpha$$

$$= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

اثبات قسمت های دیگر نیز به سادگی و به کمک دو تساوی اثبات شده در فوق انجام می گیرد.

اثبات بند ۲

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta))$$
$$= \sin\alpha.\cos(-\beta) + \cos\alpha.\sin(-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$

اثبات بند۴

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta))$$
$$= \cos\alpha.\cos(-\beta) - \sin\alpha.\sin(-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$

اثبات بند ۵

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

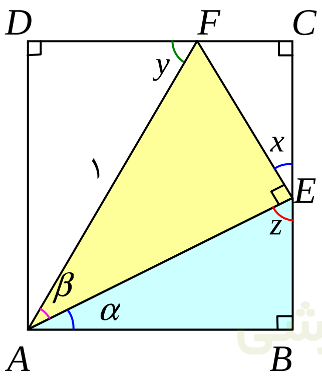
$$= \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}+\frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}-\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$$

اثبات بند۶

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{۱-\tan\alpha.\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$$

***



اثبات دیگر : در شکل روبرو، مثلث AEF، یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر یک است. از رأس های این مثلث خطوطی چنان رسم شده است که چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل شود. در این صورت چون زاویه‌ی BEC یک زاویه‌ی نیم صفحه است ، پس:

$$x+۹۰+z=۱۸۰ \quad (۱)$$

همچنین در مثلث ABE داریم :

$$\alpha+۹۰+z=۱۸۰ \quad (۲)$$

از تساوی های (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت:

$$x=\alpha$$

اضلاع AB و DC با هم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن قطع کرده است. لذا :

$$\angle DFA=\angle FAB$$

یعنی

$$y=\alpha+\beta$$

از طرفی با توجه به این شکل خواهیم داشت:

$$\Delta(ADF):\begin{cases}\sin y=\frac{AD}{AF}\xrightarrow{y=\alpha+\beta\ ,\ \ AF=۱}\sin(\alpha+\beta)=AD\\ \cos y=\frac{DF}{AF}\xrightarrow{y=\alpha+\beta\ ,\ \ AF=۱}\cos(\alpha+\beta)=DF\end{cases}$$

$$\Delta(AEF):\begin{cases}\sin\beta=\dfrac{EF}{AF}\xrightarrow{AF=۱}\sin\beta=EF\\ \cos\beta=\dfrac{AE}{AF}\xrightarrow{AF=۱}\cos\beta=AE\end{cases}$$

$$\Delta(ABE):\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{BE}{AE}\xrightarrow{AE=\cos\beta}\sin\alpha=\dfrac{BE}{\cos\beta}\rightarrow BE=\sin\alpha.\cos\beta\\ \cos\alpha=\dfrac{AB}{AE}\xrightarrow{AE=\cos\beta}\cos\alpha=\dfrac{AB}{\cos\beta}\rightarrow AB=\cos\alpha.\cos\beta\end{cases}$$

$$\Delta(ECF):\begin{cases}\sin x=\dfrac{CF}{EF}\xrightarrow{EF=\sin\beta}\sin\alpha=\dfrac{CF}{\sin\beta}\rightarrow CF=\sin\alpha.\sin\beta\\ \cos x=\dfrac{EC}{EF}\xrightarrow{EF=\sin\beta}\cos\alpha=\dfrac{EC}{\sin\beta}\rightarrow EC=\cos\alpha.\sin\beta\end{cases}$$

در نهایت با توجه به اینکه چهارضلعی $ABCD$ مستطیل می باشد. نتیجه می شود که :

$$AD=BE+EC\rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$$

$$DF=AB-CF\rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$$

تمرین۲ : تساوی های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\sin(۷۵^\circ)=$

۲) $\cos(۷۵^\circ)=$

۳) $\sin(۱۵^\circ)=$

۴) $\cos(۱۵^\circ)$

تمرین۳ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(x-۳۰^\circ)+\cos(x+۶۰^\circ)=۰$$

تمرین۴ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=\frac{\sin(۲۳)\cos(۲۷)+\cos(۲۳)\sin(۲۷)}{\cos(۲۳)\cos(۱۷)-\sin(۲۳)\sin(۱۷)}$$

