

۱- در دنباله حسابی ... ، ۱۱ ، ۸ ، ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

« پاسخ »

$$a_1 = 5, d = 3, S_n > 493$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [10 + (n-1)3] = \frac{n}{2} (3n+7) \Rightarrow \frac{n}{2} (3n+7) > 493$$

$$\Rightarrow n(3n+7) > 986$$

اکنون n را می‌توانیم به روش حدس و آزمایش به دست آوریم:

n	۱۰	۱۵	۱۷	۱۸	⇒ n ≥ ۱۸
n(3n+7)	۳۷۰	۷۸۰	۹۸۶	۱۰۹۸	

۲- مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چه قدر می‌شود؟

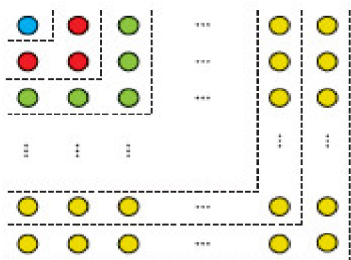
« پاسخ »

$$102, 108, 114, \dots, 996$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 102 + (n-1)6 \Rightarrow 996 - 102 = 6(n-1) \Rightarrow n-1 = \frac{894}{6} = 149$$

$$\Rightarrow n = 150$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{150}{2} (102 + 996) = 82350$$

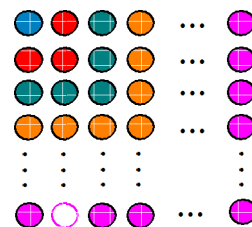


۳- الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

« پاسخ »



$$1 = 1 = 1^2 \quad 1 + 3 = 4 = 2^2 \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$\text{ب) } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + 2n-1) = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$

۴- در یک دنباله‌ی حسابی جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است، دنباله را مشخص کنید. ( $a_1$  و  $d$  را به دست آورید.)

« پاسخ »

$$a_3 = 20 \quad a_7 = 56$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 20 \\ a_1 + 6d = 56 \end{cases} \quad 4d = 36 \quad d = 9 \quad a_1 = 2$$

۵-  $a_n$  و  $b_n$  دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله‌ی دنباله  $a_n$  برابر  $k$  است.  $k$  و  $b_k$  را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, 7, \dots \\ b_n = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

« پاسخ »

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow a_n = -5 + (n - 1)(4) = 4n - 9 \Rightarrow a_{27} = 4(27) - 9 = 99 \Rightarrow k = 99$$

$$b_n = ar^{n-1} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow b_{99} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{98} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{97} = \frac{\sqrt{2}}{2^{97}}$$

۶- مجموع اعداد زیر که یک دنباله حسابی را نشان می‌دهند، حساب کنید.

$$2 + 5 + 8 + \dots + 299$$

« پاسخ »

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1)(3) \Rightarrow a_n = 3n - 1$$

$$a_n = 299 \Rightarrow 3n - 1 = 299 \Rightarrow 3n = 300 \Rightarrow n = 100$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}(2 + 299) = 50 \times 301 = 15050$$

۷- مجموع اعداد زیر را حساب کنید. (دنباله حسابی)

$$3 + 7 + 11 + \dots + 199$$

« پاسخ »

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1)(4) \Rightarrow a_n = 4n - 1$$

$$a_n = 199 \Rightarrow 4n - 1 = 199 \Rightarrow 4n = 200 \Rightarrow n = 50$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(3 + 199) = \frac{50}{2}(202) = 5050$$

۸- اعداد  $3^a$ ,  $3\sqrt{3}$ ,  $3^b$  جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$       (۲) ۵      (۳)  $\frac{9}{2}$       (۴) ۹

« پاسخ »

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3^a, 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}}, 3^b \Rightarrow 3^a, 3^{\frac{9}{2}}, 3^b \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} 3^a \times 3^b = \left(3^{\frac{9}{2}}\right)^2 \Rightarrow a + b = 9$$

$$\text{دنباله حسابی: } a, k, b \Rightarrow a + b = 2k \Rightarrow 9 = 2k \Rightarrow k = \frac{9}{2}$$

۹- اعداد  $2^a$ ,  $32$ ,  $2^b$  جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$2^a, 32, 2^b \Rightarrow 2^a, 2^5, 2^b \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} 2^a \times 2^b = (2^5)^2 \Rightarrow 2^{a+b} = 2^{10} \Rightarrow a + b = 10$$

$$\text{دنباله حسابی: } a, k, b \Rightarrow a + b = 2k \Rightarrow 10 = 2k \Rightarrow k = 5$$

۱۰- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۲۴ است. جمله هفتم برابر چند است؟

« پاسخ »

$$a_1 = 5$$

$$a_4 + a_5 = 24 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24 \xrightarrow{a_1 = 5} 10 + 7d = 24 \Rightarrow 7d = 14 \Rightarrow d = 2$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 5 + 6(2) = 5 + 12 = 17$$

۱۱- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول را به دست آورید.

« پاسخ »

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1 (1 + q^2) = 1 \quad *$$

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1 (1 - q^4)}{1 - q} = 3 \Rightarrow \frac{a_1 (1 + q^2)(1 - q^2)}{1 - q} = 3 \xrightarrow{*} \frac{1(1 - q)(1 + q)}{(1 - q)} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2$$

$$a_1 (1 + q^2) = 1 \Rightarrow a_1 (1 + 4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

$$S_6 = \frac{a_1 (1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 2^6)}{1 - 2} = \frac{-\frac{1}{5}(-63)}{-1} = \frac{63}{5}$$

۱۲- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_6 = \frac{a_1 (1 - q^6)}{1 - q}$$

$$S_3 = \frac{a_1 (1 - q^3)}{1 - q} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = \frac{1 - q^6}{1 - q^3} \Rightarrow \frac{153}{136} = \frac{(1 - q^3)(1 + q^3)}{1 - q^3}$$

