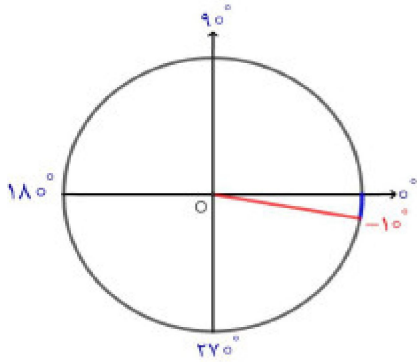
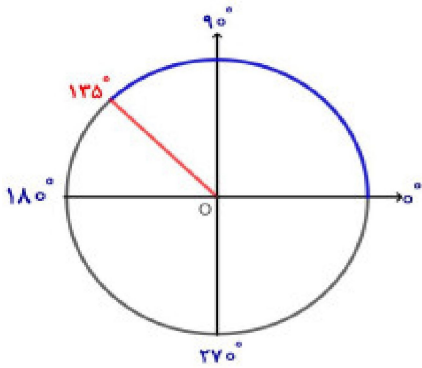


۱- هریک از زاویه‌های  $\frac{-\pi}{۱۸}$  رادیان،  $\frac{-۲\pi}{۵}$  رادیان،  $\frac{۳\pi}{۴}$  رادیان،  $\frac{۷\pi}{۸}$  رادیان،  $\frac{۶\pi}{۵}$  رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

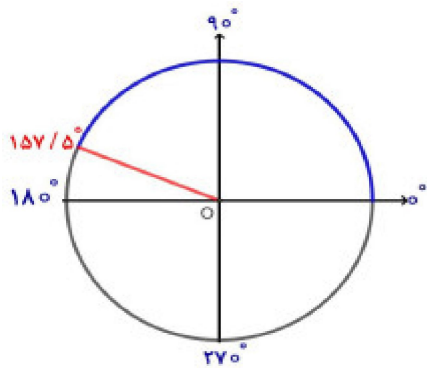


$$\text{رادیان } \frac{-\pi}{۱۸} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{-۱۸۰^\circ}{۱۸} = -۱۰^\circ$$

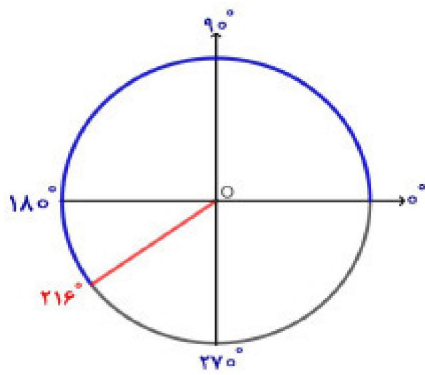
$$\text{رادیان } \frac{-۲\pi}{۵} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{-۳۶۰^\circ}{۵} = -۷۲^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{۳\pi}{۴} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۵۴۰^\circ}{۴} = ۱۳۵^\circ$$

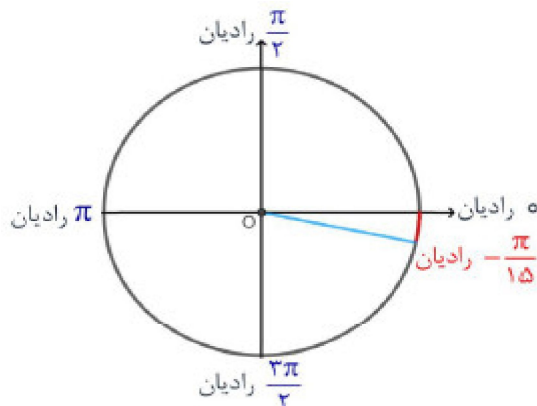


$$\text{رادیان } \frac{۷\pi}{۸} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۱۲۶۰^\circ}{۸} = ۱۵۷/۵^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi = 180^\circ} \frac{1080^\circ}{8} = 216^\circ$$

۲- هریک از زاویه‌های  $12^\circ$ ،  $36^\circ$ ،  $72^\circ$ ،  $108^\circ$  و  $315^\circ$  را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.



