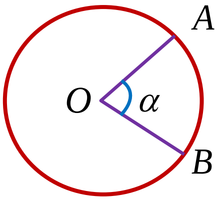
سؤالات و پاسخ تشریحی سؤالات فصل ۱ هندسه ۲

۱- ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره محدود است را قطاع دایره می نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد نشان دهید طول کمان AB برابراست با: $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$

حل :

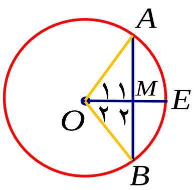


با استفاده از خواص نسبت تناسب می توان نوشت:

$$\begin{array}{cc} ۳۶۰ & P=۲\pi R \\ \alpha & L \end{array} \Rightarrow L=\frac{۲\pi R\alpha}{۳۶۰}=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

$$\begin{array}{cc} ۳۶۰ & S=\pi R^{۲} \\ \alpha & S' \end{array} \Rightarrow S'=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$$

۲- ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل کند برآن وتر عمود است و آن را نصف می کند(فرض و حکم را بنویسید).



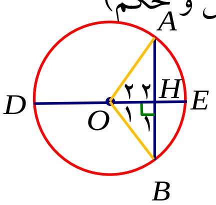
فرض : $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$ حکم : $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$ و $AM=BM$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{c} OA=OB=R \\ \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ OM=OM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\overset{\Delta}{A}M \cong O\overset{\Delta}{B}M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ} \hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ \\ AM=BM \end{array}\right.$$

۳ – ثابت کنید درهردایره قطرعمود بر وتر ،آن وتر وکمان های نظیرآن وتر رانصف می کند.(با ذکر فرض و حکم)

حل:

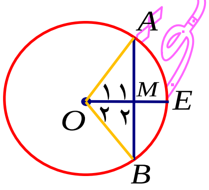


فرض : $DE\perp AB$ حکم : $AH=BH$ و $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{c} OA=OB=R \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \\ OH=OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH=BH \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE} \end{array}\right.$$

۴- ثابت کنیددرهر دایره، خطی که مرکزدایره را به وسط وتری از آن دایره که ازمرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند بر آن وتر عمود است. (با ذکر فرض و حکم)



فرض : $AM=BM$ حکم : $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$

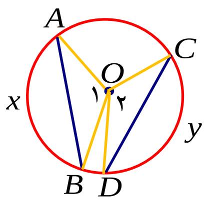
از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{matrix} OA=OB=R \\ AM=BM \\ OM=OM \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{OBM} \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \xrightarrow{M_۱+M_۲=۱۸۰^\circ} \hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$$

۵ – ثابت کنید در یک دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی ، با هم برابرند . (با ذکر فرض و حکم)

حل:

فرض : $AB=CD$　　حکم : $A\widehat{x}B=C\widehat{y}D$

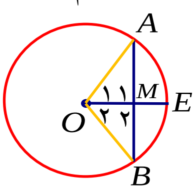


از نقطه O ، مرکز دایره پاره خط هایی به ۴ نقطه D,C,B,A وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{matrix} OA=OC=R \\ OB=OD=R \\ AB=CD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow A\widehat{x}B=C\widehat{y}D$$

۶ – در دایره $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ و $AB=۱۰$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

می‌دانیم درهر دایره، خطی که از مرکز دایره به یک وترعمود شود، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می کند پس داریم:



$$\overset{\frown}{AE}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=۳۰^\circ \Rightarrow \text{مرکزی}\quad \text{زاویه}\quad \hat{O}_۱=۳۰^\circ$$

از طرفی می دانیم در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است بنابراین می توان نوشت:

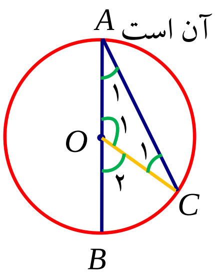
$$AM=\frac{OA}{۲} \xrightarrow{AM=۵} OA=۱۰$$

$$\overset{\Delta}{OAM}:\ \hat{M}_۱=۹۰^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (OM)^۲=(OA)^۲-(AM)^۲=۱۰۰-۲۵=۷۵ \Rightarrow OM=۵\sqrt{۳}$$

۷ – ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابل به آن است.

حل :

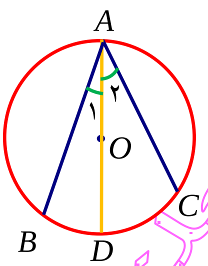
مسأله را در سه مرحله حل می کنیم : فرض: زاویه $\hat{A}$ محاطی است. حکم: زاویه $\hat{A}$ نصف کمان مقابل به آن است



الف) اگر یک ضلع زاویه محاطی ، قطری از دایره باشد: از نقطه O، به C وصل می کنیم در این صورت داریم : $\overset{\Delta}{OAC}:\ OA=OC=R \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}_۱$

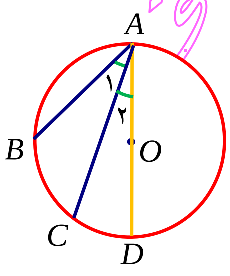
از طرفی زاویه $B\hat{O}C$ ، زاویه خارجی مثلث OAC می باشد پس می توان نوشت :

$$\hat{O}_۲=\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=۲\hat{A}_۱ \xrightarrow{\hat{O}_۲=\overset{\frown}{BC}} ۲\hat{A}_۱=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



ب) اگردو ضلع زاویه محاطی ، در دوطرف نقطه Oواقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایر ه را در نقطه D قطع کند. طبق قسمت (الف) داریم:

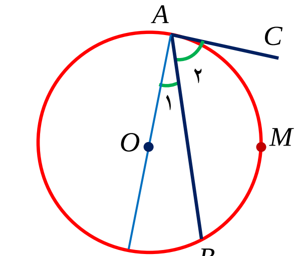
$$\hat{A}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



ج) اگردو ضلع زاویه محاطی ، در یک طرف نقطه O واقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایر ه را در نقطه D قطع کند در این صورت با توجه به (الف) داریم:

$$\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \quad \text{و} \quad B\hat{A}D=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱=B\hat{A}D-\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

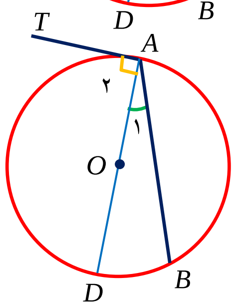
۸ – ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان رو به روی آن است .



حل:

فرض : $B\hat{A}C$ زاویه ظلی است .   حکم : $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AMB}}{۲}$

الف) $B\hat{A}T$ زاویهٔ تند(حاده) باشد: قطر AD را رسم می کنیم، پس می توان نوشت :

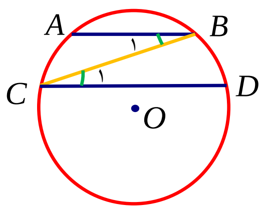


$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}C = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ D\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{۲} \end{array}\right\} \quad B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} - \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

ب) $B\hat{A}T$ زاویهٔ باز(منفرجه) باشد: قطر AD را رسم می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$T\hat{A}B = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ + \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

۹– ثابت کنید دو وتر (غیر متقاطع در دون دایره) از یک دایره موازی اند اگر و فقط اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند.



