

شماره:	نمبره یا عدد و حروف:	بایسته تعالی دبیرستان ماندگار البرز (دوره دوم) امتحانات نوبت اول - سال تحصیلی ۹۸-۹۹	نام:	نام خانوادگی:
		نام دبیر: آقای	کلاس:	درس: حسابان ۱
صفحه: ۱	زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴	نام دبیر: آقای	پایه: یازدهم

توجه: پاسخ سوالات را با دقت، کامل و خوش خط و خوانا یا خودکار آبی یا مشکی بنویسید. هر همه حال و همه جایه و در هر جداوله معال را فراموش نکند.

(۱) به ازای چه مقادیری از m ، در معادله درجه دوم $x^2 + mx + m + 7 = 0$ ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی برابر ۱۰ می باشد. (۱/۵ نمره)

$S = -m$, $P = m+7$, $\alpha^2 + \beta^2 = 10$

$S^2 - 2P = 10 \rightarrow m^2 - 2(m+7) = 10 \rightarrow m^2 - 2m - 24 = 0$

$\Delta = m^2 - 4(m+7) = \begin{cases} m = 4 \rightarrow \Delta < 0 \\ m = -4 \rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$

صفحه ۲۸ کتاب کار

(۲) مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی، سیزده برابر مجموع دو جمله اول آن است. قدر نسبت این دنباله را بدست آورید. (نمره)

$S_6 = 13S_2 \rightarrow \frac{a_1(q^6-1)}{q-1} = 13 \times \frac{a_1(q^2-1)}{q-1}$

$\rightarrow q^4 - 1 = 13(q^2 - 1) \rightarrow (q^2 - 1)(q^2 + q + 1) = 13(q^2 - 1)$

$q^2 + q - 12 = 0 \rightarrow (q^2 - 3)(q^2 + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} q^2 = 3 \rightarrow q = \pm\sqrt{3} \\ q^2 = -4 \end{cases}$

(۳) در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۵۵، مجموع پنج جمله آخر برابر ۲۱۵ و مجموع همه جملات ۳۵۱ می باشد. جمله هفتم دنباله را بیابید. (۱/۵ نمره)

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 55$

$a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_9 + a_8 = 215$

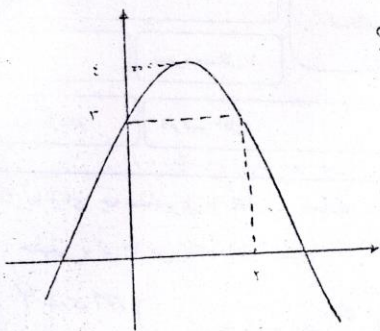
$(a_1 + a_{12}) + (a_2 + a_{11}) + \dots + (a_5 + a_8) = 270 \rightarrow 5(a_1 + a_{12}) = 270 \rightarrow a_1 + a_{12} = 54$

$a_1 + a_{12} = 54$, $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 324 \rightarrow \frac{12}{2} \times 54 = 324 \rightarrow n = 12$

$a_1 + a_{12} = 54 \rightarrow a_1 + a_{10} = 54 \rightarrow 2a_7 = 54 \rightarrow a_7 = 27$

صفحه ۹ کتاب کار

۴) حاصل ضرب صفهای تابع درجه دوم زیر را به دست آورید. (۱/۵ نمره)



$$x_3 = \frac{2+0}{2} = 1 \rightarrow 3 \mid 1$$

$$y = a(x-1)^2 + 4 \quad | 1 \rightarrow 1 = a(-1)^2 + 4$$

$$a = -1 \rightarrow y = -(x-1)^2 + 4$$

$$y = -x^2 + 2x - 1 + 4 \rightarrow y = -x^2 + 2x + 3$$

صفه ۳۷ و ۳۸

$$p = \frac{c}{a} x - 3$$

۵) اگر فاصله دو خط موازی $y = \frac{b}{4}x + 1$ و $8y = 6x + a^2$ کمتر از ۸/ باشد. a شامل چند عدد صحیح می تواند باشد. (۱/۵ نمره)

$$y = \frac{b}{4}x + 1$$

$$y = \frac{4}{8}x + \frac{a^2}{8}$$

$$\left| \frac{a^2}{8} - 1 \right| < 8 \rightarrow \frac{\left| \frac{a^2}{8} - 1 \right|}{\frac{4}{8}} < 16$$

$$\left| \frac{a^2}{8} - 1 \right| < 16 \rightarrow \frac{\left| \frac{a^2}{8} - 1 \right|}{\frac{4}{8}} < 16$$

$$\frac{\left| \frac{a^2}{8} - 1 \right|}{\frac{4}{8}} < 16 \rightarrow \left| \frac{a^2}{8} - 1 \right| < 16 \rightarrow -16 < \frac{a^2}{8} - 1 < 16 \rightarrow -15 < \frac{a^2}{8} < 17$$

$$a \neq 0 \rightarrow -4 < a < 4 \rightarrow a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