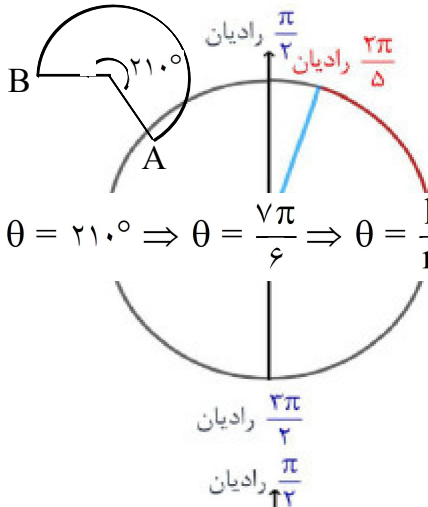
$$-12^\circ \xrightarrow{\times \text{ رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } -\frac{\pi}{15}$$

۳- متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲ متر، مسافتی به اندازه‌ی ۶ متر را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند. زاویه‌ی طی شده توسط متحرک را برحسب درجه و رادیان به دست آورید.  $\times$  رادیان

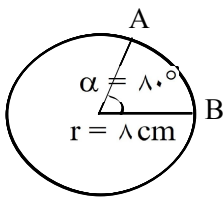
هر دو متر یک رادیان محسوب می‌شود (شعاع ۱ متر است) پس متحرک ۳ رادیان طی کرده است.

$$\frac{-3}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{-540}{\pi} \text{ زاویه برحسب درجه}$$

۴- متحرکی از نقطه A روی دایره به نقطه B می‌رود. اگر شعاع دایره ۱۵ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.

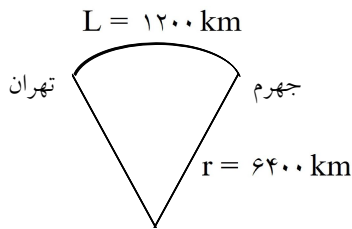


$$\theta = 210^\circ \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = \frac{l}{15} \Rightarrow l = \frac{35\pi}{2} \xrightarrow{\times \text{ رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } \frac{2\pi}{5}$$



۵- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  را برحسب رادیان به دست آورید، سپس طول کمان  $\widehat{AB}$  را پیدا کنید.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{4\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{8} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{32\pi}{9} \text{ cm}$$



۶- اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره‌ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید. (زاویه برحسب رادیان باشد).

$$L = 1200 \text{ km} \quad r = 6400 \text{ km} \quad \theta = ?$$

$$L = r\theta \Rightarrow 1200 = 6400\theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

۷- عبارتهای زیر را ساده کنید.

۸- عبارتهای زیر را ساده کنید.

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin(\alpha + \pi), \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

۹- هرگاه  $\cotg 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل کسر  $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$  را حساب کنید.

$$\begin{aligned} p &= \frac{3\sin(90 - 15^\circ) + 2\sin(90 + 15^\circ)}{\cos(180 - 15^\circ) - \cos(270 - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{5\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} \\ &= \frac{5\cotg 15^\circ}{-\cotg 15^\circ + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-(2 + \sqrt{3}) + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{5(2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})}{(-1 - \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{1 - 3} = \frac{-5}{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

۱۰- ثابت کنید:  $\operatorname{tg}(a - 5\pi) \operatorname{Cotg}(a + 7\pi) - \operatorname{Cos}(\epsilon\pi - a) \operatorname{Cos}(a - \epsilon\pi) = \operatorname{Sin}^2 a$

سمت چپ =  $-\operatorname{tg}(\epsilon\pi - a) \operatorname{Cotg}(\epsilon\pi + a) - \operatorname{Cos}(\epsilon\pi - a) \operatorname{Cos}(\epsilon\pi - a)$

۱۱- اگر  $\tan 23^\circ = a$  باشد حاصل  $\frac{3\operatorname{Sin} 157^\circ + 2\operatorname{Cos} 113^\circ}{\operatorname{Sin} 293^\circ - \operatorname{Cos} 67^\circ}$  را بر حسب  $a$  بیابید.

$$? = \frac{3\operatorname{sin}(180 - 23)^\circ + 2\operatorname{Cos}(90 + 23)^\circ}{\operatorname{Sin}(270 + 23)^\circ - \operatorname{Cos}(90 - 23)^\circ} = \frac{3\operatorname{Sin} 23^\circ - 2\operatorname{Sin} 23^\circ}{-\operatorname{Cos} 23^\circ - \operatorname{Sin} 23^\circ}$$

$$= \frac{-\operatorname{Sin} 23^\circ}{\operatorname{Cos} 23^\circ + \operatorname{Sin} 23^\circ} = \frac{-\operatorname{tan} 23^\circ}{1 + \operatorname{tan} 23^\circ} = \frac{-a}{1 + a}$$

۱۲- مقادیر زیر را حساب کنید.

