* ۱- تعداد توابعی که می‌توان از $A=\{۱,۲\}$ بر $B=\{a,b,c\}$ ساخت را بیابید.

۲- اگر دو مجموعه‌ی $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_m\}$ باشند و $f:A\to B$، آن‌گاه:

الف) به طور کلی چند تابع f موجود است؟

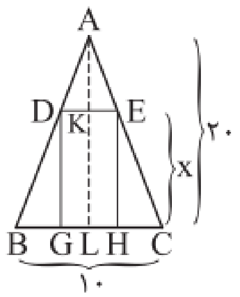
ب) چند تابع f موجود است که در آن‌ها $f(a_۱)=b_۱$ باشد؟

پ) چند تابع ثابت موجود است؟

ت) چند تابع موجود است که $f(a_۱)\neq b_۱$ باشد؟

۳- مجموع دو عدد غیرصفر برابر ۲۰ می‌باشد. مجموع معکوس‌های این دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

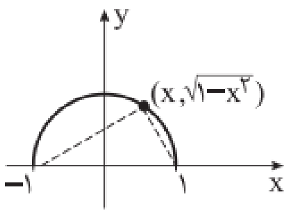
۴- مطابق شکل مقابل مستطیلی در درون مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۲۰ و قاعده‌ی ۱۰ واحد قرار گرفته است. اگر طول مستطیل x باشد، تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را برحسب x بیان کند.



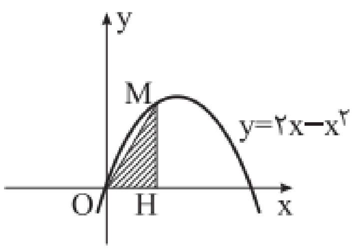
۵- قطر مستطیلی $۲\sqrt{۲}$ است. مساحت آن را به صورت تابعی برحسب یک ضلع مستطیل بنویسید.

* ۶- تابع $y=۲x-۱$ را در نظر بگیرید. فاصله‌ی نقاط این تابع از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ را برحسب تابعی از x بیابید.

۷- با توجه به شکل مقابل رأس سوم مثلث روی دایره حرکت می‌کند. تابعی بنویسید که مساحت مثلث را برحسب x به دست آورد.



* ۸- در شکل زیر اگر M روی منحنی حرکت کند، مساحت مثلث OMH را به صورت تابعی از x بیابید.



* ۹- مجموع دو عدد حقیقی برابر ۴ است. بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها را بیابید.

۱۰- بیش‌ترین مقدار $f(x)=(K+۳)x^۲-۴x+K$ برابر صفر است. K را بیابید.

۱۱- در هر یک از مسائل زیر مشخص کنید که آیا y تابعی از x هست یا خیر؟

الف) $x^{۲}+y^{۳}=۳$ ✽

ب) $|x|+|y^{۲}-۱|=۰$

پ) $|x+y|=۳$

ت) $xy=۰$ ✽

ث) $x=\sin y+۱$

ج) $|y|=\sqrt{۱-x^{۲}}+\sqrt{x^{۲}-۱}$

چ) $\log y=۱+\log x$ ✽

ح) $۱۰^{x}+۱۰^{y}=۱۰$

خ) $f=\{(x,y)\in \mathbb{R}^{۲}:x=۲\}$ ✽

د) $f(x)=\begin{cases} ۳x+۵ & x>۰ \\ x-۲ & x<۱ \end{cases}$

۱۲- معادله‌ی $\cos ۲y-۵x=۱$ در اعداد حقیقی یک تابع برحسب x یا y را معین می‌کند. چرا؟ دامنه و برد تابع را بیابید.

۱۳- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+\dfrac{x-۱}{|x|+۱} & x\le ۰ \\ b+۲x-۳ & x\ge ۰ \end{cases}$ نمایش یک تابع باشد، مقدار b را بیابید.