۶) سه ضلع مثلثی با معادلات $AB: 2y - x = 4$, $AC: y - 2x = 5$, $BC: 4y + 2x = 20$ می باشد.

معادله ارتفاع و طول ارتفاع AH را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

$$A: \begin{cases} 2y - x = 4 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y - x = 4 \\ -2y + 4x = -10 \end{cases} \rightarrow 3x = -14 \rightarrow x = -\frac{14}{3}, y = 1$$

$$BC: 4y + 2x = 20 \rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{2} \rightarrow m_{AH} = 2 \quad A(-\frac{14}{3}, 1)$$

$$AH: \text{معادله ارتفاع } y - 1 = 2(x + \frac{14}{3}) \rightarrow y = 2x + \frac{32}{3} + 1$$

$$A(-\frac{14}{3}, 1) \quad BC: 2x + 4y - 20 = 0$$

$$AH = \frac{|-14 + 4 - 20|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20}$$

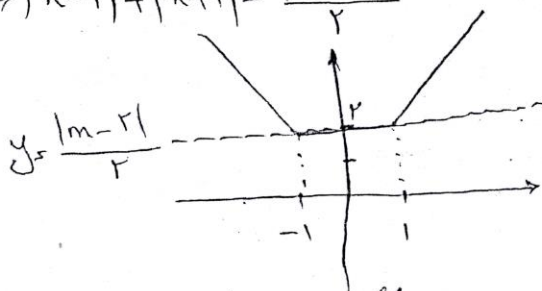
(۷) مقادیر m را طوری تعیین کنید که معادله زیری شمار جواب داشته باشد. (۱/۵ نمره)

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{m^2 - 4m + 4} - 2\sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

$$2|x-1| = |m-2| - 2|x+1| \rightarrow |x-1| + |x+1| = \frac{|m-2|}{2}$$

$$\begin{cases} y = |x-1| + |x+1| \\ y = \frac{|m-2|}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{|m-2|}{2}$$



$$\frac{|m-2|}{2} = 2 \rightarrow |m-2| = 4 \rightarrow \begin{cases} m-2 = 4 \rightarrow m = 6 \\ m-2 = -4 \rightarrow m = -2 \end{cases}$$

صفر ۷۸ جواب دارد

(۸) معادله $\left[4x^2 - \frac{1}{2}\right] + x = 4$ چند جواب دارد. (۱/۵ نمره)

$$\left[4x^2 - \frac{1}{2}\right] = 4 - x \rightarrow x \in \mathbb{Z} \rightarrow 4x^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$4x^2 + \left[-\frac{1}{2}\right] = 4 - x \rightarrow 4x^2 - 1 = 4 - x \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5}{4} \times \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

صفر ۱۴۱ جواب دارد

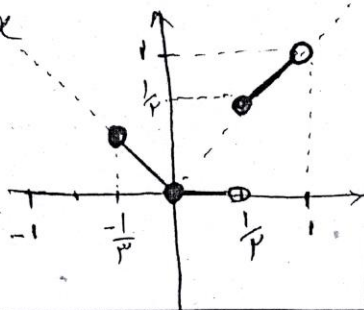
(۹) نمودار تابع $y = x[2x]$ را در بازه $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ رسم کنید. (۱/۵ نمره)

$$-\frac{1}{3} \leq x < 1 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq 2x < 2$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 0 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq 2x < 0 \xrightarrow{[2x] = -1} y = -x$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq 2x < 1 \xrightarrow{[2x] = 0} y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \xrightarrow{[2x] = 1} y = x$$