این کسر به ۱۷ ساده می‌شود.

$$\Rightarrow 1 + q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۱۳- اگر در یک سالن تئاتر تعداد صندلی‌های ردیف اول ۶، ردیف دوم ۱۰، ردیف سوم ۱۴ و ... و مجموع تعداد صندلی‌ها ۲۸۶ باشد، تعداد ردیف‌هایی که در این سالن، صندلی چیده‌اند چه قدر است؟

« پاسخ »

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$$

$$286 = \frac{n}{2} [12 + (n - 1) \times 4] \Rightarrow 286 = 2n(n + 2) \Rightarrow n^2 + 2n - 143 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 11)(n + 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 11 & \text{ق ق} \\ n = -13 & \text{غ ق} \end{cases}$$

۱۴- در دنباله‌ی حسابی ... ۱۵, ۹, ۳ حداقل چند جمله‌ی آنرا باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

« پاسخ »

$$\begin{cases} d = 9 - 3 = 6 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2} [2 \times 3 + (n-1)6] > 300 \Rightarrow n^2 > 100$$

$$\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ \longrightarrow n > 10 \Rightarrow \min(n) = 11 \end{matrix}$$

بنابراین باید حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.

۱۵- اگر  $a_n = \frac{1-3n}{2}$  جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد،  $S_{20}$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ a_2 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \left[ 2(-1) + 19 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \right] = 10 \left[ -2 - \frac{57}{2} \right] = 10 \times \left(-\frac{61}{2}\right) = -305$$

۱۶- در دنباله‌ی هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

« پاسخ »

$$\text{مجموع تمام جملات} = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

۱۷- اعداد  $x-2$ ،  $x+2$  و  $4x+2$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی می‌باشند جمله‌ی چهارم این دنباله را بیابید.

« پاسخ »

$$(x+2)^2 = (x-2)(4x+2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 2x - 8x - 4$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0 \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{غ ق}$$

۱۸- در بین صد جمله‌ی اول دنباله هندسی ... و ۳۶ و ۳ چند مربع کامل وجود دارد؟

« پاسخ »

$$t_n = 3 \times (12)^{n-1} = 3^n \times 2^{2n-2}$$

برای مربع کامل بودن  $t_n$  باید  $n$  زوج باشد. در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ به تعداد ۵۰ عدد زوج وجود دارد.

۱۹- بین اعداد ۱۰ و ۶۲۰ چهار واسطه‌ی حسابی درج نموده‌ایم. مجموع این چهار واسطه چقدر است؟

« پاسخ »

$$10, x, y, z, t, 620$$

$$620 = 10 + 5d \Rightarrow d = 122$$

$$x + y + z + t = 132 + 254 + 376 + 498 = 1260$$

۲۰- در یک دنباله حسابی جمله‌ی اول و به بعد برابر است با جمله‌ی دهم و به بعد دنباله حسابی دیگر با جمله‌ی عمومی

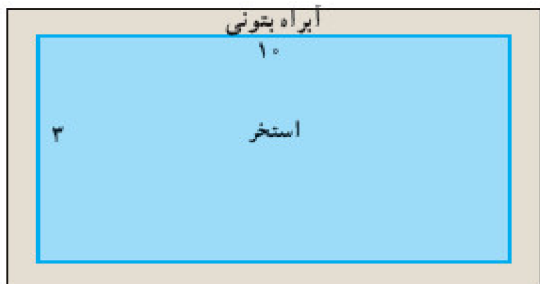
$$a_n = \frac{1}{3}n - 1$$

مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله اول را بیابید.

« پاسخ »

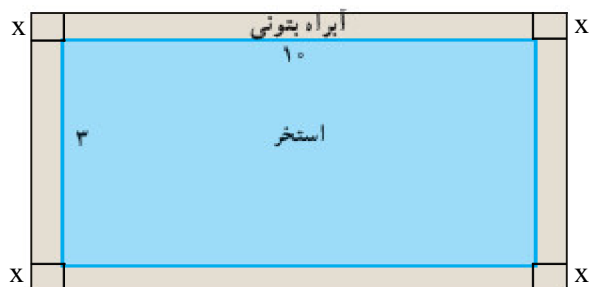
$$\begin{cases} t_1 = a_{10} = 4 \\ t_2 = a_{11} = 4/5 \end{cases} \Rightarrow d = 0/5$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2t_1 + 19d) = 10 (8 + 19 \times 0/5) = 80 + 95 = 175$$



۲۱- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آنرا محاسبه کنید.

« پاسخ »



$$4x^2 + 20x + 6x = 14$$

$$2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ ق ق} \\ x = -7 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(2x + 14)(2x - 1) = 0$$

الف)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

ب)  $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

پ)  $(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) = 12$

« پاسخ »

الف)  $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

ب)  $\frac{x^2}{3} - 2 = t \Rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ t = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm\sqrt{24} \end{cases}$

پ)  $4 - x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 15 = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 60 = 61 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2}$

$t = \frac{1 + \sqrt{61}}{2} \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1 + \sqrt{61}}{2} \Rightarrow x^2 = 4 - \frac{1 + \sqrt{61}}{2} = \frac{7 - \sqrt{61}}{2}$

$t = \frac{1 - \sqrt{61}}{2} \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1 - \sqrt{61}}{2} \Rightarrow x^2 = 4 - \frac{1 - \sqrt{61}}{2} = \frac{7 + \sqrt{61}}{2} = \frac{14 + 2\sqrt{61}}{4}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{14 + 2\sqrt{61}}}{2}$

۲۳- صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = x^3 - 4x$

ب)  $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$

پ)  $h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

« پاسخ »

الف)  $f(x) = x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

ب)  $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 \end{cases}$

پ)  $h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$  ریشه حقیقی ندارد

۲۴- مقدار  $m$  را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله  $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$  برابر با ۳ باشد.