✽۱۴- کدام‌یک از روابط زیر یک تابع از x بر روی y را بیان می‌کند؟

۱) $\{(x,y)|x,y\in \mathbb{Z},x+y^{۲}=۱۰\}$

۲) $\{(x,y)|x,y\in \mathbb{R},x+y^{۲}=۱۰\}$

۳) $\{(x,y)|x,y\in \mathbb{Q},x+y^{۲}=۱۰\}$

۴) $\{(x,y)|x,y\in \mathbb{R}^{+},x+y^{۲}=۱۰\}$

✽۱۵- کدام رابطه، ضابطه‌ی یک تابع نیست؟

۱) $|y-۱|+(x-۱)^{۲}=۰$

۲) $|x-۱|+(y-۱)^{۲}=۰$

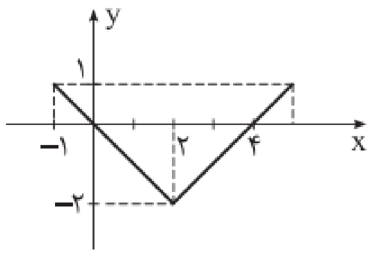
۳) $|y^{۲}-۱|+|x|=۰$

۴) $|x^{۲}-۱|+|y|=۰$

۱۶- تابع $f(x)=2|x+1|-|x|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید و از روی نمودار، دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۷- * تابع $f(x)=|x-1|+|x+2|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید و از روی نمودار، دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۸- * ضابطه‌ی نمودار مقابل را تعیین کنید.



۱۹- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

* الف) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}$

* ب) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$

* پ) $f(x)=\sqrt{-|x+2|}$

* ت) $f(x)=\sqrt{5-\dfrac{x}{x+2}}$

ث) $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-1}{x-|x|}}$

چ) $f(x)=\cos\sqrt{x-|x|}$

ح) $f(x)=\sqrt{\sin x}$

خ) $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$

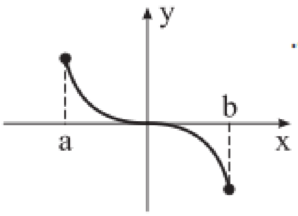
۲۰- * حدود m را طوری بیابید که دامنه‌ی توابع زیر برابر $\mathbb{R}$ گردد.

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+mx+1}$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2+m^2-1}$

۲۱- حدود m را طوری تعیین کند که دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{mx^2+4x+1}$ برابر $\mathbb{R}$ گردد.

✽ ۲۲- نمودار تابع f شکل مقابل است. دامنه‌ی تابع $f(x)=\log(x^{۲}.f(x))$ را بیابید.



۲۳- کدام یک از زوج تابع‌های زیر مساوی‌اند؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}} \\ g(x)=x \end{cases}$

✽ ب) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x|x|}{x} \\ g(x)=|x| \end{cases}$

✽ پ) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x.\cos x}{\sin x} \\ g(x)=\cos x \end{cases}$

ت) $\begin{cases} f(x)=\log x^{۲} \\ g(x)=۲\log x \end{cases}$

ث) $\begin{cases} f(x)=\tan x.\cot x \\ g(x)=\sin^{۲} x+\cos^{۲} x \end{cases}$

✽ ج) $\begin{cases} f(x)=|x| \\ g(x)=a^{\log_a^{|x|}} \qquad (a>۰, a\neq ۱) \end{cases}$

چ) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{۱-\cos^{۲} x} \end{cases}$

✽ ح) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۲}} \\ g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{x+۲}} \end{cases}$

✽ خ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}-x} \\ g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۱} \end{cases}$

❋ د) $\begin{cases} f(x)=(x-1)\sqrt{1-x} \\ g(x)=\sqrt{(1-x)^3} \end{cases}$

ذ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{-x} \\ g(x)=\sqrt{-x^2} \end{cases}$

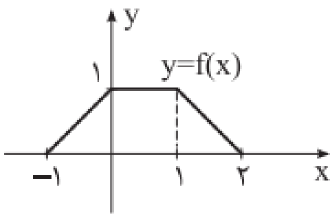
❋ ر) $\begin{cases} f(x)=\sin^2\sqrt{x}+\cos^2\sqrt{x} \\ g(x)=1 \end{cases}$

۲۴- اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-1}{2x+1} & x\neq -\dfrac{1}{2} \\ 1-K & x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، K را طوری بیابید که $f(x)=g(x)$ گردد.

