«فصل ۴» « مثلثات»

واحدهای اندازه‌گیری: ۱- درجه ۲- گراد ۳- رادیان

۱- درجه: اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ مثلث تقسیم نماییم و به هر قسمت یک درجه گویند. بنابراین هریک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است. اجزای درجه، دقیقه و ثانیه هستند که هر دقیقه $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و هر ثانیه $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه است بنابراین هر ثانیه $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه می‌باشد.

اگر اندازه زاویه AOB برابر با ۱۲ درجه و ۷ دقیقه و ۱۹ ثانیه باشد آن را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\widehat{AOB} = ۱۲°, ۷', ۱۹''$$

۲- گراد: اگر محیط یک دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم نماییم به هر قسمت **یک گراد** گویند بنابراین هر یک گراد $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره است. برای نشان‌دادن اندازه یک زاویه برحسب گراد از علامت **gr** استفاده می‌کنیم در اندازه‌گیری زوایای کوچکتر از یک گراد، **دسی گراد** برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ گراد، **سانتی‌گراد** برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد، **میلی گراد** برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد استفاده می‌کنیم.
اگر اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ برابر با ۳۹ گراد و ۴ دسی گراد و ۵ سانتی گراد و ۷ میلی گراد باشد آن را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\widehat{AOB} = ۳۹/۴۵۷\ gr$$

۳- رادیان: اگر به روی یک دایره به اندازه محیط دایره کمان AB را جدا کنیم اندازه‌ی زاویه مرکزی روبه‌رو کمان برابر یک رادیان است. بنابراین اگر محیط دایره برحسب **شعاع** $۲\pi R$ باشد محیط دایره برحسب رادیان $\frac{۲\pi R}{R}$ معادل ۲π است و از آنجایی که $\pi = ۳/۱۴$ می‌باشد پس محیط برحسب **رادیان** ۶/۲۸ است. می‌توانیم همچون موارد بالا نتیجه بگیریم که هر رادیان $\frac{۱}{۲\pi}$ **محیط دایره** است.

$$\frac{\overset{\text{درجه}}{\overset{\frown}{D}}}{۳۶۰} = \frac{\overset{\text{گراد}}{\overset{\frown}{G}}}{۴۰۰} = \frac{\overset{\text{رادیان}}{\overset{\frown}{R}}}{۲\pi} \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

❓ **مثال)** اندازه زاویه برحسب گراد ۲۲/۴ است، اندازه آن را برحسب درجه و رادیان بنویسید؟

مثال: در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه‌ی $A = ۸۰^\circ$ و اندازه زاویه C برحسب رادیان $\frac{\pi}{۷۲۰}$ اندازه زاویه B است برحسب درجه ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تست: مجموع دو زاویه برحسب گراد برابر ۱۰۰ و تفاضل آن‌ها برحسب رادیان $\frac{\pi}{۶}$ می‌باشد. زاویه بزرگ‌تر برحسب درجه کدام است؟

۱) ۴۰　　۲) ۵۰　　۳) ۶۰　　۴) ۷۰

مثال) اندازه زاویه‌ای $\frac{\pi}{۸}$ رادیان است اندازه آن برحسب گراد را بنویسید.

مثال) اگر پروانه یک هواپیما در مدت یک ثانیه ۴ دور و $\frac{۲}{۵}$ دور حول محور خود دوران کند زاویه‌ای که در این مدت برحسب درجه، گراد، رادیان طی نموده‌است محاسبه کنید.

@mohamadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

تذکر۱)هریک رادیان معادل $۵۷^\circ \xrightarrow{\text{تقریبا}} ۱\ rad = ۵۷/۳$

تذکر۲) هرگاه یک زاویه θ در دایره‌ای به شعاع r کمانی به طول L ایجاد کند در این صورت اندازه زاویه θ به رادیان برابر $\frac{L}{r}$ می‌باشد درحالتی که r=۱ فرض شود و اندازه L با اندازه θ برابر است.

$$\boxed{\theta = \frac{L}{r}}$$

مثال) در یک دایره به شعاع ۶ سانتی‌متر توسط زاویه θ کمانی بطول ۱۲ سانتی‌متر زده‌شده‌است. مقدار θ به رادیان چقدر است.

مثال: طول قوسی از دایره برابر ۱۶ متر و اندازه زاویه مرکزی آن برابر ۴۵° است، شعاع دایره را حساب کنید.

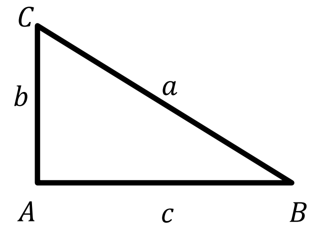
مثال: در دایره‌ای به شعاع ۲/۵ متر طول کمانی برابر ۸/۷۵ متر است اندازه این کمان چند درجه است؟

مثال: سطح دایره‌ای ۱۵۴ مترمربع است. طول قوسی از این دایره را که زاویه مرکزی مقابل آن ۵۰ درجه می‌باشد محاسبه نمایید.

@mohamadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

نسبت‌های مثلثاتی

۱) در مثلث قائم‌الزاویه



$$\sin B = \frac{b}{a}, \sin C = \frac{c}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{\alpha\ \text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}}$$

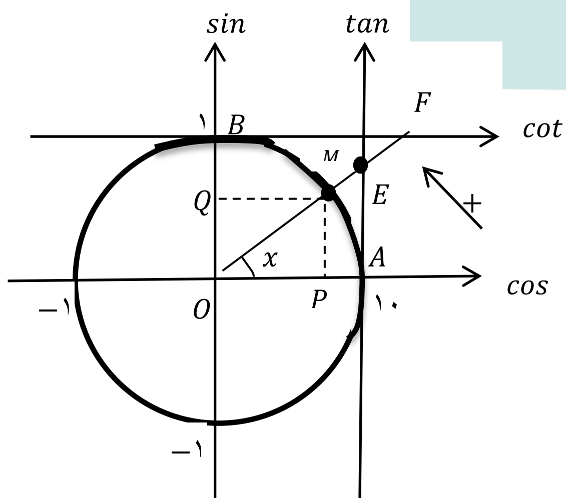
$$\cos B = \frac{c}{a}, \cos C = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{\alpha\ \text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}}$$

$$\tan B = \frac{b}{c}, \tan C = \frac{c}{b} \qquad \tan\alpha = \frac{\alpha\ \text{ضلع مقابل به زاویه}}{\alpha\ \text{ضلع مجاور به زاویه}}$$

$$\cot B = \frac{c}{b}, \cot C = \frac{b}{c} \qquad \cot\alpha = \frac{\alpha\ \text{ضلع مجاور به زاویه}}{\alpha\ \text{ضلع مقابل به زاویه}}$$

۲) در دایره‌ی مثلثاتی:

دایره‌ای است به شعاع واحد که برروی آن نقطه‌ای به عنوان مبدا (A) و جهتی مثبت (خلاف گردش عقربه‌های ساعت) اختیار شده‌باشد. در دایره‌ی مثلثاتی نقطه O (مرکز دایره) مبدا سنجش برای sin و cos و نقطه‌ی A مبدا سنجش برای tan و نقطه B مبدا سنجش برای cot می‌باشد.