الف)  $\operatorname{Sin}(240^\circ)$  (الف)      ب)  $\operatorname{Cos}\left(\frac{29\pi}{3}\right)$  (ب)      ج)  $\operatorname{tg}(300^\circ)$  (ج)      د)  $\operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  (د)

الف)  $\operatorname{Sin}(240^\circ) = \operatorname{Sin}(180 + 60^\circ) = -\operatorname{Sin} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب)  $\operatorname{Cos}\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \operatorname{Cos}\left(\frac{30\pi - \pi}{3}\right) = \operatorname{Cos}\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = +\operatorname{Cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

د)  $\operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{Cotg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

۱۳- مقادیر زیر را حساب کنید.

الف)  $\operatorname{Sin}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  (الف)      ب)  $\operatorname{Cos}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$  (ب)      ج)  $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$  (ج)      د)  $\operatorname{Cotg}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$  (د)

الف)  $\operatorname{Sin}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{Sin}\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \operatorname{Sin}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{Sin} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

ب)  $\operatorname{Cos}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \operatorname{Cos}\left(\frac{-6\pi - \pi}{3}\right) = \operatorname{Cos}\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

د)  $\operatorname{Cotg}\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{16\pi - \pi}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{Cotg} \frac{\pi}{4} = -1$

۱۴- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

الف)  $\text{tg } ۱۳۵^\circ + \text{Cotg } ۱۲۰^\circ =$

ب)  $\text{Cos}(-۲۱۰^\circ) + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ) =$

پ)  $\text{Sin } ۶۳۰^\circ + \text{tg}(-۵۴۰^\circ) =$

ت)  $\text{Cos}(-۷۲۰^\circ) + \text{Cotg}(-۶۰۰^\circ) + \text{tg } ۷۲۰^\circ - \text{tg}(-۶۰۰^\circ) =$

ث)  $\text{Sin}\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) =$

ج) 
$$\frac{\text{Sin } \frac{۳\pi}{۴} - \text{Cos } \frac{۵\pi}{۶}}{\text{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \text{tg}\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} =$$

ب)  $\text{Cos}(-۲۱۰^\circ) + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ) = \text{Cos } ۲۱۰^\circ + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ)$

$$= \text{Cos}(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \text{Cotg}(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\text{Cos } ۳۰^\circ + \text{Cotg } ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پ)  $\text{Sin } ۶۳۰^\circ + \text{tg}(-۵۴۰^\circ) = \text{Sin } ۶۳۰^\circ - \text{tg } ۵۴۰^\circ = \text{Sin}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ) - \text{tg}(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ)$   
 $= -\text{Sin } ۹۰^\circ - \text{tg } ۱۸۰^\circ = -۱ + ۰ = -۱$

$= \text{Cos } ۷۲۰^\circ - \text{Cotg } ۶۰۰^\circ + \text{tg } ۷۲۰^\circ + \text{tg } ۶۰۰^\circ$

$= \text{Cos}(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) - \text{Cotg}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ) + \text{tg}(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) + \text{tg}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ)$

$= \text{Cos } ۰^\circ + \text{Cotg}(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \text{tg } ۰^\circ - \text{tg}(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$

$$= \text{Cos } ۰^\circ - \text{Cotg } ۶۰^\circ + \text{tg } ۰^\circ + \text{tg } ۶۰^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}$$

ث)  $\text{Sin}\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \text{Sin}\left(۸\pi + \frac{\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(۸\pi - \frac{\pi}{۳}\right)$

$$= \text{Sin } \frac{\pi}{۳} - \text{Cos } \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \frac{-۴ - \sqrt{۶}}{۱۰}$$

۱۵- اگر  $\text{tg} 20^\circ = 0/36$  باشد، مقدار عددی عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos(-200^\circ)}{\cos 110^\circ - \sin(-70^\circ)}$$

(۰/۵)

(۰/۷۵)

(۰/۲۵)

$$= \frac{1/36}{0/64} = \frac{17}{8} \quad (0/25)$$

۱۶- اگر  $f(x) = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

$$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) \quad (\text{ب})$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= 3 \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(\frac{7\pi - 3\pi}{12}\right) = 3 \cos\left(\frac{4\pi}{12}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱۷- بدون رسم نمودار مشخص کنید آیا نمودار دو تابع  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  و  $y = -\cos(4\pi - x)$  بر هم منطبق هستند یا خیر؟