❋ ۲۵- اگر دو تابع $f=\{(5,3),(-3,5)\}$ و $g=\{(b,c),(5,a),(b,5)\}$ مساوی باشند، $\dfrac{a+b}{c}$ را بیابید.

۲۶- اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$ و $g(x)=\sqrt{ax^2+1}-bx^2$ مساوی باشند، a و b را تعیین کنید.

۲۷- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(x-1)+2$

❋ ب) $y=2f(x)$

❋ پ) $y=f(2x)$

ت) $y=-2f(x)$

ث) $y=f(-2x)$

❋ ج) $y=-\dfrac{1}{2}f(x)+1$

❋ چ) $y=f(-\dfrac{1}{2}x)+1$

ح) $y=f(2x-1)$

❋ خ) $y=-f(-x+1)$

❋ د) $y=f(|x|)$

ذ) $y=f(|x-1|)+1$

ر) $|y|=f(x)$

ز) $|y|=f(|x|)$

۲۸- اگر دامنه‌ی $f(x)$ برابر با $D_f:(-۳,۶]$ و برد آن $(-۱,۵)$ باشد، دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

* الف) $y=f(۲x)$

* ب) $y=f(\frac{۲x-۳}{۳})+۱$

پ) $y=f(|x-۱|+۳)$ (فقط دامنه)

ت) $y=۲|f(x-۱)|-۵$

۲۹- اگر در تابع f مقدار $D_f:(۲,۸)$ و $R_f:[۳,۴]$، دامنه و برد تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۲})-۱$ را بیابید.

* ۳۰- اگر برد تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر $[c,d]$ باشد، در مورد دامنه و برد تابع $y=f(Kx)$ و $y=f(|x|)$ بحث کنید.

* ۳۱- اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر (a,b) باشد، راجع به دامنه‌ی تابع $y=f(x^۲)$ بحث کنید.

* ۳۲- با توجه به نمودار $y=\sqrt{x}$ نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x}+۱$

ب) $y=۱-\sqrt{x}$

پ) $y=۲\sqrt{-x}$

ت) $y=\sqrt{-x+۲}$

ث) $y=\sqrt{۲x+۳}-۱$

ج) $y=\sqrt{|x|}$

چ) $|y|=\sqrt{|x-۱|}$

ح) $y=۲\sqrt{x}-۲$

۳۳- نمودار تابع $y=x^۲$ را نسبت به محور xها قرینه نموده و سپس همه‌ی yهای آن را نصف می‌کنیم و پس از آن منحنی را ۲ واحد در جهت چپ و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. ضابطه‌ی تابع آخر را بنویسید.

۲- الف) برای آن‌که بدانیم تعداد توابع f چندتاست، باید بدانیم برای هر یک از $f(a_۱)$ ، $f(a_۲)$ ، ... و $f(a_m)$ چند حالت موجود است: $f(a_۱)$ می‌تواند هر کدام از اعداد $b_۱، b_۲$ ، ... ، b_m باشد. پس برای $f(a_۱)$ ، m حالت موجود است. $f(a_۲)$ نیز می‌تواند به هر یک از $b_۱، b_۲$ ، ... ، b_m نظیر شود. پس آن هم m حالت دارد و ... و $f(a_m)$ نیز m حالت دارد. پس طبق اصل ضرب $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{n\text{ تا}}=m^n$ تابع موجود است.

ب) $f(a_۱)$، یک حالت دارد. چون فقط می‌تواند $b_۱$ باشد. ولی $f(a_۲)$ ، ... ، $f(a_n)$ محدود نیستند و هر کدام m حالت دارند. پس: $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{n-۱\text{ حالت}}=m^{n-۱}$

پ) توابع ثابت عبارتند از: $f(x)=b_۱$ و $f(x)=b_۲$,..., $f(x)=b_m$. پس m تا هستند.