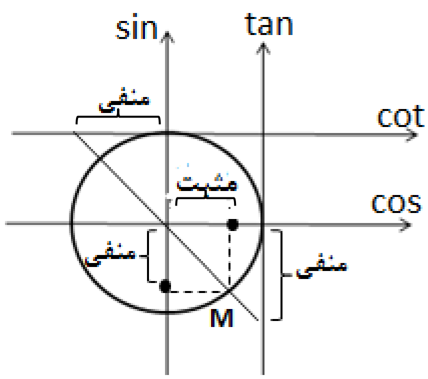


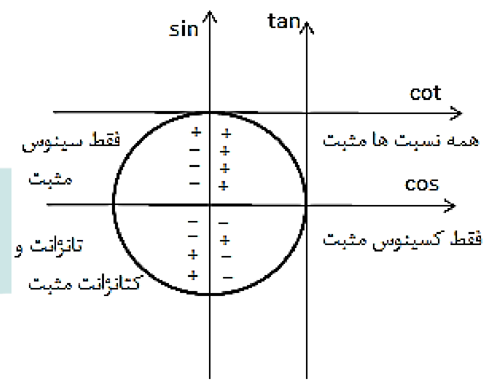
$$\cos x = OP = MQ \qquad \sin x = OQ = MP$$

$$\cot x = BF \qquad \tan x = AE$$

علامت‌های نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

در حالت کلی برای یافتن علامت‌های جبری نسبت‌های مثلثاتی در هر ناحیه، یک زاویه‌ی دلخواه در آن ناحیه در نظرمی‌گیریم و انتهای کمان مربوط به آن زاویه را مشخص کرده و از آن نقطه عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم، سمت راست و بالا را مثبت، سمت چپ و پایین را منفی در نظر می‌گیریم و اگر از انتهای کمان زاویه دلخواه به مرکز، وصل و امتداد دهیم تا محور کتانژانت‌ها و تانژانت‌ها را قطع کند به ترتیب مانند محورهای سینوس و کسینوس در نظرمی‌گیریم.





$\cot x$	$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	X برحسب رادیان	X برحسب درجه
تعریف نشده	۰	۱	۰	۰	۰
$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	۳۰
۱	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\pi}{۴}$	۴۵
$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\pi}{۳}$	۶۰
۰	تعریف نشده	۰	۱	$\frac{\pi}{۲}$	۹۰
تعریف نشده	۰	-۱	۰	π	۱۸۰
۰	تعریف نشده	۰	-۱	$\frac{۲\pi}{۴}$	۲۷۰

مثال: بیشترین و کمترین مقدار عبارتهای زیر را برحسب مقادیر مختلف زاویه x تعیین کنید.

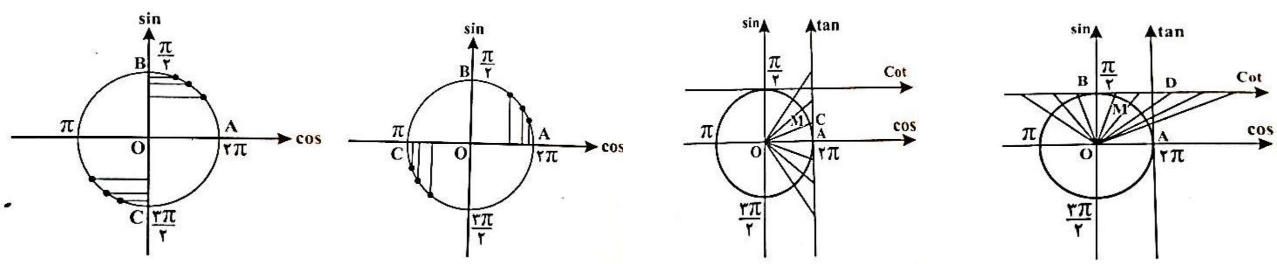
الف) $۲ + ۳sinx$

ب) $۱ - ۲\cos x$

مثال: اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ باشد حدود m $(m \in \mathbb{R})$ را چنان پیدا کنید که گزاره $tanx = ۲ - ۲m$ همواره درست باشد.

حدود تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

شکل‌های زیر تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را از زاویه صفر درجه تا ۳۶۰° بررسی می‌کنیم که به‌صورت زیر است:



$۰ \leq \alpha \leq ۲\pi \Rightarrow -۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$

$۰ \leq \alpha \leq ۲\pi \Rightarrow -۱ \leq \cos\alpha \leq ۱$

$۰ \leq \alpha \leq ۲\pi \Rightarrow -\infty < \tan\alpha < +\infty$

$۰ \leq \alpha \leq ۲\pi \Rightarrow -\infty < \cot\alpha < +\infty$

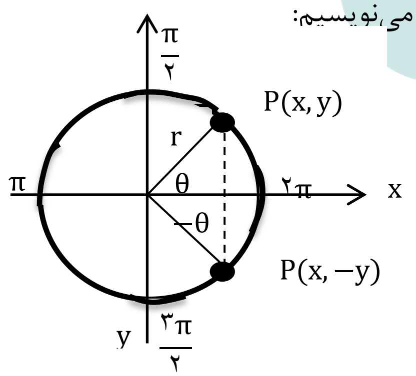
مثال: هرگاه $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ و $cos\ \alpha = ۲m - ۱$ حدود تغییرات m را معین کنید؟

مثال: هرگاه $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$, $\cos ۴\alpha = \frac{m-۱}{۴m+۲}$ حدود تغییرات m را تعیین کنید.

مثال: بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A = \frac{۱-۲\sin x}{۳}$ را معین کنید؟

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(2\pi \pm \alpha), \left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right), (\pi \pm \alpha), (\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\theta)$: می‌دانیم که θ در ناحیه اول و $(-\theta)$ در ناحیه چهارم قرار دارد ابتدا علائم نسبت‌های مثلثاتی را در ناحیه چهارم می‌نویسیم سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:



علائم ناحیه چهارم

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = +\cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \cot(-\theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

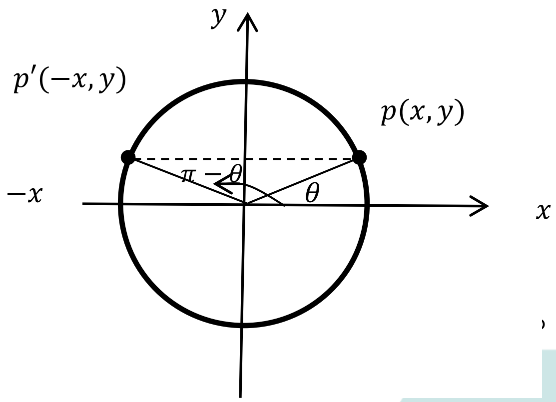
مثال: نسبت‌های مثلثاتی $(-\frac{\pi}{۶})$ را بدست آورید؟

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(\pi - \theta)$

محاسبه زوایای مکمل: می‌دانیم که $\pi - \theta$ در ناحیه دوم قرار می‌گیرد ابتدا علائم مثلثاتی ناحیه دوم و سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:

علائم ناحیه دوم

$$\begin{cases} \sin(\pi-\theta) = +sin\theta \\ \cos(\pi-\theta) = -sin\theta \\ \tan(\pi-\theta) = -tan\theta \\ \cot(\pi-\theta) = -cot\theta \end{cases}$$