« پاسخ »

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 3 \Rightarrow m = 5$$

۲۵- در معادله  $2x^2 - 8x + m = 0$ ، اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد،  $m$  و هر دو جواب معادله را بیابید.

« پاسخ »

$$x^2 - 4x + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \beta + 2$$

$$\alpha + \beta = 2\beta + 2 = 4 \Rightarrow \beta = 1 \text{ و } \alpha = +3$$

$$\alpha\beta = 3 \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Rightarrow m = 6$$



۲۶- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۷ و ۳ باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 7 + 3 = 10 \\ P = \alpha\beta = 7 \times 3 = 21 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$$

۲۷- محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۸ متر و مساحت آن ۴۶ متر مربع است. اندازه طول و عرض مستطیل را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\text{محیط} = 28 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 28 \Rightarrow \alpha + \beta = 14 \Rightarrow S = 14$$

$$\text{مساحت} = 46 \Rightarrow \alpha\beta = 46 \Rightarrow P = 46$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 46 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x = -46 \xrightarrow{+49} x^2 - 14x + 49 = 3$$

$$\Rightarrow (x - 7)^2 = 3 \Rightarrow x - 7 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 7 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 + \sqrt{3} \text{ (طول)} \\ \beta = 7 - \sqrt{3} \text{ (عرض)} \end{cases}$$

۲۸- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $3x^2 - 2x - 7 = 0$  باشند، بدون یافتن ریشه‌ها، مقدار  $6\alpha^2 + 4\beta + 1$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$3x^2 - 2x - 7 = 0 \xrightarrow{x = \alpha} 3\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 = 2\alpha + 7$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$6\alpha^2 + 4\beta + 1 = 2(3\alpha^2) + 4\beta + 1 = 2(2\alpha + 7) + 4\beta + 1 = 4\alpha + 4\beta + 14 + 1$$

$$= 4(\alpha + \beta) + 15 = 4\left(\frac{2}{3}\right) + 15 = \frac{8}{3} + 15 = \frac{53}{3}$$

۲۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 7 = 0$  باشند، بدون یافتن ریشه‌ها، مقدار  $2\alpha^2 + 6\beta + 3$  را حساب کنید.

$$x^2 - 3x - 7 = 0 \xrightarrow{x = \alpha} \alpha^2 - 3\alpha - 7 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 7$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$2\alpha^2 + 6\beta + 3 = 2(3\alpha + 7) + 6\beta + 3 = 6\alpha + 6\beta + 14 + 3 = 6(\alpha + \beta) + 17$$

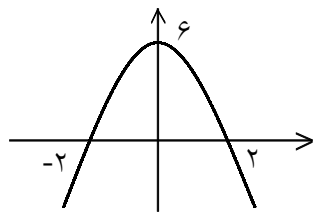
$$= 6 \times 3 + 17 = 35$$

۳۰- اگر خط  $y = x + 2k + 2$  سهمی  $y = 3kx^2 - 5x + k + 1$  را قطع نکند، مقادیر ممکن برای  $k$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$3kx^2 - 5x + k + 1 = x + 2k + 2 \Rightarrow 3kx^2 - 6x - k - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} 36 + 12k^2 + 12k < 0$$

$$\xrightarrow{\div 12} \underbrace{k^2 + k + 3}_{\text{همواره مثبت}} < 0 \Rightarrow k \text{ هیچ مقدار } k$$



۳۱- معادله سهمی زیر را بنویسید.

« پاسخ »

ریشه‌های معادله  $x = 2$  و  $x = -2$  است. بنابراین داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{x_1 = 2, x_2 = -2} y = a(x - 2)(x + 2)$$

سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند.

$$\xrightarrow{y=6, x=0} 6 = a(0 - 2)(0 + 2) \Rightarrow a = \frac{6}{-4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2)(x + 2) = -\frac{3}{2}(x^2 - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$

۳۲- اگر رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + 5$  باشد،  $a$ ،  $b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$S(-1, 4) \xrightarrow{x=-1, y=4} 4 = a(-1)^2 + b(-1) + 5 \Rightarrow a - b + 5 = 4 \Rightarrow a - b = -1$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{b=2a} a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$

۳۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله  $x^2 - 16x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\sqrt{\alpha^2\beta + \beta}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 16\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 = 16\alpha$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\sqrt{\alpha^2\beta + \beta} = \sqrt{\beta(\alpha^2 + 1)} = \sqrt{\beta \times 16\alpha} = \sqrt{16\alpha\beta} = \sqrt{16 \times 1} = \sqrt{16} = 4$$

۳۴- حدود  $m$  را چنان بیابید که خط  $y = 1 - mx$  سهمی  $y = x^2 - 5x + 10$  را قطع نکند؟

« پاسخ »

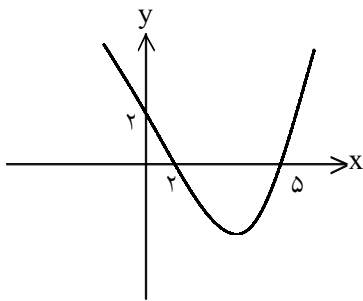
باید دو تابع را برابر قرار داد و بعد از تشکیل معادله درجه ۲ باید  $\Delta < 0$  باشد.

$$x^2 - 5x + 10 = 1 - mx \Rightarrow x^2 + mx - 5x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + (m - 5)x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (m - 5)^2 - 36 < 0 \Rightarrow (m - 5)^2 < 36 \Rightarrow |m - 5| < 6 \Rightarrow -6 < m - 5 < 6$$

$$\xrightarrow{+5} -1 < m < 11$$

۳۵- معادله‌ی سهمی زیر را بنویسید.



