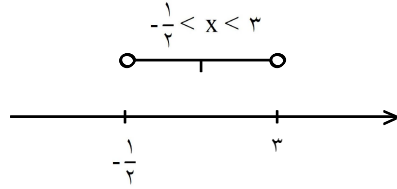


۱- اگر بازه‌ی  $(X - 1, 2X + 3)$  یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر  $X$  را به دست آورید.

$$X - 1 < 2 \Rightarrow X < 3$$

$$2X + 3 > 2 \Rightarrow 2X > -1 \Rightarrow X > -\frac{1}{2}$$



۲- با تکمیل هریک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه‌ی موردنظر بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} -3x + 4 = \dots$

$x$	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$					$\rightarrow$	؟	$\leftarrow$					

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$  ,  $f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

$x$	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
$f(x)$						$\rightarrow$	؟	$\leftarrow$				

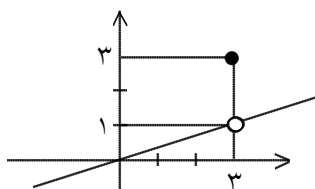
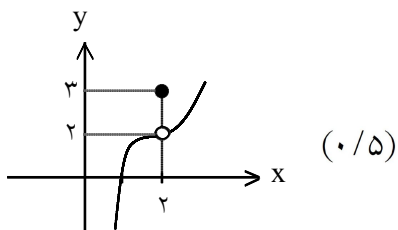
الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} -3x + 4 = 4$

$x$	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow$	؟	$\leftarrow$	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$  ,  $f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

$x$	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
$f(x)$	-۶	-۵/۵	-۵/۱	-۵/۰۱	-۵/۰۰۱	$\rightarrow$	؟	$\leftarrow$	-۴/۹۹۹	-۴/۹۹	-۴/۹	-۴/۸

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

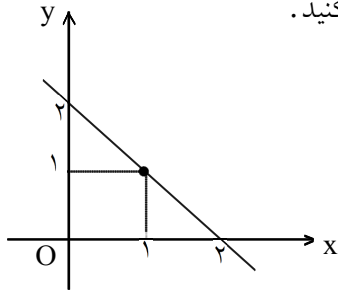


را حساب کنید.

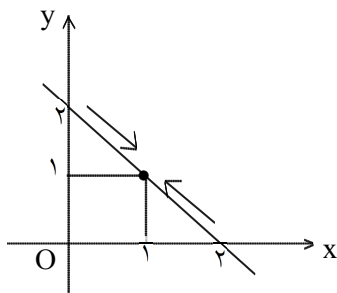
با توجه به نمودار حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$

۵- با استفاده از نمودار، حدتابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2) = 1$$

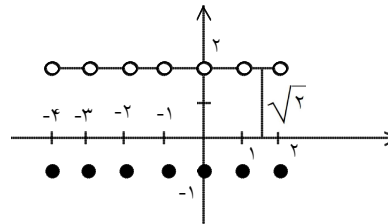
۶- تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

الف) نمودار  $g$  را در فاصله  $[-4, 2]$  رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار  $g$ ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$



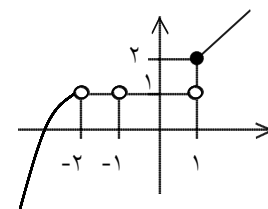
(الف)

۷- نمودار تابع  $f$  به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.

A)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

B)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

C)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



$$D) \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$x \rightarrow -2$$

$$A) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 1^-$$

$$D) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow -2$$

$$x \rightarrow -2^-$$

$$x \rightarrow -2^+$$

۸- حد چپ و حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید و معلوم کنید آیا این تابع دارای حد است.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 4, & x \geq 1 \\ 2x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$$

در نقطه‌ی  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow 1^-$$

۹- تابع  $f(x) = \begin{cases} (a+1)x + 3, & x > -2 \\ -2x^2 + 1, & x < -2 \end{cases}$  مفروض است. عدد  $a$  را چنان بیابید که وقتی  $x \rightarrow -2$  تابع حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow (a+1)(-2) + 3 = -2(-2)^2 + 1$$

$$x \rightarrow -2^+$$

$$x \rightarrow -2^-$$

$$\Rightarrow -2a - 2 + 3 = -8 + 1 \Rightarrow -2a = -8 \Rightarrow a = 4$$

۱۰- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)}{|x-1|} & x < 1 \\ [x-1] + 1 & x \geq 1 \end{cases}$  مفروض است.  $a$  را چنان بیابید که تابع در  $x = 1$  حد داشته باشد. ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ([x] - 1 + 1) = 1$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$x \rightarrow 1^-$$

شرط حد داشتن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2a(x-1)}{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{2a}{-4} = -\frac{a}{2} \text{ و } 1 = -\frac{a}{2} \rightarrow a = -2$$