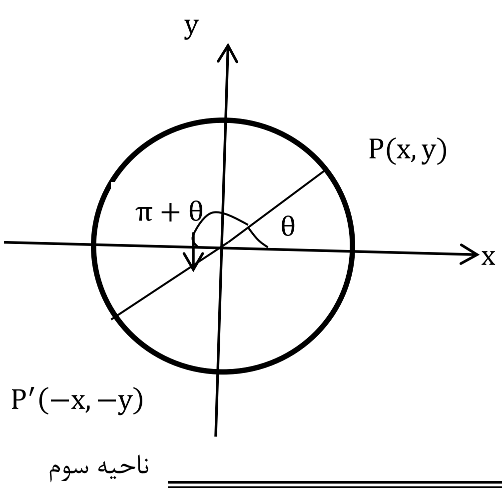


مثال: نسبت‌های مثلثاتی (۱۲۰°): می‌دانیم $\frac{۲\pi}{۳} = ۱۲۰$ می‌باشد و

مثال: مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید:

$$P = \frac{sin۱۲۰ \cos(-۳۰) - cos۱۲۰}{sin\ ۱۳۵. cos\ (-۴۵)}$$

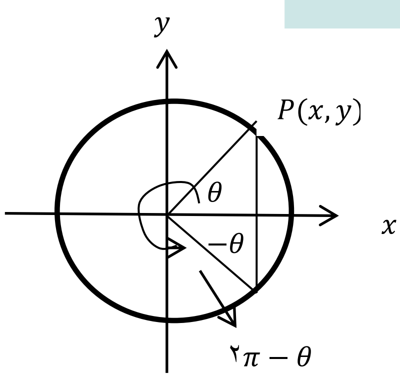
محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(\pi + \theta)$: می‌دانیم که $\pi + \theta$ در ناحیه سوم قرار می‌گیرد ابتدا علائم نست‌های ناحیه سوم را و سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \sin(\pi+\theta) = -sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) = -cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) = +tan\theta \\ \cot(\pi+\theta) = +cot\theta \end{cases}$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۷\pi}{۶}$ را محاسبه کنید:

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $2\pi - \theta$: می‌دانیم در ناحیه چهارم قرار دارد ابتدا علائم نسبت‌های مثلثاتی ناحیه چهارم را نوشته سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:



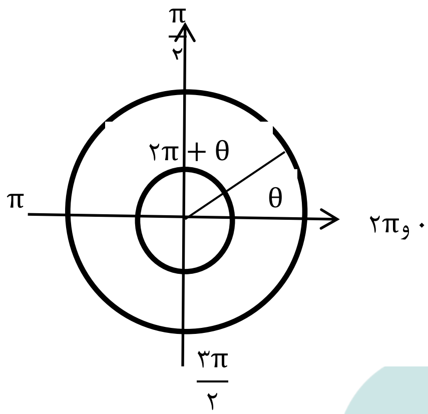
$$\begin{cases} \sin(۲\pi-\theta) = -sin\theta \\ \cos(۲\pi-\theta) = +cos\theta \\ \tan(۲\pi-\theta) = -tan\theta \\ \cot(۲\pi-\theta) = -cot\theta \end{cases}$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی ۳۱۵ درجه را بدست آورید:

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $2\pi + \theta$:

می‌دانیم که $۲\pi + \theta$ در ناحیه اول قرار دارد ابتدا علائم نسبت‌های مثلثاتی ناحیه اول سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \sin(۲\pi + \theta) = +sin\theta \\ \cos(۲\pi + \theta) = +sin\theta \\ \tan(۲\pi + \theta) = +tan\theta \\ \cot(۲\pi + \theta) = +cot\theta \end{cases}$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی $\frac{۱۳\pi}{۶}$ را بدست آورید؟

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(2k\pi - \theta)$: در حالت کلی:

می‌دانیم که k تعداد دورها می‌باشد و از طرفی $۲k\pi + \theta$ پس از k دور در ناحیه چهارم قرار می‌گیرد ابتدا علائم نسبت‌های مثلثاتی ناحیه چهارم را نوشته سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sin(۲k\pi - \theta) = -sin\theta \\ \cos(۲k\pi - \theta) = +cos\theta \\ \tan(۲k\pi - \theta) = -tan\theta \\ \cot(۲k\pi - \theta) = -cot\theta \end{cases}$$

@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(2k\pi + \theta)$:

می‌دانیم که k تعداد دورها می‌باشد و از طرفی $۲k\pi - \theta$ پس از k دور در ناحیه اول واقع می‌شود ابتدا علائم ناحیه اول سپس نسبت‌های مثلثاتی θ را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sin(۲k\pi + \theta) = +sin\theta \\ \cos(۲k\pi + \theta) = +cos\theta \\ \tan(۲k\pi + \theta) = +tan\theta \\ \cot(۲k\pi + \theta) = +cot\theta \end{cases}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} - \theta)$: (محاسبه زوایای متمم)

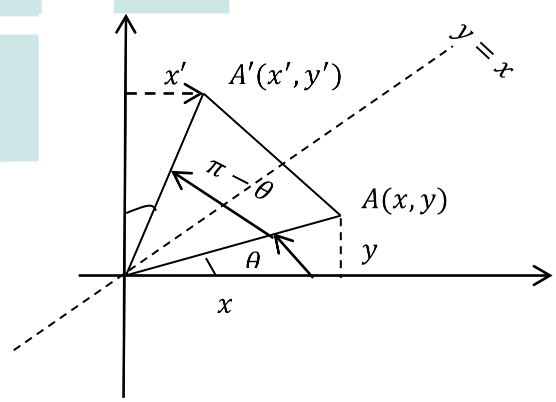
$$A(x,y) \xrightarrow[x=y]{\text{قرینه نسبت به نیمساز ربع اول به سوم}} A'(x',y') \rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{فرض}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = cot\theta$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = tan\theta$$



روش اول:

بنابراین هرگاه مجموع دو زاویه برابر ۹۰ درجه باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = ۹۰ \rightarrow \begin{cases} sin\alpha = cos\beta \\ cos\alpha = sin\beta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} tan\alpha = cot\beta \\ cot\alpha = tan\beta \end{cases}$$

تذکر۱) در نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ می‌توان جای sin را با cos ، و جای cos را با sinو جای tanرا با cot و جای cot را با tan عوض نمود.

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ «روش دوم»

می‌دانیم که $\frac{\pi}{۲}-\theta$ در ناحیه اول قرار دارد ابتدا علائم نسبتهای مثلثاتی اول را تعیین می‌کنیم سپس در نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}$ همیشه به جای $cos \xrightarrow{\text{به}} sin$, $sin \xrightarrow{\text{به}} cos$, $tan \xrightarrow{\text{به}} cot$, $cot \xrightarrow{\text{به}} tan$ عوض می‌شود پس داریم:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = +cos\ \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) = +sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{۲}\right) = +cot\theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{۲}\right) = +tan\theta \end{cases}$$

مثال: اگر $sin۱۵ = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$, $cos۱۵ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ باشد نسبتهای مثلثاتی ۷۵ درجه را محاسبه کنید.

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\square}{2}+\theta)$: می‌دانیم که $\frac{\pi}{۲}+\theta$ در ناحیه دوم قرار دارد ابتدا علائم نسبتهای مثلثاتی را نوشته سپس طبق تذکر ۱ عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = +cos\ \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -cot\theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -tan\theta \end{cases}$$

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

مثال: نسبت‌های مثلثاتی ۱۰۵ درجه را محاسبه کنید.

