سوال های فصل 4حسابان گروه ریاضی کرمان

1) حد تابع $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$ را در صفر حساب کنید.

حل: می دانیم $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$ با ضرب طر فین نا معادله در $x>0$ خواهیم داشت

$x(\frac{1}{x}-1)<\left[\frac{1}{x}\right]\le x\frac{1}{x}\Rightarrow 1-\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$ بنا به قضیه افشردگی چون $\lim_{x\to 0^+}(1-x)=\lim_{x\to 0^+}1=1$ در نتیجه $\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=0$. به همین صورت می‌توان نشان داد که $\lim_{x\to 0^-}(1-x)=\lim_{x\to 0^-}1=1$. بنابراین $\lim_{x\to 0}(1-x)=\lim_{x\to 0}1=1$.

2) تابع $f(x)=(x-a)[2x-3]$ درنقطه‌ی $x_0=\frac{3}{2}$ پیوسته است، مقدار a را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}(x-a)[2x-3]=0,\ \lim_{x\to\frac{3}{2}^-}(x-a)[2x-3]=-\frac{3}{2}+a\ ,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow-\frac{3}{2}+a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

3- اگر f تابعی حقیقی با دامنه $\mathbb{R}$ و $|f|\le 2$ که در هیچ نقطه ای حد ندارد تابع $(x^2-1)f(x)$ دقیقا در چند نقطه دارای حد است.

حل:
$$|f|\le 2\Rightarrow -2\le f(x)\le 2\Rightarrow\begin{cases}-2(x^2-1)\le(x^2-1)f(x)\le 2(x^2-1) & x^2-1>0\\ -2(x^2-1)\ge(x^2-1)f(x)\ge 2(x^2-1) & x^2-1<0\end{cases}$$

در نتیجه اگر حدهای دو تابع $2(x^2-1)$ و $-2(x^2-1)$ مساوی باشند حد تابع $(x^2-1)f(x)$ وجود دارد ودر دو نقطه $x=\pm 1$ حدهای دو تابع $2(x^2-1)$ و $-2(x^2-1)$ وجود دارند وبرابر صفر هستند.

4- a و b را طوری بدست آورید که $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+ax+b}=\frac{5}{6}$

حل: فرار می‌دهیم $f(x)=x^2-x-6$ و $g(x)=x^2+ax+b$ چون $f(-2)=0$ بنابراین باید $g(-2)=0$

درنتیجه $g(-2)=4-2a+b=0$ یعنی $b=2a-4$ ازطرفی

$$x^2+ax+b=x^2+ax+2a-4=(x-2)(x+2)+a(x+2)=(x+2)(x-2+a)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2+a)}=\frac{-5}{a-4}\Rightarrow\frac{-5}{a-4}=\frac{5}{6}\Rightarrow a=-2\ ,b=-8$$

5- را طوری بدست آورید که $\lim_{x\to -2}\frac{x^n+4x^2+2x+1}{x^4-1}=1$

حل:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^n-1)-2(2x^2-x-1)}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-1)-2(x-1)(2x+1)}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-1)-2(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{n-6}{4}\Rightarrow\frac{n-6}{4}=1\Rightarrow n=10$$

WWW.RIAZISARA.IR دانلود از سایت ریاضی سرا

6- حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{1-\sqrt{1-x^2}}$ را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,(1-\cos^2 x)}{1-\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,\sin^2 x\,(1+\sqrt{1-x^2})}{1-1+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,\sin^2 x\,(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=2$$

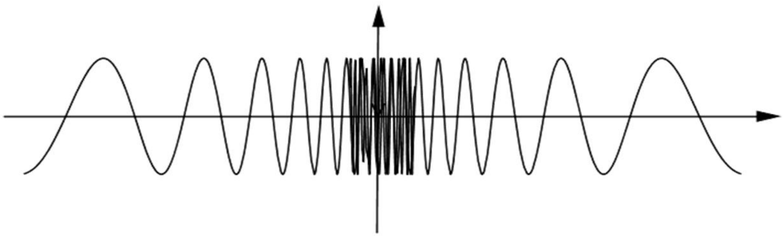
7- هرگاه در بازه‌ای باز شامل Ð ، $\sqrt{5-2x^2}<\dfrac{1}{2f(x)-1}<\sqrt{5+x^2}$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ را بدست آورید.

