

۱- در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \Rightarrow 135 = S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9(2d)) = 2a_1 + 18d = 27$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \Rightarrow 150 = S_{10} = \frac{10}{2}(2a_2 + 9(2d)) = 5(2(a_1 + d) + 18d)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_1 + 20d = 30 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, d = \frac{3}{2}$$

۲- در دنباله حسابی ... ، ۱۱ ، ۸ ، ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیش‌تر شود؟

$$a_1 = 5, d = 3, S_n > 493$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[10 + (n-1)3] = \frac{n}{2}(3n+7) \Rightarrow \frac{n}{2}(3n+7) > 493$$

اکنون n را می‌توانیم به روش حدس و آزمایش به دست آوریم:

| | | | | | |
|---------|-----|-----|-----|------|----------|
| n | ۱۰ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۸ | ⇒ n ≥ 18 |
| n(3n+7) | ۳۷۰ | ۷۸۰ | ۹۸۶ | ۱۰۹۸ | |

۳- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n = 3n(n+4)$ به دست می‌آید. جمله‌ی شانزدهم این دنباله چند برابر قدرنسبت آن است؟

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_{16} = S_{16} - S_{15}$$

حالا با توجه به این که $S_n = 3n(n+4)$ است، داریم:

$$a_{16} = 3(16)(16+4) - 3(15)(15+4) = 3(320 - 285) = 105$$

$$a_{15} = S_{15} - S_{14} = 3(15)(15+4) - 3(14)(14+4) = 3(285 - 252) = 99$$

$$d = a_{16} - a_{15} = 105 - 99 = 6$$

$$\frac{a_{16}}{d} = \frac{105}{6} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

جمله‌ی شانزدهم، $17\frac{1}{2}$ برابر قدرنسبت است.

۴- اگر $a_n = \frac{1-3n}{2}$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد، S_{20} را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ a_2 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$$

۵- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله عددی از رابطه‌ی $S_n = \frac{3n^2}{2}$ بدست می‌آید جمله‌ی دهم این دنباله را بیابید.

$$t_{10} = S_{10} - S_9 = \frac{3}{2} \times 100 - \frac{3}{2} \times 81 = \frac{57}{2}$$

۶- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله حسابی از رابطه‌ی $S_n = 3n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جمله‌ی هفتم این دنباله را بیابید.

۷- مجموع n جمله‌ی یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 7n^2 + 5n$ است. قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

روش اول: $t_1 = S_1 = 12$

$$t_2 + t_1 = S_2 = 38 \Rightarrow t_2 = 26 \Rightarrow d = t_2 - t_1 = 14$$

روش دوم:

$$7 = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 14$$

ضریب n^2 در S_n برابر $\frac{d}{2}$ است، پس:

۸- آیا دنباله‌ی زیر حسابی است؟ اگر حسابی است قدر نسبت و مجموع ۱۵ جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی آن را پیدا کنید:

$$4, 24, 44, 64, 84, \dots$$

بله: قدر نسبت $d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 24 - 4 = 20$

$$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15[8 + 14 \times 20]}{2} = \frac{15[8 + 280]}{2} = 2160$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

۹- آیا دنباله‌ی رویرو یک دنباله هندسی است؟

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$$

خیر.

$$2, 3, \frac{9}{2}, \dots$$

۱۰- جمله‌ی بیستم دنباله هندسی مقابل را بنویسید.

$$q = \frac{3}{2} \Rightarrow t_{20} = aq^{19} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{19} = \frac{3^{19}}{2^{18}}$$

$$1, 2, 4, \dots$$

۱۱- مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله مقابل را حساب کنید.

$$q = \frac{2}{1} = 2$$

$$S_{20} = \frac{a(q^{20} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1$$

۱۲- مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله مقابل را حساب کنید. $1, 1/1, 1/21, \dots$

$$q = \frac{1/1}{1} = 1/1 \Rightarrow S_{20} = \frac{1 \times ((1/1)^{20} - 1)}{1/1 - 1} = 10 \times ((1/1)^{20} - 1)$$

۱۳- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند.

الف) مقدار $x_1^2 + x_2^2$ را حساب کنید.

ب) مقدار $x_1^3 + x_2^3$ را حساب کنید.

ج) مقدار $x_1^4 + x_2^4$ را حساب کنید.

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{33}{4} \quad \text{الف)}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{175}{8} \quad \text{ب)}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left(\frac{33}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{961}{16} \quad \text{ج)}$$

۱۴- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند.

الف) مقدار عبارت $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ را محاسبه کنید.

ب) مقدار عبارت $\frac{x_1}{x_2}(1 - x_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(1 - x_1^2)$ را محاسبه کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{33}{8}$$

$$\text{ب)} \quad \text{عبارت مورد نظر} = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) - 2(x_2 x_1) = \frac{33}{8} - 4 = \frac{1}{8}$$

۱۵- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} + \beta^2 + \frac{1}{\beta}$ را تعیین کنید.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$A = (4)^2 - 2(1) + \frac{4}{1} = 18$$

۱۶- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ و -۳ یا $\frac{1}{3}$ و $\frac{4}{3}$ یا $1 \pm \sqrt{2}$ و $5 \pm \sqrt{3}$ باشد.

| ریشه‌ها | $S =$ جمع ریشه‌ها | $P =$ ضرب ریشه‌ها | معادله مورد نظر |
|----------------------------|-------------------|-------------------|--|
| ۳ و ۴ | ۱ | -۱۲ | $x^2 - x - 12 = 0$ |
| $\frac{4}{3}, \frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$ |
| $1 \pm \sqrt{2}$ | ۲ | -۱ | $x^2 - 2x - 1 = 0$ |
| $5 \pm \sqrt{3}$ | ۱۰ | ۲۲ | $x^2 - 10x + 22 = 0$ |

نکته: اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، معادله‌ی مورد نظر به صورت $x^2 - Sx + p = 0$ خواهد بود.

۱۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 8x - 4 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = 2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

۱۸- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله $x^4 - 10x^2 + 9(m-1) = 0$ جملات متوالی یک دنباله حسابی می‌باشند؟ ریشه‌ها را $\pm a$ و $\pm b$ در نظر بگیریم. جملات باید به صورت $a, b, -b, -a$ تشکیل دنباله دهند در این صورت داریم:

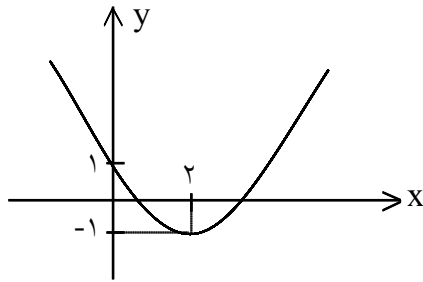
$$\begin{cases} 2b = a - b \\ a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 b^2 = 9(m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3b)^2 + b^2 = 10 \\ (3b)^2 b^2 = 9(m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

۱۹- همی مقادیر a را پیدا کنید که معادله‌ی $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$ ریشه‌هایی با علامتهای مختلف داشته‌باشد.

$$2 < \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 4a}{2} < 0 \Rightarrow a \in (0, 4)$$

۲۰- در معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشه‌ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه‌ی معادله را بیابید.

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \alpha + \beta = 4 \\ \alpha \times \beta = \frac{m}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1 \quad \left(\frac{0}{25}\right), 3 \times 1 = \frac{m}{4} \rightarrow m = 12 \quad \left(\frac{0}{25}\right)$$



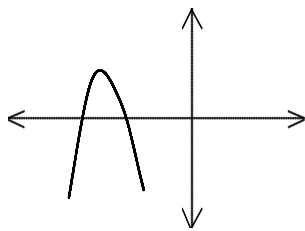
۲۱- در شکل مقابل نمودار سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است، ضرایب a, b, c را تعیین کنید.

$$(0, 1) \Rightarrow P(0) = 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \quad (0/25)$$

$$(2, -1) \Rightarrow P(2) = 4a + 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \quad (0/25)$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b - 4a = 0 \quad (0/25)$$

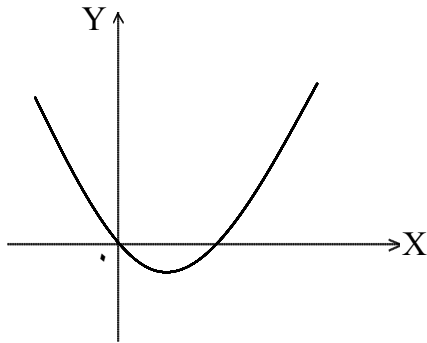
$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -b - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \quad (0/25), \quad a = \frac{1}{4} \quad (0/25)$$



۲۲- در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

$$a < 0 \quad (0/25) \quad b < 0 \quad (0/25) \quad c < 0 \quad (0/25)$$

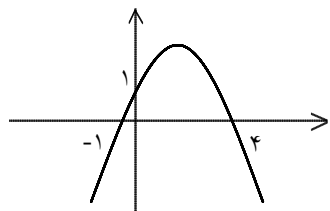
نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند در نتیجه معادله دو جواب دارد. $(0/25)$



۲۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است. الف) علامت a و b را تعیین کنید. ب) مقدار c را بیابید.

$$(0/25) \quad c = 0 \quad (ب)$$

$$(0/5) \quad a > 0, \quad b < 0 \quad (الف)$$



۲۴- معادله سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{معادله سهمی}$$

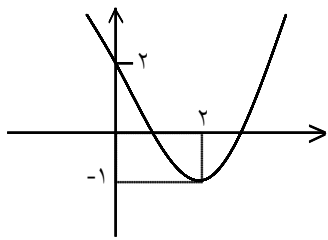
$$A(0, 1) \Rightarrow 1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1$$

$$B(-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -1$$

$$C(4, 0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + 1 \Rightarrow 16a + 4b = -1$$

$$4 \times \begin{cases} a - b = -1 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -4 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow 20a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$



۲۵- معادله سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{سهمی راس } x_0 = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b = -4a$$

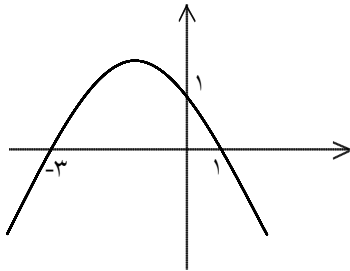
$$A(0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

$$S(2, -1) \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + 2 \Rightarrow 4a + 2b = -3 \xrightarrow{b = -4a} 4a + 2(-4a) = -3$$

$$\Rightarrow 4a - 8a = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -4\left(\frac{3}{4}\right) = -3$$

$$y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$$

۲۶- معادله‌ی سهمی زیر را بنویسید.



سهمی محور X ها را در نقطه‌ی ۱ و -۳ قطع کرده است و برای معادله سهمی داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \text{محله برخورد با محور } x \text{ ها } x_1, x_2$$

$$y = a(x - 1)(x + 3) \xrightarrow{\text{از نقطه } A(0, 1) \text{ می گذرد}} 1 = a(0 - 1)(0 + 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1)(x + 3) = -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

۲۷- معادله $8x^6 - 7x^3 = 1 - 8x^6$ را به روش تغییر متغیر حل کنید.

$$8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$$

$$t = x^3 \Rightarrow 8t^2 - 7t - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t = \frac{-1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

اختلاف زمان رفت و برگشت ۴ دقیقه است. سرعت قایق بدون در نظر گرفتن سرعت آب چند کیلومتر بر ساعت است؟

$$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = \frac{4}{60} \Rightarrow \frac{1}{V-2} - \frac{1}{V+2} = \frac{1}{15} \times 15(V-2)(V+2) \rightarrow$$

$$15(V+2) - 15(V-2) = V^2 - 4 \Rightarrow V^2 - 4 = 60 \Rightarrow V^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } V = 8 \\ \text{غ ق ق } V = -8 \end{cases}$$

۲۹- ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

فرض می‌کنیم: $V =$ حجم کار

$X =$ مدت زمان انجام کار توسط ماشین B

در این صورت مدت زمان انجام کار توسط ماشین A می‌شود: $X - 15$ و خواهیم داشت:

$$\frac{V}{X-15} = \text{میزان کار ماشین A در یک ساعت} \quad \frac{V}{X} = \text{میزان کار ماشین B در یک ساعت}$$

$$\frac{V}{18} = \text{میزان کار هر دو ماشین A و B با هم در یک ساعت}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{X} + \frac{V}{X-15} = \frac{V}{18} \Rightarrow \frac{1}{X} + \frac{1}{X-15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2X-15}{X(X-15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow X^2 - 15X = 36X - 270$$

$$\Rightarrow X^2 - 51X + 270 = 0 \Rightarrow (X-45)(X-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } X = 45 \\ \text{غ ق ق } X = 6 \end{cases}$$

۳۰- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

ب) $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$

الف) $x-2+x = 5x(x-2) \Rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 + \sqrt{26}}{5}$ و $\frac{6 - \sqrt{26}}{5}$

ب) $\sqrt{2x+9} = 2 + \sqrt{x+1}$ به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow 2x+9 = 4+x+1+4\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x+4 = 4\sqrt{x+1}$ به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + 8x + 16 = 16x + 16$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 0 \\ \text{ق ق } x = 8 \end{cases}$$

۳۱- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5x+2} + 2 = 0$

ب) $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$

الف) $\underbrace{\sqrt{x-3}}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{\sqrt{5x+2}}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{2}_{\text{مثبت}} = 0$

جمع دو عبارت نامنفی و یک عدد مثبت، هیچ گاه نمی تواند برابر صفر شود، پس این معادله جواب ندارد.

ب) $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ ضرب تمام جملات در $3x(x-1) \rightarrow 6x(3x) + (x-1)(x-1)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(10)(1) = 9 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{-7 \pm 3}{20} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-7+3}{20} = \frac{-4}{20} = \frac{-1}{5} \\ x'' = \frac{-7-3}{20} = \frac{-10}{20} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبولاند، چون هیچ مخرجی را صفر نمی کنند.

۳۲- معادله‌ی اصم مقابل را حل کنید.

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$$

۳۳- نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

$$D_f: x \geq 0 \Rightarrow (1 + \sqrt{x}) + (1 - \sqrt{x}) + 3\sqrt[3]{1-x} \left(\underbrace{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}_2 \right) = 8$$

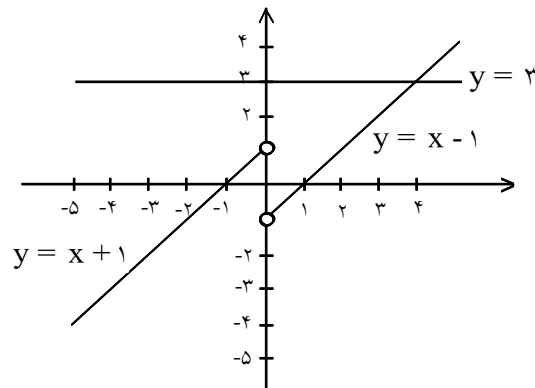
$$\Rightarrow 2 + 6\sqrt[3]{1-x} = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{1-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

۳۳- نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^2 - 6x|$

الف) $y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{x} = x - 1 & x > 0 \\ x - \frac{x}{-x} = x + 1 & x < 0 \end{cases}$



با توجه به نمودار معادله یک جواب دارد: $x = 4$

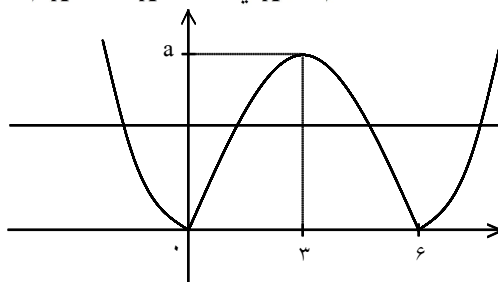
$x - \frac{x}{|x|} = 3$

روش جبری:

ق ق $x > 0 : x - \frac{x}{x} = 3 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$

غ ق ق $x < 0 : x - \frac{x}{-x} = 3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

ب) $y = |x^2 - 6x| = \begin{cases} -x^2 + 6x & 0 \leq x \leq 6 \\ x^2 - 6x & x < 0 \text{ یا } x > 6 \end{cases}$



$|x^2 - 6x| = 3$

روش جبری:

$0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -x^2 + 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} & \text{ق ق} \\ x = 3 - \sqrt{6} & \text{ق ق} \end{cases}$

$x < 0 \text{ یا } x > 6 \Rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} & \text{ق ق} \\ x = 3 - 2\sqrt{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

۳۴- با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

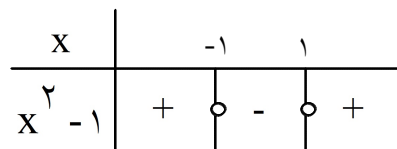
الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^2 - 1|$

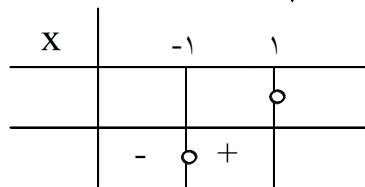
پ) $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$

الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$

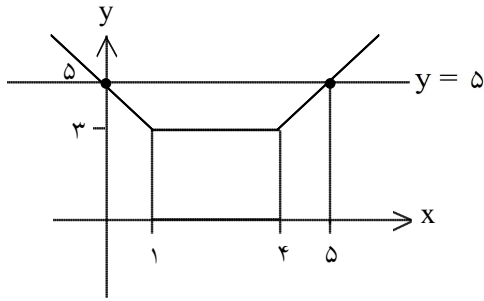


پ) $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$



۳۵- تابع $y = |x - 1| + |x - 4| = 5$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید معادله‌ی $|x - 1| + |x - 4| = 5$ چند جواب دارد؟

ابتدا تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بنویسید:



$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & x < 1 \\ 3 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2x - 5 & x > 4 \end{cases}$$

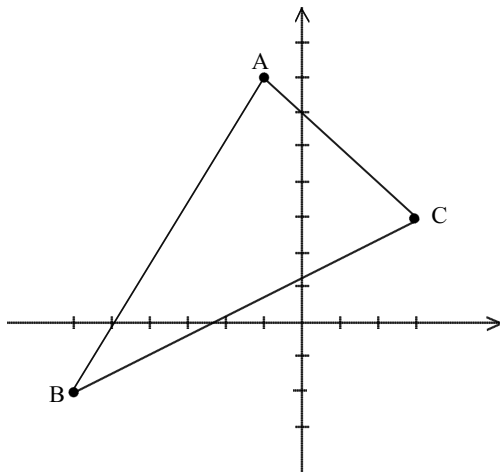
معادله دو جواب دارد \Rightarrow

۳۶- مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.
الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چه قدر است؟



(الف)

$$AB = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106}$$

$$\Rightarrow AB = BC$$

ب) در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$BC = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{106}$$

$$BC \text{ وسط } M \begin{cases} \frac{-6+3}{2} = \frac{-3}{2} \\ \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}, m_{BC} = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \frac{-9}{5}$$

(پ)

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-9}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) \quad \text{معادله عمودمنصف BC}$$

$$m_{BC} = \frac{5}{9}, \quad C \left| \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} : y - 3 = \frac{5}{9}(x - 3) \xrightarrow{\times 9} 9y - 27 = 5x - 15 \right.$$

(ت)

$$\Rightarrow 5x - 9y + 12 = 0 \quad \text{معادله‌ی خط BC}$$

$$AH = \frac{|\frac{5}{9}(-1) - 9(7) + 12|}{\sqrt{5^2 + 9^2}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$$

۳۷- مساحت مربعی که یک رأس آن $A(-1, 5)$ و معادله یک ضلع آن $7x - y - 3 = 0$ است، را بیابید.

فاصله نقطه A تا خط موردنظر برابر است با طول ضلع مربع

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7(-1) - 5 - 3|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{50}} \Rightarrow S = d^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{50}} \right)^2 = \frac{225}{50} = \frac{9}{2}$$

۳۸- اگر $A(0, 3)$ و $B(4, -1)$ دو سر قطر دایره باشد، محیط دایره را حساب کنید.

طول پاره خط AB برابر است با قطر دایره، بنابراین داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{32}$$

$$AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر دایره} = 4\sqrt{2}$$

$$P = \text{محیط دایره} = \pi \times \text{قطر دایره} = 4\sqrt{2}\pi$$

۳۹- به ازای چه مقادیری از m و n دو نقطه $A(-n, m)$ و $B(2n, -2)$ نسبت به نقطه $M(3n - 1, m + n)$ قرینه یکدیگرند.

نقطه M وسط پاره خط AB قرار دارد پس داریم:

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \Rightarrow 3n - 1 = \frac{-n + 2n}{2} \Rightarrow 6n - 2 = -n + 2n \Rightarrow n = \frac{2}{5}$$

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} \Rightarrow m + n = \frac{m - 2}{2} \Rightarrow 2m + 2n = m - 2 \Rightarrow m = -2n - 2 = -2\left(\frac{2}{5}\right) - 2 = \frac{-14}{5}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-14}{5} \text{ و } n = \frac{2}{5}$$

۴۰- نقطه $A(3m + 2, m + 1)$ مفروض است. m را طوری تعیین کنید که:

(الف) A روی محور طولها باشد. (ب) A روی محور عرضها باشد.

(ج) A روی نیمساز ربع اول و سوم است. (د) A روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

(الف) نقاط روی محور طولها، $y = 0$ دارند.

(ب) نقاط روی محور عرضها، $x = 0$ دارند.

(ج) معادله نیمساز ربع اول و سوم $y = x$ می باشد، یعنی نقاط روی این خط x و y برابر دارند:

$$3m + 2 = m + 1 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}$$

(د) معادله نیمساز ربع دوم و چهارم $y = -x$ می باشد، یعنی نقاط روی این خط x و y قرینه دارند:

$$3m + 2 = -m - 1 \Rightarrow m = \frac{-3}{4}$$