نسبتهای مثلثاتی $(\frac{3\pi}{2}-\theta)$: می‌دانیم که $\frac{۳\pi}{۲}-\theta$ در ناحیه سوم قرار دارد ابتدا علائم نسبتهای مثلثاتی را نوشته سپس طبق تذکر ۱ عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = -\cos\theta \\ \cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = -\sin\theta \\ \tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = +\cot\theta \\ \cot\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = +\tan\theta \end{cases}$$

نسبتهای مثلثاتی $(\frac{3\pi}{2}+\theta)$ می‌دانیم که $\frac{۳\pi}{۲}+\theta$ در ناحیه چهارم قرار دارد ابتدا علائم ناحیه چهارم را نوشته سپس طبق تذکر ۱ عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = -\cos\theta \\ \cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = +\sin\theta \\ \tan\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = -\cot\theta \\ \cot\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = -\tan\theta \end{cases}$$

مثال: درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\sin ۲۰۰ + ۲\sin ۱۶۰ - \sin ۲۰ + ۳\sin ۳۴۰ - ۴\cos ۱۱۰ = \cos ۷۰$$

مثال: اگر $tan۱۵ = ۲ + \sqrt{۳}$ مطلوبست محاسبه:

$$A = \frac{۳cos۳۷۵ + ۲cos۱۹۵}{۳sin۱۶۵ + ۲sin۳۴۵}$$

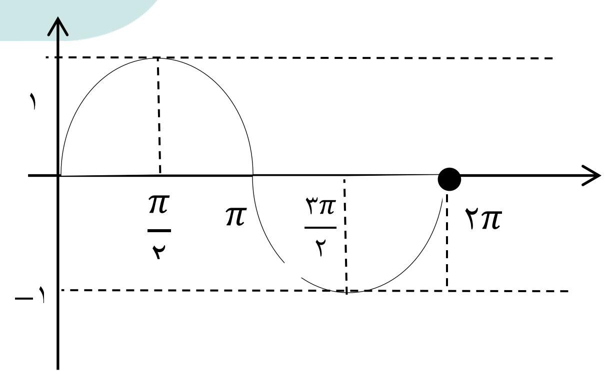
منحنی توابع مثلثاتی:

توابع مثلثاتی $y = cosx , y = sinx$ از ساده‌ترین نوع توابع مثلثاتی هستند، دامنه این توابع $\mathbb{R}$ می‌باشد و برد آنها اعدادی بین ۱ و ۱- می‌باشد به عبارت دیگر:

$$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = [-۱,۱]$$

در زیر نمودار $y = sinx$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



نکته: با کمی دقت متوجه می‌شویم که $sinx$ در نقطه $x = \frac{\pi}{۲}$ دارای بیشترین مقدار (Max) و در نقطه $x = \frac{۳\pi}{۲}$ دارای کم‌ترین مقدار (Min) است هم‌چنین به ازای مقادیر $x = ۰ , x = \pi , x = ۲\pi$ دارای مقداری برابر صفر است بنابراین به کمک دایره مثلثاتی می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد:

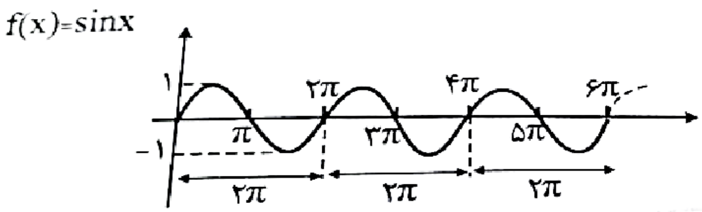
$$sinx = ۰ \rightarrow x = k\pi \quad (k\epsilon Z)$$

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

$$sinx = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (k\epsilon Z)$$

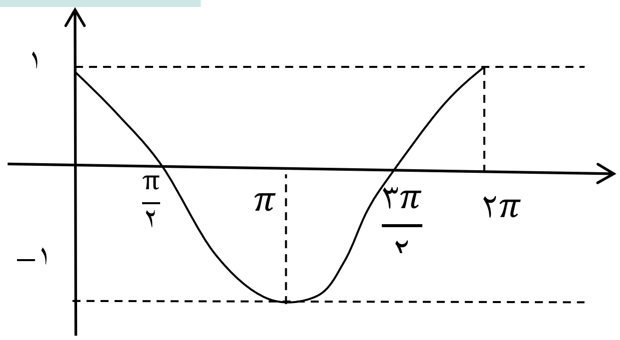
$$sinx = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad (k\epsilon Z)$$

نکته: فاصله $[۰,۲\pi]$ کوچکترین دوره تناوب برای این تابعه چون فاصله ۲π کوچکترین فاصله‌ایه که منحنی هی داره تکرار می‌شه.



در زیر نمودار $y = cosx$ را در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱



نکته: Cosxدر نقاط $x = ۰ , x = ۲\pi$ دارای بیشترین مقدارو در نقطه $x = \pi$ دارای کمترین مقدار است. همچنین به ازای $x = \frac{\pi}{۲} \;,\; x = \frac{۳\pi}{۲}$ دارای مقداری برابر صفر است، پس:

$$cosx = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (k\epsilon Z)$$

$$cosx = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \quad (k\epsilon Z)$$

$$cosx = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \quad (k\epsilon Z)$$

نمودار $y = \sin(-x) , y = ۲\sin(-x)$ را رسم کنید؟

@mohamadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

$y = -۲\sin\frac{۱}{۲}x$

$y = -۳\cos\frac{۱}{۲}x$

$y = ۳\sin ۲x$

$y = \cos\frac{۱}{۳}x$

$y = -۲\cos\frac{\pi}{۲}x$

@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

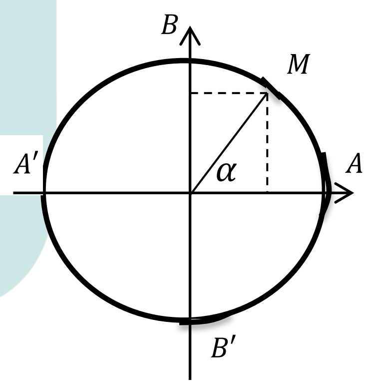
$y = ۵\sin x$

دوره تناوب: فرض کنید اندازه زاویه AOM برابر αباشد اگر α به اندازه ۲π یا ۴π یا بطور کلی $(k\epsilon Z)۲k\pi$ رادیان تغییر کند (به α افزوده و یا از آن کم شود.) انتهای کمان AM روبروی α همان نقطه M باقی می‌ماند و در نتیجه سینوس و کسینوس این کمان تغییر نمی‌کند.

$$sin\alpha = \sin(\alpha + ۲\pi) = \sin(\alpha + ۴\pi) = \cdots = \sin(\alpha + ۲k\pi)$$

$$cos\alpha = \cos(\alpha + ۲\pi) = \cos(\alpha + ۴\pi) = \cdots = \cos(\alpha + ۲k\pi)$$

نتیجه $\rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha + ۲k\pi) = sin\alpha \\ \cos(\alpha + ۲k\pi) = cos\alpha \end{cases}$

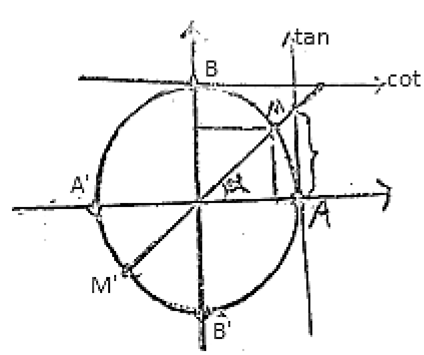


در بیان خاصیت بالا گفته می‌شود که sin و cos یک زاویه تناوب‌های دوره‌ای می‌باشند و دوره تناوب هریک از ان‌ها برابر با ۲π است. در حقیقت ۲π کوچکترین زاویه است که اگر به α اضافه شود sin و cos آن تغییر نمی‌کند هم‌چنین اگر AOM به اندازه π یا ۲π یا $(k \in Z)k\pi$ رادیان تغییر کند انتهای کمان روبرو زاویه AOM همان نقطه M و نقطه M′(قرنیه نقطه M نسبت به مبدا می‌باشد) در نتیجه تانژانت و کتانژانت تغییر نمی‌کند.

$$tan\alpha = \tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha + ۲\pi) = \cdots = \tan(\alpha + k\pi)$$

$$cot\alpha = \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha + ۲\pi) = \cdots = \cot(\alpha + k\pi)$$

نتیجه $\rightarrow \begin{cases} \tan(\alpha + k\pi) = tan\alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) = cot\alpha \end{cases}$



@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

نکته: مقدار T می‌تواند $۲\pi, ۴\pi, ۶\pi, ...$ باشد اما دوره‌ی تناوب تابع کوچکترین مقدار T یعنی $T = ۲\pi$ است پس دوره تناوب تابع $y = cosx$ برابر ۲π است.

