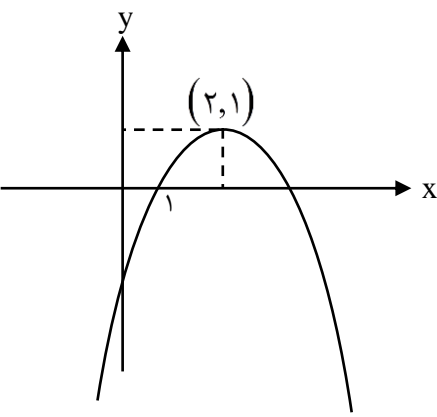


نام و نام خانوادگی: .....  
 مقطع و رشته: یازدهم ریاضی  
 نام پدر: .....  
 شماره داوطلب: .....  
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
 دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

نام درس: حسابان  
 نام دبیر: بیتا سعیدی  
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۱۰/۹  
 ساعت امتحان: ۰۹:۰۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر		نمره به عدد:	نمره به حروف:
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
ردیف	سؤالات	بارم	
۱	در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ است. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.	۱	
۲	مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$	۱	
۳	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، مکعب ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند.	۱	
۴	معادله سهمی زیر را بنویسید. 	۱	
۵	معادلات زیر را حل کنید. $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$	۱/۲۵	
جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.			
۶	معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $1 \pm \sqrt{2}$ است به صورت ..... می‌باشد.	۱	
۷	معادله $ x - 2  +  2x + 1  = 11$ را حل کنید.	۱	
صفحه ی ۱ از ۲			

۱/۲۵	جواب‌های معادله $2\sqrt{2-x} + \sqrt{5+4x} = 5$ را به دست آورید.	۸
۱	معادله مقابل را حل کنید. $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$	۹
جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.		
۱	نقاط $A(1,2)$ و $B(-3,3)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. محیط دایره برابر است با .....	۱۰
۳	مثلث $ABC$ با رئوس $A(1,2)$ ، $B(-5,3)$ و $C(-1,-4)$ مفروض است. مطلوب است: الف) محاسبه طول اضلاع مثلث ب) طول میانه $AM$ پ) طول ارتفاع $AH$ و معادله آن ت) مساحت مثلث $ABC$	۱۱
۱	تابع $y =  x  +  -x $ را در بازه $x \in [-1,1]$ رسم کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است.)	۱۲
۱	آیا توابع $f$ و $g$ با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{(x+2)^2(x-3)}$ و $g(x) =  x+2 \sqrt{x-3}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟	۱۳
۱	ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ را به دست آورید.	۱۴
۱	آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۱۵
۱	اگر $f(x) = \sqrt{8-2x}$ و $g(x) = \frac{x+6}{x-3}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.	۱۶
۱/۵	اگر $f = \{(0,1), (1,2), (3,4)\}$ و $g = \{(-2,1), (0,0), (1,5), (3,3)\}$ دو تابع باشند: الف) $(f+g)(1)$ را به دست آورید. ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید. پ) دامنه تابع $f \circ g$ را تعیین کنید.	۱۷
صفحه ی ۲ از ۲		

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots, (a_1 + 18d), (a_1 + 19d)$ <p>مجموع جملات شماره فرد <math>a_1 + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + 18d) = 135</math></p> <p>مجموع جملات شماره زوج <math>(a_1 + d) + (a_1 + 3d) + \dots + (a_1 + 19d) = 150</math></p> $\Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot a_1 + 9 \cdot d = 135 \\ 1 \cdot a_1 + 10 \cdot d = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \cdot a_1 - 9 \cdot d = -135 \\ 1 \cdot a_1 + 10 \cdot d = 150 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot d = 15$ $\Rightarrow d = \frac{3}{2}, a_1 = 0$	
۲	$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{\frac{1}{8}(1-1024)}{-1} = \frac{1023}{8}$	
۳	<p>ریشه‌های معادله اولیه را <math>\alpha</math> و <math>\beta</math> می‌گیریم و داریم:</p> $\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$ <p>می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش <math>\alpha^3</math> و <math>\beta^3</math> باشند. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های جدید را حساب می‌کنیم:</p> $S_{\text{جدید}} = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - (3)(6) = 216 - 18 = 198$ $P_{\text{جدید}} \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 3^3 = 27$ <p>با جایگذاری <math>S</math> و <math>P</math> در معادله <math>x^2 - Sx + P = 0</math>، معادله جدید به صورت <math>x^2 - 198x + 27 = 0</math> در می‌آید.</p>	