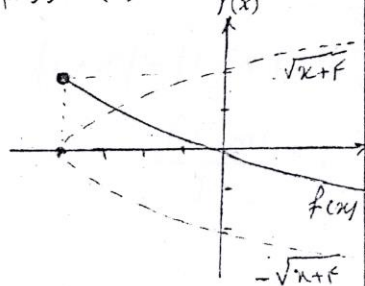


(۱۰) بار رسم نمودار $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2-1}}$ را بیابید و نمودار

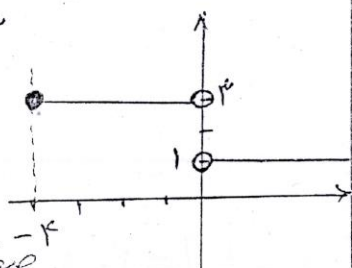
$$D_g: \frac{f(x)}{x^2-1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \rightarrow x \leq 0 \\ x^2-1 \leq 0 \rightarrow x \in [-1, 1] \end{cases} \quad \text{رسم کنید. (۲ نمره)} \quad h(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{f(x)} + 1$$

x	-4	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{f(x)}{x^2-1}$		+	-	+	-

$$D_g = [-4, -1) \cup [0, 1)$$



$$h(x) = \begin{cases} f(x) > 0 \rightarrow h(x) = \frac{f(x)+f(x)}{f(x)} + 1 = 2 + 1 = 3 \\ f(x) < 0 \rightarrow h(x) = \frac{f(x)-f(x)}{f(x)} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$



صفحه ۹۳ و ۹۴ و ۱۲۵ و ۱۲۶

(۱۱) دامنه و برد تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ را یافته و وارون آن را در فاصله $[-1, 0]$ به دست آورید. (۲ نمره)

$$D_f: 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad D_f = [-1, 1]$$

$$R_f: -1 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \rightarrow$$

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \rightarrow 1 \leq 1+\sqrt{1-x^2} \leq 2 \rightarrow 1 \leq y \leq 2 \rightarrow R_f = [1, 2]$$

$$\text{یافتن وارون: } y = 1 + \sqrt{1-x^2} \rightarrow y-1 = \sqrt{1-x^2} \xrightarrow{r} y^2 - 2y + 1 = 1-x^2$$

$$x^2 = 2y - y^2 \rightarrow |x| = \sqrt{2y - y^2} \quad x \in [-1, 0] \rightarrow x = \sqrt{2y - y^2}$$

$$x = -\sqrt{2y - y^2} \rightarrow y = -\sqrt{2x - x^2} \rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{2x - x^2}$$

صفحه ۱۴۹ و ۱۵۰ و ۱۵۱

(۱۲) حدود a را چنان بیابید که تابع $f(x) = ax + 1 - |2 - x|$ یک به یک باشد. (۱ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 + 2 - x & x \geq 2 \\ ax + 1 - 2 + x & x < 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 3 & x \geq 2 \\ (a+1)x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

با نسیب ها هم علامت باشند

$$(a-1)(a+1) > 0 \rightarrow a^2 - 1 > 0 \rightarrow a^2 > 1 \rightarrow |a| > 1 \rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$$

صنعت ۱۵۹ کتاب کار

(۱۳) معادله $3x^2 - 5x + 1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 7}$ چند جواب دارد. (۱ نمره)

$$3x^2 - 5x + 1 = t \xrightarrow{t \geq 0} t = \sqrt{t+4} \rightarrow t^2 = t+4 \rightarrow$$

$$t^2 - t - 4 = 0 \rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=3 \checkmark \\ t=-2 \times \end{cases}$$

$$3x^2 - 5x + 1 = 3 \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 49} \begin{cases} x = \frac{5+7}{6} = 2 \checkmark \\ x = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \checkmark \end{cases}$$

فرد جواب قابل قبول می باشند
صنعت ۴۵ کتاب کار

(۱۴) اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x - 2}{-2x^2 + bx + c}}$ برابر $R - \{1\}$ باشد. مقادیر b, c را بیابید. (۱ نمره)

$$\frac{\sin x - 2}{-2x^2 + bx + c} \geq 0 \xrightarrow{\sin x - 2 < 0} -2x^2 + bx + c < 0$$

جواب
اگرچه نام دامنه فوق را $R - \{1\}$ باشد با c و b می توانیم بنویسیم $-2(x-1)^2$

$$-2x^2 + bx + c = -2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x - 2 \rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = -2 \end{cases}$$

موفق باشید