بسمه تعالی

آزمون فصل دوم **حسابان 1** **یازدهم ریاضی** **خانم سلیمانی**

1-نمودار تابع $y = 1 + 2^{-x}$ را رسم کنید ودامنه وبرد آن رابیابید .

2 -نا معادله زیر را حل کنید .

الف) $3^{2x-3} \geq \frac{1}{81^3}$ ب) $\frac{1}{2}^{x^2+2x} < \frac{1}{4}^{16-x}$

3-اگر $f(x) = -1 + ab^x$ ازنقطه $A\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1,11$ بگذرد، $f(1)$ را محاسبه کنید .

4- دمای چای در یک فنجان در مدت 5 دقیقه از $80\ C^0$ به $40\ C^0$ کاهش می یابد . خنک شدن چای با فرمول $T = T_0 \times a^t$ بدست می آید . T دمای چای بعد از گذشت t دقیقه و T_0 دمای اولیه آن است. دمای چای بعد از 10 دقیقه چقدر خواهد شد؟

5- دامنه تابع های زیررا بیابید .

الف) $f(x) = \log\frac{x-2}{x+2}$ ب) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 2x)$

6- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد ، حاصل $\log 2.4$ را بدست آورید .

7 -اگر $A = 3^a$ باشد ، حاصل $\log_3 9\acute{}A^2$ را برحسب a بدست آورید .

8- اگر $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x)$ باشد، حاصل $f(x) + f(-x)$ را بدست آورید .

9- معادلات زیر را حل کنید .

الف) $\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3\log 2$

ب) $\log(x^2 - 7) = 2\log(x+3$

10 - اگر انرژی آزادشده یک زلزله $10^{16.8}$ارگ باشد، بزرگی این زمین لرزه چند ریشتر است .

پاسخ تشریحی

سوال 1

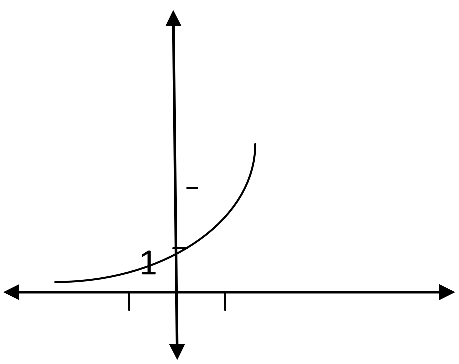
$y = 1 + 2^{-x}$

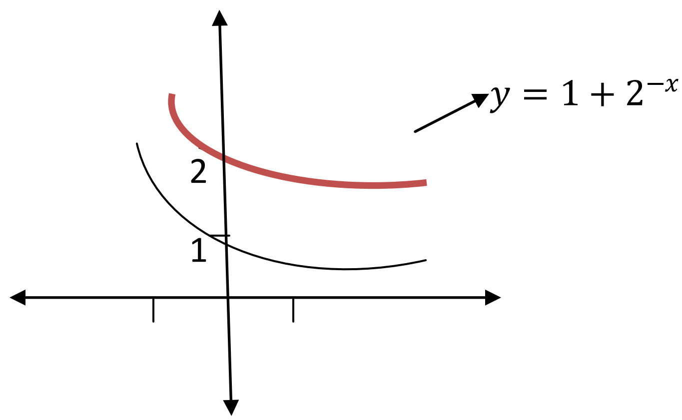
حل :ابتدا جدول نقطه یابی تابع $y = 2^x$ را رسم می کنیم :

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1	2

به کمک قوانین انتقال نمودار تابع داده شده را رسم می کنیم . انتقال روی محور y ها و روی محور x ها انجام می شود .

طول ها را قرینه می کنیم . وسپس عرض ها را یک واحد در جهت مثبت محور y ها حرکت می کنیم .





سوال 2

الف) $3^{2x-3} \geq \frac{1}{81^3}$

حل : ابتدا پایه ها ی طرفین نامعادله را باهم یک شکل می کنیم :

$$3^{2x-3} \geq \frac{1}{(3^4)^3} \Rightarrow 3^{2x-3} \geq \frac{1}{3^{12}} \Rightarrow 3^{2x-3} \geq 3^{-12}$$

برای ادامه راه حل از نکته زیر استفاده می کنیم :

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x} \quad {}^{a>1} \quad f(x) \geq g(x)$$

که در واقع جهت حفظ می شود بنابر این داریم :

$2x-3 \geq -12 \Rightarrow 2x \geq 3-12 \Rightarrow 2x \geq -9 \Rightarrow x \geq \frac{-9}{2} \Rightarrow x \in [\frac{-9}{2}, +\infty)$

ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{32-2x}$

حل : ابتدا پایه ها ی طرفین نامعادله را باهم یک شکل می کنیم :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{16-x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{2^2}\right)^{16-x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{32-2x}$$