حل :

$$A=\frac{\sin(۲۳+۲۷)}{\cos(۲۳+۱۷)}=\frac{\sin(۵۰)}{\cos(۴۰)}=۱$$

تمرین۵ : ثابت کنید که $\sin ۵۰+\sqrt{۳}\cos ۵۰=۲\cos ۲۰$

حل :

$$\sin ۵۰ + \sqrt{۳}\cos ۵۰ = \sin ۵۰ + \tan ۶۰ \cos ۵۰$$

$$= \sin ۵۰ + \frac{\sin ۶۰}{\cos ۶۰}\cos ۵۰ = \frac{\sin ۵۰ \cos ۶۰ + \cos ۵۰ \sin ۶۰}{\cos ۶۰}$$

$$= \frac{\sin(۵۰+۶۰)}{\cos ۶۰} = \frac{\sin ۱۱۰}{\cos ۶۰} = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲۰)}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\cos ۲۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲\cos ۲۰$$

***

قسمت دوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر و سه برابر کمان

۱) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha = \begin{cases} \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \\ ۲\cos^۲\alpha - ۱ \\ ۱ - ۲\sin^۲\alpha \end{cases}$

۳) $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

۴) $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$

۵) $\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$

۶) $\tan ۳\alpha = \dfrac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱-۳\tan^۲\alpha}$

تمرین۶ : رابطه های فوق را ثابت کنید.

۱ :

$$\sin ۲\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$$
$$= \sin\alpha.\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha$$

۲ :

$$\cos ۲\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha - (۱-\cos^۲\alpha) = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = (۱ - \sin^۲ \alpha) - \sin^۲ \alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$$

۳:

$$\tan ۲\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{۱ - \tan\alpha.\tan\alpha} = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha}$$

۴:

$$\sin ۳\alpha = \sin(۲\alpha + \alpha) = \sin ۲\alpha.\cos\alpha + \cos ۲\alpha.\sin\alpha$$

$$= ۲\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha + (۱ - ۲\sin^۲ \alpha).\sin\alpha$$

$$= ۲\sin\alpha.\cos^۲ \alpha + \sin\alpha - ۲\sin^۳ \alpha = ۲\sin\alpha.(۱ - \sin^۲ \alpha) + \sin\alpha - ۲\sin^۳ \alpha$$

$$= ۲\sin\alpha - ۲\sin^۳ \alpha + \sin\alpha - ۲\sin^۳ \alpha$$

$$= ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳ \alpha$$

۵:

$$\cos ۳\alpha = \cos(۲\alpha + \alpha) = \cos ۲\alpha.\cos\alpha - \sin ۲\alpha.\sin\alpha$$

$$= (۲\cos^۲ \alpha - ۱).\cos\alpha - ۲\sin\alpha.\cos\alpha.\sin\alpha$$

$$= ۲\cos^۳ \alpha - \cos\alpha - ۲\sin^۲ \alpha.\cos\alpha$$

$$= ۲\cos^۳ \alpha - \cos\alpha - ۲(۱ - \cos^۲ \alpha).\cos\alpha$$

$$= ۲\cos^۳ \alpha - \cos\alpha - ۲\cos\alpha + ۲\cos^۳ \alpha$$

$$= ۴\cos^۳ \alpha - ۳\cos\alpha$$

۶:

$$\tan ۳\alpha = \tan(۲\alpha + \alpha) = \frac{\tan ۲\alpha + \tan\alpha}{۱ - \tan ۲\alpha.\tan\alpha} = \frac{\frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲} + \tan\alpha}{۱ - (\frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲})\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲} + \tan\alpha}{۱ - (\frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲})\tan\alpha} = \frac{\frac{۲\tan\alpha + \tan\alpha(۱ - \tan^۲ \alpha)}{۱ - \tan^۲}}{\frac{۱ - \tan^۲ \alpha - ۲\tan^۲ \alpha}{۱ - \tan^۲}} = \frac{\frac{۲\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^۳ \alpha}{۱ - \tan^۲}}{\frac{۱ - \tan^۲ \alpha - ۲\tan^۲ \alpha}{۱ - \tan^۲}}$$

$$=\frac{\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2}}{\frac{1-3\tan^2\alpha}{1-\tan^2}}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