ت) $f(a_۱)\neq b_۱$ پس $f(a_۱)$، $m-۱$ حالت دارد و بقیه‌ی $f(a_۲),\ldots,f(a_n)$ هر کدام m حالت دارند. پس:

$$(m-۱)(m)(m)\ldots(m)=m^{n-۱}\times(m-۱)=m^n-m^{n-۱}$$

۳-

$$x+y=۲۰\Rightarrow y=۲۰-x$$

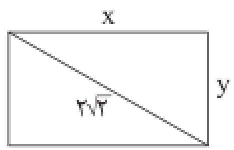
$$f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\xrightarrow{\text{با فرض } x<y}f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲۰-x}$$

۴-

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AK}{AL}\Rightarrow\frac{y}{۱۰}=\frac{۲۰-x}{۲۰}\Rightarrow y=\frac{۲۰-x}{۲}$$

$$S(x)=xy=x\left(\frac{۲۰-x}{۲}\right)=\frac{۲۰x-x^۲}{۲}$$

۵-



$$x^۲+y^۲=(۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow x^۲+y^۲=۸\Rightarrow y^۲=۸-x^۲$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{۸-x^۲}$$

$$S=xy=x\sqrt{۸-x^۲}$$

۷-

$$S=\frac{۱}{۲}\text{ (ارتفاع) (قاعده) }=\frac{۱}{۲}(y)(۲)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-x^۲}\times ۲=\sqrt{۱-x^۲}$$

۱۰- $f(x)=(K+3)x^2-4x+K \to$ طول رأس تابع درجه‌ی ۲ $: x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(K+3)}=\frac{2}{K+3}$

عرض رأس $: y=(K+3)(\frac{2}{K+3})^2-4(\frac{2}{K+3})+K=0 \Rightarrow \frac{4}{K+3}-\frac{8}{K+3}+K=0$

$$\Rightarrow \frac{-4}{K+3}+K=0 \Rightarrow \frac{-4+K^2+3K}{K+3}=0$$

$$\Rightarrow K^2+3K-4=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} K=1 \\ K=-4 \end{array} \right.$$

به ازای $K=1$ ضریب x^2 مثبت بوده و تابع دارای min (کمینه) می‌گردد و به ازای $K=-4$ ضریب x^2 منفی گشته و max (بیشینه) پیدا می‌کند. پس فقط $K=-4$ قابل قبول است.

۱۱-

ب) $|x|+|y^2-1|=0 \xrightarrow[\text{صفر شده است}]{\text{جمع دو مقدار نامنفی}} \begin{cases} |x|=0 \Rightarrow x=0 \\ |y^2-1|=0 \end{cases} \Rightarrow \{(0,1),(0,-1)\}$

به ازای یک مقدار x ، دو تا y داریم. پس رابطه تابع نیست.

پ) $|x+y|=3 \Rightarrow x+y=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ y=-x-3 \end{cases}$ پس تابع نیست.

ث) $x=\sin y+1 \xrightarrow[x=0]{\text{به‌طور مثال}} 0=\sin y+1 \Rightarrow \sin y=-1 \begin{cases} y=\frac{3\pi}{2} \\ y=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

به ازای یک مقدار x، چند y داریم. پس رابطه تابع نیست.

ج) $|y|=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

باتوجه به دامنه‌ی رابطه که $x=\pm 1$ می‌باشد، برد تابع فقط صفر است. یعنی $f:\{(1,0),(-1,0)\}$

پس رابطه متعلق به یک تابع می‌باشد.

ح) $10^x+10^y=10 \Rightarrow 10^y=10-10^x \Rightarrow y=\log(10-10^x)$

برای اثبات تابع بودن رابطه داریم:

$$x_1=x_2 \Rightarrow 10^{x_1}=10^{x_2} \Rightarrow -10^{x_1}=-10^{x_2} \Rightarrow 10-10^{x_1}=10-10^{x_2}$$

$$\Rightarrow \log(10-10^{x_1})=\log(10-10^{x_2}) \Rightarrow y_1=y_2$$

د) $f(x)=\begin{cases} 3x+5 & x>0 \\ x-2 & x<1 \end{cases}$

شرط $x>0$ و $x<1$ با هم اشتراکی برابر $0<x<1$ دارند. پس عبارت تابع نمی‌باشد.