حل :

فرض: $AB \| CD$ حکم: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$$AB \| CD \quad , \quad BC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$$

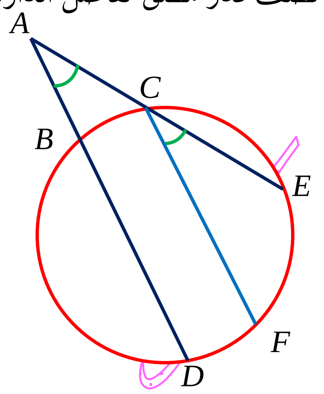
بلعکس: فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ حکم: $AB \| CD$

برای اثبات عکس رابطه فوق کافی است کافی مراحل انجام شده را به صورت معکوس انجام دهیم.

$$AB \| CD \quad , \quad BC \text{ مورب} \Leftarrow \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱ \Leftarrow \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Leftarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$$

می توانستیم در همان رابطهٔ اول از $\Leftrightarrow$ استفاده کنیم.

۱۰ – ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد امتداد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع ها ی آن زاویه محدوداند.



حل:

فرض : CE و BD وترهایی از دایره هستند که یکدیگر را در نقطه A خارج از دایره قطع می کنند .

حکم : $D\hat{A}E = \dfrac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{۲}$

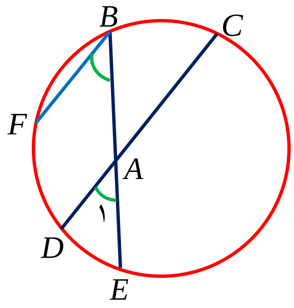
پاره خط CF راموازی BD رسم می‌کنیم در این صورت داریم:

$$CF \| BD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF} \quad (۱)$$

$$AD \parallel CF \quad , \quad \text{مورب} \quad AE \Rightarrow D\hat{A}E = F\hat{C}E \overset{\text{زاویه محاطی}}{=} \frac{\overset{\frown}{FE}}{۲} = \frac{۱}{۲}(DE - DF) \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}(DE - BC)$$

۱۱- ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع ها ی آن زاویه محدوداند.

حل:



فرض: CD و BE وترهایی ازدایره هستندکه یکدیگررا در نقطه A درون دایره قطع می کنند.

حکم : $D\hat{A}E = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{۲}$

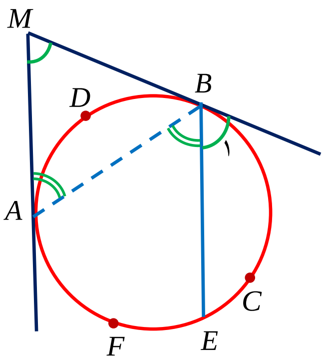
پاره خط BF راموازی DC رسم می کنیم در این صورت داریم:

$$BF \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{FD} = \overset{\frown}{BC} \quad (۱)$$

$$BF \parallel CD \quad , \quad \text{مورب} \quad BE \Rightarrow D\hat{A}E = F\hat{B}E \overset{\text{زاویه محاطی}}{=} \frac{\overset{\frown}{FE}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{FD} + \overset{\frown}{DF}\right) \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}\right)$$

۱۲ – ثابت کنید زاویه بین دوخط مماس رسم شده از دو نقطه A و B بر یک دایره برابر قدرمطلق نصف تفاضل دوکمان ایجاد شده بین نقطه‌های A و B است.

حل :



BE را موازی MA رسم می‌کنیم در این صورت می توان نوشت :

$$MA \parallel BE \Rightarrow \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AFE} \quad (۱)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم:

$$MA \parallel BE \quad , \quad \text{مورب} \quad AB \Rightarrow M\hat{A}B = A\hat{B}E$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AFE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AEF}$$

بنا براین می توان نوشت:

$$MA \parallel BE \quad , \quad \text{مورب} \quad MB \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱ \overset{\text{زاویه ظلی}}{=}$$

$$\frac{\overset{\frown}{BCE}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{AFE}\right) \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{ADB}\right)$$

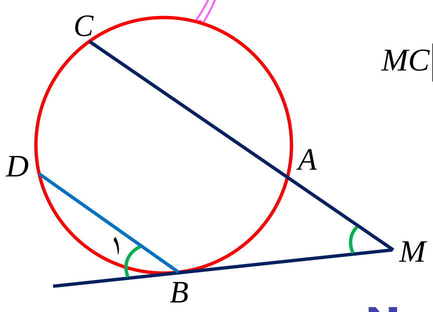
۱۳ – در شکل زیر ثابت کنید : $B\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

حل :

BD را موازی MC رسم می‌کنیم ، در این صورت داریم :

$$MC \parallel BD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \quad (۱)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم:

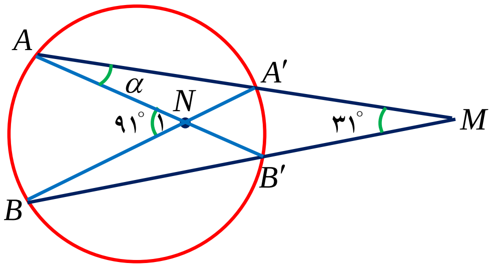


$$MC \parallel BD \quad , \quad \text{مورب} \quad MB \Rightarrow B\hat{M}C = \hat{B}_۱$$

$$\overset{\text{زاویه ظلی}}{=} \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CD}}{۲} \overset{(۱)}{=} \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۱۴ – در شکل مقابل اندازه زاویهٔ α را به دست آورید.

حل:



$$\hat{N}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۹۱^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'} = ۱۸۲^\circ$$

ازطرفی داریم :

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۳۱^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = ۶۲^\circ$$

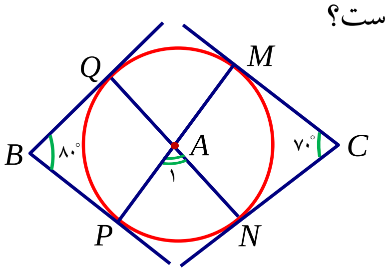
در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'} = ۱۸۲^\circ \\ \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = ۶۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۲۲^\circ \quad , \quad \overset{\frown}{A'B'} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۱۵ – در شکل زیر اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟

حل :

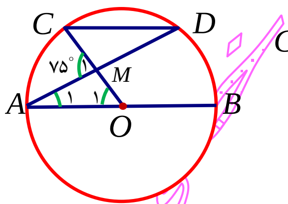


$$\hat{C} = \frac{\overbrace{\overset{\frown}{MQ} + \overset{\frown}{QP} + \overset{\frown}{PN}}^{۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{MN}} - \overset{\frown}{MN}}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow ۳۶۰^\circ - ۲\overset{\frown}{MN} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = ۱۱۰^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\overbrace{\overset{\frown}{MQ} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{NP}}^{۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{QP}} - \overset{\frown}{QP}}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow ۳۶۰^\circ - ۲\overset{\frown}{QP} = ۱۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{QP} = ۱۰۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overbrace{\overset{\frown}{MQ} + \overset{\frown}{PN}}^{۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{QP} - \overset{\frown}{MN}}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ - ۱۰۰^\circ - ۱۱۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۱۶ – در دایره رسم شده مقابل، اندازه کمان CD را به دست آورید.

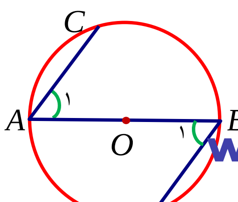


حل:
$$\left.\begin{array}{l} CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \\ \hat{M}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{A}_۱ = ۷۵^\circ \\ \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AC} \\ \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow ۷۵^\circ = \overset{\frown}{AC} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD} = ۸۰^\circ$$

۱۷– در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$

حل :



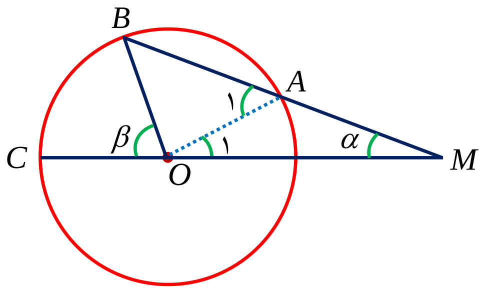
$$AC \parallel DB \quad , \quad \text{مورب} \quad AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \overset{\text{زاویه محاطی}}{=} \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow 180^\circ - \overset{\frown}{BC} = 180^\circ - \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

تذکر: می توان از B و C به O وصل کرد و با اثبات همنهشت بودن دو مثلث AOC و BOD اثبات را انجام داد.