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

ربع اول

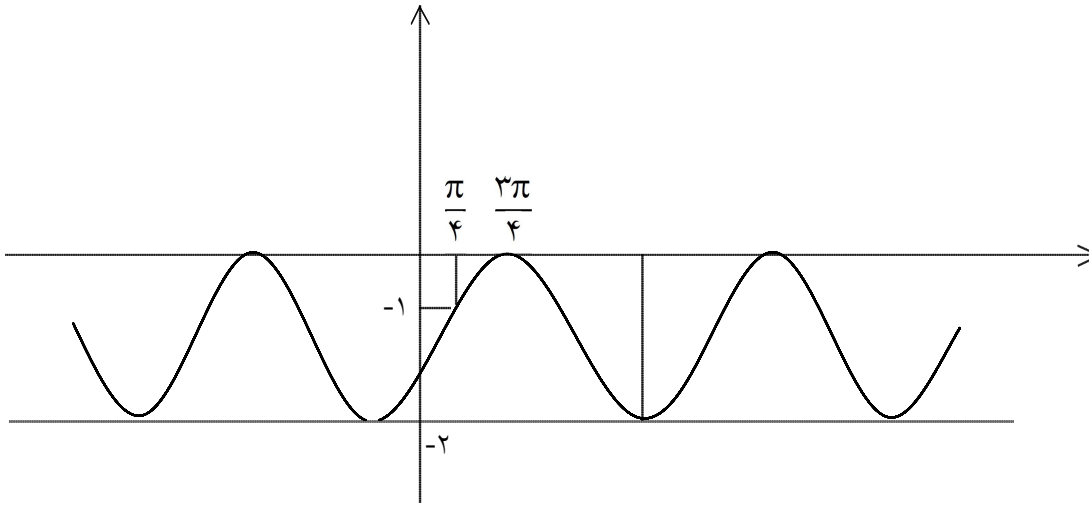
$$y = -\cos(4\pi - x) = -\cos x$$

ربع چهارم

ضابطه‌های دو تابع با هم برابر شدند، دامنه‌هایشان هم که هر دو برابر  $\mathbb{R}$  است، پس نمودارهایشان نیز بر هم منطبق است.

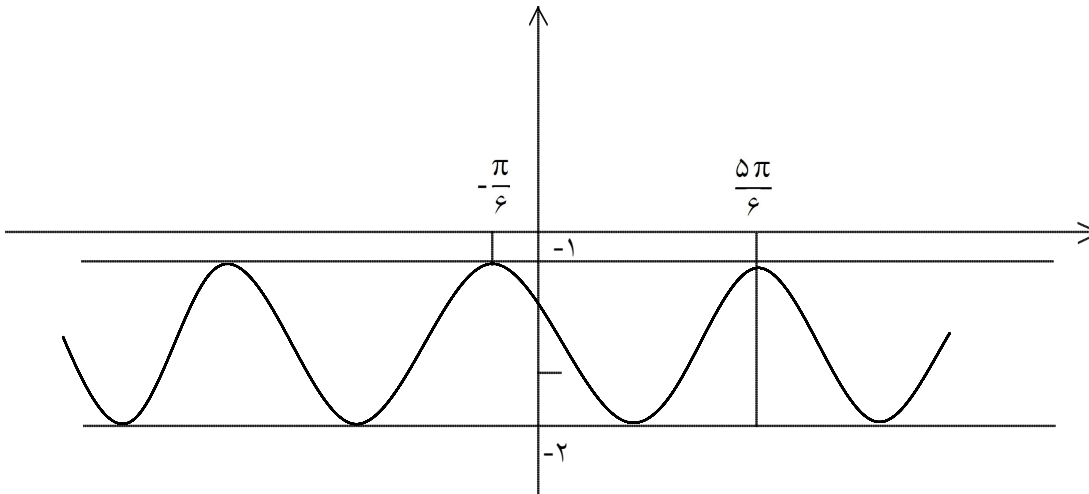
۱۸- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \sin x$  یا  $y = \cos x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$$



۱۹- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \sin x$  یا  $y = \cos x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - 2$$