« پاسخ »

سهمی محور  $x$  ها را در نقطه‌ی ۲ و ۵ قطع کرده است و برای معادله سهمی داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها } x_1, x_2$$

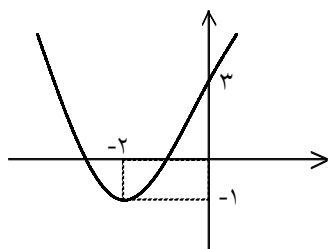
از نقطه  $A(0, 2)$  می‌گذرد

$$y = a(x - 2)(x - 5) \xrightarrow{\text{از نقطه } A(0, 2) \text{ می‌گذرد}} 2 = a(0 - 2)(0 - 5) \Rightarrow 10a = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}(x - 2)(x - 5) = \frac{1}{5}(x^2 - 7x + 10)$$

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + 2$$



۳۶- معادله‌ی سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{راس سهمی } x_s = \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$$

$$A(0, 3) \Rightarrow 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 3$$

$$S(-2, -1) \Rightarrow -1 = a(-2)^2 + b(-2) + 3 \Rightarrow 4a - 2b = -4 \xrightarrow{b = 4a} 4a - 2(4a) = -4$$

$$\Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$y = x^2 + 4x + 3$$

۳۷- ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

« پاسخ »

فرض می‌کنیم:  $V = \text{حجم کار}$

$x = \text{مدت زمان انجام کار توسط ماشین B}$

در این صورت مدت زمان انجام کار توسط ماشین A می‌شود:  $x - 15$  و خواهیم داشت:

$$\text{میزان کار ماشین B در یک ساعت} = \frac{V}{x} \quad \text{میزان کار ماشین A در یک ساعت} = \frac{V}{x-15}$$

$$\text{میزان کار هر دو ماشین A و B با هم در یک ساعت} = \frac{V}{18}$$

$$2x - 15$$

$$\Rightarrow \frac{V}{x} + \frac{V}{x-15} = \frac{V}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x-15+x}{x(x-15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow x^2 - 15x = 36x - 270$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x + 270 = 0 \Rightarrow (x - 45)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \text{ ق ق} \\ x = 6 \text{ غ ق غ} \end{cases}$$

۳۸- پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چه قدر بوده است؟

« پاسخ »

$x =$  قیمت هر اسباب‌بازی به هزار توان قبل از تخفیف  $y =$  تعداد اسباب‌بازی

$$xy = 120, (x-1)(y+4) = 120 \Rightarrow \overbrace{xy}^{120} + 4x - y - 4 = 120 \Rightarrow y = 4x - 4$$

$$\begin{cases} xy = 120 \\ y = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow x(4x - 4) = 120 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ ق ق} \\ x = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6000 = \text{قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف}$$

$$۱) \frac{x}{x} = ۲ + \frac{x-۳}{x+۱}$$

$$۲) \frac{P}{۲-P} + \frac{۲}{P} = \frac{-۳}{۲}$$

$$۳) \frac{۳y+۵}{y^2+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$$

$$۴) ۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴}$$

$$۵) \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$

$$۶) \frac{۵}{\sqrt{x+۲}} = ۲ - \frac{1}{\sqrt{x-۲}}$$

$$۷) \sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$$

« پاسخ »

$$۱) \frac{x}{x} = ۲ + \frac{x-۳}{x+۱} = ???$$

$$۲) \frac{P}{۲-P} + \frac{۲}{P} = \frac{-۳}{۲} = ??$$

$$۳) \frac{۳y+۵}{y^2+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y} \xrightarrow{\times y(y+۵)} ۳y+۵ + y(y+۴) = (y+۱)(y+۵)$$

$$\Rightarrow ۳y + ۵ + y^2 + ۴y = y^2 + ۶y + ۵ \Rightarrow y = ۰ \text{ غ ق ق}$$

$$۴) ۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴} \Rightarrow (۲\sqrt{x})^2 = (\sqrt{۳x+۴})^2 \Rightarrow ۴x = ۳x+۴ \Rightarrow x = ۴ \text{ ق ق}$$

$$۵) \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = (1-\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = ۰ \Rightarrow (1-\sqrt{x})[(1+\sqrt{x})^2 - 1] = ۰$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \text{ ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = ۰ \Rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = ۱ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = ۱ \Rightarrow \sqrt{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ ق ق} \\ 1+\sqrt{x} = -۱ \Rightarrow \sqrt{x} = -۲ \text{ جواب ندارد} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \text{ ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = ۰ \Rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = ۱ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = ۱ \Rightarrow \sqrt{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ ق ق} \\ 1+\sqrt{x} = -۱ \Rightarrow \sqrt{x} = -۲ \text{ جواب ندارد} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$۶) \frac{۵}{\sqrt{x+۲}} = ۲ - \frac{1}{\sqrt{x-۲}} = ??$$

$$۷) \sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴ \text{ ؟؟}$$

۴۰- معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

ب)  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$

« پاسخ »

الف)  $x-2+x=5x(x-2) \Rightarrow 5x^2-12x+2=0 \Rightarrow x = \frac{6+\sqrt{26}}{5}$  و  $\frac{6-\sqrt{26}}{5}$

ب)  $\sqrt{2x+9} = 2 + \sqrt{x+1}$  به توان ۲ می‌رسانیم  $\rightarrow 2x+9 = 4+x+1+4\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x+4 = 4\sqrt{x+1}$  به توان ۲ می‌رسانیم  $\rightarrow x^2+8x+16 = 16x+16$

$\Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ق ق} \\ x=8 & \text{ق ق} \end{cases}$

۴۱- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3$

« پاسخ »

$\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3 \Rightarrow (\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x})^2 = 3^2$

$\Rightarrow (x+3) + (2-x) + 2\sqrt{x+3}\sqrt{2-x} = 9 \Rightarrow 5 + 2\sqrt{(x+3)(2-x)} = 9$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(2-x)} = 4 \Rightarrow \sqrt{6-x-x^2} = 2 \Rightarrow 6-x-x^2 = 4 \Rightarrow x^2+x-2 = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=-2 & \text{ق ق} \end{cases}$  هر دو پاسخ در معادله صدق می‌کند.