۱۸ – دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است از نقطهٔ M خارج از دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$: نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

حل:



برهان:از A به O وصل می کنیم

$$O\overset{\Delta}{A}M : \quad OA = MA = R \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{M} = \alpha$$

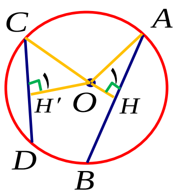
$$\text{زاویه خارجی} \quad \hat{A}_1 = \hat{O}_1 + \hat{M} = 2\alpha$$

$$O\overset{\Delta}{A}B : \quad OA = OB = R \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 = 2\alpha$$

$$\text{زاویه خارجی} \quad \beta = \hat{B} + \hat{M} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۱۹ – ثابت کنید در یک دایره ، از دو وتر نا برابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیک تر است و بلعکس.(فرض و حکم را بنوسید)

اثبات طرف اول : فرض: $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$



از نقطه O، به وتر های AB و CD عمود می کنیم تا آنها را در نقاط H و H' قطع کند .از O به دو نقطه A و C نیز وصل می دانیم طبق قضیه ، پاره خطی که از مرکز دایره به یک وتر عمود می شود ،آن را نصف می کند پس داریم:

$$\left(OH \perp AB \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} \quad , \quad OH' \perp CD \Rightarrow CH' = DH' = \frac{CD}{2} \right)$$

$$O\overset{\Delta}{A}H : \quad (OA)^2 = (OH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow (AH)^2 = (OA)^2 - (OH)^2$$

$$O\overset{\Delta}{C}H' : \quad (OC)^2 = (OH')^2 + (CH')^2 \Rightarrow (CH')^2 = (OC)^2 - (OH')^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CH' \Rightarrow (AH)^2 > (CH')^2 \xrightarrow{\begin{cases}(AH)^2 = (OA)^2 - (OH) \\ (CH')^2 = (OC)^2 - (OH')^2\end{cases}}$$

$$(OA)^2 - (OH)^2 > (OC)^2 - (OH')^2 \xrightarrow{AO = OC = R} -(OH)^2 > -(OH')^2$$

$$\Rightarrow (OH)^2 < (OH')^2 \Rightarrow OH < OH'$$

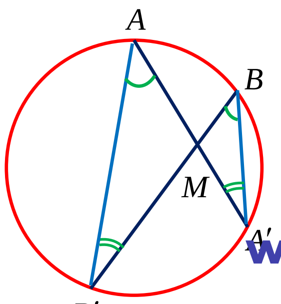
اثبات طرف دوم : برای اثبات عکس قضیه ، کافی است مراحل اثبات قبلی را به طور عکس انجام دهیم.

تذکر : برای اثبات عکس قضیه می توان به جای $\Rightarrow$ از $\Leftrightarrow$ استفاده کرد.

۲۰– ازنقطه M واقع در داخل دایره (C) دووتر دلخواه BB', AA' رسم شده اند. ثابت کنید : $MA.MA' = MB.MB'$

حل:

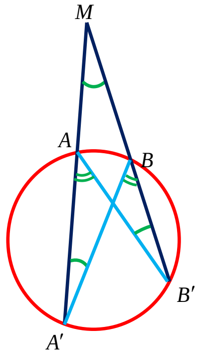
برهان: از A به B' و از B به A' وصل می کنیم



$$\left.\begin{array}{l} B'\hat{A}A' = A'\hat{B}B' = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \\ B\hat{B}'A = B\hat{A}'A = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AMB'} = \overset{\Delta}{BMA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$$

$$\Rightarrow \quad MA.MA' = MB.MB'$$

۲۱ – امتداد دو وتر دلخواه BB', AA' در نقطه M خارج دایره یکدیگر را قطع می کنند ثابت کنید : $MA.MA' = MB.MB'$



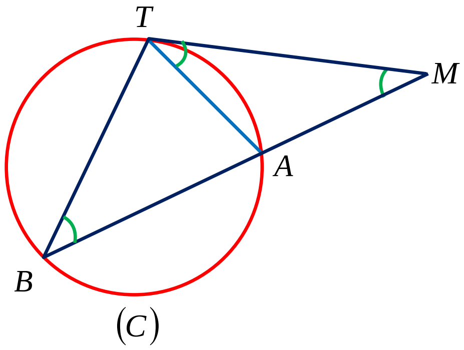
حل:

برهان: از A به B' واز B به A' وصل می کنیم

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ B\hat{B}'A = B\hat{A}'A = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AMB'} = \overset{\Delta}{BMA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$$

$$\Rightarrow \quad MA.MA' = MB.MB'$$

۲۲ – ثابت کنید اگر از یک نقطه یک مماس ویک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم مربع اندازه مماس برابر با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع است.



حل:

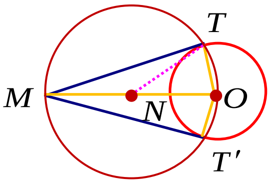
از T به A و B وصل می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} M\hat{T}A = \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{MTA} \approx \overset{\Delta}{MTB} \Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$MT^{۲} = MA.MB$$

۲۳ – چگونه می توان از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$، مماس برآن رسم کرد.

حل :

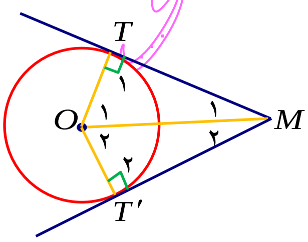


دایره ای به قطر OM رسم می کنیم تا دایره $C(O,R)$ را در T و T' قطع کند، MT و MT' مماس های مورد نظر هستند.زیرا در مثلث OTM، TNمیانه وارد بر OM است و داریم:

$$ON = R' \xrightarrow{OM=۲R'} ON = \frac{۱}{۲}OM$$

وچون میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع است، مثلث در رأس T قائمه است و در نتیجه MT مماس بر دایره است.

۲۴ – هرگاه از نقطهٔ M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و نقاط T و T' نقاط تماس باشندثابت کنید اولاًطول دو مماس با یکدیگربرابرند و ثانیاً نیم خط MO نیمساز زاویهٔ TMT' است.



حل :

فرض : MT و MT' بر دایره C در نقاط T و T' مماسند

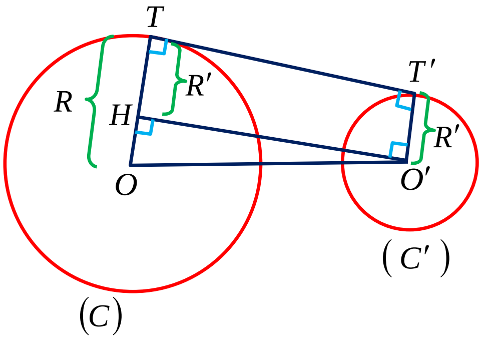
حکم : $MT = MT'$ و $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$

می دانیم پاره خطی که از مرکز یک دایره به نقطه تماس از یک خط مماس وصل شود، بر خط مماس عمود است بنابراین می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' = R \\ \hat{T}_1 = \hat{T}_2' = 90^\circ \\ OM = OM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\Delta}{T}M \cong O\overset{\Delta}{T'}M \Rightarrow MT = MT' \quad , \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

۲۵ – طول مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج $C(O,R)$ و $C'(O,R')$ را به دست آورید.