برای توابع دیگر مثلثاتی نیز می توان دوره تناوب را مشخص کرد:

$$\begin{cases} y = sinx: \sin(x + ۲\pi) = sinx \to T = ۲\pi \\ y = cosx: \cos(x + ۲\pi) = cosx \to T = ۲\pi \\ y = tanx: \tan(x + \pi) = tanx \to T = \pi \\ y = cotx: \cot(x + \pi) = cotx \to T = \pi \end{cases}$$

نکته بسیار مهم: اگر *y=f(x)* تابعی متناوب با دوره تناوب *T*باشد دوره تناوب تابع *y=af(x)+c* همان *T* خواهد بود ولی دوره تناوب تابع *y=af(bx)+c* برابر با $\frac{T}{|b|}$ است پس برای توابع مثلثاتی خواهیم داشت:

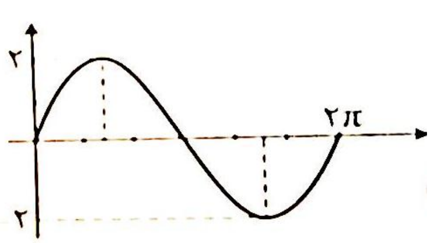
$$\begin{cases} y = asinbx + c \\ y = acosbx + c \end{cases} \to T = \frac{۲\pi}{|b|} \qquad \begin{cases} y = atanbx + c \\ y = acotbx + c \end{cases} \to T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال: دوره تناوب تابع $y = ۲\cos\left(-\frac{x}{۳}\right) + ۱$ برابر $\frac{۲\pi}{\left|-\frac{۱}{۳}\right|} = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$ و دوره تناوب تابع $y = ۳\cot(\pi x)$ برابر با $T = \frac{\pi}{|\pi|} = ۱$ می‌باشد.

نکته۳: در مورد توابعی به صورت $y = \sin^{۲n+۱} x , y = cos^{۲n+۱}x$ که *sin* و *cos* دارای توان فرد می‌باشند دوره تناوب همان $T = ۲\pi$ است ولی در مورد $y = \sin^{۲n} x, y = \cos^{۲n} x, y = |sinx|, y = |cosx|$ دوره تناوب نصب می‌گردد و برابر $T = \pi$ است در مورد $y = tanx , y = cotx$ با هر توان طبیعی (چه زوج و چه فرد) $T = \pi$ است.

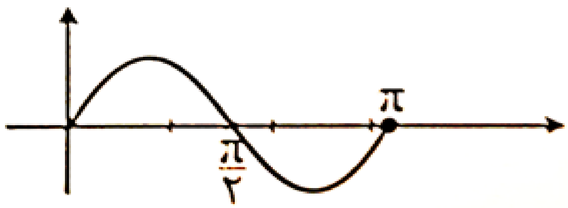
نکته: اگر عددی پشت *sin,cos* ضرب بشه دوره تناوب تغییری نمی‌کنه، اعدادی که بیرون **تابع ضرب یا تقسیم یا جمع و تفریق** می‌شن فقط **روی برد تابع تاثیر می‌ذارن** و روی **دامنه بی‌تاثیرن** بنابراین روی **دوره تناوب هم اثری ندارن**.

۱- منحنی $۲sinx$ تو بازه$[۰,۲\pi]$

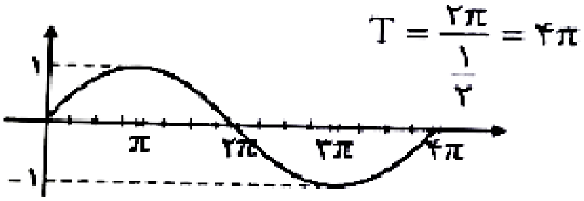


@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

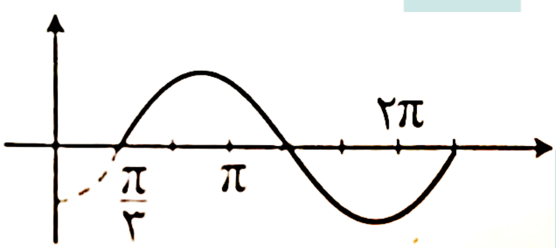
۲- در $sin۲x$ دوره تناوب نصف می‌شود $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$



۳- در $\sin\frac{x}{۲}$ دوره تناوب دو برابر می‌شود $T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$



۴- در $\sin(x-\frac{\pi}{۳})$, $sinx$, $\frac{\pi}{۳}$ به سمت جلو می‌رود: ولی دوره تناوب تغییری نمی‌کنه.



روابط مهم دوره تناوب نسبت‌های مثلثاتی:

الف) در حالت کلی در توابعی که بصورت $y=bsinax$, $y=bcosax$ برای این‌که یک دوره کامل طی شود بایستی $۰\le ax\le ۲\pi$ تغییر نماید بنابراین $۰\le x\le\frac{۲\pi}{a}$ $(a\neq ۰)$ بنابراین ماکزیمم مقدار تابع $|b|$ و مینیمم مقدار تابع $-|b|$ و دوره تناوب این دو تابع:

$$max=|b|,min=-|b| \quad ,T=\left|\frac{۲\pi}{a}\right|$$

$$۱)y=bsin(ax),y=bcos(ax)\xrightarrow{\text{دوره تناوب}}T=\left|\frac{۲\pi}{a}\right|$$

$$۲)y=\sin^{۲n-۱}(ax)\quad ,\quad y=\cos^{۲n-۱}(ax)\xrightarrow{\text{دوره تناوب}}T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

$۳) y = \tan^{\overbrace{۲n-۱}^{\text{فرد}}}(ax) \quad , \quad y = \cot^{۲n-۱}(ax) \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{\pi}{|a|}$

$۴) y = \sin^{\overbrace{۲n}^{\text{زوج}}}(ax) \quad , \quad y = \cos^{۲n}(ax) \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{\pi}{|a|}$

$۵) y = \tan^{۲n}(ax) \quad , \quad y = \cot^{۲n}(ax) \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{\pi}{|a|}$

$۶) y = |sinx| \quad , \quad y = |cosx| \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \pi$

تذکر: برای پیدا کردن دوره تناوب حاصل جمع و تفریق یا ضرب و تقسیم ابتدا دوره تناوب هریک از توابع را پیدا می‌کنیم و $T_۱, T_۲, \dots, T_n$ می‌نامیم سپس عدد T را در صورت وجود چنان پیدا می‌کنیم که:

K_n تا $k_۱, T = K_۱T_۱ = K_۲T_۲ = \cdots . = K_nT_n$

مقسوم علیه مشترکی ندارند هرگاه این دوره تناوب‌ها کسری باشند ساده‌تر آن که همه را به یک مخرج مشترک واحد تبدیل نماییم سپس T برابر کسری است که همین مخرج مشترک و صورت آن کوچکترین مضرب مشترک بین همه‌ی صورت‌ها است.

$$T = ۳ \times \frac{۲\pi}{۳} = ۵ \times \frac{۲\pi}{۵} = ۷ \times \frac{۲\pi}{۷} \rightarrow T = ۲\pi$$

مثال: دوره تناوب تابع $y = \sin\frac{mx}{\pi}$ برابر ۲π می‌باشد مقدار m را بیابید.