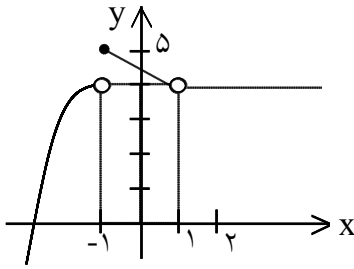
$$x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$x \rightarrow 1^-$$

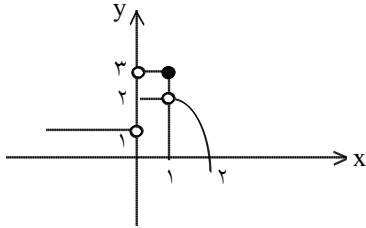
$$x \rightarrow (-1)^-$$

۱۱- با توجه به نمودار داده‌شده به سؤال روبرو پاسخ دهید.



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 4$$

$$x \rightarrow (-1)^-$$



۱۲- با توجه به نمودار تابع  $f$  حدهای زیر را به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$x \rightarrow 1$

حد ندارد (ج)

۲ (ب)

۳ (الف)

۱۳- شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است. حاصل هریک از عبارت‌ها را بنویسید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

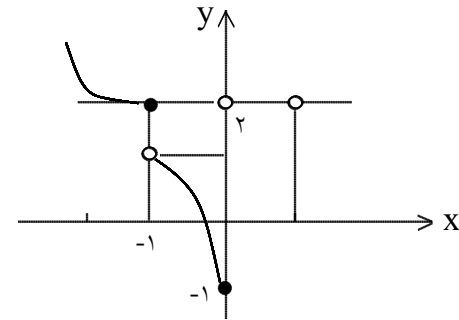
پ)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$x \rightarrow -1^-$

$x \rightarrow -1$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$x \rightarrow -1^+$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

(الف)

$$x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

(ب)

$$x \rightarrow -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{حد ندارد}$$

(پ) حد چپ یا حد راست برابر نیست. لذا حد وجود ندارد.

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

(ت)

$$x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

(ث)

$$x \rightarrow -1^+$$

۱۴-  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 - 3 & x < 0 \\ x + 2a & x \geq 0 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 0$  حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x-a)^2 - 3) = a^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2a) = 2a$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x-a)^2 - 3) = a^2 - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2a) = 2a \end{array} \right\} a^2 - 3 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

۱۵-  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} a[x] + 1, & x < 2 \\ -bx - 2, & x \geq 2 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 2$  دارای حدی برابر صفر باشد. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

نکته:  $x \rightarrow 2^- \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -b(2) - 2 \Rightarrow -2b - 2 \Rightarrow -2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

۱۶- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4a} & x \geq 2 \\ x + b & -2 \leq x < 2 \\ x^2 + bx + 3a & x < -2 \end{cases}$  باشد،  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = -2$  دارای حد بوده و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$  باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \rightarrow 4 - 2b + 3a = -2 + b \rightarrow 3b - 3a = 6 \rightarrow b - a = 2$$

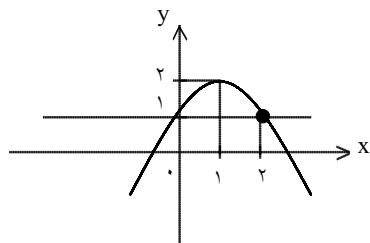
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 \rightarrow \sqrt{2 \times 4 - 4a} = 2 \rightarrow 8 - 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

$$x \rightarrow 2^+$$

$$b - a = 2 \rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$$

۱۷- با رسم نمودار تابع  $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$       ب)  $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]$



در همسایگی ۱، نه در خود یک  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$  (الف)

$$1 < f(x) < 2 \Rightarrow [f(x)] = 1$$

ب)  $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [2^-] = 1$        $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  نزدیک به عدد ۲ است.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(-2x^2 + 1)^3}{x^2 + 1}$$

$$x \rightarrow \sqrt{2}$$

۱۸- حد مقابل را حل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

۱۹- حد مقابل را حل کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3} + \cos \pi + \sin \frac{\pi}{4}}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{2 + [\sin x]}$$

۲۰- حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

$$x \rightarrow \pi^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{2 + (-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x \rightarrow \pi^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \sin x}{1 + \cos x}$$

۲۱- حد تابع زیر را حساب کنید.

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{0 \times 0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - a^2}$$

۲۲- حد مقابل را حساب کنید.

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2x - \pi}$$

۲۳- حد مقابل را حساب کنید.