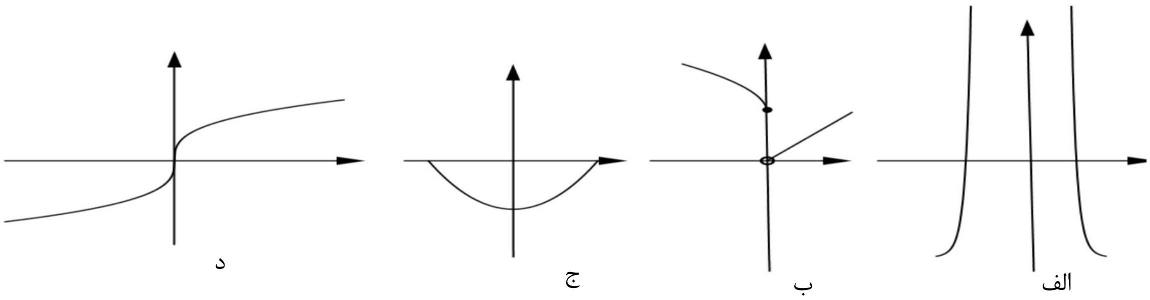
حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{5-2x^2}=\sqrt{5}\\ \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{5+x^2}=\sqrt{5}\end{array}\right\}\overset{\text{افشردگی}}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2f(x)-1}=\sqrt{5}\Rightarrow\lim_{x\to 0}(2f(x)-1)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}f(x)-1=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

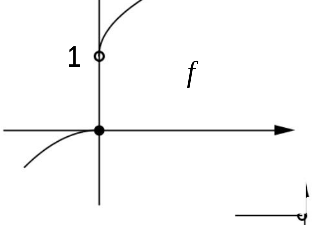
8- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، کدام نمودار زیر این ویژگی را دارد که $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=0$.

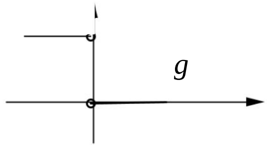




حل: با توجه به قضیه افشردگی تنها نمودار تابعی که در نمودار تابع داده شده ضرب شود وشرایط این قضیه برقرار باشد نمودار قسمت "د" است.

9- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر با نمودار تابع $f(x)$ جمع شود، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.



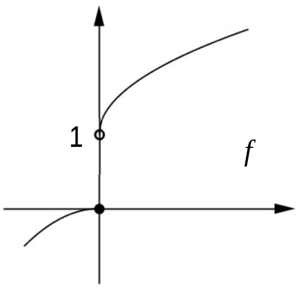


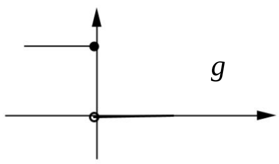
حل: برای اینکه تابع $f(x)+g(x)$ در صفر دارای حد 1 باشد کافیست قسمت سمت چپ رسم شده تابع $f(x)$ را 1 واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بعبارتی تابع $g(x)$ را به صورت روبرو تعریف کنیم

$$g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

WWW.RIAZISARA.IR
دانلود از سایت ریاضی سرا

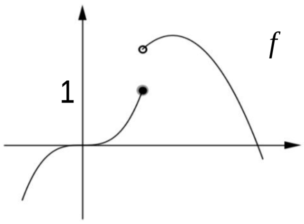
10- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر با نمودار تابع $f(x)$ جمع شود، آنگاه $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0^+}f(x)$. و $f(x)+g(x)$ در صفر پیوسته باشد.

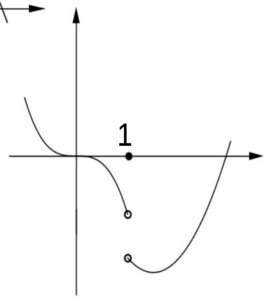




حل:ابتدا برای اینکه تابع $f(x)+g(x)$ در صفر دارای حد 1 باشد کافیست قسمت سمت چپ رسم شده تابع $f(x)$ را 1 واحد به سمت بالا انتقال دهیم. حال تابع $g(x)$ را در صفر به صورت $g(0)=1$ تعریف می‌شود. بعبارتی تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم $g(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ 0 & x>0\end{cases}$.

11- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر با نمودار تابع $f(x)$ جمع شود، آنگاه $f(x)+g(x)$ در نقطه 1 دارای حد باشد.



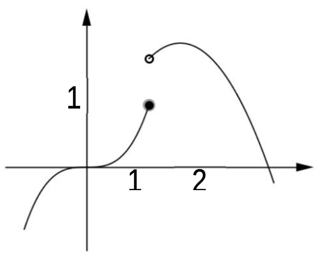


حل: قرار می‌دهیم $g(x)=\begin{cases}-f(x) & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ در نتیجه

$$f(x)g(x)=\begin{cases}f(x)-f(x) & x\neq 1\\ 1+0 & x=1\end{cases}=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

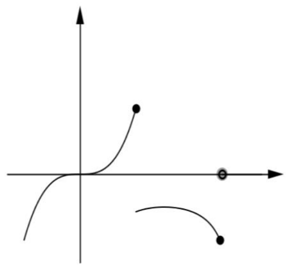
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))=0$$

12- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر در نمودار تابع $f(x)$ ضرب شود، آنگاه $f(x).g(x)$ در نقطه 1 دارای حد باشد و $\lim_{x\to 1}(f(x).g(x))=\lim_{x\to 0^-}f(x)$.



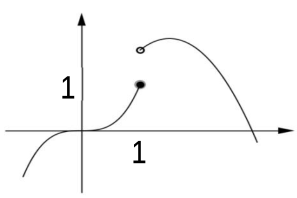
حل: قرار می‌دهیم $g(x)=\begin{cases}1 & x\le 1\\ \dfrac{1}{f(x)} & 1<x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$ در نتیجه

$$f(x).g(x)=\begin{cases}f(x).1 & x\le 1\\ f(x).\dfrac{1}{f(x)} & 1<x\le 2\\ f(x).0 & x>2\end{cases}=\begin{cases}f(x) & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}(f(x).g(x))=\lim_{x\to 1^+}1=1\\ \lim_{x\to 1^-}(f(x).g(x))=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 1}(f(x).g(x))=1$$

13- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر در نمودار تابع $f(x)$ ضرب شود، آنگاه $f(x).g(x)$ در نقطه 1 دارای حد باشد.

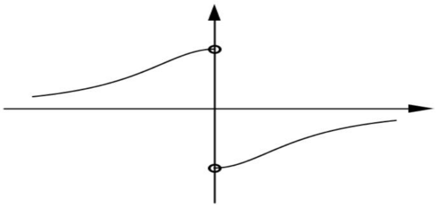


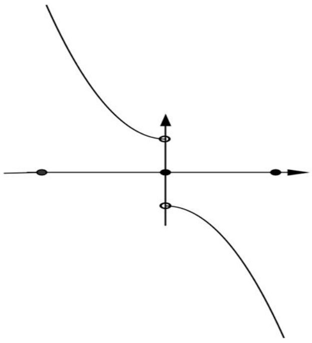
حل: قرار می‌دهیم $g(x)=0$ در نتیجه

$$f(x).g(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to 1}(f(x).g(x))=0$$

سوال های فصل 4 حسابان گروه ریاضی کرمان

14- نمودار تابعی مانند $g(x)$ رسم کنید که اگر در نمودار تابع $f(x)$ با دامنه $[-2,2]-\{0\}$، ضرب شود، آنگاه $f(x).g(x)$ در نقطه 2 دارای حدی برابر 3 باشد.





حل: کافیست قرار دهیم $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{f(x)} & x\in D_f\\ 0 & x\notin D\end{cases}$ در نتیجه

$$f(x).g(x)=f(x).\frac{3}{f(x)}=3 \quad (0<|x|\le 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(f(x).g(x))=\lim_{x\to 0}3=3$$

15- فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ فقط در n نقطه با هم مساوی نباشند. در اینصورت ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در نقطه دارای حد باشد آنگاه تابع $g(x)$ در نقطه a دارای حد است.

حل:

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در n نقطه $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ با هم مساوی نباشند و a غیر از این نقاط باشد.