برای ادامه راه حل از نکته زیر استفاده می کنیم :

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \xRightarrow{0<a<1} f(x) \leq g(x)$$

که در واقع جهت عکس می شود بنابر این داریم :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{32-2x} \Rightarrow x^2+2x > 32-2x \Rightarrow x^2+2x-32+2x > 0$$

$$\Rightarrow x^2+4x-32 > 0$$

نامعادله درجه دوم بدست آمده را به کمک جدول تعیین علامت حل می کنیم :

$$x^2+4x-32 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+8=0 \Rightarrow x=-8 \end{cases}$$

x		-8		4	
$x^2+4x-32$	+	0	-	0	+

بنابراین جواب نامعادله به صورت بازه ای به شکل زیر نوشته می شود :

$$x \in (-\infty, -8) \cup (4, +\infty)$$

سوال 3

$$f(x) = -1 + ab^x$$

حل : تابع ازنقطه $A\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و $B(1,11)$ می گذرد. بنابر این مختصات نقاط در تابع صدق می کند .داریم :

$$A\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = -1 + ab^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} + 1 = ab^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2} = ab^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow a = \frac{3}{2b^{\frac{-1}{2}}}$$

$$B(1,11) \Rightarrow 11 = -1 + ab \Rightarrow 12 = ab \Rightarrow 12 = ab \Rightarrow a = \frac{12}{b}$$

باتوجه به دو رابطه بدست آمده داریم :

$$\frac{3}{2b^{\frac{-1}{2}}} = \frac{12}{b} \Rightarrow \frac{3}{2}b^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{b} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3b^{\frac{1}{2}} \times b = 12 \times 2 \Rightarrow 3b^{\frac{3}{2}} = 24 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8$$

برای از بین رفتن توان b طرفین را به توان $\frac{2}{3}$ می رسانیم :

$$\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (8)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b = \sqrt[3]{(8)^2} \Rightarrow b = \sqrt[3]{64} \Rightarrow b = 4$$

به کمک جاگذاری مقدار b در رابطه بالا مقدار a رابدست می آوریم :

$$a = \frac{12}{b} \Rightarrow a = \frac{12}{4} \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $f(x) = -1 + ab^x$ رابه صورت $f(x) = -1 + 3 \times 4^x$ بدست می آوریم.حالا می توا نیم :

$$f(1) = -1 + 3 \times 4^1 = -1 + 12 = 11$$

سوال 4

حل : دمای خنک شد ن چای $T = T_0 \times a^t$ است . باتوجه به فرض ابتدا مقدار a را بدست می آوریم :

$T = 40$ دمای خنک شدن چای و $T_0 = 80$

$$T = T_0 \times a^t \Longrightarrow 40 = 80 \times a^5 \Longrightarrow \frac{40}{80} = a^5 \Longrightarrow \frac{1}{2} = a^5 \Longrightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = a \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{2}} = a$$

بنابراین داریم :

$$T = 80 \times \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^t$$

حالا دمای چای بعد از 10 دقیقه را بدست می آوریم :

$$T = 80 \times \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^t \Longrightarrow T = 80 \times \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^{10} = 80 \times \frac{1}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^{10}} = 80 \times \frac{1}{2^2} = \frac{80}{4} = 20$$

سوال 5

الف) $f(x) = \log\frac{x-2}{x+2}$

حل : برای اینکه دامنه تابع لگاریتمی را بدست آوریم . باید سه شرط زیر برقرار باشد یعنی :

$$f(x) = \log_B A \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} > 0 \\ B \neq 0 \\ \mathrm{B} > 0 \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} \mathrm{D_f}$$

در این تابع $\mathrm{A} = \frac{x-2}{x+2}$ و $B = 10$. بنابراین دو شرط $B \neq 0$ و $\mathrm{B} > 0$ را بررسی نمی کنیم :

$$\mathrm{A} > 0 \Longrightarrow \frac{x-2}{x+2} > 0$$

نامعادله کسری بدست آمده را به کمک جدول تعیین علامت حل می کنیم :

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2 \end{cases}$$

x		-2		2	
A	+	ت ن	-	0	+

باتوجه به جدول جواب نامعادله $x > 5, x < -2$ است . در نتیجه:

$$\mathrm{D_f} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

ب) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 2x)$

حل : برای اینکه دامنه تابع لگاریتمی را بدست آوریم . باید سه شرط زیر برقرار باشد یعنی :

$$f(x) = \log_B A \Longrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B \neq 0 \\ B > 0 \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} D_f$$

در این تابع $A = x^2 - 2x$ و $B = x - 1$. بنابراین :

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x > 0$$

نامعادله درجه دوم بدست آمده را به کمک جدول تعیین علامت حل می کنیم :