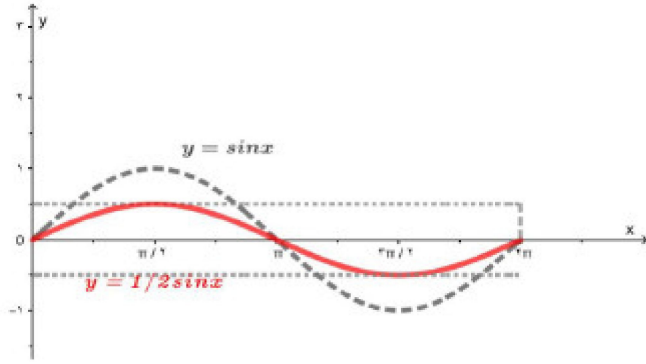


۲۰- نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

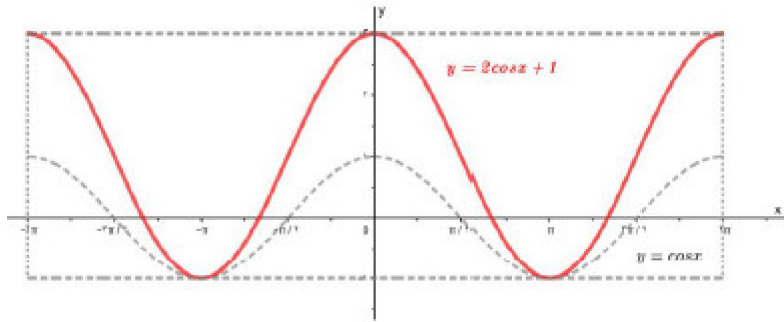
(۱)  $y = \frac{1}{2} \sin x$  ,  $[0, 2\pi]$  (۲)  $y = 2 \cos x + 1$  ,  $[-2\pi, 2\pi]$

(۳)  $y = 1 - \sin x$  ,  $[-2\pi, 2\pi]$  (۴)  $y = -1 + \cos x$  ,  $[-4\pi, 4\pi]$

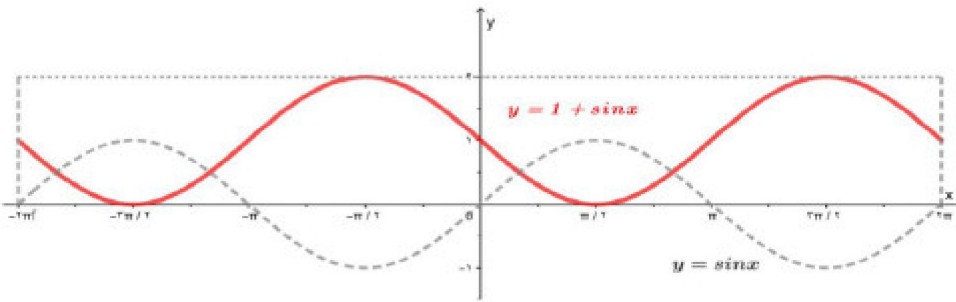
(۵)  $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  ,  $[0, 2\pi]$  (۶)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  ,  $[2\pi, 4\pi]$



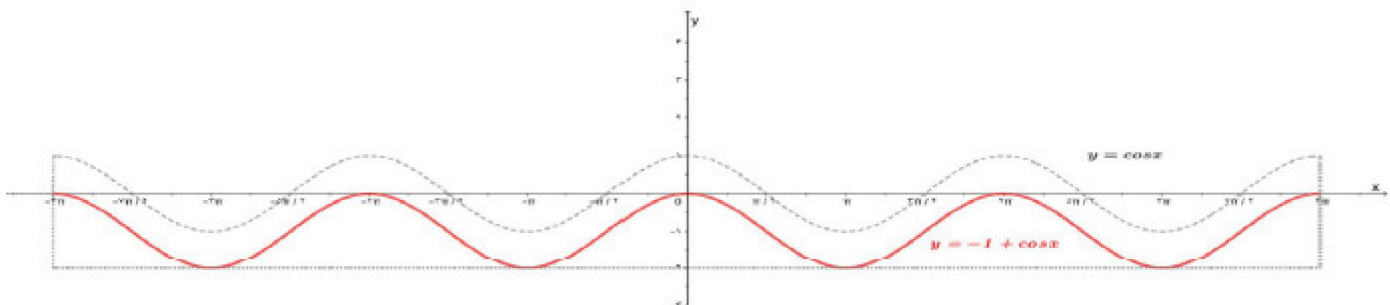
(۱)



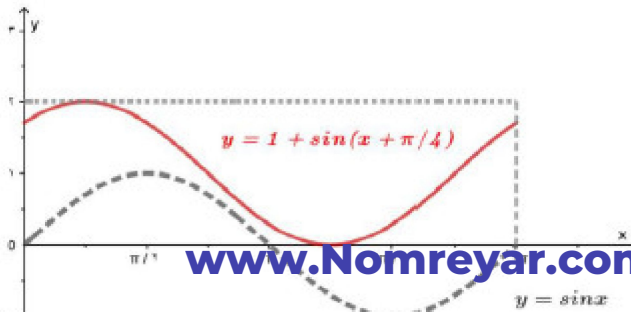
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)



۲۱- آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

$$y = \cos x, y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad (۲) \qquad y = \sin x, y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (۱)$$

$$y = \sin x, y = \sin(\pi - x) \quad (۴) \qquad y = \cos x, y = \cos(2\pi - x) \quad (۳)$$

(۱) بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

(۲) بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

(۳) بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y = \cos(2\pi - x) = \cos x$$

(۴) این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y = \sin(\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