-۱۲ $\cos ۲y - ۵x = ۱ \Rightarrow x = \dfrac{\cos ۲y - ۱}{۵}$

در نتیجه این رابطه یک تابع از y به x (برحسب y) را مشخص می‌کند. یعنی به ازای هر مقداری که به y می‌دهیم فقط یک مقدار x پیدا می‌شود.

دامنه‌ی این تابع برابر $\mathbb{R}$ است و برای برد آن داریم:

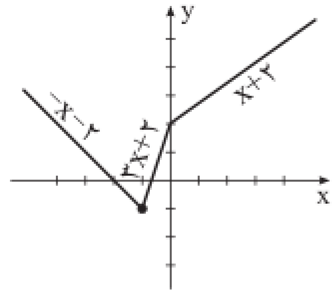
$$-۱ \le \cos ۲y \le ۱ \Rightarrow -۲ \le \cos ۲y - ۱ \le ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۵} \le \frac{\cos ۲y - ۱}{۵} \le ۰ \Rightarrow \text{برد} \in [-\frac{۲}{۵}, ۰]$$

-۱۳ برای این‌که این رابطه تابع گردد، باید شرط‌ها با هم اشتراک نداشته باشند و اگر در یک نقطه اشتراک داشته باشند yهای آن‌ها با هم برابر گردد.

$$\left.\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow ۲x + \dfrac{x-۱}{|x|+۱} = ۰ + \dfrac{۰-۱}{۰+۱} = -۱ \\ x = ۰ \Rightarrow b + ۲x - ۳ = b + ۰ - ۳ = b - ۳ \end{cases}\right\} \Rightarrow b - ۳ = -۱ \Rightarrow b = ۲$$

-۱۶ $f(x) = ۲|x+۱| - |x|$

	-۱		۰
x	−	−	+
x+۱	−	+	+
	$-۲(x+۱)+x$	$۲(x+۱)+x$	$۲(x+۱)-x$
	$y=-x-۲$	$y=۳x+۲$	$y=x+۲$



$$f(x) = \begin{cases} -x-۲ & x < -۱ \\ ۳x+۲ & -۱ \le x \le ۰ \\ x+۲ & x \ge ۰ \end{cases}$$

دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $y \ge -۱$ می‌باشد.

-۱۹

ث) $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1 \\ x-2\sqrt{x+1}\ge 0 \Rightarrow x\ge 2\sqrt{x+1}\Rightarrow x^2\ge 4(x+1) \\ \qquad \Rightarrow x^2\ge 4x+4 \end{cases}$

$$x^2-4x-4\ge 0 \Rightarrow x^2-4x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2\sqrt{2} \\ x_2=2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$	
x^2-4x-4	+	0	−	0	+
	ج				ج

یعنی نتیجه $x^2-4x-4\ge 0$ برابر است با $(-\infty, 2-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$ ولی با توجه به نامعادله‌ی $x\ge 2\sqrt{x+1}$ و با توجه به این‌که جواب رادیکال مثبت است، پس x که از آن بزرگ‌تر است حتماً مثبت است و به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

$$D_f:\{x\ge -1\}\cap(\{x\le 2-2\sqrt{2}\}\cup\{x\ge 2+2\sqrt{2}\})\cap\{x\ge 0\} \Longleftrightarrow \{x\ge 2+2\sqrt{2}\}$$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-1}{x-|x|}} \Rightarrow \dfrac{-1}{x-|x|}\ge 0 \Rightarrow x-|x|<0 \Rightarrow |x|>x \Rightarrow x\in\mathbb{R}^-$

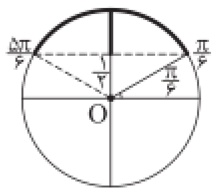
چ) $f(x)=\cos\sqrt{x-|x|} \Rightarrow x-|x|\ge 0 \Rightarrow x\ge |x| \Rightarrow \begin{cases} x>|x|\Rightarrow \varnothing \\ x=|x|\Rightarrow x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow D_f:\{x\ge 0\}$