۴۲- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{8x+6}{x^2+x-6}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-3}{x+3} &= \frac{8x+6}{x^2+x-6} \Rightarrow \frac{(x+2)(x+3) + (x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{8x+6}{x^2+x-6} \\ \Rightarrow \frac{x^2+5x+6+x^2-5x+6}{x^2+x-6} &= \frac{8x+6}{x^2+x-6} \Rightarrow 2x^2+12=8x+6 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0 \\ \Rightarrow x^2-4x+3=0 &\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=3 & \text{ق ق} \end{cases} \end{aligned}$$

۴۳- دو فرد A و B کاری را با هم در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند، ولی اگر تک‌تک، این کار را انجام دهند. فرد A کار را ۱۰ ساعت زودتر از فرد B به اتمام می‌رساند. ساعت کار A و B را به دست آورید.

« پاسخ »

اگر زمان فرد A را x در نظر بگیریم، زمان فرد B برابر (x + ۱۰) خواهد بود، لذا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} &= \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{ضرب جملات در } 12x(x+10)} 12(x+10) + 12x = x(x+10) \\ \Rightarrow 12x + 120 + 12x &= x^2 + 10x \Rightarrow \underbrace{x^2 - 14x - 120}_{\text{تجزیه}} = 0 \Rightarrow (x-20)(x+6) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-20=0 \Rightarrow x=20 & \text{(ق ق)} \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 & \text{(غ ق ق)} \end{cases}$$

(ساعت)  $x+10=20+10=30$

پس زمان شخص B هم برابر است با:

تذکر: در ابتدای حل مسئله، می‌توانستید زمان فرد B را x و زمان فرد A را (x - ۱۰) فرض کنید.

در این‌گونه مسائل، معمولاً دو مجهول وجود دارد که باید یکی از آنها را x فرض کنید و دیگری را هم بر حسب x بنویسید، یعنی در معادله‌ای که می‌نویسید نباید دو تا مجهول مثل x و y وجود داشته باشد، چون معادله قابل حل نیست.



۴۴- معادله‌ی  $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$  را حل کنید.

« پاسخ »

ابتدا در سمت چپ تساوی مخرج مشترک بگیرید:

$$\frac{5(x-2) - 4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{5x-14}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 5x-14 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases} \text{ (غ ق ق)}$$

$$\sqrt{7x+4} - \sqrt{x+6} = \sqrt{x+1}$$

۴۵- معادله‌ی گنگ مقابل را حل کنید.

« پاسخ »

$$Df_1: x \geq \frac{-4}{7} \Rightarrow \sqrt{7x+4} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} \Rightarrow 7x+4 = x+6 + x+1 + 2\sqrt{(x+6)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 5x-3 = 2\sqrt{x^2+7x+6}$$

$$Df_2: x \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 25x^2 - 30x + 9 = 4x^2 + 28x + 24 \Rightarrow 21x^2 - 58x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = \frac{-5}{21} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$$

۴۶- معادله‌ی اصم مقابل را حل کنید.

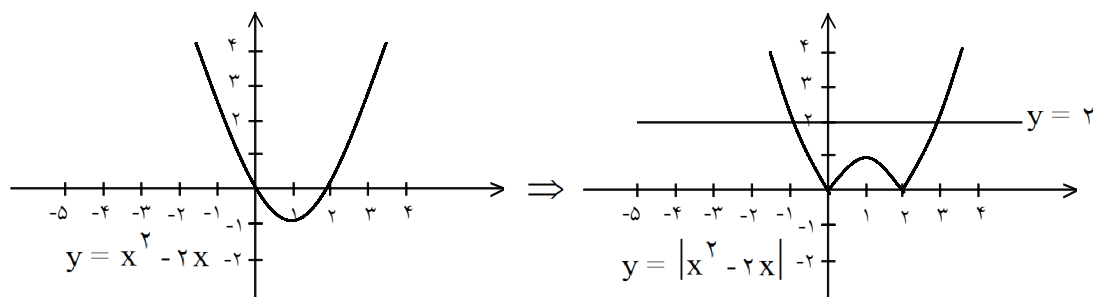
« پاسخ »

$$Df: 5 \leq x \leq 13 \Rightarrow 2 + \sqrt{x-5} = \sqrt{13-x} \Rightarrow \sqrt{x-5} = 11-x \Rightarrow D_f \text{ نهایی: } 5 \leq x \leq 11$$

$$\Rightarrow x-5 = 121 - 22x + x^2 \Rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=14 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

۴۷- نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - 2x|$  را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله  $|x^2 - 2x| = 2$  را حل نمایید.

« پاسخ »



معادله ۲ وجواب دارد: یک جواب بین ۰ و ۱ و یک هم بین ۲ و ۳ روش جبری:

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 : \Delta = 4 + 8 = 12^* \\ x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 : \Delta = 4 - 8 = -4 \text{ ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

$$* \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} = 2/\sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} = -0/\sqrt{3} \end{cases}$$

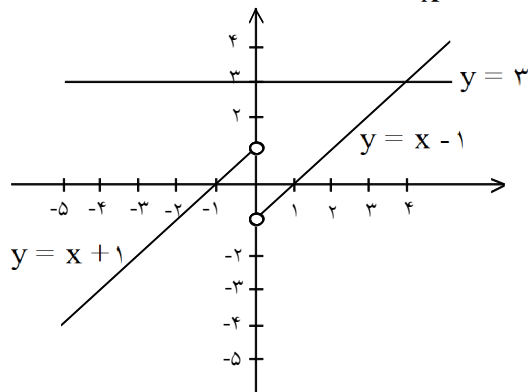
۴۸- نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای  $y = 3$  معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف)  $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب)  $y = |x^2 - 6x|$