۲۲- اگر  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$  و  $\cos x = \frac{1 + 2m}{1 - 3m}$  آن‌گاه حدود  $m$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1 + 2m}{1 - 3m} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{2 + 4m}{1 - 3m} < 1 \Rightarrow \frac{4 + 16m^2 + 16m}{1 - 6m + 9m^2} < 1$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 22m + 3 < 0 \Rightarrow -3 < m < -\frac{1}{7}$$

۲۳- اگر  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$  و  $\sin 3x = \frac{m + 1}{m}$  آن‌گاه حدود  $m$  را بیابید.

$$-\pi < 3x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow -1 \leq \sin 3x < 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{m + 1}{m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{2m + 1}{m} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 0$$

$$\Rightarrow \text{جواب: } m \leq -\frac{1}{2}$$

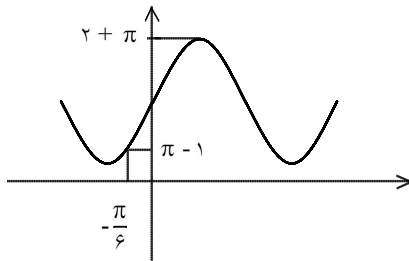
۲۴- با فرض  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$  و  $\cos^2 x = \frac{2+m}{1-m}$  آن‌گاه حدود  $m$  کدام است؟

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{2+m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+2m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 1 \\ \frac{2+m}{1-m} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{7}{5} < m < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب: } -\frac{7}{5} < m \leq -\frac{1}{2}$$

۲۵- اگر نمودار  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  به صورت زیر باشد مقدار تابع به ازای  $x = \frac{5\pi}{6}$  را حساب کنید.



از آن‌جا که  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$  است، ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$y = a + b \sin x$   
در نقطه‌ای که  $y$  تابع  $2 + \pi$  شده است بالاترین نقطه  $\sin x$  است. بنابراین باید  $x$ ، عدد  $\frac{\pi}{2}$  رادیان باشد. در نتیجه تابع از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرد.

$$A \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ 2 + \pi \end{cases} \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \pi \Rightarrow a + b = 2 + \pi \quad (1)$$

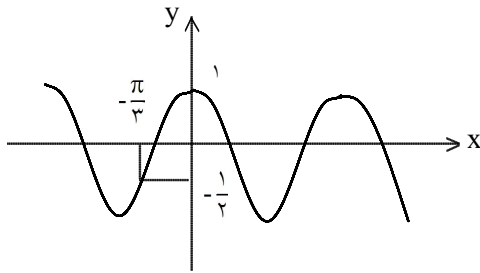
$$B \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \\ \pi - 1 \end{cases} \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi - 1 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = \pi - 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 2 + \pi \\ a - \frac{b}{2} = \pi - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \pi$$

$$y = \pi + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{6}} y = \pi + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \pi + 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \pi + 2 \left(\frac{1}{2}\right) = \pi + 1$$

۲۶- اگر نمودار  $y = a + b \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$  به صورت زیر باشد، مقدار تابع به ازای  $x = \frac{7\pi}{3}$  را حساب کنید.



از آنجا که  $\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ، بنابراین تابع را به صورت  $y = a + b \cos x$  می‌نویسیم و از دو نقطه زیر با مختصات معلوم استفاده می‌کنیم.

$$A \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow 1 = a + b \cos(0) \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

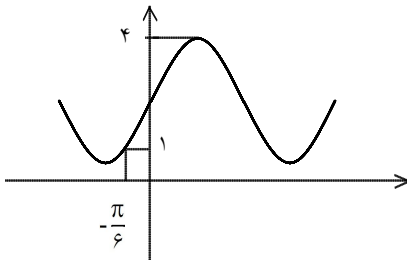
$$B \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow -\frac{1}{2} = a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a + \frac{b}{2} = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + \frac{b}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2 + 3 \cos x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{3}} y = -2 + 3 \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \Rightarrow y = -2 + 3 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۲۷- اگر نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  به صورت زیر باشد، مقدار تابع به ازای  $x = \frac{17\pi}{3}$  را حساب کنید.



از آنجا که  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ، بنابراین تابع را به صورت  $y = a + b \sin x$  می‌نویسیم و در  $y = 4$  تابع در بالاترین نقطه قرار دارد. بنابراین  $x$  آن نقطه  $\frac{\pi}{2}$  است. در نتیجه تابع از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرد.