ح) $f(x)=\sqrt{\sin x} \Rightarrow \sin x\ge 0 \Rightarrow$ طبق قاعده‌ی هستک

$\Rightarrow$ یعنی در هر ربع، حرف اول تابع‌های مثبت را نوشتیم

$$\Rightarrow \sin x\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le \pi \Rightarrow 2k\pi\le x\le 2k\pi+\pi$$

خ) $f(x)=\sqrt{2\sin x-1} \Rightarrow 2\sin x-1\ge 0 \Rightarrow 2\sin x\ge 1 \Rightarrow \sin x\ge \dfrac{1}{2}$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

-۲۱ $mx^2+4x+1\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\le 0 \Rightarrow (4)^2-4(m)\le 0 \Rightarrow 16-4m\le 0 \Rightarrow m\ge 4 \\ m>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \{m\ge 4\}\cap\{m>0\}=\{m\ge 4\}$$

-۲۳

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}} \\ g(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \mathbb{R} \\ D_g : \mathbb{R} \end{cases} , \sqrt{x^{۲}} = |x| \neq x \Rightarrow f \neq g$

ت) $\begin{cases} f(x)=\log x^{۲} \\ g(x)=۲\log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۲} > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{۰\} \Rightarrow D_f : \ \mathbb{R} - \{۰\} \\ x > ۰ \Rightarrow x \in (۰,+\infty) \Rightarrow D_f : (۰,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

ث) $\begin{cases} f(x)=\tan x . \cot x \\ g(x)=\sin^{۲} x+\cos^{۲} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{۲}\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

ج) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{۱-\cos^{۲} x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱-\cos^{۲} x} = \sqrt{\sin^{۲} x} = |\sin x| \Rightarrow f \neq g$

د) $\begin{cases} f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x} \\ g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۳}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : x \leq ۱ \\ D_g : x \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(۱-x)^{۳}} = \sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}$

$= |۱-x| \sqrt{۱-x} = (۱-x)\sqrt{۱-x} \Rightarrow f \neq g$

ذ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} . \sqrt{-x} \\ g(x)=\sqrt{-x^{۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \begin{cases} x \geq ۰ \\ -x \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \\ x \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۰ \\ D_g : -x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \Rightarrow$ با توجه به این‌که برد تابع نیز فقط $y=۰$ است پس دو تابع مساوی‌اند.

-۲۴

$$g(x)=\begin{cases} \frac{۴x^{۲}-۱}{۲x+۱} & x \neq -\frac{۱}{۲} \\ ۱-K & x = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x \neq -\frac{۱}{۲} \\ ۱-K & x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اگر در این سوال $f(x)=g(x)$ است، پس باید در $x=-\frac{۱}{۲}$ نیز این دو تابع با هم مساوی باشند. یعنی:

$$f(-\frac{۱}{۲}) = g(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲})-۱ = ۱-K \Rightarrow -۲ = ۱-K \Rightarrow K = ۳$$

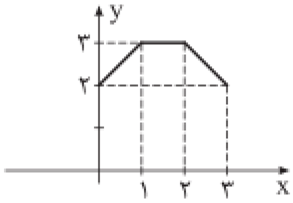
-۲۶ $g(x)=f(x) \Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱} - bx^{۲} = \frac{۱}{۳x+\sqrt{۹x^{۲}+۱}} \Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱} - bx^{۲}$

$$= \frac{۱}{۳x+\sqrt{۹x^{۲}+۱}} \times \frac{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}}{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}} = \frac{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}}{۹x^{۲}-۹x^{۲}-۱} = \sqrt{۹x^{۲}+۱} - ۳x$$

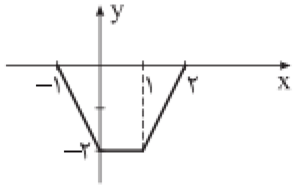
$$\Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱} - bx^{۲} = \sqrt{۹x^{۲}+۱} - ۳x \Rightarrow \begin{cases} a = ۹ \\ b = ۳ \end{cases}$$