« پاسخ »

$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{x} = x - 1 & x > 0 \\ x - \frac{x}{-x} = x + 1 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار معادله یک جواب دارد:  $x = 4$

$$x - \frac{x}{|x|} = 3$$

روش جبری:

$$x > 0 : x - \frac{x}{x} = 3 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ق ق}$$

$$x < 0 : x - \frac{x}{-x} = 3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \quad \text{غ ق ق}$$

ب)  $y = |x^2 - 6x|$  ؟؟

۴۹- با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف)  $f(x) = x|x|$

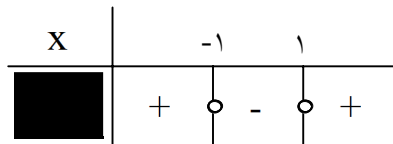
ب)  $g(x) = |x^2 - 1|$

پ)  $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$

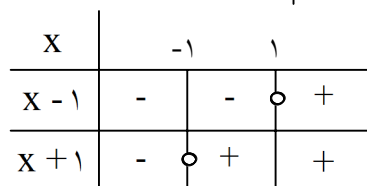
« پاسخ »

الف)  $f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب)  $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$



پ)  $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$



اگر  $x \leq -1$  :  $h(x) = -x + 1 + (-x - 1) = -2x$

اگر  $-1 < x < 1$  :  $h(x) = -x + 1 + x + 1 = 2 \Rightarrow h(x) = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$

اگر  $x \geq 1$  :  $h(x) = x - 1 + x + 1 = 2x$

۵۰- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

ب)  $|4x - 7| < 11$

الف)  $|2x - 1| > 5$

« پاسخ »

الف)  $|2x - 1| > 5 \Rightarrow 2x - 1 > 5 \text{ یا } 2x - 1 < -5$

$2x > 6$        $2x < -4$

$x > 3$       یا       $x < -2$

ب)  $|4x - 7| < 11 \Rightarrow -11 < 4x - 7 < 11 \xrightarrow{+7} -4 < 4x < 18 \xrightarrow{\div 4} -1 < x < \frac{9}{2}$

۵۱- جواب نامعادله  $|x + |x - 2|| < 10$  را حساب کنید.

« پاسخ »

x	$x < 2$	2	$x \geq 2$
$x - 2$	-	0	+

$$x \geq 2 \Rightarrow |x + x - 2| < 10 \Rightarrow |2x - 2| < 10 \Rightarrow -10 < 2x - 2 < 10 \xrightarrow{+2} -8 < 2x < 12$$

$$\div 2 \quad \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x \geq 2} \rightarrow -4 < x < 6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x \geq 2} 2 \leq x < 6 \quad (1)$$

$$x < 2 \Rightarrow |x - x + 2| < 10 \Rightarrow 2 < 10 \xrightarrow{\text{همواره درست بنابراین کل بازه جواب است}} x < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} (-\infty, 6)$$

۵۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 - 7|x| + 12 < 0$

ب)  $\frac{1}{|x+3|} > 7$

« پاسخ »

الف)  $x^2 - 7|x| + 12 < 0$  ،  $\xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - 7|x| + 12 < 0 \Rightarrow (|x| - 4)(|x| - 3) < 0$  ،

$$\Rightarrow 3 < |x| < 4 \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ \text{یا} \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-4, -3) \cup (3, 4)$$

ب)  $\frac{1}{|x+3|} > 7$   $\xrightarrow{\text{معکوس می کنیم}} |x+3| < \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} < x+3 < \frac{1}{7} \xrightarrow{-3} -\frac{22}{7} < x < -\frac{20}{7}$

مجموعه جواب  $= \left(-\frac{22}{7}, -\frac{20}{7}\right) - \{-3\}$

۵۳- حدود  $x$  را حساب کنید.

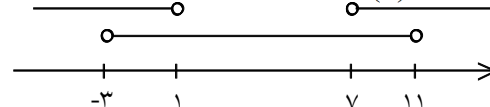
الف)  $3 < |x - 4| < 7$

ب)  $0 < |x - 3| < 5$

« پاسخ »

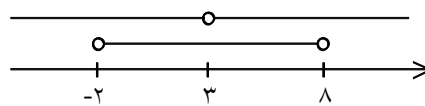
الف)  $3 < |x - 4| < 7 \Rightarrow \begin{cases} |x - 4| < 7 \Rightarrow -7 < x - 4 < 7 \xrightarrow{+4} -3 < x < 11 & (1) \\ |x - 4| > 3 \Rightarrow x - 4 > 3 \text{ یا } x - 4 < -3 \Rightarrow x > 7 \text{ یا } x < 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \cap (2) \rightarrow$  جواب =  $(-3, 1) \cup (7, 11)$



ب)  $0 < |x - 3| < 5 \Rightarrow \begin{cases} |x - 3| < 5 \Rightarrow -5 < x - 3 < 5 \Rightarrow -2 < x < 8 & (1) \\ |x - 3| > 0 \Rightarrow x \neq 3 & (2) \end{cases}$

$(1) \cap (2) \rightarrow$  جواب  $(-2, 8) - \{3\}$



۵۴- نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$x^2 - 4|x| - 25 > 7$

« پاسخ »

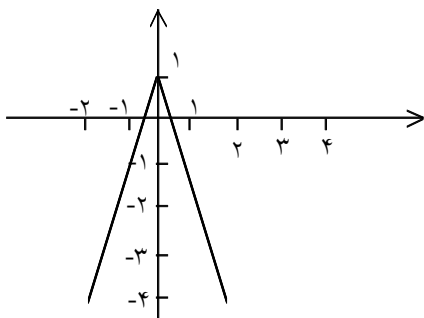
$x^2 - 4|x| - 32 > 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - 4|x| - 32 > 0 \Rightarrow (|x| - 8)(|x| + 4) > 0$

همواره مثبت

$\Rightarrow |x| - 8 > 0 \Rightarrow |x| > 8 \Rightarrow x > 8 \text{ یا } x < -8$

۵۵- نمودار تابع  $f(x) = -2|x| + 1$  را رسم کنید.