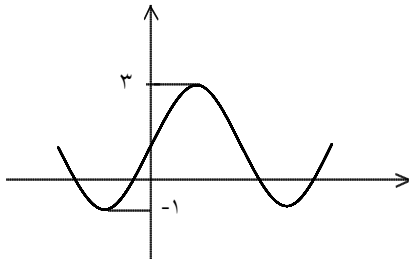
$$A \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 4 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \quad (1)$$

$$B \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2 + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{17\pi}{3}} y = 2 + 2 \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \Rightarrow y = 2 + 2 \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3}$$



۲۸- اگر نمودار  $y = a + b \sin x$  به صورت زیر باشد.  
الف) مقدار  $a, b$  را حساب کنید.  
ب) مقدار تابع به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  را به دست آورید.

الف) از آنجا که ماکزیمم تابع برای  $x = \frac{\pi}{2}$  و مینیمم تابع برای  $x = \frac{3\pi}{2}$  است، بنابراین برای مختصات دو نقطه

$$A \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

داریم:

$$B \left. \begin{array}{l} \frac{3\pi}{2} \\ -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow a - b = -1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 1 + 2 \sin x$$

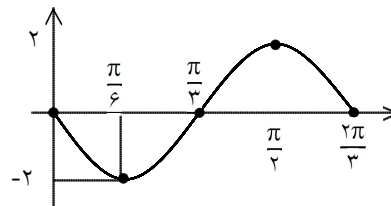
$$y = 1 + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} y = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (ب)$$

$$\Rightarrow y = 1 + \sqrt{2}$$

۲۹- تابع  $f(x) = -2 \sin 3x$  مفروض است. بیشترین مقدار، کمترین مقدار و دوره‌ی تناوب تابع  $f$  را به دست آورید. سپس با استفاده از آن، نمودار تابع  $f$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \sin 3x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \max = 2 \\ \min = -2 \end{cases}$$

نمودار تابع را در یک دوره‌ی تناوب یعنی  $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$  رسم می‌کنیم.



$$\text{دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{3}$$

۳۰- اگر  $\sin 10^\circ = 0/17$  و  $\cos 10^\circ = 0/99$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \sin 350^\circ + \sin 100^\circ - \cos 260^\circ - \cos 190^\circ$$

$$A = \sin(360^\circ - 10^\circ) + \sin(90^\circ + 10^\circ) - \cos(270^\circ - 10^\circ) - \cos(180^\circ + 10^\circ)$$

$$= -\sin 10^\circ + \cos 10^\circ + \sin 10^\circ + \cos 10^\circ = 2 \cos 10^\circ = 2(0/99) = 1/99$$

۳۱- در دایره‌ای به محیط  $۱۶\pi$  طول کمان مقابل به زاویه  $۱۵۰$  درجه را بیابید.

ابتدا باید زاویه را بر حسب رادیان حساب کنیم.

$$\theta = ۱۵۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\text{محیط} = ۱۶\pi \Rightarrow ۱۶\pi = ۲\pi R \Rightarrow R = \frac{۱۶\pi}{۲\pi} = ۸$$

$$R = ۸ \Rightarrow L = R\theta \Rightarrow L = ۸ \times \frac{۵\pi}{۶} = \frac{۲۰\pi}{۳}$$

۳۲- اگر  $\frac{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right)}{۲ \sin(\alpha - ۹\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{۵\pi}{۲}\right)} = \frac{۱}{۲}$  مقدار  $\text{tg}\alpha$  را به دست آورید.

ابتدا هریک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی کمان  $\alpha$  می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - ۹\pi) = -\sin(۹\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

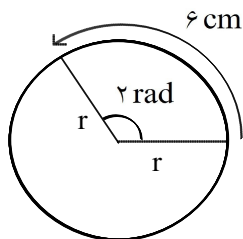
$$\cos\left(\alpha - \frac{۵\pi}{۲}\right) = \cos\left(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\frac{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha\right)}{۲ \sin(\alpha - ۹\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{۵\pi}{۲}\right)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{-\cos\alpha}{۲ \times (-\sin\alpha) + \sin\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Cotg}\alpha = \frac{۱}{۲}$$

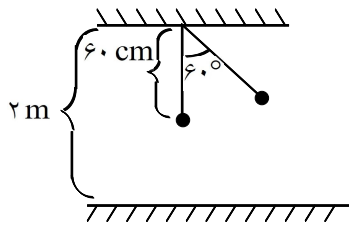
$$\text{Cotg} = \frac{۱}{\text{tg}\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{\text{tg}\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{tg}\alpha = ۲$$