-۲۷

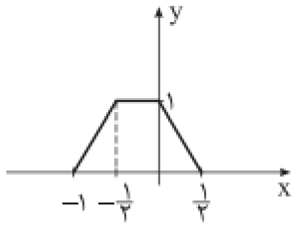
الف)



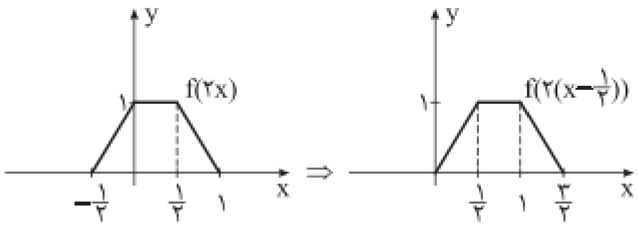
ت)



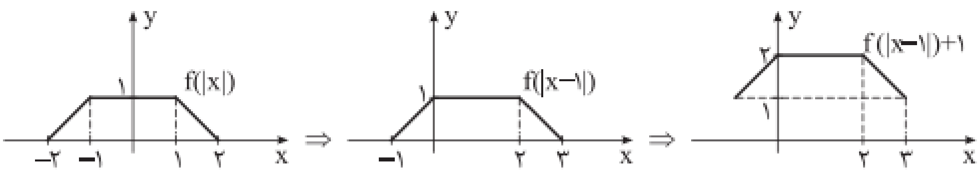
ث)



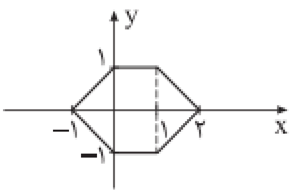
ح) $y = f(۲x - ۱) \Rightarrow y = f(۲(x - \frac{۱}{۲}))$



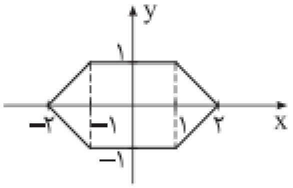
ذ)



ر) $|y| = f(x)$



ز) $|y|=f(|x|)$



-۲۸

پ) $y=f(|x-۱|+۳)\Rightarrow \underbrace{-۳<|x-۱|}_{\text{بدیهی}}+۳\le ۶\Rightarrow |x-۱|+۳\le ۶\Rightarrow |x-۱|\le ۳$

$$\Rightarrow -۲\le x\le ۴\Rightarrow D_y:[-۲,۴]$$

ت) $y=۲|f(x-۱)|-۵$

دامنه : $-۳<x-۱\le ۶\Rightarrow -۲<x\le ۷\Rightarrow D_y:(-۲,۷]$

برد : $-۱<f(x-۱)<۵\Rightarrow ۰\le|f(x-۱)|<۵\Rightarrow ۰\le ۲|f(x-۱)|<۱۰$

$$\Rightarrow -۵\le ۲|f(x-۱)|-۵<۵\Rightarrow -۵\le y<۵$$

-۲۹ $y=۲f(\frac{x-۱}{۲})-۱\Rightarrow ۲<\frac{x-۱}{۲}<۸\Rightarrow ۴<x-۱<۱۶\Rightarrow ۵<x<۱۷\Rightarrow D_f:(۵,۱۷)$

$$\Rightarrow ۳\le f\le ۴\Rightarrow ۶\le ۲f\le ۸\Rightarrow ۵\le ۲f-۱\le ۷\Rightarrow R_f=[۵,۷]$$

-۳۳ $f(x)=x^۲ \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} f(x)=-x^۲ \xrightarrow[\text{yها}]{\text{نصف کردن}} f(x)=\frac{-x^۲}{۲} \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال دو واحد}} f(x)=-\frac{(x+۲)^۲}{۲}$

$$\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{انتقال یک واحد}} f(x)=\frac{-(x+۲)^۲}{۲}+۱$$