حل:



از O' خطی موازی TT' رسم می کنیم در این صورت چهار ضلعی $O'HTT'$ یک مستطیل است زیرا دارای چهار زاویه قائمه می باشد.

پس: $O'H = TT'$

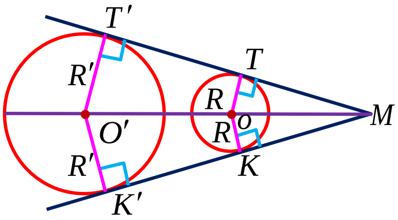
$$O\overset{\Delta}{H}O' \ : \ OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2}$$

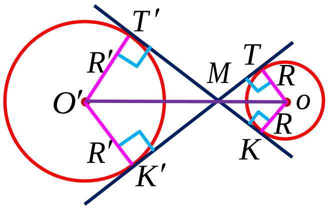
$$\xrightarrow[OH=R-R']{OO'=d} O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

$$TT' = O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

۲۶ – ثابت کنید اگر دو مماس مشترک m و n در نقطه M متقاطع باشند، نقطه M روی خط OO' است.

حل:





می دانیم اگر از نقطهٔ M خارج از دایره $C(O,R)$ مماس های MT و MK را رسم کنیم، نیم خط OM نیمساز TMK است. همچنین هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

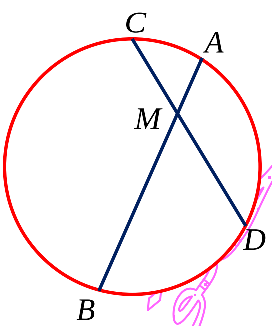
$OT = OK = R \Rightarrow$ O روی نیمساز زاویه M است

$O'T' = O'K' = R' \Rightarrow$ O' روی نیمساز زاویه M است

OO' روی نیمساز زاویه M است.

۲۷ – در دایره $C(O,R)$ وتر AB وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11\,cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را با چه نسبتی قطع می کند.

حل:

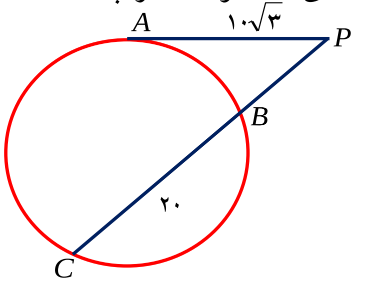


$$\frac{MC}{MD} = \frac{1}{2} \xrightarrow{MD=9-MC} 2MC = 9 - MC \Rightarrow MC = 3 \Rightarrow MD = 6$$

$$MC.MD = MA.MB \Rightarrow 3\times 6 = MA\times(11-MA) \Rightarrow MA^2 - 11MA + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (MA-9)(MA-2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MA = 9 \xrightarrow{MB=11-MA} MB = 2 \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{9} \\ MA = 2 \xrightarrow{MB=11-MA} MB = 9 \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{9} \end{array}\right.$$

۲۸ – از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانیده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC=۲۰$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

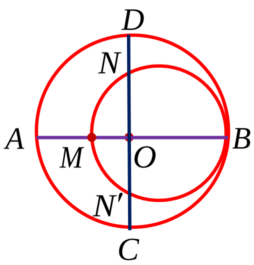


حل:

$$PA^۲ = PB\times PC \Rightarrow \left(۱۰\sqrt{۳}\right)^۲ = PB(PB+۲۰) \Rightarrow PB^۲+۲۰PB-۳۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (PB-۱۰)(PB+۳۰)=۰ \xrightarrow{PB>۰} PB=۱۰ \quad , \quad PC=۳۰$$

۲۹ – در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM=۱۶$ و $ND=۱۰$ شعاع دو دایره را پیدا کنید.



حل:

فرض کنیم شعاع دایره بزرگتر R و شعاع دایره کوچکتر R' باشد در این صورت داریم:

$OM = R - AM = R - ۱۶$

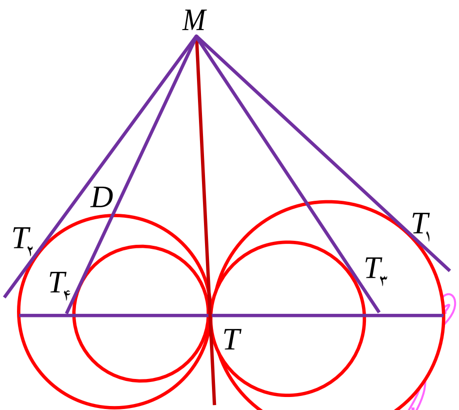
می دانیم در یک دایره قطر عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می کند پس داریم:

$MB \perp NN' \Rightarrow ON = ON' = R-۱۰$

دردایره کوچکتر $ON\times ON' = OM\times OB \Rightarrow (R-۱۰)^۲ = (R-۱۶)R \Rightarrow R=۲۵$

$۲R' = MB = AB - AM = ۲R - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow R' = ۱۷$

۳۰ – مطابق شکل تمام دایره ها در نقطهٔ T بر هم مماس‌اند از نقطهٔ M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم ثابت کنید : $MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \dots$



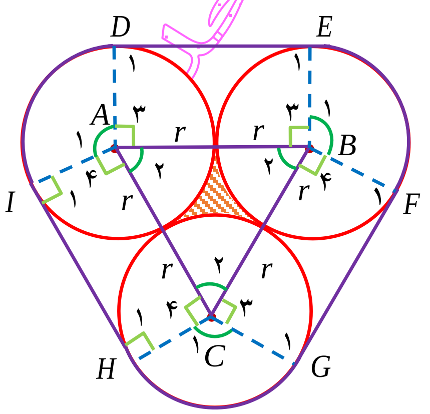
حل :

می دانیم اگر از یک نقطه بیرون دایره، دو مماس بر آن رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است. از طرفی MT بر تمام دایره ها مماس است پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MT = MT_۱ \\ MT = MT_۲ \\ MT = MT_۳ \\ MT = MT_۴ \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow MT = MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \dots$$

۳۱ – سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r+۲\pi r$ است.

همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^۲\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}\right)$ است.



حل:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \quad AB=BC=AC=۲r \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_۲=\hat{B}_۲=\hat{C}_۲=۶۰^\circ$$

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{A}_۴=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۳=\hat{A}_۴=۹۰^\circ \ , \ \hat{A}_۲=۶۰^\circ} \hat{A}_۱=۱۲۰^\circ$$

به همین ترتیب $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱=۱۲۰^\circ$

اگر اندازه کمان ID بر حسب درجه را با نماد $\overset{\frown}{ID}$ نمایش داده و طول کمان ID را با نماد $\left|\overset{\frown}{ID}\right|$ نمایش دهیم داریم:

$$\frac{\overset{\frown}{ID}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\left|\overset{\frown}{ID}\right|}{۲\pi r} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{\left|\overset{\frown}{ID}\right|}{۲\pi r} \quad \Rightarrow \quad \left|\overset{\frown}{ID}\right|=\frac{۲\pi r}{۳}$$