تمرین۷ : به کمک نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی۶۰ درجه تساوی های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin(120^\circ)=$ ب) $\cos(120^\circ)=$

تمرین۸ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ ج) $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

ب) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ د) $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

تمرین برای حل :

۹ : تساوی های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\sin\frac{\pi}{12}=$ ۲) $\tan(105^\circ)=$ ۳) $\cot(105^\circ)=$

۱۰ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a.\cos b$

ب) $\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a.\cos b$

۱۱ : اگر z و y و x سه زاویه‌ی یک مثلث باشند، ثابت کنید که

$$\tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z$$

۱۲ : اگر α زاویه‌ای در ربع اوّل و β زاویه ای در ربع سوّم دایره‌ی مثلثاتی باشند و $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و $\cos\beta=-\frac{5}{13}$. مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(\alpha+\beta)=$

ب) $\cos(\alpha-\beta)=$

ج) $\tan(\alpha+\beta)=$

د) $\cot(\alpha+\beta)=$

۱۳ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$

ب) $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

ج) $\sin^{۲}x-\sin^{۲}y=\sin(x+y).\sin(x-y)$

د) $\cos^{۲}x-\cos^{۲}y=\cos(x+y).\cos(x-y)$

۱۴ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A=\frac{\cos(۲۰^\circ)\cos(۴۰^\circ)-\sin(۲۰^\circ)\sin(۴۰^\circ)}{\sin(۲۰^\circ)\cos(۴۰^\circ)+\cos(۲۰^\circ)\sin(۴۰^\circ)}$$

۱۵ : مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x=\frac{\pi}{۱۵}$ را محاسبه کنید.

$$A=\sin ۳x\cos ۲x+\sin ۲x\cos ۳x$$

۱۶ : حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=\sin(۱۵^\circ)-\sqrt{۳}\cos(۱۵^\circ)$$

۱۷ : اگر α زاویه‌ای در ربع دوّم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(۲\alpha)=$

ب) $\cos(۲\alpha)=$

۱۸ : عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}$

ب) $\frac{\sin ۲\alpha}{۱-\cos ۲\alpha}$

ج) $\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۱-\cos ۲\alpha}$

۱۹ : حاصل عبارت زیر را به ازای $x=\frac{\pi}{۲۴}$ بیابید.

$$A=\sin x\cos^{۳}x-\sin^{۳}x\cos x$$

۲۰ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = \cos ۲x$

ب) $\sin ۴\theta = ۴\sin\theta\cos^{۳}\theta - ۴\sin^{۳}\theta\cos\theta$

ج) $\sin ۴\theta = ۸\sin\theta\cos^{۳}\theta - ۴\sin\theta\cos\theta$

د) $\sin^{۲}(۴۵+\alpha) - \sin^{۲}(۴۵-\alpha) = \sin ۲\alpha$

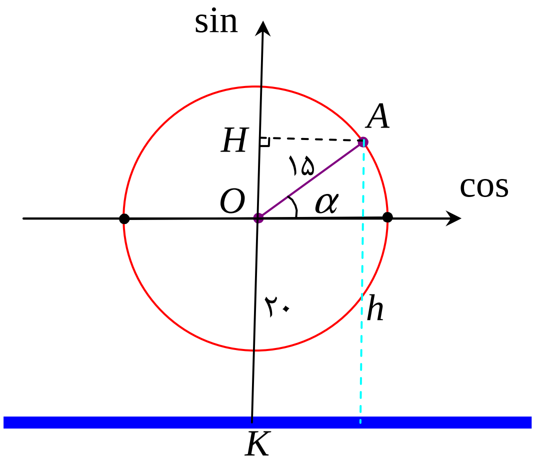
***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس چهارم : توابع مثلثاتی



قبل از ورود به بحث توابع مثلثاتی، مثال زیر را حل می کنیم.

یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است. واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه‌ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin\alpha = \frac{OH}{OA} \to OH = OA.\sin\alpha = ۱۵\sin\alpha$$

$$h = KH = OK + OH = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

$$\to h = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک **تابع مثلثاتی** می نامند. با توجه به این تابع به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: ارتفاع کابین را وقتی که $\alpha = ۱۲۰^\circ$ را به دست آورید.

ب : مقدار حداقلی و مقدار حداکثری ارتفاع کابین را تعیین کنید.

ج : تعیین کنید، که زاویه‌ی α چقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ متر شود.

***

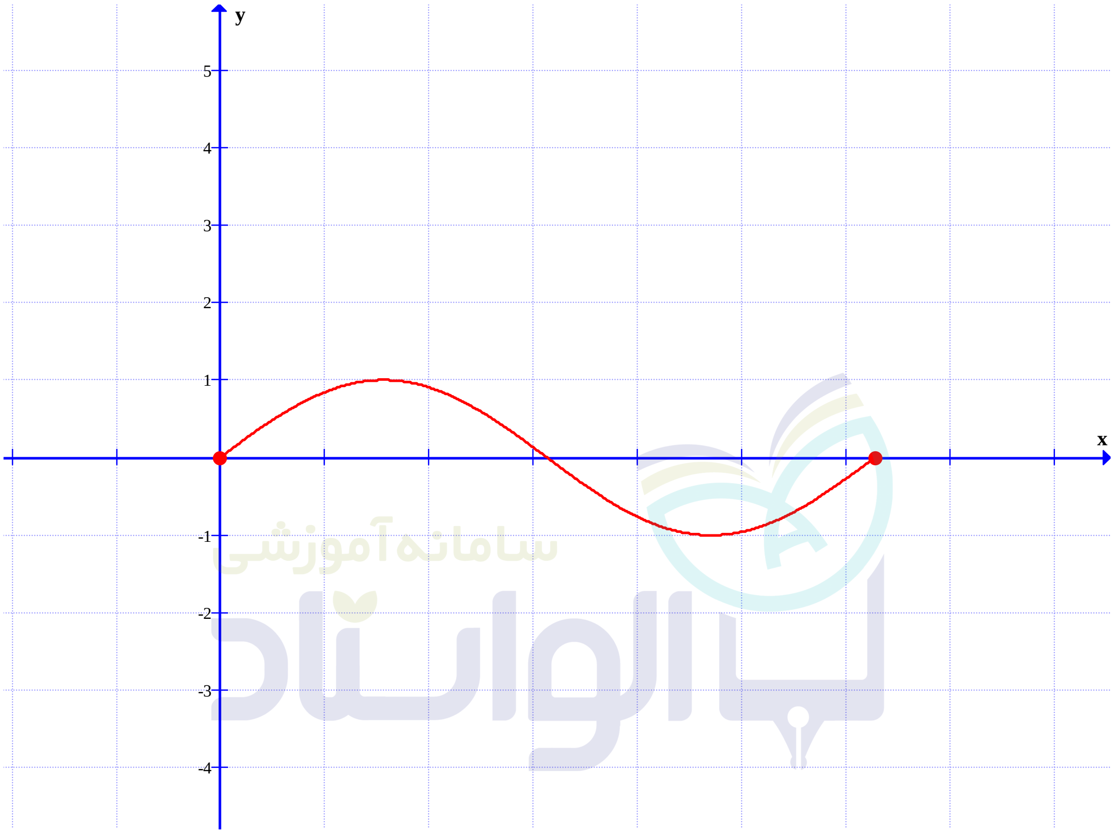
قسمت اوّل : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع های $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. برای رسم نمودار چنین توابعی ساده ترین روش، انتخاب چند نقطه به کمک معادله و پیدا کردن آنها روی دستگاه مختصات (روش نقطه یابی) می باشد.