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{4x - \pi} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} = t \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} t}{4t(1 - \operatorname{tg} t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t(1 - t)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$$

۲۴- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x + 6}}{x + 2}$$

۲۵- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x + 6}}{x + 2} \times \frac{x - \sqrt{x + 6}}{x - \sqrt{x + 6}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{(x + 2)(x - \sqrt{x + 6})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - \sqrt{x + 6})} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

۲۶- حد مقابل را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$$

۲۷- حد تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} = \frac{\sqrt{2 + 2} - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$$

۲۸- حد مقابل را حساب کنید:

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۲۹- حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1} \quad (\text{الف})$$

$$\text{الف)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4+x+x^2 - 4}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2} + 2)} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{ب)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+x+x^2 - 7 - 2x + x^2}{(x^2 - 2x)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{7+2x-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{(x^2 - 2x)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{7+2x-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{x(x-2)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{7+2x-x^2})} = \frac{5}{2(2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

۳۰- حد زیر را حساب کنید:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$$

= حد مورد نظر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{4}$$

۳۱- حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x + a) - 3\sin(2x + a) + 3\sin(x + a) - \sin a}{x^3}$$

$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(3x + a) - \sin a + 3(\sin(x + a)) - \sin(2x + a)}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{3x}{2} + a\right)\sin\frac{3x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\left(\frac{3x}{2} + a\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{3x}{2} + a\right)\left(\sin\frac{3x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{3x}{2} + a\right)\left(-2\sin\frac{x}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -4\cos\left(\frac{3x}{2} + a\right) \cdot \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^3 = -4 \times \cos a \times \frac{1}{8} = -\cos a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

یادآوری:

۳۲- a را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1 - a) - 1} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x - ax - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x + 2ax^2 - 2a}{ax^2 - ax + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1) + 2a(x-1)(x+1)}{ax(x-1) + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+2a)}{\cancel{(x-1)}(ax+1)} = \frac{2 \times (1+2a)}{(a+1)} = \frac{2a+2}{a+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2a + 2 = a + 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{1}$$

۳۳- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{+1}{\frac{6}{0.25}} = 0.25$$

۳۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (3 - [x])[x]$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 - 3x}$

د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{x} - 2}{x-1}$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 - 3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x-3)} = \frac{1}{-3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(x-3)} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 - 3x} = \text{حد ندارد}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (3 - [x])[x] = (3 - 4) \times 4 = -4$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{x} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3 - \sqrt{x} + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$= 3 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 3 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \sin 3x}{x \times x} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

۳۵- حدود زیر را به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x}$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x \sin x}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 4 \times 1 = 4$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

۳۶- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & , x > \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} + \cos^2 x & , x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} , \quad \left(x = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \sin \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ تابع پیوسته است}$$

$$\text{۳۷- عددهای } a \text{ و } b \text{ را چنان بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} ax + 1 & , x > -2 \\ 13 & , x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & , x < -2 \end{cases} \text{ در نقطه‌ی } x = -2 \text{ پیوسته باشد.}$$

$$f(-2) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2a + 1 , \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2a - 2b - 1 \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = 13 \Rightarrow a = -6 \\ 2a - 2b - 1 = 13 \Rightarrow b = -31 \end{cases}$$

۳۸- مقادیر  $a$  و  $b$  را به قسمی تعیین کنید که تابع زیر در بازه‌ی  $(0, -2]$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{و } -2 \leq x < -1 \\ [x] - 1 & \text{و } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ bx + 1 & \text{و } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{و } -2 \leq x < -1 \\ -1 - 1 = -2 & \text{و } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ bx + 1 & \text{و } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$x_0 = -1 \begin{cases} f(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 \Rightarrow a - 1 = -2 \rightarrow a = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = a - 1 \end{cases}$$

$$x_0 = -\frac{1}{2} \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{b}{2} + 1 \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\frac{b}{2} + 1 \Rightarrow -\frac{b}{2} + 1 = -2 \rightarrow b = 6 \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -2 \end{cases}$$

۳۹- مقادیر  $a, b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} [x] + a & x < 0 \\ 1 + b & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} & x > 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی  $x_0 = 0$  پیوسته باشد.

باشد. (نماد  $[]$  جزء صحیح است)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + a) = [0^-] + a = -1 + a$$

$$f(0) = 1 + b$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \begin{cases} -1 + a = \sqrt{2} \rightarrow a = \sqrt{2} + 1 \\ 1 + b = \sqrt{2} \rightarrow b = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

۴۰- تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} + 2 & \text{و } x \neq -1 \\ 1 & \text{و } x = -1 \end{cases}$  مفروض است. پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی  $x_0 = -1$  بررسی کنید.

مقدار تابع  $f(-1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{|x+1|}{x+1} + 2 \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left( \frac{x+1}{x+1} + 2 \right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left( \frac{-(x+1)}{x+1} + 2 \right) = 1 \end{cases}$$

تابع در  $x_0 = -1$  پیوستگی چپ دارد ولی پیوسته نیست.