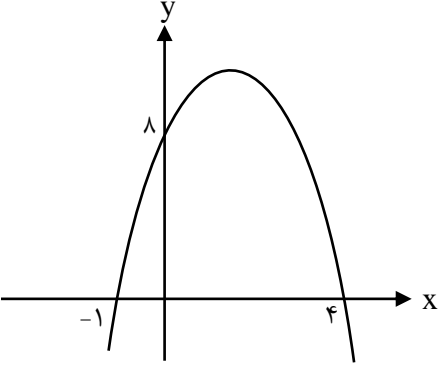


نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: یازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

نام درس: حسابان
 نام دبیر: بیتا سعیدی
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۱۰/۹
 ساعت امتحان: ۰۹:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
بارم	سؤالات	
۱	مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی زیر را بیابید. $-5, -3, -1, 0, \dots$	۱
۱	در یک دنباله هندسی اگر جملات اول و چهارم به ترتیب ۵ و ۴۰- باشد، مجموع ۱۱ جمله اول را به دست آورید.	۲
۱	معادله سهمی زیر را بنویسید. 	۳
۱	اگر یکی از ریشه های معادله $4x^2 + kx + 27 = 0$ ، دو برابر مربع ریشه دیگر آن باشد، مقدار k را به دست آورید.	۴
۱/۲۵	اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.	۵
۱	صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2$ را به دست آورید.	۶
۱	معادله $ 2x - 1 - 7 = 2$ را حل کنید.	۷

۱/۵	معادله زیر را حل کنید. $\sqrt{2x+6}+1=x$	۸
۲/۵	مثلث ABC با رئوس $A(1,2)$ ، $B(-5,3)$ و $C(-1,-4)$ مفروض است. مطلوب است: الف) محاسبه طول اضلاع مثلث ب) طول میانه AM پ) طول ارتفاع AH و معادله آن ت) مساحت مثلث ABC	۹
۱	نقاط دو سر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید. $A(0,6)$ و $B(8,-8)$	۱۰
۱	برابری توابع زیر را بررسی کنید. $f(x) = \sqrt{x^2(x-5)}$ ، $g(x) = x \sqrt{x-5}$	۱۱
۰/۵	آیا در معادله $x^2 - y^2 = 1$ ، y را می توان به صورت تابعی از x مشخص کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.	۱۲
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید.	۱۳
۲	یک به یک بودن تابع $y = (x+2)^3 - 2$ را بررسی کرده و وارون آن را به دست آورید.	۱۴
۱/۵	توابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ مفروض اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید. ب) مقدار $(g \circ f)\left(\frac{8}{7}\right)$ را به دست آورید.	۱۵
۱/۵	اگر $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ ، دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.	۱۶

نام درس: ریاضی (۲)
 نام دبیر: بیتا سعیدی
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۱۰/۹
 ساعات امتحان: ۰۹:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
 کلید سوالات پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \quad (0/25) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(-5) + (20-1)2) \quad (0/5)$ $\Rightarrow S_{20} = 280 \quad (0/25)$	
۲	<p>از تقسیم جمله چهارم به جمله اول، قدر نسبت را پیدا می کنیم:</p> $\frac{a_4}{a_1} = \frac{-40}{5} \Rightarrow \frac{a_1 q^3}{a_1} = -8 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$ <p>با داشتن $a_1 = 5$ و $q = -2$، مجموع ۱۱ جمله اول را حساب می کنیم:</p> $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{11} = \frac{5(1-(-2)^{11})}{1-(-2)} = \frac{5 \times 2049}{3} = 3415$	
۳	<p>معادله سهمی با ریشه های α و α به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است. طبق نمودار $\alpha = -1$ و $\beta = 4$ است، پس:</p> $y = a(x + 1)(x - 4)$ <p>نقطه $(0, 8)$ روی سهمی است، پس داریم:</p> $8 = a(1)(-4) \Rightarrow a = -2$ <p>بنابراین:</p> $y = -2(x + 1)(x - 4) \quad \text{یا} \quad y = -2x^2 + 6x + 8$	
۴	<p>یکی از ریشه ها را α می گیریم. ریشه دیگر، دو برابر مربع آن یعنی $2\alpha^2$ است. S و P معادله</p> $4x^2 + kx + 27 = 0$ <p>را به دست می آوریم:</p> $\begin{cases} S = \frac{-b}{a} = \frac{-k}{4} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{27}{4} \end{cases}$	

از ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$(\alpha)(\beta\alpha^2) = \frac{27}{4} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

بنابراین ریشه‌ها برابرند با:

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta\alpha^2 = \beta\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

مجموع دو عدد بالا باید $\frac{-k}{4}$ باشد، پس:

$$\frac{-k}{4} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{-k}{4} = 6 \Rightarrow k = -24$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot/5)} \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} = 2 \quad (\cdot/25) \\ P = \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{1}{-1+2+1} = \frac{1}{2} \quad (\cdot/25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \quad (\cdot/25)$$

۵

هرچند معادله $f(x) = 0$ از درجه چهار است اما می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t = x^2 - 1$ ، معادله به صورت $t^2 + t - 2 = 0$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t = x^2 - 1$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f ، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ است.