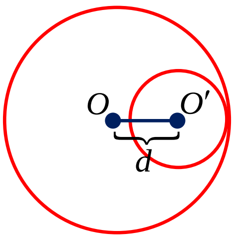
به همین ترتیب $\left|\overset{\frown}{HG}\right|=\left|\overset{\frown}{EF}\right|=\frac{۲\pi r}{۳}$ و در نتیجه طول نخ برابر است با:

$$DE+\left|\overset{\frown}{EF}\right|+FG+\left|\overset{\frown}{HG}\right|+IH+\left|\overset{\frown}{ID}\right|=۲r+\frac{۲\pi r}{۳}+۲r+\frac{۲\pi r}{۳}+۲r+\frac{۲\pi r}{۳}=۶r+۲\pi r$$

$$\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{S_{\text{قطاع } ۶۰^\circ}}{\pi r^۲} \quad \Rightarrow \quad S_{\text{قطاع } ۶۰^\circ}=\frac{\pi r^۲}{۶}$$

مساحت ناحیه محدود به سه دایره $=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۳S_{\text{قطاع } ۶۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲-۳\times\frac{\pi r^۲}{۶}=\left(\sqrt{۳}-\pi\right)r^۲$

۳۲ – طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر است و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

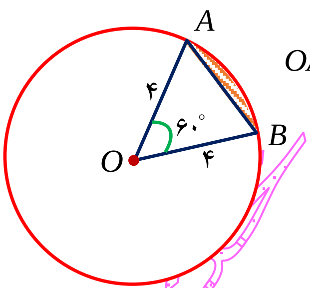


حل:

$$R-R'=۲ \quad , \quad \pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(R-R')}_{۲}(R+R')=۱۶ \quad \Rightarrow \quad R+R'=۸$$

$$\begin{cases} R-R'=۲ \\ R+R'=۸ \end{cases} \Rightarrow \quad R=۵ \quad , \quad R'=۳$$

۳۳ – مطابق شکل دایره به شعاع ۴ داریم، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



حل:

$\overset{\Delta}{OAB}: \quad OA=OB \Rightarrow \hat{A}=\hat{B} \xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ} \hat{A}=\hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع است $\overset{\Delta}{OAB}$

$$S_۱=S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(OA)^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۱۶=۴\sqrt{۳}$$

مساحت قطاع OAB $S_۲=\frac{۶۰}{۳۶۰}\pi R^۲=\frac{۱}{۶}\pi\times ۱۶=\frac{۸\pi}{۳}$

مساحت ناحیه سایه زده $S_۲-S_۱=\frac{۸\pi}{۳}-۴\sqrt{۳}$

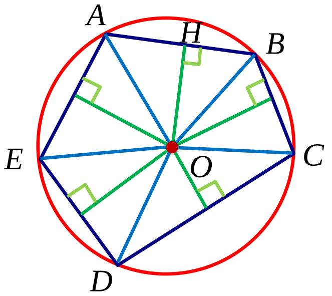
۳۴ –یک چند ضلعی را محاطی گوییم اگر و فقط اگر ... دایره ای... وجود داشته باشد که ... از همهٔ رئوس آن بگذرد...

مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی ... نقطهٔ همرسی نیمساز های زاویه های چند ضلعی... است .

یک چند ضلعی را محیطی گوییم اگر و فقط اگر ... دایره ای... وجود داشته باشد که ... برهمهٔ اضلاع آن مماس باشد...

مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی ... نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع آن چند ضلعی... است.

۳۵ – ثابت کنید مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع چند ضلعی است.



حل:

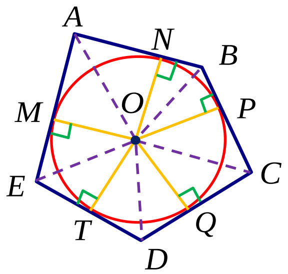
می دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و بلعکس.

Oروی عمود منصف AB است $\Rightarrow$ $OB = OA = R$

به همین ترتیب نقطهٔ O بر روی عمود منصف تمام اضلاع چند ضلعی است و در نتیجه مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع چند ضلعی است.

۳۶– ثابت کنید مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی چند ضلعی است.

حل:



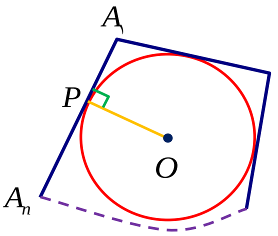
می دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بلعکس.

Oروی نیمساز زاویه $\hat{A}$ است $\Rightarrow$ $ON = OM = R$

به همین ترتیب نقطهٔ O برروی نیمساز تمام زوایای داخلی چند ضلعی است و در نتیجه مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی چند ضلعی است.

۳۷ – اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $۲P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد ، نشان دهید $S = rP$.

حل:



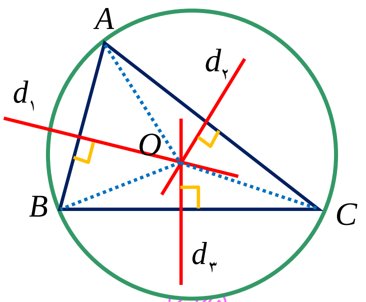
اگر A_1 و A_2 و ... و A_n، رئوس n ضلعی باشد داریم:

$$S = S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + \ldots + S_{A_{n-1}OA_n} = \frac{1}{2} r \times A_1A_2 + \frac{1}{2} r \times A_2A_3 + \ldots + \frac{1}{2} r \times A_{n-1}A_n$$

$$= \frac{1}{2} r\left(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n\right) = \frac{1}{2} r(2P) = rP$$

۳۸– ثابت کنید هر مثلث همواره محاطی است.

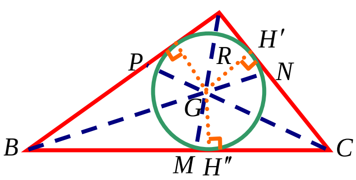
حل:



می دانیم عمود منصف های اضلاع یک مثلث همرسند، پس نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع مثلث تنها نقطه ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین اگر دایره ای به مرکز نقطهٔ تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصلهٔ این نقطه از یکی از رئوس مثلث رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس می گذرد، یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

۳۹– ثابت کنید هر مثلث همواره محیطی است.

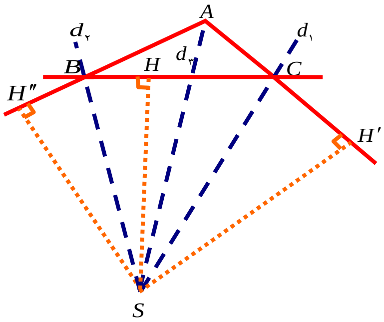
حل:



می دانیم نیمساز های زوایای داخلی یک مثلث همرسند، پس نقطهٔ همرسی نیمساز های زوایای داخلی مثلث تنها نقطه ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین

اگر دایره ای به مرکز نقطهٔ تلاقی سه نیمساز های زوایای داخلی مثلث و به شعاع فاصلهٔ این نقطه از یکی از اضلاع مثلث رسم کنیم، این دایره بر هر سه ضلع مماس است ، یعنی دایره محاطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محیطی است.

۴۰ – در مثلث ABC ثابت کنید نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ با نیمساز های خارجی دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ همرسند.



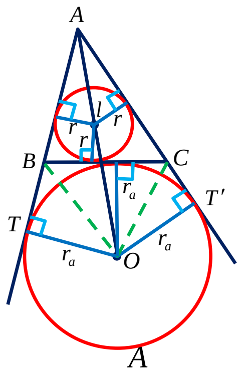
حل:

$d_۱$ نیمساز خارجی زاویه $\hat{C}$ $\Leftarrow$ $SH = SH'$

$d_۲$ نیمساز خارجی زاویه $\hat{B}$ $\Leftarrow$ $SH = SH''$

در نتیجه $SH' = SH''$ ، یعنی نقطه S ازدوضلع زاویه $\hat{A}$ به یک فاصله است پس نقطه S روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد .

۴۱ – در شکل زیر اگر مساحت مثلث ABC را با S و محیط آن $۲P$ باشد ثابت کنید $r_a = \dfrac{S}{P-a}$.

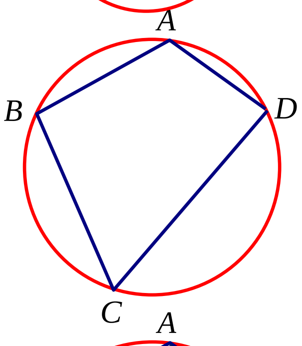


حل:

$$S = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABO}} + S_{\overset{\Delta}{ACO}} - S_{\overset{\Delta}{BCO}} = \frac{۱}{۲} r_a \times AB + \frac{۱}{۲} r_a \times AC - \frac{۱}{۲} r_a \times BC$$

$$= \frac{۱}{۲} r_a \left(\underbrace{AB + AC + BC}_{۲P} - ۲\underbrace{BC}_{a} \right) = r_a (P-a) \quad \Rightarrow \quad r_a = \frac{S}{P-a}$$

۴۲ – ثابت کنید یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر ، زوایای مقابل مکمل باشند.

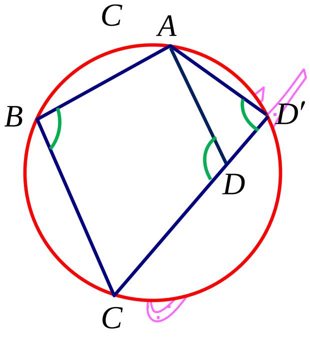


حل :

فرض: $ABCD$ محاطی است　　　حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{B\widehat{C}D}{۲} + \frac{B\widehat{A}D}{۲} = \frac{B\widehat{C}D + B\widehat{A}D}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{A\widehat{D}C}{۲} + \frac{A\widehat{B}C}{۲} = \frac{A\widehat{D}C + A\widehat{B}C}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



فرض : $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$　　　حکم : چهار ضلعی $ABCD$ محاطی است .

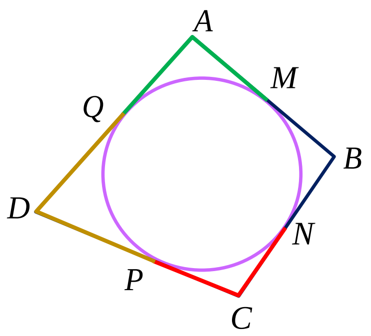
بر سه نقطه A, B, C یک دایره می گذرد، می خواهیم ثابت کنیم که این دایره از نقطه D نیز می گذرد . برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم اگر این دایره از نقطه D نگذرد ، پاره خط CD را از طرف D امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ای مانند D' قطع کند و از D' به A وصل می کنیم، چون چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است در این صورت می توان نوشت : $\hat{B} + \hat{D'} = ۱۸۰^\circ$ از طرفی طبق فرض داریم $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$ بنابراین نتیجه می شود $D = D'$. اما می دانیم D زاویه خارجی مثلث ADD' است ، پس $\hat{D} > \hat{D'}$. دو رابطه

$\hat{D} > \hat{D}'$ و $D = D'$ با یکدیگر در تناقض هستند در نتیجه فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است.

۴۳ – در یک چهار ضلعی محیطی مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر است.

حل:

فرض: $ABCD$ محیطی است حکم: $AB + CD = AD + BC$

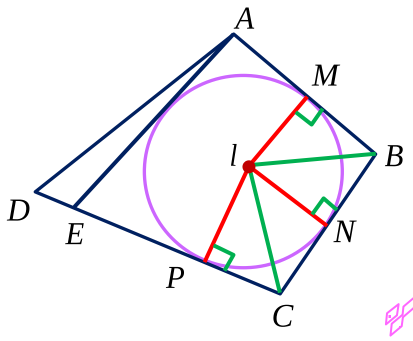


می دانیم اگر از یک نقطه بیرون دایره دو مماس بر آن رسم کنیم ، طول دو مماس با یکدیگر برابر است پس داریم:

$$AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + BN + NC + DQ =$$
$$AQ + QD + BN + NC = AD + BC$$

۴۴ – ثابت کنید یک چهار ضلعی درصورتی محیطی است که مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر باشد.

حل:



فرض : $AB + CD = AD + BC$ حکم: $ABCD$ محیطی است

نیمساز های دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطهٔ l قطع می کنند، پس داریم:

l روی نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است $\Leftarrow$ $lM = lN$

l روی نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ است $\Leftarrow$ $lN = lP$

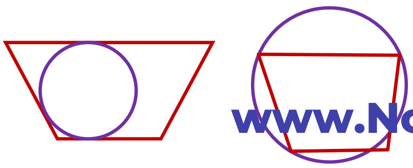
دایره ای به مرکز l و به شعاع $lM = lN = lP = R$ رسم می کنیم این دایره بر رئوس AB و BC و CD رسم می کنیم ادعا می کنیم این دایره AD نیز مماس است به برهان خلف فرض کنیم دایره بر AD مماس نباشد ، AE را مماس بر دایره رسم می کنیم در نتیجه $ABCE$ محیطی است پس داریم :

$$AB + CE = BC + AE \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underline{AB + CD}}_{\text{فرض}\quad AD+BC} - DE = BC + AE$$

$$\Rightarrow \quad AD + BC - DE = BC + AE \quad \Rightarrow \quad AD = AE + DE$$

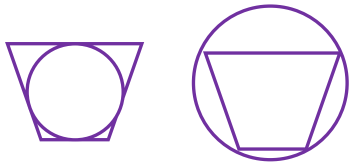
اما چنین چیزی امکان پذیر نیست چون در مثلث ADE مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است . پس فرض خلف باطل و حکم بر قرار است.

۴۵– محاطی یا محیطی بودن ذوزنقه را بررسی کنید.



حل:

یک ذوزنقه در حالت کلی نه محاطی است و نه محیطی است. اما در حالت خاص می تواند محاطی یا محیطی باشد.

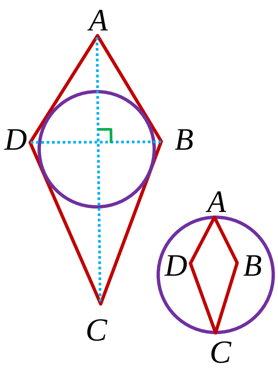


ذوزنقه متساوی الساقین محاطی است زیرا زوایای مقابل در آن مکمل هستند.

اما فقط در صورتی محیطی است که مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد

۴۶– محاطی یا محیطی بودن کایت را بررسی کنید.

حل:



می دانیم کایت دارای چهار ضلع است که دوبه‌دو با هم مساوی‌اند و اضلاع مساوی، مجاور یکدیگرند . قطرها همدیگر را با یک زاویهٔ قائمه قطع می کنند و یکی از قطرها دیگری را به دو قسمت برابر تقسیم می کند. (یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.) و زوایای مقابل برابرند.

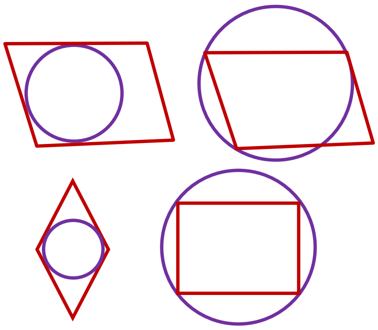
کایت در حالت کلی محیطی است زیرا:

$$AD = AB \quad , \quad DC = BC \quad \Rightarrow \quad \underbrace{AB}_{AD} + \underbrace{DC}_{BC} = AD + BC$$

اما محاطی نیست

مگر آنکه زوایای مقابل مکمل باشند که در این صورت کایت به مربع تبدیل می شود.