مثال ۱ : نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

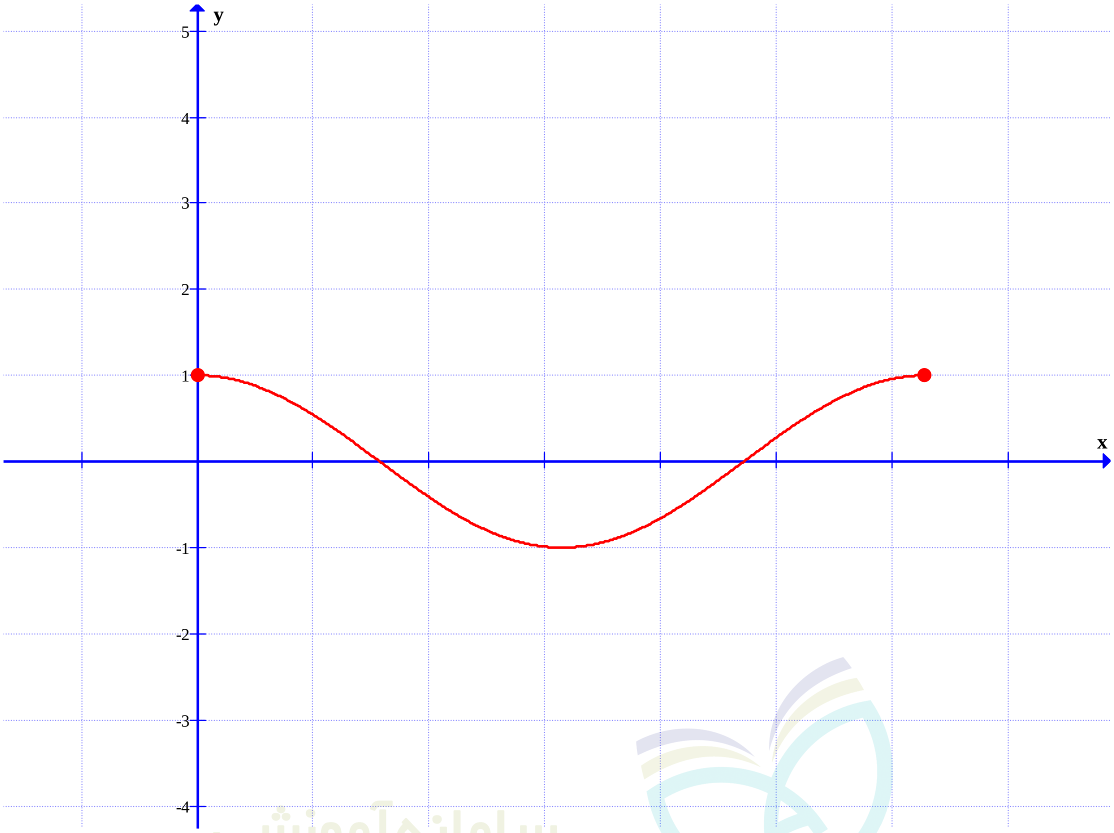
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



مثال۲ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱



تمرین ۱ : نمودار تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

***

قسمت دوّم : توابع مثلثاتی

در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری ($\max$) تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ برابر ۱ و مقدار حداقلی ($\min$) آنها برابر ۱− می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه‌ی تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آنها بازه‌ی $[-۱,۱]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=\sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد، ولی تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه‌ی $(۰,۱)$ می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یـک از این فاصله ها را دوره‌ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T=۲\pi$ می باشد.

تمرین۲ : مقدار تابع $f(x)=۲\sin ۳x$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ بدست آورید.