۶

عبارت داخل قدرمطلق بزرگ‌تر را یک بار مساوی ۲ و یک بار مساوی -۲ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} |2x-1|-7=2 \Rightarrow |2x-1|=9 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \Rightarrow x=5 \\ 2x-1=-9 \Rightarrow x=-4 \end{cases} \\ |2x-1|-7=-2 \Rightarrow |2x-1|=5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=5 \Rightarrow x=3 \\ 2x-1=-5 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

۷

$$\sqrt{2x+6} = x-1 \Rightarrow 2x+6 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } 5$$

فقط $x = 5$ قابل قبول است.

۹ (الف)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{37}$$

$$AC = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{65}$$

ب) میانه AM بر وسط ضلع BC وارد می شود، پس ابتدا نقطه M وسط BC را می یابیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{-5-1}{2} = -3 \\ y_M = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow AM = \sqrt{(1+3)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

پ) ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. برای محاسبه طول AH باید فاصله نقطه A تا خط BC را بیابیم، ابتدا

معادله BC را می نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 3}{-1 + 5} = \frac{-7}{4}$$

$$BC \text{ معادله ضلع: } y - 3 = \frac{-7}{4}(x + 5) \xrightarrow{\times 4} 4y - 12 = -7x - 35 \Rightarrow 7x + 4y + 23 = 0$$

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7(1) + 4(2) + 23|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{38}{\sqrt{65}} = \frac{38\sqrt{65}}{65}$$

$$M_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{4}{7} \Rightarrow AH \text{ معادله ارتفاع: } y - 2 = \frac{4}{7}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{7}x + \frac{10}{7} \xrightarrow{\times 7} 4x - 7y + 10 = 0$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{\frac{38}{65} \sqrt{65} \times \sqrt{65}}{2} = 19$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 - 8}{2} = -1$$

$\Rightarrow O(4, -1)$: مختصات مرکز دایره

$$AB = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-8 - 6)^2} = \sqrt{64 + 196} = \sqrt{260}$$

$$AB \text{ قطر} = \sqrt{260} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{2\sqrt{65}}{2} = \sqrt{65}$$

۱۰

$$f(x) = \sqrt{x^2(x-5)} \Rightarrow x^2(x-5) \geq 0 \Rightarrow D_f = [5, +\infty] \cup \{0\}$$

$$g(x) = |x|\sqrt{x-5} \Rightarrow (x-5) \geq 0 \Rightarrow D_g = [5, +\infty]$$

$D_f \neq D_g$, پس این دو تابع برابر نیستند.

۱۱

روش اول: خیر (۰/۲۵). زیرا (۰/۲۵) $y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ بنابراین برای یک مقدار x دو مقدار برای y به دست می‌آید. (۰/۲۵)

روش دوم: خیر (۰/۲۵). زیرا به ازای $x = 2$ (۰/۲۵)، دو مقدار $\pm\sqrt{3}$ برای y به دست می‌آید. (۰/۲۵)

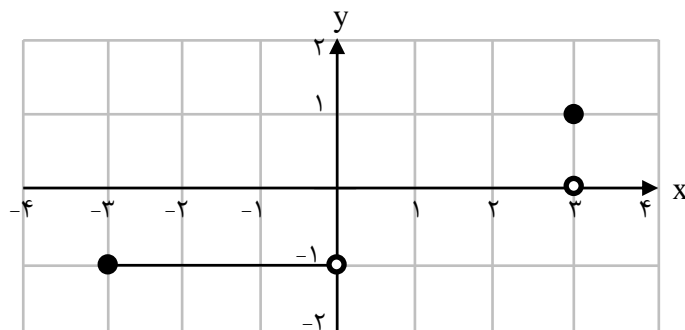
۱۲

$$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-3 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = -1 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$0 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$



۱۳

$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$ $(x_1 + 2)^3 - 2 = (x_2 + 2)^3 - 2 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">تابع یک به یک است.</p> $x_1 + 2 = x_2 + 2 \implies x_1 = x_2 \quad (./25)$ $\implies y = (x + 2)^3 - 2 \implies y + 2 = (x + 2)^3 \quad (./25) \implies x = \sqrt[3]{y + 2} - 2 \quad (./25)$ $\implies f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2} - 2 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">تابع وارون</p>	۱۴
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1}, D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ g(x) = \sqrt{x-3}, D_g = [3, +\infty) \end{cases}$ $\implies D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 3 \mid g(x) \neq 1\} \implies \sqrt{x-3} \neq 1 \implies x \neq 4$ $\implies D_{f \circ g} = [3, +\infty) - \{4\}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $(g \circ f)\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) = g\left(f\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)\right) = g\left(\frac{1}{\frac{\lambda}{\gamma}-1}\right) = g(\gamma) = \sqrt{\gamma-3} = 2$	۱۵
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)(3x+5)}{x} \quad (./5)$ $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad (./25)$ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\} \quad (./25)$	۱۶
نام و نام خانوادگی مصحح : امضاء:	جمع بارم : ۲۰ نمره