۴۷ – محاطی یا محیطی بودن متوازی الاضلاع را بررسی کنید.

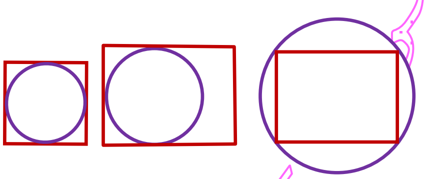


حل:

در حالت کلی، متوازی الاضلاع نه محاطی است و نه محیطی است.

در حالت خاص اگر متوازی الاضلاع، زاویه °۹۰ داشته باشد یعنی به مستطیل تبدیل شود، محاطی خواهد بود و اگر اضلاع مجاور آن برابر باشند یعنی به لوزی تبدیل شود، محیطی خواهد بود.

۴۸ – محاطی یا محیطی بودن مستطیل را بررسی کنید.



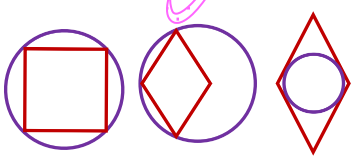
حل:

در حالت کلی، مستطیل محاطی است ولی محیطی نیست.

در حالت خاص اگر اضلاع مجاور مستطیل ، برابر باشند یعنی به مربع تبدیل شود، محیطی خواهد بود.

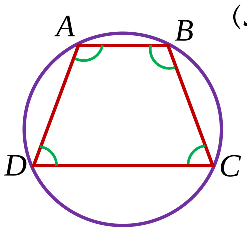
۴۹– محاطی یا محیطی بودن لوزی را بررسی کنید.

حل:



در حالت کلی، لوزی محیطی است زیرا مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است ولی محاطی نیست.

در حالت خاص اگر لوزی، زاویه ۹۰° داشته باشد یعنی به مربع تبدیل شود، محاطی خواهد بود.



۵۰– ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد. (فرض و حکم را بنویسید)

حل:

فرض: $AD = BC$ حکم: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است

$$AD = BC \quad \Rightarrow \quad \hat{D} = \hat{C}$$

$$\text{ذوزنقه } ABCD \quad \Rightarrow \quad \hat{A} + \underbrace{\hat{D}}_{\hat{C}} = \hat{B} + \underbrace{\hat{C}}_{\hat{D}} = ۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

و چون زوایای مقابل در آن مکمل هستند پس ذوزنقه متساوی الساقین محاطی است.

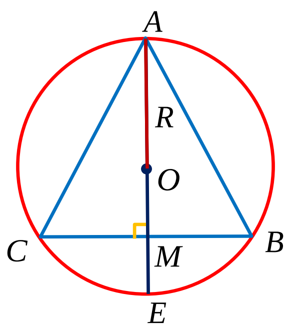
فرض: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است   حکم: $AD = BC$

$$\underbrace{\hat{A}}_{۱۸۰^\circ - D} + \hat{C} = \underbrace{\hat{B}}_{۱۸۰^\circ - C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad ۱۸۰^\circ - \hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{C} + \hat{D} \quad \Rightarrow \quad ۲\hat{C} = ۲\hat{D}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{C} = \hat{D} \quad \Rightarrow AD = BC$$

۵۱ – مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

حل:



مرکز دایره محیطی یک مثلث، نقطهٔ همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث است و.

در مثلث متساوی الاضلاع عمود منصف اضلاع و میانه و ارتفاع وارد برآن بر هم منطبق .

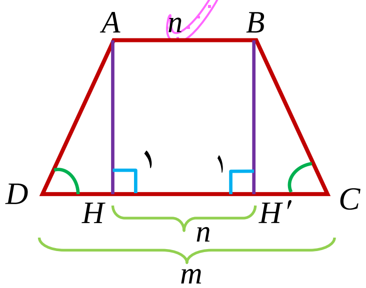
میانه های مثلث به نسبت ۲ به ۱ یکدیگر را قطع می کنند $\left(R = \frac{۲}{۳}AM\right)$. پس داریم:

$$R = \frac{۲}{۳}AM = \frac{۲}{۳}h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{۳}{۲}R \quad \xrightarrow{h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a} \quad \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{۳}R$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\left(\sqrt{۳}R\right)^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۵۲– یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده ضرب در میانگین هندسی آنها .

حل:



چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الاساقین است یعنی $AD = BC$

و چون ذوزنقه $ABCD$ محیطی است پس:

$$\underbrace{AB}_{n} + \underbrace{DC}_{m} = AD + \underbrace{BC}_{AD} = ۲AD \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{m+n}{۲}$$

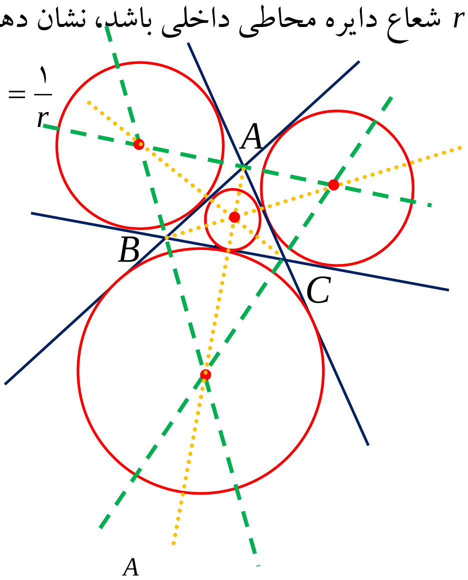
$$\left.\begin{array}{r} AD = BC \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}'_۱ = ۹۰^\circ \\ AH = BH' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{ADH} \cong \overset{\Delta}{BCH'} \Rightarrow DH = CH' = \frac{m-n}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ADH}: \quad AH^۲ = AD^۲ - DH^۲ = \left(\frac{m+n}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{m-n}{۲}\right)^۲ = \frac{m^۲+n^۲+۲mn-m^۲-n^۲+۲mn}{۴} = mn$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{۲} \times AH = \frac{n+m}{۲} \times \sqrt{mn}$$

۵۳– اگر r_a، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$



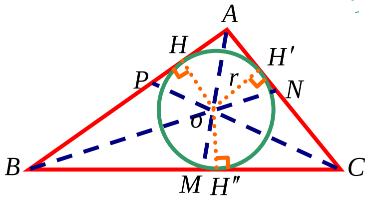
حل:

می دانیم : $r_a = \frac{S}{P-a}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$

$$S = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + S_{\overset{\Delta}{AOC}}$$

$$= \frac{۱}{۲} r \times AB + \frac{۱}{۲} r \times BC + \frac{۱}{۲} r \times AC$$

$$= \frac{۱}{۲} r \left(\underbrace{AB + BC + AC}_{۲P}\right) = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{\frac{S}{P-a}} + \frac{۱}{\frac{S}{P-b}} + \frac{۱}{\frac{S}{P-c}} =$$

$$\frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{۳P - \overbrace{(a+b+c)}^{۲P}}{S} = \frac{P}{S} = \frac{۱}{r}$$

۵۴– اگر r، شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC بوده و h_a، h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

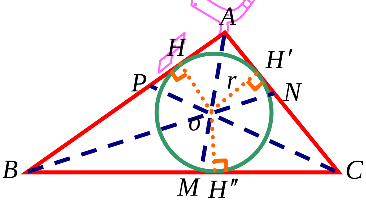
$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