تمرین۳ : مقدار تابع $f(x)=-۲\sin(\pi-x)$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

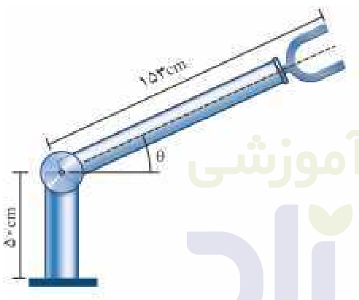
تمرین۴ : مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ را به دست آورید.

$$f(x)=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

تمرین۵ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

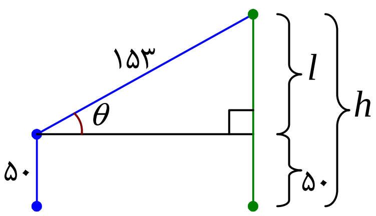
$$f(x)=۳+۲\sin x$$

تمرین۶ : روبات ها در زمینه های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات ها از توابع مثلثاتی استفاده می شود. در شکل روبرو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودرو سازی کاربرد دارد، مشاهده می کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره‌ی روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل سازی کنید.



$$۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$$

حل : با توجه به شکل مقابل که با توجه به وضعیت روبات ترسیم شده است ، داریم.



$$\sin\theta=\frac{l}{۱۵۳}\to l=۱۵۳\sin\theta$$

لذا تابع ارتفاع نوک گیره روبات به شکل زیر است.

$$h=۵۰+l=۵۰+۱۵۳\sin\theta$$

***

تمرین برای حل :

۷ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۳-۵\cos x$$

۸ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$f(x)=۷+۲\sin x$

۹ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) تابع $y=\sin x$ یعنی سینوس زاویه ای از دایره‌ی مثلثاتی که اندازه‌ی x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است.

پ) $\cos ۳=\cos(۳^\circ)$

ت) اگر $\circ<x<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱<\cos x<\circ$ است.

ث) $x=\pi$ صفر تابع $f(x)=\cos x$ است.

ج) عددی می توان یافت که سینوس آن برابر ۲− باشد.

ح) حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.

خ) حداقل مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ است.

۱۰ : جملات زیر را در مورد توابع $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه‌ی تابع سینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

ب) دامنه‌ی تابع کسینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

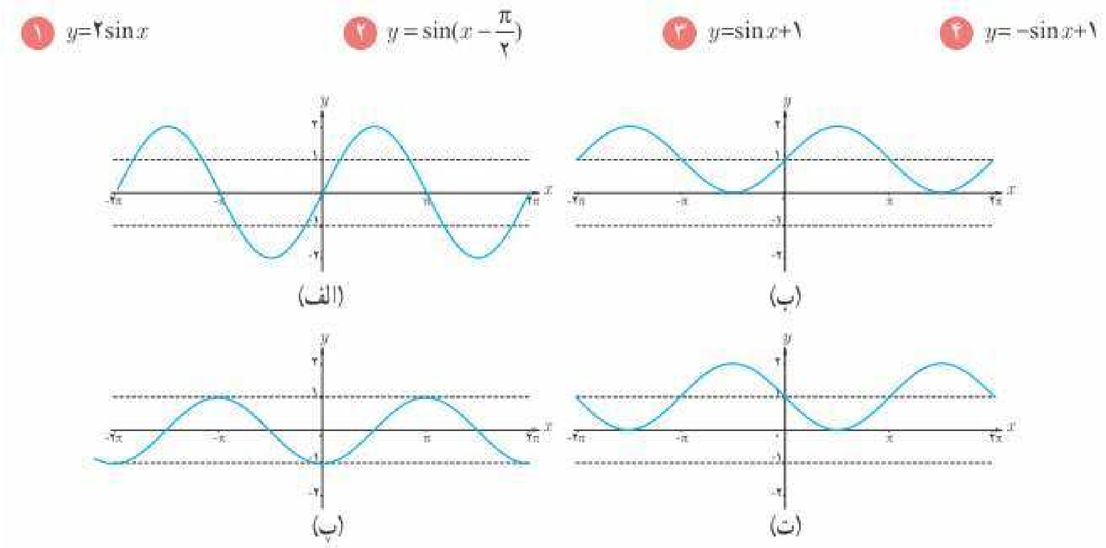
پ) مقدار تابع سینوس در طول های $(k\in Z)$ $x=k\pi$، برابر .... است.

ت) مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های .... برابر با صفر است.

ث) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های $(k\in Z)$ $x=۲k\pi$ است.