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{cases}$$

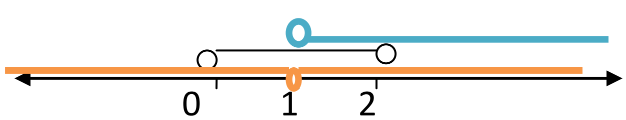
x		0		2	
$x^2 - 2x$	-	0	+	0	-

باتوجه به جدول جواب نامعادله 1 بازه $(0,2)$ است .

$$x - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$$

$$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$$

از 3 جواب شرطهای بدست آمده اشتراک می گیریم ونتیجه دامنه تابع لگاریتمی را مشخص می کند :



باتوجه به محور رسم شده اشتراک شرطهای بدست آمده بازه $(1,2)$ است . در نتیجه:

$$D_f = (1,2)$$

سوال6

حل : باتوجه به فرض $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، بنابر این:

$$\log 2.4 = \log\frac{24}{10} = \log 24 - \log 10 = \log 3 \times 8 - \log 10 = \log 3 + \log 8 - 1$$

$$= \log 3 + \log 2^3 - 1 = \log 3 + 3\log 2 - 1 = b + 3a - 1$$

سوال7

حل : باتوجه به فرض $A = 3^a$

$$\log_3 9A^2 = \log_3 9 + \log_3 A^2 = \log_3 3^2 + \log_3 A^2 = 2\log_3 3 + 2\log_3 A$$

$$= 2\log_3 3 + 2\log_3 3^a = 2 + 2a\log_3 3 = 2 + 2a$$

سوال 8

حل :

$$f(x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x)$$

برای حل $f(-x)$ راتشکیل می دهیم :

$$f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x) + \log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

باتوجه به قوانین لگاریتم جمع لگاریتم به ضرب تبدیل می شود .بنابراین :

$$f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x) + \log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$= \log(\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x) = \log((\sqrt{1+x^2})^2 - x^2)$$

$$= \log(1 + x^2 - x^2) = \log 1 = 0$$

می دانیم لگاریتم 1 در هر مبنایی صفر می شود پس حاصل عبارت داده شده برابر صفر است .

سوال 9

الف) $\log(x+3)+\log(x-3)-\log x = 3\log 2$

حل الف: **باتوجه به قوانین لگاریتم جمع لگاریتم به ضرب تبدیل می شود و تفریق لگاریتم به تقسیم تبدیل می شود ..بنابراین :**

$$\log(x+3)(x-3)-\log x = 3\log 2 \Rightarrow \log\frac{(x+3)(x-3)}{x} = 3\log 2$$

ضریب لگاریتم در حل معادلات به توان تبدیل می شود :

$$\Rightarrow \log\frac{(x+3)(x-3)}{x} = \log 2^3 \Rightarrow \log\frac{(x+3)(x-3)}{x} = \log 8$$

حالا می توانیم بنا به قوا نین لگاریتم ، لگاریتم را از طرفین تساوی حذف می کنیم :

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x} = 8 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 8x \Rightarrow x^2-9 = 8x \Rightarrow x^2-8x-9 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-9)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x-9=0 \Longrightarrow x=9 \\ x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \end{matrix}$$

$x=-1$ غیر قابل قبول است زیرا عدد جلوی لگاریتم منفی نیست .پس $x=9$ جواب مسئله است .

ب) $\log(x^2-7) = 2\log(x+3$

ضریب لگاریتم در حل معادلات به توان تبدیل می شود :

$$\log(x^2-7) = \log(x+3)^2$$

حالا می توانیم بنا به قوا نین لگاریتم ، لگاریتم را از طرفین تساوی حذف می کنیم :

$$x^2-7 = (x+3)^2 \Rightarrow x^2-7 = x^2+6x+9 \Rightarrow -7 = 6x+9 \Rightarrow -7-9 = 6x$$

$$\Rightarrow -16 = 6x \Rightarrow x = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$$

$x=\frac{-8}{3}$ قابل قبول است، زیرا عدد جلوی لگاریتم منفی نمی شود.

سوال 10

حل: انرژی آزادشده یک زلزله $10^{16.8}$ارگ است . بنا به فرمولی که برای شدت زلزله و انرژی آزادشده است داریم :

$$\log E = 11.8 + 1.5M \Rightarrow \log 10^{16.8} = 11.8 + 1.5M \Rightarrow 16.8 \log 10 = 11.8 + 1.5M$$

$$\overset{\log\ 10=1}{\Longrightarrow} 16.8 = 11.8 + 1.5M \Rightarrow 16.8 - 11.8 = 1.5M \Rightarrow 5 = 1.5M$$

$$\Rightarrow M = \frac{5}{1.5}$$

$$\Rightarrow M = 3.33$$

شدت زلزله 3.33 است .