حل:

$$S = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + S_{\overset{\Delta}{AOC}}$$

$$= \frac{۱}{۲} r \times AB + \frac{۱}{۲} r \times BC + \frac{۱}{۲} r \times AC$$

$$= \frac{۱}{۲} r \left(\underbrace{AB + BC + AC}_{۲P}\right) = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

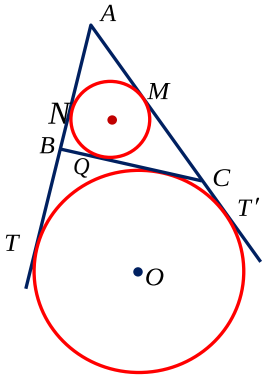


$$S = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} h_a \times a \Rightarrow h_a = \frac{۲S}{a}$$

به همین ترتیب $h_b = \frac{۲S}{b}$ و $h_c = \frac{۲S}{c}$ بنا براین می توان نوشت:

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{\frac{۲S}{a}} + \frac{۱}{\frac{۲S}{b}} + \frac{۱}{\frac{۲S}{c}} = \frac{a}{۲S} + \frac{b}{۲S} + \frac{c}{۲S} = \frac{۲P}{۲S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

۵۵ – اگر نقاط تماس دایره محاطی داخل مثلث ABC با اضلاع آن M، N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:



$$AM = AN = P - a$$
$$BN = BQ = P - b\,,\ CM = CQ = P - c$$
$$AT = AT' = P$$

حل:

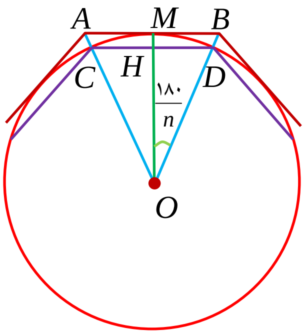
می دانیم اگر از یک نقطهٔ بیرون از دایره دو مماس بر آن رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است یعنی داریم: $AM = AN$، $NB = BQ$ و $MC = QC$ و $AT = AT'$. در این صورت داریم:

$$۲AN = AN + AN = AN + AM = AB - NB + AC - MC = AB + AC - BQ - CQ$$
$$= AB + AC - BC = AB + AC + BC - ۲BC = ۲P - ۲a \quad \Rightarrow \quad AN = P - a$$

به همین ترتیب داریم : $BN = BQ = P - b\,,\ CM = CQ = P - c$

$$AT = AB + BT = AB + BQ' \quad , \quad AT' = AC + CT' = AC + CQ'$$
$$\Rightarrow \quad ۲AT = AT + AT = AT + AT' = AB + \underbrace{BQ' + CQ'}_{BC} + AC = ۲P$$
$$\Rightarrow \quad AT = P \xrightarrow{AT = AT'} AT = AT' = P$$

۵۶– یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظربگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی های منتظم محیطی و محاطی باشند، آن گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$.

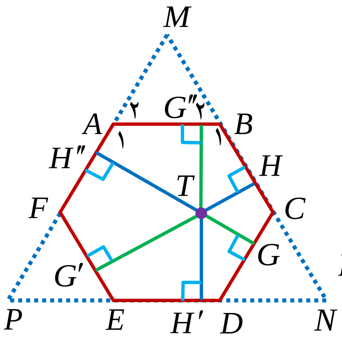


حل:

می دانیم خطی که از مرکز دایره، به وتری از دایره عمود شود آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می کند پس : $AM = MB = \frac{AB}{۲}$ و $A\hat{O}M = B\hat{O}M \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{DM}$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}M = B\hat{O}M \\ OM = OM \\ A\hat{M}O = B\hat{M}O = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{BOM} \quad \Rightarrow \quad AM = BM = \frac{AB}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OMB}: \quad \tan\hat{o} = \frac{MB}{OM} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \quad \Rightarrow \quad MB = r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{۲} = r\tan\frac{۱۸۰}{n} \quad \Rightarrow \quad AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$
$$\overset{\triangle}{OHD}: \quad \sin\hat{o} = \frac{HD}{OD} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \quad \Rightarrow \quad HD = r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{CD}{۲} = r\sin\frac{۱۸۰}{n} \quad \Rightarrow \quad CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$



۵۷ – شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل ، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دوسوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمود های TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می دانید ، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟

نشان دهید: $S_1 = S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = S_2$

حل:

الف) هر زاویهٔ داخلی شش ضلعی منتظم $\dfrac{(6-2)\times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

هر زاویهٔ خارجی شش ضلعی منتظم $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ است بنابراین: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = 60^\circ$

$$\overset{\Delta}{MAB}: \ \Rightarrow \ \hat{M} + \hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = 60^\circ} \hat{M} = 60^\circ$$

به همین ترتیب : $\hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) با توجه به قسمت قبل : $AB = MA = MB = ND = NC = DC = PE = PF = FE = a$ و در نتیجه

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{و} \quad MN = MP = NP = 3a$$

$$S_{ABCDEF} = S_{\overset{\Delta}{MNP}} - 3S_{\overset{\Delta}{MAB}} = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{\overset{\Delta}{MNP}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{2}{3}$$

پ) می دانیم مجموع فواصل یک نقطهٔ دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر ارتفاع مثلث است. $TH + TH' + TH'' = h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$

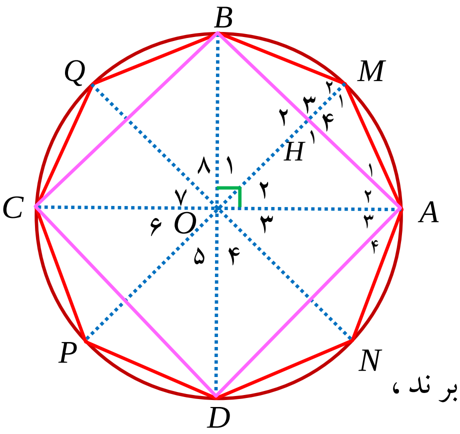
ت)

$$S_1 = S_{\overset{\Delta}{TAF}} + S_{\overset{\Delta}{TDE}} + S_{\overset{\Delta}{TBC}} = \frac{1}{2}TH''\times\underbrace{AF}_{a} + \frac{1}{2}TH'\times\underbrace{DE}_{a} + \frac{1}{2}TH\times\underbrace{BC}_{a}$$

$$= \frac{1}{2}a\,(TH'' + TH' + TH) = \frac{1}{2}a\times\frac{3\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\frac{S_۱}{S_{MNP}}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$S_{ABCDEF}=S_۱+S_۲ \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲+S_۲ \Rightarrow S_۲=S_۱=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$



۵۸ – دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم، چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است،چرا؟ عمود منصف های ضلع های این مربع را رسم کنیدتا دایره را قطع کند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

حل:

در چهار ضلعی $ABCD$ از آنجاییکه قطر ها منصف یکدیگرند $(OA=OC=OB=OD=R)$ پس متوازی الاضلاع است، و چون قطر ها با هم برابر ند ، مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند، مربع است.

$$AB=BC=CD=AD \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}$$

$$PM \perp AB \Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM} \Rightarrow AM=BM$$

به همین ترتیب:

$$AM=MB=BQ=QC=CP=PD=DN=NA$$

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{QC}=\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{NA}=\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{M}A=\frac{\overset{\frown}{BQA}}{۲}=\frac{۲۷۰}{۲}=۱۳۵$$

به همین ترتیب تمام زوایای داخلی هشت ضلعی $AMBQCPDN$ برابر ۱۳۵° است

چون در این هشت ضلعی ، اضلاع برابر و زوایا نیز برابرند پس منتظم است.