نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: سوالات هندسه ۲ دیماه ۹۸

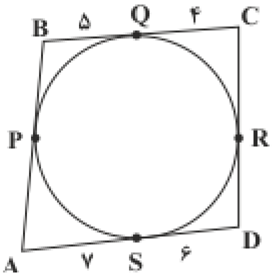
تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۰/۲۱

دبیرستان باقرالعلوم

۱ - قضیه زیر را ثابت کنید:

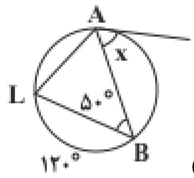
طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.

۲ - اگر P، Q، R، S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به‌دست آورید.

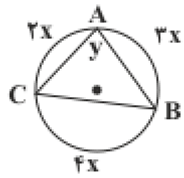


۳ - اندازه ی x, y را در هر یک از شکل های زیر تعیین کنید.

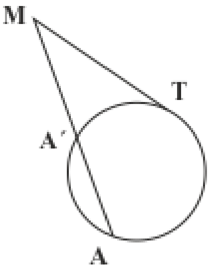
الف)



ب)



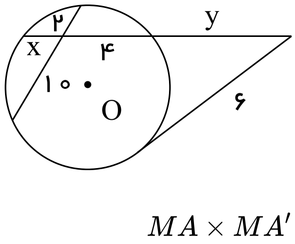
۴ - خط مماس بر دایره ی (C) در نقطه ی T امتداد وتر AA' از این دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است (شکل رو به رو). ثابت کنید:



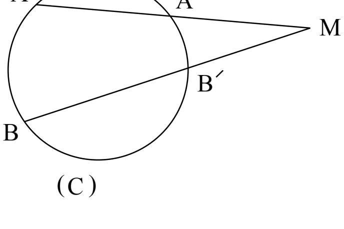
$$A\hat{M}T = \frac{\widehat{AT} - \widehat{A'T}}{۲}$$

۵ - مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d = ۱۳$ برابر $۵x - ۸$ باشد.

۶ - در شکل زیر مقدارهای x و y را به‌دست آورید.



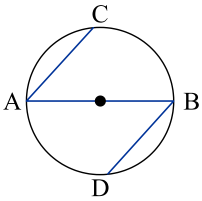
۷ - ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ (C) یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند آنگاه: $MA \times MA' = MB \times MB'$



۸ - در یک شش ضلعی منتظم به محیط $۱۲\sqrt{۳}$ فاصلهٔ مرکز دایره محیطی آن تا یکی از اضلاع شش‌ضلعی چقدر است؟

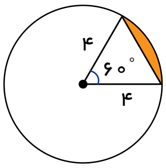
۹ - ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

۱۰ - در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BC موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$



۱۱ - مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

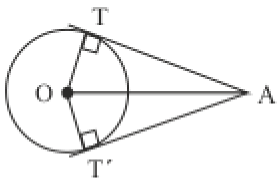
۱۲ - مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



پاسخنامه تشریحی

۱ -

از مرکز دایره به نقاط T, T' رسم می کنیم چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، زوایای ایجاد شده ۹۰° می شوند.



$$\begin{cases} OT = OT' = R \\ OA = OA \end{cases} \Rightarrow \Delta OTA \cong OT'A$$

طبق حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه همنهشت هستند پس $AT = AT'$

۲ - از هر یک از نقاط D, A, B, C دو مماس بر دایره رسم شده پس طول آن‌ها برابر است. بنابراین:

$$BQ = BP = ۵\ ,\ CQ = CR = ۴\ ,\ DS = RD = ۶\ ,\ AS = AP = ۷$$

بنابراین محیط چهارضلعی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$AB + BC + CD + AD = ۱۲ + ۹ + ۱۰ + ۱۳ = ۴۴$$

۳ - الف)

$$\hat{A} = x \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۲x$$
$$\hat{B} = ۵۰ \Rightarrow \overset{\frown}{AL} = ۱۰۰$$
$$۲x + ۱۲۰ + ۱۰۰ = ۳۶۰ \Rightarrow ۲x = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۷۰^\circ$$

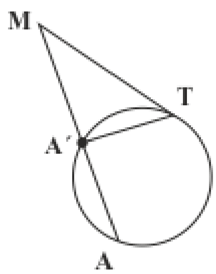
ب)

$$۲x + ۴x + ۳x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۴۰$$
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۸۰^\circ$$

۴ -

از T به A' وصل می کنیم

زاویه $T\hat{A'}A$ زاویه خارجی مثلث $TA'M$ است.



$$T\hat{A'}A = A'\hat{T}M + \hat{M}$$
$$\Rightarrow \hat{M} = T\hat{A'}A - A'\hat{T}M$$

زاویه $T\hat{A'}A$ محاطی و زاویه $A'\hat{T}M$ ظلی است.

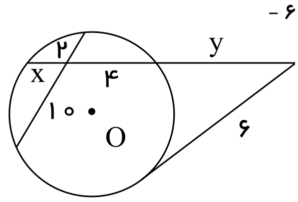
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{A'T}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$$

۵ -

$$R = ۲ \qquad R' = ۳ \qquad d = ۱۳ \qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$$

$$۵x - ۸ = \sqrt{۱۳^۲ - (۲ + ۳)^۲} \Rightarrow ۵x - ۸ = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

۶ -

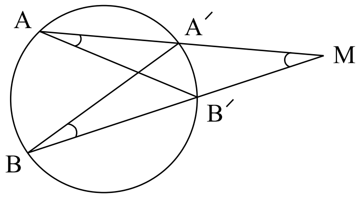


$$۴ \times x = ۲ \times ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$
$$۶^۲ = y(y + ۹) \Rightarrow y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰$$
$$\rightarrow (y - ۳)(y + ۱۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} y = ۳ \ \checkmark \\ y = -۱۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۷ - ابتدا A را به B' و B را به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث AMB' و $A'MB$ متشابه‌اند (به حالت دو زاویهٔ برابر). زیرا:

$$\begin{cases} \text{زاویهٔ محاطی } \hat{A}=\hat{B}=\dfrac{\widehat{A'B'}}{۲} \\ \text{مشترک } \hat{M} \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}$$

$$\Rightarrow MA\times MA' = MB\times MB'$$



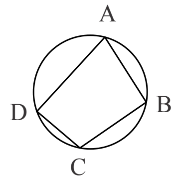
۸ – فاصلهٔ مرکز دایره محیطی شش‌ضلعی منتظم تا یک ضلع برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع است. زیرا شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.

$$\text{محیط} = ۱۲\sqrt{۳} \quad \Rightarrow ۶a = ۱۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳}$$

$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳})=۳$$

۹ – باتوجه به تعریف چهارضلعی محاطی داریم:

$$\widehat{B}+\widehat{D}=\frac{A\widehat{D}C}{۲}+\frac{A\widehat{B}C}{۲}\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{D}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

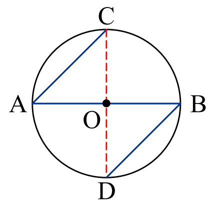


به روش مشابه ثابت می‌شود: $\widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$

– ۱۰

$$AC \parallel BD \Rightarrow \hat{A}=\hat{B} \quad , O \text{ مرکز دایره است}$$

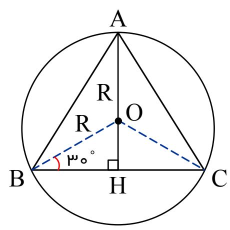
$$\Rightarrow \begin{cases} OA=OC=OB=OD \\ O\hat{B}D=O\hat{D}B=O\hat{A}C=O\hat{C}A \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAC} \underset{\text{(ض‌زض)}}{\cong} \overset{\triangle}{OBD} \Rightarrow AC=BD$$



– ۱۱

$$\overset{\triangle}{OBH}\ : \hat{B}=۳۰^\circ \Rightarrow OH=\frac{R}{۲}, OA=R$$

$$BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times R \Rightarrow BC=۲BH=\sqrt{۳}R$$



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

– ۱۲

$$\text{هاشور زده } S' = \text{قطاع } ۶۰^\circ\ S - \text{ مثلث } S = \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\times\pi\times ۴^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴^۲ = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$$