۳۳- مساحت دایره مقابل چه قدر است؟



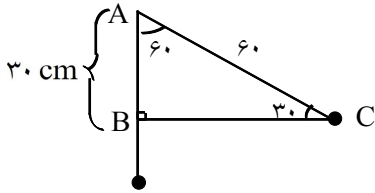
$$l = r\theta \Rightarrow ۶ = r \times ۲ \Rightarrow r = ۳$$

$$S = \pi r^2 = ۹\pi$$



۳۴- وزنه‌ای متصل به میله‌ی آونگی به طول ۶۰ سانتی‌متر را از ارتفاع ۲ متری زمین آویخته‌ایم. اگر آونگ ۶۰ درجه از حالت تعادل انحراف بیابد:  
الف) وزنه‌ی آونگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟  
ب) وزنه در این انحراف از تعادل، چه مسافتی را می‌پیماید؟

الف) در مثلث ABC ضلع روبه‌روی ۳۰ درجه نصف وتر است یعنی  $AB = ۳۰ \text{ cm}$



ب) ارتفاع وزنه از سطح زمین  $= ۲۰۰ - AB = ۲۰۰ - ۳۰ = ۱۷۰$

(ب)

$$\theta = ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳} \text{ (رادیان)} \Rightarrow \text{طول کمان } L = r\theta = ۶۰ \times \frac{\pi}{۳} = ۲۰\pi = ۶۲/۸$$

شعاع  $r = ۶۰ \text{ cm}$

۳۵- مقادیر زیر را حساب کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

الف)  $[\sin ۱]$

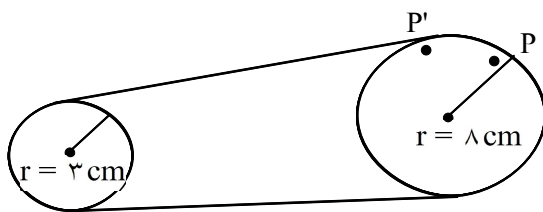
ب)  $[\sin ۶]$

الف) یک رادیان در ربع اول قرار دارد بنابراین:

$$۰ < ۱ < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ < \sin(۱) < ۱ \Rightarrow [\sin(۱)] = ۰$$

ب) ۶ رادیان در ربع چهارم قرار می‌گیرد بنابراین:

$$\frac{۳\pi}{۲} < ۶ < ۲\pi \Rightarrow -۱ < \sin(۶) < ۰ \Rightarrow [\sin ۶] = -۱$$



۳۶- در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقه به شعاع‌های ۸ cm و ۳ cm

را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقه بزرگ‌تر  $\frac{\pi}{۳}$

رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقه کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = \frac{\pi}{۳} \times ۸ = \frac{۸\pi}{۳} \text{ cm}$$

در قرقه بزرگ‌تر داریم:

چون دو قرقه با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقه کوچک‌تر نیز  $\frac{۸\pi}{۳} \text{ cm}$  حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{۸\pi}{۳}}{۳} = \frac{۸\pi}{۹} \text{ rad}$$

۳۷- طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاک کن، کمائی به اندازه  $۱۳۵^\circ$  طی می کند.  $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

الف) اندازه ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.  
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟  
الف)

$$D = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۳۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۱۸۰ R = ۱۳۵\pi \Rightarrow R = \frac{۱۳۵\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۴}$$

ب)

شعاع  $r = ۲۴ \text{ cm}$        $\theta = \frac{۳\pi}{۴}$        $L = ?$

$$L = r\theta = ۲۴ \times \frac{۳\pi}{۴} = ۱۸\pi = ۵۶/۵۲ \text{ cm}$$



۳۸- پره های یک آسیاب بادی با سرعت ثابت در هر ثانیه ۵ دور می چرخند. اگر طول پره ها ۱۰ متر باشند، سرعت نوک پره ها چند متر بر ثانیه است؟

محیط نوک پره ها  $P = ۲\pi r = ۲\pi \times ۱۰ = ۲۰\pi$

در هر ثانیه ۵ دور می چرخد بنابراین داریم:

سرعت چرخش  $= ۲۰\pi \times ۵ = ۱۰۰\pi \simeq ۱۰۰ \times ۳/۱۴ = ۳۱۴ \frac{\text{m}}{\text{s}}$



۳۹- اگر  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  باشد و  $f(0) = -۱$  و  $f(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}$  باشد،  $a$  و  $b$  را بیابید.

$$f(0) = -۱ \Rightarrow a \times \sin(0) + b \times \cos(0) = -۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲} \Rightarrow a \times \sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) + b \times \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲} \Rightarrow a \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + b \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\div \sqrt{۲}} \frac{a}{۲} + \frac{b^{-۱}}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = ۳$$



۴۰- جدول زیر را کامل کنید.

زاویه X نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
Sin x								
Cos x								
tg x								
Cotg x								

زاویه X نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
Sin x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Cos x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg x	$-\sqrt{3}$	-۱	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cotg x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-۱	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$