در این صورت برای هر i که $1\le i\le n$ قرار می‌دهیم $d_i=|a-a_i|$ (فاصله a تا a_i) و $m=\min\{d_i \mid 1\le i\le n\}$.

حال اگر $\delta<m$ آنگاه همسایگی $(a-\delta,a+\delta)$ یک همسایگی است که $f(x)$ و $g(x)$ در هر نقطه آن با هم برابرند،پس با توجه به تعریف حد $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$. اگر a یکی از نقاط $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ باشد، همین اثبات را برای تمام نقاط غیر از آن را می‌توان تکرار کرد، زیرا در حد تابع، همسایگی‌های محذوف اهمیت دارند.

16- پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x-[x]}$ را بررسی کنید.

حل: ابتدا دامنه این تابع را بدست می‌آوریم. $[x]-x=0\Rightarrow [x]=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ درنتیجه $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

بنابراین اگر x یک عدد غیر صحیح باشد، صورت و مخرج این تابع دو چند جمله ای غیر صفر می‌باشند که پیوسته اند، در نتیجه این تابع در دامنه‌اش پیوسته می‌باشد.

17- ثابت کنید به ازای هر مقدار a تابع زیر در $x=0$ پیوسته نیست.

$$f(x)=\begin{cases}3x+\dfrac{|2x|}{x} & x\neq 0\\ a-3 & x=0\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(3x+\frac{-2x}{x}\right)=0-2=-2$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x+\frac{2x}{x}\right)=0+2=2$$

تابع در 0 حد ندارد در نتیجه به ازای هر مقدار a پیوسته نیست.

WWW.RIAZISARA.IR دانلود از سایت ریاضی سرا

18- مقدار a چه باشد تا تابع $f(x) = \frac{1+[x]}{2+[x]} + a[-x + 1]$ در $x = 4$ دارای حد باشد؟

حل :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 4^+} f(x) = \frac{1+4}{2+4} - 4a = \frac{5}{6} - 4a \\ \lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{1+3}{2+3} - 3a = \frac{4}{5} - 3a\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{5}{6} - 4a = \frac{4}{5} - 3a \to a = \frac{1}{30}$$

19- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+b}{x-1} & x < 1 \\ \left[\frac{-x}{2}\right] & 1 \le x < 2 \\ 2ax + c & x \ge 2 \end{cases}$ در بازه ی $[-1 ، 2]$ پیوسته است $a + b + c$ کدام است.

حل:

برای پیوستگی تابع دربازه ی $[2، 1-)$ با توجه با ضابطه ی تابع باید در نقطه $x = 1$ پیوسته و در نقطه $x = 2$ پیوستگی چپ داشته باشد.چون مخرج صفر می شود باید صورت صفر باشد تا حد داشته باشد.

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^2 + b}{x - 1} = \frac{a + b}{1 - 1}$$

$$a + b = 0 \ \to \ b = -a \ \to \ \lim_{x \to -1} \frac{ax^2 - a}{x - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{a(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2a$$

$$\lim_{x \to 1} \left[-\frac{x}{2}\right] = \left[(-\frac{1}{2})\right] = -1 = f(1) \to 2a = -1 \ \to a = -\frac{1}{2}$$

برای پیوستگی چپ در $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \to \lim_{x\to 2} \left[-\frac{1}{2}\right] = 4a + c \ \frac{-1 < \frac{x}{2} < 1}{1 < x < 2} \to 4a + c = -1$$

$$a = -\frac{1}{2} \to -2 + c = -1 \ \to c = 1 \to a + b + c = 1$$

20- تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+3, & x > -2 \\ -2x^2+1, & x < -2 \end{cases}$ مفروض است.عددa چنان تعیین کنید که وقتی $x \to -2$ تابع حد داشته باشد.

حل:برای آنکه تابع در 2- حد داشته باشید باید $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}((a+1)x+3) = -2(a+1)+3 \\ \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(-2x^2+1) = -2(-2)^2+1 = -7 \end{cases} \Rightarrow -2a - 2 + 3 = -7$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow -2a = -7 + 2 - 3 \Rightarrow -2a = -8 \Rightarrow a = \frac{-8}{-2} \Rightarrow a = 4$$

WWW.RIAZISARA.IR