مثال: دوره تناوب تابع $y = sinm\frac{\pi}{۵}x$ برابر $\frac{۳\pi}{۲}$ می‌باشد مقدار m را بیابید.

وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com
@mohamadzinati

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $y = cos۳x + cos۵x + sin۷x$ را پیدا کنید.

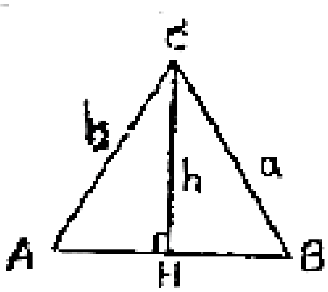
مثال: دوره تناوب تابع $y = sin۳x + tan۴x$ را پیدا کنید.

مثال:نمودار تابع $y = ۲cos۳x$را در یک دوره تناوب رسم کنید.

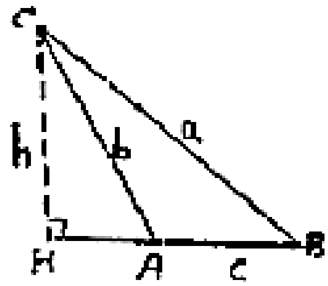
مثال: نمودار تابع $y = -۲sin\frac{۱}{۲}x$را در یک تناوب رسم کنید:

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

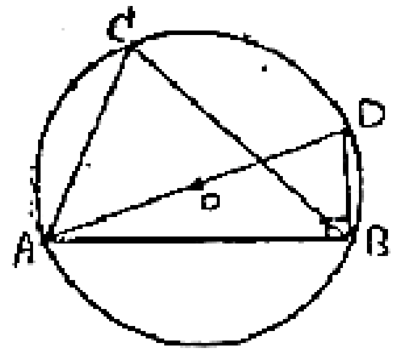
قضیه سینوس‌ها:



شکل (۱)



شکل ۲



شکل ۳

در مثلث ABC شکل (۱) از راس C ارتفاع CH و عمود بر ضلع AB و یا بر امتداد AB در شکل (۲) رسم می‌نماییم در دو مثلث قائم‌الزاویه CBH,ACH شکل(۱) روابط زیر می‌توان نوشت:

$$sinB = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{a} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} h = asinB \quad (۱)\text{رابطه}$$

$$sinA = \frac{h}{b} \rightarrow h = bsinA \quad (۲)\text{رابطه}$$

چون طرفین اول (۱) و (۲) برابرند بنابراین طرف‌های دوم آن‌ها نیز باهم مساویند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۱ \text{ و } ۲ \rightarrow asinB = bsinA \xrightarrow{\text{طرفین رابطه را بر } sinA ,sinB \text{ تقسیم}} \frac{asinB}{sinA.\,sinB} = \frac{bsinA}{sinA\; sinB} \rightarrow \boxed{\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB}}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که رابطه $\frac{a}{sinA} = \frac{c}{sinc}$ همواره برقرار است. باتوجه به شکل (۲) مـی‌تـوان رابطـه زیـر را نوشت:

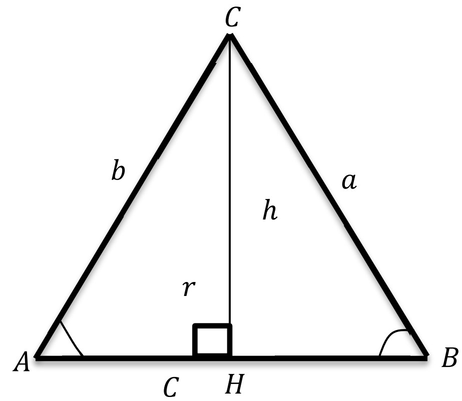
$$\boxed{\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinc} = ۲R}$$

در رابطه فوق R شعاع و O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌باشد.

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

قضیه کسینوس‌ها

مثلث ABC را که در آن A زاویه حاده (تند) می‌باشد در نظر می‌گیریم و ارتفاع CH را رسم می‌کنیم با توجه به شکل زیر می‌توان روابط زیر را نوشت:



$$cosA = \frac{AH}{b} \rightarrow \boxed{AH = bcosA} \quad (۱) a^۲ = h^۲ + BH^۲$$

$$sinA = \frac{h}{b} = \boxed{h = bsinA} \; (۲)$$

$$, AH + BH = AB \rightarrow BH = AB - AH \rightarrow BH = C - bcosA$$

$$(۱) a^۲ = h^۲ + BH^۲ \rightarrow a^۲ = (bsinA)^۲ + (C - bcosA)^۲$$

$$\rightarrow a^۲ = b^۲ \sin^۲ A + C^۲ - ۲bc\,cosA + b^۲ \cos^۲ A$$

$$\rightarrow a^۲ = b^۲ (\sin^۲ A + \cos^۲ A) + c^۲ - ۲bc\,cosA$$

$$\rightarrow a^۲ = b^{۲(۱)} + c^۲ - ۲bc\,cosA \rightarrow \boxed{a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\,cosA} \; (۳)$$

به همین ترتیب می‌توان روابط زیر را ثابت نمود:

$$\boxed{\begin{array}{c} c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲abcos\,c \\ b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\,cosB \end{array}}$$

مثال: در مثلث ABC، $A = ۶۰^\circ, c = ۱, b = ۲,$ طول ضلع a چقدر است؟

مثال: در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ بزرگترین زاویه چند درجه است؟

وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com
@mohamaadzinati

مثال:در مثلث ABC $\hat{A} = ۴۵, \hat{B} = ۶۰, a = ۴$ طول ضلع b چقدر است؟

مثال: در مثلث ABC , $\hat{A} = ۳۰$, $BC = ۲\sqrt{۲}$ شعاع دایره و محیطی این مثلث چقدر است؟

مثال:در مثلث $ABC, a = \sqrt{۲}, b = \sqrt{۶}, \hat{A} = ۳۰$, زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

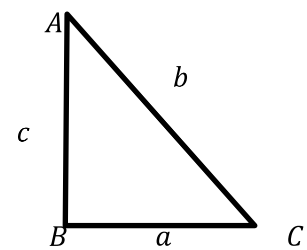
مثال:در مثلث $\frac{sinB}{sinc} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$. است نسبت $\frac{b}{c}$ را بیابید.

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

حل مثلث قائم‌الزاویه

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه هرگاه مجموع دو زاویه حاده $A+C=۹۰$ باشد آنگاه :

$$\begin{cases} sinA = cos\,C \\ cosA = sin\,c \\ tanA = cotc \\ cotA = tanc \end{cases}$$



$$۱)\sin C = \frac{c}{b} \to c = b\,sinc$$

$$۲)\cos C = \frac{a}{b} \to a = b\,cosc$$

$$۳)\tan C = \frac{c}{a} \to c = a\,tanc$$

$$۴)\cot C = \frac{a}{c} \to a = c\,cotc$$

$$۵)\sin A = \frac{a}{b} \to a = b\,sinA$$

$$۶)\cos A = \frac{c}{b} \to c = b\cos A$$

$$۷)\tan A = \frac{a}{c} \to a = c\,tanA$$

$$۸)\cot A = \frac{c}{a} \to c = a\cot A$$

فرمولهای مقدماتی:

$$۱)\ \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ \begin{cases} \sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x \\ \cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x \end{cases}$$

$$۲)\ tanx \times \cot x = ۱ \to \begin{cases} tanx = \dfrac{۱}{cox} \\ cotx = \dfrac{۱}{tanx} \end{cases}$$

$$۳)tanx = \frac{sinx}{cox} \qquad ۴)\cot x = \frac{cosx}{sinx} \qquad ۵)secx = \frac{۱}{cotx} \qquad ۶)\ \csc x = \frac{۱}{\sin x}$$

$$۷)\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + tan^۲x \to \cos^۲ x = \frac{۱}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{\cot^۲ x}{۱ + cot^۲x}$$

@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

۸) $\frac{۱}{\sin^۲ x} = ۱ + \cot^۲ x \rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۱ + \cot^۲ x} = \frac{\tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}$

۹) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x$ ۱۰) $sin^۶ x + cos^۶ x = ۱ - ۳\sin^۲ x . x \cos^۲ x$

مثال: هرگاه $sin\alpha = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد مقدار $\sin(\frac{۵\pi}{۲} + \alpha)$ را به دست بیاورید؟

مثال: هرگاه $\sin^۴ \alpha + \cos^۴ \alpha = \frac{۷}{۸}$ باشد مقدار $\sin^۶ \alpha + \cos^۶ \alpha$ را بدست آورید.

تست: حاصل عبارت $\tan^۲ x - \sin^۲ x$ کدام است؟

۱) $\tan^۲ x \sin^۲ x$ ۲) $\cot^۲ x$ ۳) $\cot^۲ x . \cos^۲ x$ ۴) $\cos^۲ x$

تست: حاصل عبارت $\cos\frac{۳\pi}{۱۴} + cos\frac{۵\pi}{۱۴} + \cos\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos\frac{۹\pi}{۱۴} + \cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}$ کدام است؟

۱)صفر ۲)۱ ۳)۱- ۴)۲

تست: اگر $\cos x = \sqrt{\frac{cotx}{a+cotx}}$ باشد مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) a ۳) $-a$ ۴) $\frac{a}{۲}$

تست: اگر $\sin\alpha\cos\alpha > ۰ , \cos\alpha\cot\alpha < ۰$ باشد آن گاه کمان α در کدام ناحیه است؟

۱)اول ۲)دوم ۳)سوم ۴)چهارم

تست: حاصل $(\csc^۲\alpha - ۱)(\sec^۲\alpha - ۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sin^۲\alpha$ ۳) $\cos^۲\alpha$ ۴) $\sin^۲\alpha . \cos^۲\alpha$

تست: اگر $\tan ۲۲/۵ = a$ باشد $\frac{\cos ۲۰۲/۵ + \cos ۱۱۲/۵}{\cos ۳۳۷/۵ - \cos ۶۷/۵}$ کدام است.

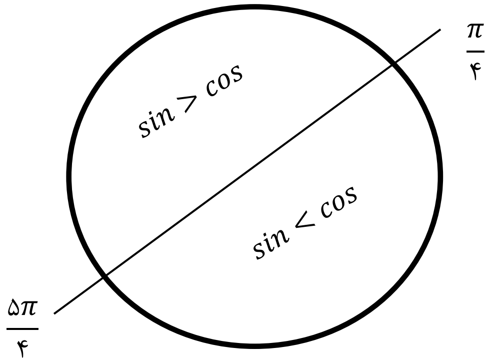
۱) $\frac{a-۱}{a+۱}$ ۲) $\frac{a+۱}{a-۱}$ ۳) $\frac{a}{a+۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

چند نکته مهم:

۱- خط مقایسه سینوس و کسینوس به صورت شکل مقابل است.

۲- اگر مجموع دو زاویه برابر ۹۰درجه باشد آنگاه sin یکی از زوایا با cos زاویه دیگر و tan زوایا با cot زاویه‌ی دیگر برابر است و بالعکس ..

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com



$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\begin{cases} sin\alpha = cos\beta \;\;,\;\; cos\alpha = sin\beta \\ tan\alpha = cot\beta \;,\; cot\alpha = tan\beta \end{cases}$$

۳)اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند آنگاه sin این دو زاویه با هم برابر بوده و cot , tan , cos این دو زاویه‌ی قرینه‌ی یکدیگر می‌باشند.

$$\alpha+\beta=\pi\rightarrow\begin{cases} sin\alpha = sin\beta \quad cos\alpha = -cos\beta \\ tan\alpha = -tan\beta \quad cot\alpha = -cot\beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $۳۰+۱۵۰=۱۸۰\rightarrow cos۱۵۰=-cos۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) تابع sinx در ناحیه چهارم و اول سیر صعودی و در ناحیه دوم و سوم سیر نزولی دارد تابع cosx در ناحیه اول و دوم نیز سیر نزولی و در ناحیه سوم و چهارم سیر صعودی دارد.

تست: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد.

۱) $sin۵۰ < sin۴۰$ ۲) $cos۵۰ < cos۴۰$ ۳) $tan۵۰ < tan۴۰$ ۴) $cot۴۰ < cot۵۰$

نسبت های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$

۱) $\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$

۲) $\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$

۳) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{۱ - tan\alpha tan\beta}$

۴) $\cot(\alpha+\beta) = \frac{cot\alpha cot\beta - ۱}{cot\beta + cot\alpha}$

۵) $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$

۶) $\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$

۷) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha tan\beta}$		۸) $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{cot\alpha cot\beta+1}{cot\beta-cot\alpha}$

۵) $sin\alpha+cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

۶) $sin\alpha-cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$

۷) $\dfrac{1-tan\alpha}{1+tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$		۸) $\dfrac{1+tan\alpha}{1-tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

۹) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

۱۰) $(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

۱۱) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

تذکر: فرمول‌های شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ برای رشته تجربی دارای اهمین بیشتری هستند.

اثبات ۵:

از طرف چپ] : $sin\alpha+cos\alpha=sin\alpha+\dfrac{sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\times cos\alpha=\dfrac{sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}cos\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}}$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

از طرف راست: $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}cos\alpha\right)$

$$=sin\alpha+cos\alpha$$

اثبات ۷:

$$\frac{1-tan\alpha}{1+tan\alpha}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

اثبات ۱۰:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta)(sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta)$$

@mohamaadzinati www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

$= (\sin^۲ \alpha \cos^۲ \beta - \cos^۲ \alpha \sin^۲ \beta) = \sin^۲ \alpha(۱ - \sin^۲ \beta) - (۱ - \sin^۲ \alpha) \sin^۲ \beta =$

$\sin^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha \sin^۲ \beta - \sin^۲ \beta + \sin^۲ \alpha \sin^۲ \beta - \sin^۲ \alpha \sin^۲ \beta$

مثال: نسبتهای مثلثاتی۱۰۵ درجه را محاسبه کنید:

مثال: مقدار عددی $cos۷۵$, $tan۱۵$ را حساب کنید.

@mohamaadzinati

وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

مثال: حاصل عبارت $\sin\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)$ را بدست آورید.

تست: حاصل $\frac{cos۱۵+sin۵sin۱۰}{sin۱۵-cos۵sin۱۰}$ کدام است؟

۱) $tan۵$ ۲) $cot۵$ ۳) $tan۱۵$ ۴) $cot۱۵$

تست: حاصل $tan۴۳+tan۱۷+\sqrt{۳}tan۴۳tan۱۷$ کدام است.

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) ۲

تست: اگر $\tan(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۲}$, $\tan(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}$ آنگاه $tan۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

تست: مقدار عددی عبارت $\frac{sin۷۰\cdot cos۱۰+cos۸۰\cdot cos۲۰}{cos۶۸cos۸+cos۸۲cos۲۲}$ کدام است؟

۱) $sin۱۰$ ۲) $cos۱۰$ ۳) $tan۱۰$ ۴) ۱

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

تست: حاصل عبارت $\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}{sinx+cosx}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

تست: حاصل عبارت $\frac{tan۳۲+tan۲۸}{۱-cot۵۸cot۶۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ۱   ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تست: اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۳}$ باشد حاصل $\frac{(\cos^۲\alpha-\sin^۲\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

فرمول‌های 2α و3α:

$$۱)sin۲\alpha=۲sin\alpha cos\alpha \rightarrow sin\alpha cos\alpha=\frac{۱}{۲}sin۲\alpha$$

$$۲)cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha$$

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

$$\rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{۱ + cos۲\alpha}{۲}, \sin^{۲}\alpha = \frac{۱ - cos۲\alpha}{۲}$$

$$۳) tan۲\alpha = \frac{۲tan\alpha}{۱ - \tan^{۲}\alpha} \qquad ۴) cot۲\alpha = \frac{\cot^{۲}\alpha - ۱}{۲cot\alpha}$$

$$۵) sin۳\alpha = ۳sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha \qquad ۶) cos۳\alpha = ۴\cos^{۳}\alpha - ۳cos\alpha$$

$$۷) tan۳\alpha = \frac{۳tan\alpha - \tan^{۳}\alpha}{۱ - ۳\tan^{۲}\alpha} \qquad ۸) cot۳\alpha = \frac{۳cot\alpha - \cot^{۳}\alpha}{۱ - ۳\cot^{۲}\alpha}$$

تذکر: فرمول‌های شماره ۱ تا ۴ در رشته تجربی اهمیت بیشتری دارند.

اتحادهای کمکی:

$$۹) \sin۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^{۲}\alpha} \qquad ۱۰) cos۲\alpha = \frac{۱ - \tan^{۲}\alpha}{۱ + \tan^{۲}\alpha} \rightarrow \tan^{۲}\alpha = \frac{۱ - cos۲\alpha}{۱ + cos۲\alpha}$$

$$۱۱) cot\alpha - tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha \qquad ۱۲) cot\alpha + tan\alpha = \frac{۱}{sin\alpha cos\alpha} = \frac{۲}{sin۲\alpha}$$

$$۱۳) ۴cos\alpha \cos(۶۰ - \alpha)\cos(۶۰ + \alpha) = cos۳\alpha \qquad ۱۴) ۴sin\alpha \sin(۶۰ - \alpha)\sin(۶۰ + \alpha) = sin۳\alpha$$

$$۱۵) tan\alpha \tan(۶۰ - \alpha)\tan(۶۰ + \alpha) = tan۳\alpha \qquad ۱۶) cot\alpha \cot(۶۰ - \alpha)\cot(۶۰ + \alpha) = cot۳\alpha$$

تذکر: اتحادهای شماره‌های ۹ تا ۱۲ برای رشته تجربی کاربرد بیشتری دارند.

مثال: فرض کنید $sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ باشد مقدار $tan۲\alpha , cos۲\alpha$ را محاسبه کنید.

تست: مقدار عددی $cos\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$

@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار

تست: حاصل $\frac{cot۱۵}{۱+cot^۲۱۵}$ کدام است؟ (کمان‌ها برحسب درجه هستند)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

تست: اگر $tanx + cotx = ۶$ باشد حاصل $sin۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

تست: اگر $\frac{sinx}{sinx+cosx} = ۳$ آنگاه $tan۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) -۳

تست: حاصل عبارت $cos۲۰ \cdot cos۴۰ \cdot cos۸۰$ چقدر است؟ (برحسب درجه هستند)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

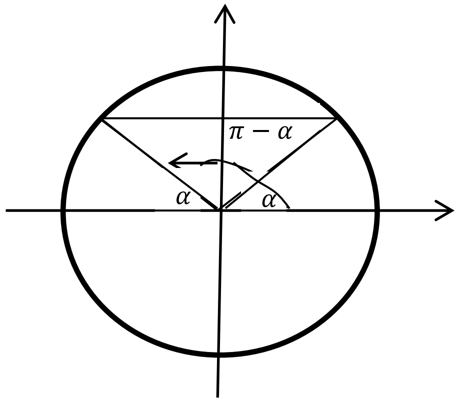
معادلات مثلثاتی:

برای حل هر معادله مثلثاتی ابتدا به کمک روابط مثلثاتی معادله را ساده نموده تا به یکی از حالات زیر برسیم:

۱)**معادلات اصلی:**

$$۱)sinx = m \xrightarrow{-۱<m<۱} sinx = sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

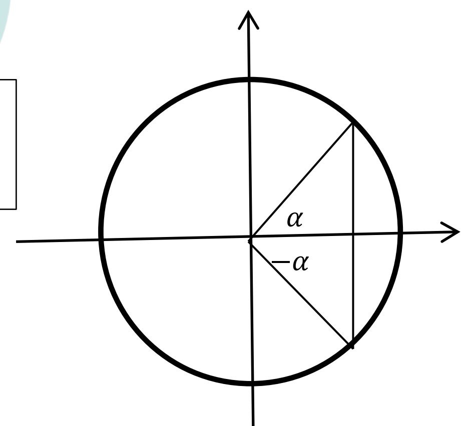
@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار



$$\boxed{\sin(\pi-\alpha)=sin\alpha}$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $۲sinx+\sqrt{۳}=۰$ را به دست آورید.

$$\boxed{۲)cosx=m \xrightarrow{-۱\leq m\leq ۱} cosx=cos\alpha \to x=۲k\pi\pm\alpha}$$



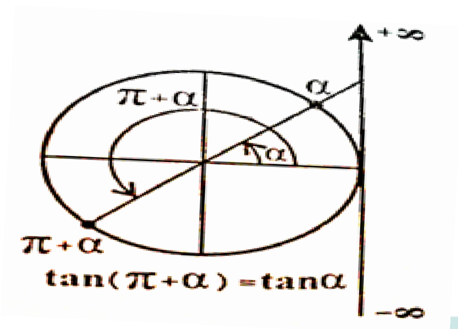
$$cos\alpha=\cos(-\alpha)$$

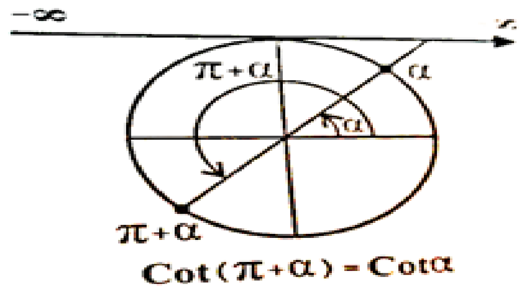
مثال: معادله $۲\cos^{۲}x-۵cosx+۲=۰$ را حل کنید.

@mohamaadzinati
وبسایت آموزشی نمره یار - www.Nomreyar.com

$۳)tanx = m = tan\alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha \ (k\epsilon Z)$

$۴)cotx = m = cot\alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha \ \ (k\epsilon Z)$





مثال: معادله $۳tanx - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید و ریشه‌های آن را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست اورید؟

@mohamaadzinati
www.Nomreyar.com - وبسایت آموزشی نمره یار