« پاسخ »



۵۶- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۲- و ۱ روی محور  $x$  ها برابر ۷ باشد؟

« پاسخ »

$$|x-1| + |x+2| = 7$$

$x$	$-2$	$1$
$x-1$	-	-
$x+2$	-	+

ق ق  $x \geq 1 \Rightarrow x-1 + x+2 = 7 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

غ ق ق  $-2 \leq x < 1 \Rightarrow -x+1 + x+2 = 7 \Rightarrow 3 = 7$

ق ق  $x < -2 \Rightarrow -x+1 -x-2 = 7 \Rightarrow -2x = 8 \Rightarrow x = -4$

۵۷- اگر  $a = 3$  و  $b = -2$  و  $c = 5$ ، حاصل عبارت  $\frac{|b^2| + |ab|}{|b-c|}$  را به دست آورید.

« پاسخ »

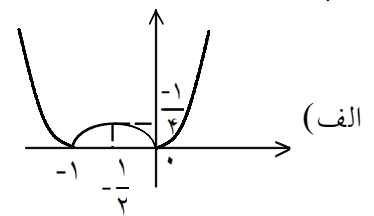
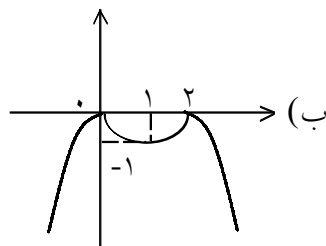
$$\frac{|b^2| + |ab|}{|b-c|} = \frac{|4| + |-6|}{|-2-5|} = \frac{10}{7}$$

۵۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

(ب)  $y = -|x^2 - 2x|$

(الف)  $y = |x^2 + x|$

« پاسخ »



۵۹- معادله‌های زیر را حل کنید:

(ب)  $|x+4| - |x-4| = 8$

(الف)  $|x-4| - |x+4| = 8$

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -4 \Rightarrow -x+4 + x+4 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ \text{(الف)} \quad -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow -x+4 - x-4 = 8 \Rightarrow x = -4 \\ x \geq 4 \Rightarrow x-4 - x-4 = 8 \Rightarrow -8 = 8 \end{array} \right\} \text{مجموعه جواب: } (-\infty, -4]$$

(ب) جواب:  $[4, +\infty)$

۶۰- در یک مربع مختصات محل تلاقی قطرهای  $A(1, 2)$  و یک ضلع آن روی خط  $x + y = 2$  قرار دارد. مساحت مربع را حساب کنید.

« پاسخ »

فاصله محل تلاقی قطرهای (وسط مربع) تا یک ضلع برابر است با نصف طول ضلع بنابراین حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم.

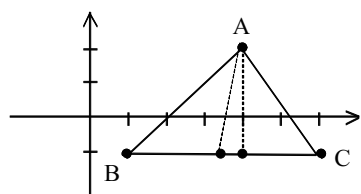
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \rightarrow \text{طول ضلع} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S = (\sqrt{2})^2 = 2$$

مساحت مربع

۶۱- نقاط  $A(4, 2)$  و  $B(1, -1)$  و  $C(8, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. اگر  $H$  و  $M$  به ترتیب پای ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  باشد، طول  $MH$  را به دست آورید.

« پاسخ »



با توجه به شکل روبه‌رو  $BC$  موازی محور طول‌ها و  $AH$  عمود بر آن است، لذا می‌توان مختصات نقطه‌ی  $H$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$H \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$$

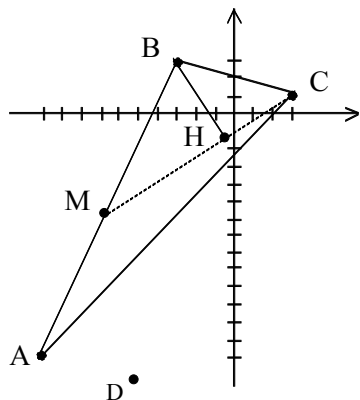
هم‌چنین  $M$  وسط  $BC$  است، پس:

$$M \begin{vmatrix} \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} \\ -1 + (-1) = -1 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow MH = \left| 4 - \frac{7}{2} \right| = \frac{1}{2}$$



۶۲- سه رأس مثلث ABC،  $A(-11, -13)$ ،  $B(-3, 3)$ ،  $C(3, 1)$  می‌باشند.  
الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.  
ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که ABCD یک متوازی‌الاضلاع باشد.

« پاسخ »



$$\text{AB وسط } M \begin{cases} \frac{-10-3}{2} = \frac{-13}{2} \\ \frac{-13+3}{2} = -5 \end{cases}, m_{MC} = \frac{1 - (-5)}{3 - (-\frac{13}{2})} = \frac{6}{\frac{19}{2}} = \frac{12}{19}$$

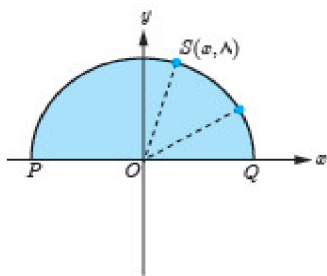
$$y - 1 = \frac{12}{19}(x - 3) \Rightarrow 19y - 19 = 12x - 36$$

$$\Rightarrow 12x - 19y - 17 = 0 \quad \text{معادله خط میانه CM}$$

$$BH = \frac{|12(-3) - 19(3) - 17|}{\sqrt{12^2 + 19^2}} = \frac{110}{\sqrt{505}}$$

ب) می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند لذا وسط AC و وسط BD بر هم منطبق هستند. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \frac{-3 + x_D}{2} = \frac{-10 + 3}{2} \\ \frac{3 + y_D}{2} = \frac{-13 + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + x_D = -7 \Rightarrow x_D = -4 \\ 3 + y_D = -12 \Rightarrow y_D = -15 \end{cases}$$



۶۳- نقطه‌ی  $S(x, 8)$  روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.  
الف) مقدار  $x$  را به دست آورید.  
ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.  
پ) نشان دهید  $\widehat{PSQ}$  قائمه است.

« پاسخ »

$$\text{الف) } R = OS = \sqrt{x^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{ب) } S \left| \begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix} \right., P \left| \begin{matrix} -10 \\ 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow m_{PS} = \frac{0 - 8}{-10 - 6} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

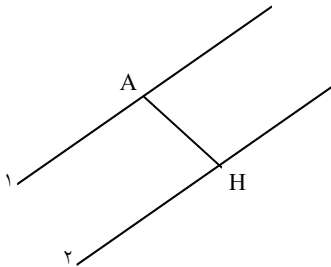
$$S \left| \begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix} \right., Q \left| \begin{matrix} 10 \\ 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow m_{SQ} = \frac{0 - 8}{10 - 6} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\text{پ) } m_{PS} \times m_{SQ} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ \Rightarrow \widehat{PSQ} = 90^\circ$$

۶۴- ثابت کنید فاصله‌ی دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر  $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  می‌باشد.

« پاسخ »

کافی است یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خط‌ها در نظر بگیریم و فاصله‌ی آنرا از خط دیگر بیابیم. فرض کنیم نقطه‌ی  $A(x_0, y_0)$  روی خط ۱ باشد در این صورت داریم:



$$ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c$$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

روشی دیگر:

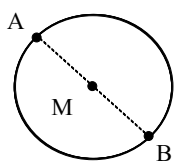
نقطه‌ای به طول صفر روی خط ۱ در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$a(0) + by + c = 0 \Rightarrow by = -c \Rightarrow y = \frac{-c}{b} \Rightarrow A \left( 0, \frac{-c}{b} \right)$$

$$AH = \frac{\left| a(0) + b\left(\frac{-c}{b}\right) + c' \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۶۵-  $A(0, 6)$  و  $B(8, -8)$  نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکزی و طول شعاع دایره را به دست آورید.

« پاسخ »



$$\text{AB وسط } M \begin{cases} \frac{0 + 8}{2} = 4 \\ \frac{6 + (-8)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow M \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ مرکز دایره}$$

$$MA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \text{ شعاع دایره}$$

۶۶- در مثلث ABC که A(۳, ۵) و B(-۲, ۴) و C(۱, -۲)، اگر AH ارتفاع مثلث باشد مختصات H را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\text{BC معادله} \Rightarrow m_{BC} = \frac{4 + 2}{-2 - 1} = -2 \xrightarrow{C(1, -2)} y = -2x$$

خط AH بر BC عمود است پس شیب AH قرینه و معکوس شیب BC است.

$$\text{AH معادله} \Rightarrow m_{AH} = \frac{1}{2} \xrightarrow{A(3, 5)} y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\text{H مختصات} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = -2x \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{14}{5} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

۶۷- نشان دهید C(۷, ۱۲) روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی A(-۲, ۵) و B(۴, ۱) قرار دارد.

« پاسخ »

ابتدا نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را حساب می‌کنیم.

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3 \end{cases}$$

سپس شیب خط گذرنده از پاره‌خط AB را حساب کرده و قرینه و معکوس می‌کنیم.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m' = \frac{3}{2}$$

معادله خط عمودمنصف برابر است با:

$$(y - y_M) = m'(x - x_M) \Rightarrow y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

برای مشخص کردن آن‌که نقطه‌ی C روی عمودمنصف است باید x را در معادله‌ی خط عمودمنصف قرار داده و y به دست آمده با y نقطه‌ی C برابر باشد.

$$x = 7 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(7) + \frac{3}{2} = \frac{21 + 3}{2} = 12$$

نقطه‌ی C روی عمودمنصف قرار دارد.

۶۸- مثلث با رئوس  $A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ ,  $B \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ ,  $C \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$  مفروض است. معادله میانه CM را به دست آورید.

« پاسخ »

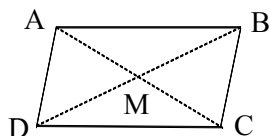
$$M = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{3-0}{-1-2} = -1$$

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$$

۶۹- ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. اگر  $A(-10, -13)$ ,  $B(-3, 3)$  و  $C(3, 1)$  باشند، مختصات نقطه‌ی D را به دست آورید.

« پاسخ »

چون در متوازی‌الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند، داریم:



$$M = \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) \text{ یا } M = \left( \frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow \frac{-10 + 3}{2} = \frac{-3 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \frac{-13 + 1}{2} = \frac{3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -15$$

۷۰- قرینه‌ی نقطه‌ی  $A(1, 2)$  را نسبت به نقطه‌ی  $M(-1, 4)$  به دست آورید.

« پاسخ »

نقطه‌ی M، نقطه‌ی میانی بین نقطه‌ی A و قرینه‌ی نقطه‌ی A (یعنی B) است.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 6$$

۷۱- اگر یک سر پاره خطی نقطه‌ی (۲, -۴) و نقطه‌ی میانی آن (۳, -۱) باشد، مختصات سر دیگر پاره خط را بیابید.

« پاسخ »

$$A(-۴, ۲), M(۳, -۱), B = ?$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴ + x_B}{۲} \Rightarrow x_B = ۱۰$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow -۱ = \frac{۲ + y_B}{۲} \Rightarrow y_B = -۴$$