<p>اگر رأس سهمی <math>(h, k)</math> باشد، معادله آن به صورت <math>y = a(x - h)^2 + k</math> است. پس:</p> $y = a(x - 2)^2 + 1$ <p>نقطه <math>(1, 0)</math> در معادله صدق می کند.</p> $0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$ <p>معادله سهمی:</p> $y = -(x - 2)^2 + 1$	۴
$\frac{x^2}{3} - 2 = t \quad (./25) \Rightarrow t^2 - 11t + 10 = 0$ $\Rightarrow (t - 10)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \quad (./25) \Rightarrow x = \pm 6 \quad (./25) \\ t = 1 \quad (./25) \Rightarrow x = \pm 3 \quad (./25) \end{cases}$	۵
$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (./25)$	۶
<p>ریشه های عبارات داخل قدرمطلق برابر با <math>x = 2</math> و <math>x = -\frac{1}{2}</math> است. با بازه بندی، معادله را حل می کنیم.</p> $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -x + 2 - 2x - 1 = 11 \Rightarrow -3x = 10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3} \quad \checkmark$ $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow -x + 2 + 2x + 1 = 11 \Rightarrow x = 8 \quad \times$	۷
$2\sqrt{2-x} + \sqrt{5+4x} = 5 \Rightarrow \sqrt{5+4x} = 5 - 2\sqrt{2-x}$ <p>طرفین تساوی را به توان ۲ می رسانیم:</p> $5 + 4x = 25 + 4(2-x) - 20\sqrt{2-x}$ $\Rightarrow 20\sqrt{2-x} = 25 + 8 - 4x - 5 - 4x$ $\Rightarrow 20\sqrt{2-x} = 28 - 8x \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} 5\sqrt{2-x} = 7 - 2x$ <p>دوباره طرفین را به توان ۲ می رسانیم:</p> $25(2-x) = 49 - 28x + 4x^2$ $\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 & \checkmark \\ x_2 = -\frac{1}{4} & \checkmark \end{cases}$	۸
$\frac{5(x-2)-4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 5x - 14 = x^2 - 4x$	۹

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

طول AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17} \Rightarrow P = \pi \times AB$$

$$\Rightarrow P = \pi\sqrt{17} \text{ محیط دایره}$$

۱۰

(الف)

۱۱

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{37}$$

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-1+5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{65}$$

(ب) میانه AM بر وسط ضلع BC وارد می‌شود، پس ابتدا نقطه M وسط BC را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{-5-1}{2} = -3 \\ y_M = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow AM = \sqrt{(1+3)^2 + \left(2+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

(پ) ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. برای محاسبه طول AH باید فاصله نقطه A تا خط BC را بیابیم، ابتدا

معادله BC را می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-3}{-1+5} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{معادله ضلع BC: } y - 3 = \frac{-7}{4}(x + 5) \xrightarrow{\times 4} 4y - 12 = -7x - 35 \Rightarrow 7x + 4y + 23 = 0$$

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7(1) + 4(2) + 23|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{38}{\sqrt{65}} = \frac{38\sqrt{65}}{65}$$

$$M_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{4}{7} \Rightarrow AH \text{ معادله ارتفاع: } y - 2 = \frac{4}{7}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{7}x + \frac{10}{7} \xrightarrow{\times 7} 4x - 7y + 10 = 0$$

(ت)

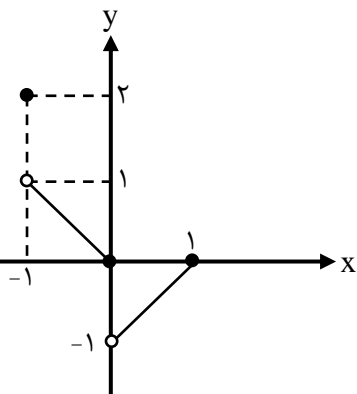
$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{\frac{38}{65} \sqrt{65} \times \sqrt{65}}{2} = 19$$

$$y = |x| + |-x| \quad -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1$$

$$-1 \leq -x < 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1, y = x - 1$$

$$0 \leq -x < 1 \Rightarrow -1 < x \leq 0, y = -x$$

$$-x = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = |-1| + [1] = 1 + 1 = 2$$



x	0	1
y	-1	0
x	-1	0
y	1	0

۱۲

$$(x+2)^2(x-3) \geq 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [3, +\infty) \cup \{-2\} \quad (0/5)$$

$$(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad D_g = [3, +\infty) \quad (0/25)$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f(x) = g(x) \quad (0/25)$$

۱۳

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow 2x = y^2 - 3 \quad (0/25) \Rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \quad (0/25) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

۱۴

$$f(0) = 0 \quad (0/25), \quad f(2) = 0 \quad (0/25)$$

۱۵

یک به یک نیست (0/5)

$$f(x) = \sqrt{8-2x} \Rightarrow D_f : 8-2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4$$

$$g(x) = \frac{x+6}{x-3} \Rightarrow D_g : \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow D_g : x \neq 3$$

حال دامنه  $D_{f \circ g}$  را طبق فرمول حساب می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \left\{ \underbrace{x \in D_g}_{1} \mid \underbrace{g(x) \in D_f}_{2} \right\}$$

۱)  $x \neq 3$

۲)  $g(x) \leq 4 \Rightarrow \frac{x+6}{x-3} \leq 4$

$$\Rightarrow \frac{x+6-4x+12}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{-3x+18}{x-3} \leq 0 \Rightarrow x \geq 6 \text{ یا } x < 3$$

$$D_{f \circ g} = 1 \cap 2 = (-\infty, 3) \cup [6, +\infty) \text{ یا } \mathbb{R} - [3, 6)$$

(الف)

۱۷

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 5 = 7 \quad (0/5)$$

(ب)

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left( 1, \frac{2}{5} \right), \left( 3, \frac{4}{3} \right) \right\} \quad (0/5)$$

(پ)

$$D_{f \circ g} = \{-2, 0, 3\} \quad (0/5)$$

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح :

جمع بارم : ۲۰ نمره