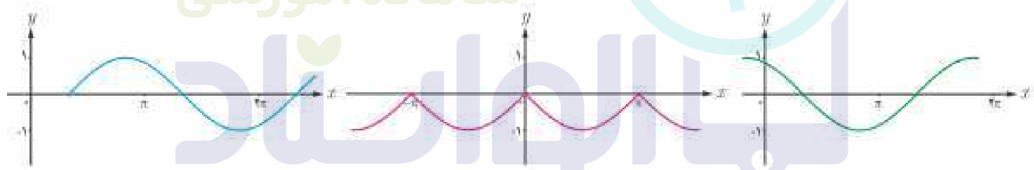
ج) حداقل مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های .... به دست می آید.

۱۱ : هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است.



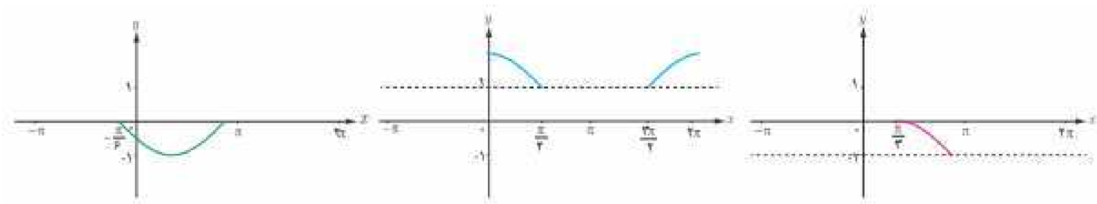
۱۲ : توابع مثلثاتی زیر را با نمودار های داده شده نظیر کنید.

الف) $y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۶})$ ج) $y=-|\sin x|$



۱۳ : در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودار ها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۳})-۱$ ج) $y=۱+|\cos x|$



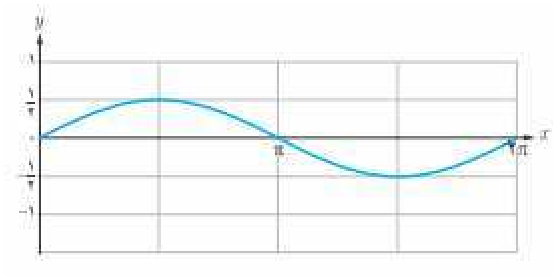
۱۴ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=۳\cos x$ ۳) $y=۲\sin x-۱$ ۵) $y=-\sin x$

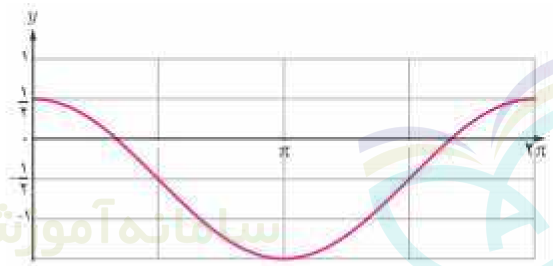
۲) $y=۱+\sin x$ ۴) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ ۶) $y=|\sin x|$

۱۵ : با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند؟

الف : شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می دهد.



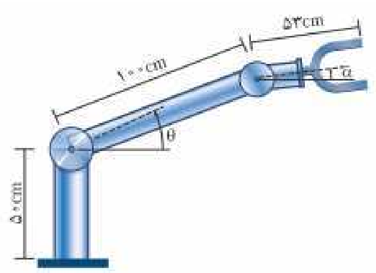
ب : شکل زیر نمودار تابع $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می دهد.



پ : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=۱+\sin x$ کافی است، نمودار تابع سینوس را به اندازه‌ی یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-\cos x$ کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

۱۶ : در طراحی روبات های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبرو در نظر می گیرند.



الف : ارتفاع نوک گیره‌ی این روبات را از سطح زمین بر اساس توابع از زاویه های θ و α مدل سازی کنید.

$$\left(-\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}\quad \text{و}\quad ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\right)$$

ب : فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳/۵ سانتی متر ، مفصل دوّم خـود را در حالـت $\alpha = -۳۰$ درجه قرار داده است. تعیین کنید زاویه‌ی θ در این وضعیت چند درجه است؟

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان