

شماره:	نام خانوادگی:	نام درس: آمار و احتمال
نام:	کلاس:	تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۰/۲۳
نام خانوادگی:		زمان: ۱۰۰ دقیقه تعداد صفحات: ۴ صفحه
کلاس:		موضوع: دپارتمان هندسه و کمپیوت

باسمه تعالی
اداره آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه ۴
دپارتمان داندگزار آموزش
پایه یازدهم

۱) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را معلوم کنید: (۱/۵ نمره)

الف) $B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ج) $B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B$

د) اگر ۶ عددی فرد باشد آن گاه ۵ مربع کامل است.

هـ) $(|x| < 0) \vee (-1 \in \{x : |x| < 1\})$

و) $A - (B - C) = (A - B) - C$

۲) جاهای خالی را با عبارات های مناسب پر کنید: (۱ نمره)

الف) گزاره نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن نباشد.

ب) گزاره $p \Rightarrow \sim q$ ، معنی می دهد. ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

ج) اگر n گزاره داشته باشیم، در اینصورت جدول ارزش آن ها حالت دارد.

د) $(p \vee \sim p) \equiv \dots T \dots$

۳) جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow \sim [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ زیر را کامل کنید: (۱ نمره)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د

۴) به کمک قوانین منطق ریاضی هم ارزی منطقی $\sim p \equiv (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ را ثابت کنید. (۱/۵ نمره)

طرف اول = $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim p \wedge T \equiv \sim p =$ طرف دوم

۵) ارزش گزاره $\forall y \in (-\infty, 0): y < 0 \wedge y' \leq 1$ را تعیین کرده و نقیض آن را بنویسید. (۱/۵ نمره)

گزاره داده شده نادرست است زیرا برای $y = -\frac{1}{2}$ عبارت $(-\frac{1}{2} < 0) \wedge (\frac{1}{2} \leq 1)$ حاصل می شود که نادرست است.

سوالینم: $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

پس: $\exists y \in (-\infty, 0): y > 0 \vee y' < 1$

۶) اگر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $2^k + 2$ عضو به تعداد ۱۹۲ واحد بیشتر از تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه 2^k عضو باشد، مقدار k را به دست آورید؟ (۱ نمره)

$$2^{2k+2} = 2^{2k} + 192 \Rightarrow 2^{2k+2} - 2^{2k} = 192 \Rightarrow 2^{2k}(2^2 - 1) = 192$$

$$\Rightarrow 2^{2k} = \frac{192}{3} = 64 \Rightarrow 2^{2k} = 2^6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

۷) یک مجموعه ۷ عضوی را به چند طریق می توان به ۳ زیر مجموعه تک عضوی و ۲ زیر مجموعه دو عضوی افزایش کرد؟ (۱ نمره)

$$V = 1 + 1 + 1 + 2 + 2$$

$$\frac{\binom{7}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 6 \times 1}{6 \times 2} = 105$$

۸) به کمک روش عضوگیری ثابت کنید: $(A \cup B)' = A' \cap B'$. (۱/۵ نمره)

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

$$\Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$$

۹) به کمک خبر مجموعه ها مورد الف) را ساده و مورد ب) را ثابت کنید: (۱/۵ نمره)

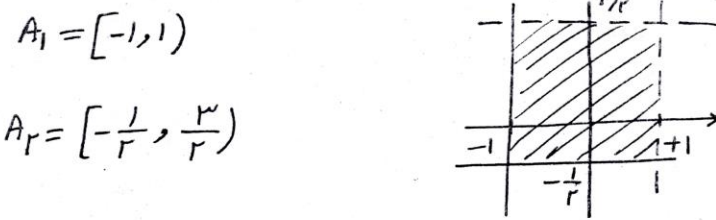
$$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) = (A' \cap B) \cup (A \cap B) \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup B) = B$$

$(B \cap A) \cap B = A \cap B$ $(A' \cup A) \cap B = \cup \cap B = B$ (ضرب)

ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ کی خبر

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = \boxed{(A \cap B)} \cap (A' \cup C') \\ &= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] = (A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C') \\ (A \cap A') \cap B &= \emptyset \cap B = \emptyset \quad = A \cap (B - C) = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

۱۰) اگر $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right]$ ابتدا A_1 و A_2 را مشخص کرده و سپس $A_1 \times A_2$ را رسم کنید. (۱ نمره)



۱۱) اگر $A = \{y-1, 6, z\}$ و $B = \{x+2, 5, -1\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، بیشترین مقدار $x+y+z$ را تعیین کنید. (۱ نمره)

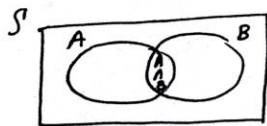
$$A \times B = B \times A \xrightarrow{A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset} A = B$$

الف) $\begin{cases} x+z=y \Rightarrow x=4 \\ y-1=5 \Rightarrow y=6 \\ z=-1 \Rightarrow z=-1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 4+6+(-1) = 9$

ب) $\begin{cases} x+z=y \rightarrow x=4 \\ y-1=-1 \rightarrow y=0 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 4+0+5 = 9$

بیشترین $\rightarrow 9$

۱۲) برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید: (۱/۵ نمره) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$(A-B) \cap B = \emptyset$ با توجه به نمودار مقابل داریم:

پس $A-B$ و B رویدادها جدا از همند

$$P((A-B) \cup B) = P(A-B) + P(B)$$

از طرفی: $(A-B) \cup B = A \cup B$

پس: $P(A \cup B) = P(A-B) + P(B) \xrightarrow{P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۱۳) از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 60\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال آن که $n(S) = (400 - 100) + 1 = 500$

الف) عدد انتخابی بر دو بخش پذیر باشد ولی بر سه بخش پذیر نباشد.

عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر است

ب) عدد انتخابی نه بر دو بخش پذیر باشد و نه بر سه. (۲ نمره) $\Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{600}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 250 \Rightarrow P(A) = \frac{250}{600}$

$B = \{ \text{عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر است} \} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor = 200 - 100 = 100 \Rightarrow P(B) = \frac{100}{600}$

ج) $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{250}{600} - \left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = \frac{250}{600} - \frac{100}{600} = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$

د) $P(A \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= 1 - \left(\frac{250}{600} + \frac{100}{600} - \frac{100}{600} \right) = 1 - \frac{250}{600} = \frac{350}{600} = \frac{7}{12}$

۱۴) در فضای نمونه ای $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ اگر $P(\{a_1, a_2\}) = \frac{11}{16}$ و $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{1}{4}$ و $P(a_4) = \frac{1}{4}$ باشد،

$P(\{a_1, a_2\})$ را به دست آورید. (۲ نمره)

$P(a_1) + P(a_2) = \frac{11}{16}$

$P(a_2) + P(a_3) = \frac{1}{4}$ $\boxed{P(a_3) = \frac{1}{4}}$ $\rightarrow P(a_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{P(a_1) = \frac{1}{4}}$

$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = P(a_1) + P(a_2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\rightarrow P(a_1) + P(a_2) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\{a_1\} \cup \{a_2\}) = \frac{1}{4}$

$\rightarrow P(\{a_1, a_2\}) = \frac{1}{4}$

۱۵) تاسی بگونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد متناسب با آن عدد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد ظاهر شده اول باشد، چقدر است؟ (۲ نمره)

$P(1) = \alpha, P(2) = 2\alpha, P(3) = 3\alpha, P(4) = 4\alpha, P(5) = 5\alpha, P(6) = 6\alpha$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 1 \Rightarrow 21\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{21}$

$P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = 2\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 10\alpha = \frac{10}{21}$