

۱- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$(الف) 5^{2x+2} \times 2^{x-1} = . / . 005$$

$$(ب) \frac{5^{2x} - \frac{1}{5}(25)^x}{2 \times 8^x + 8 \times 2^{3x}} = \frac{25}{32}$$

$$(الف) 5^{2x+2} \times 2^{x-1} = \frac{5}{1000} \Rightarrow 5^{2x+2} \times 2^{x-1} = 5 \times 10^{-3} \Rightarrow 2^{2x+2} \times 2^{x-1} = 5(2 \times 5)^{-3}$$

$$\Rightarrow 5^{2x+2} \times 2^{x-1} = 5 \times 2^{-3} \times 5^{-3} \Rightarrow 2^{2x+2} \times 2^{x-1} = 5^{-2} \times 2^{-3}$$

$$(ب) \frac{5^{2x} \left(1 - \frac{1}{5}\right)}{2 \times 8^x + 8 \times 2^x} = \frac{5^{2x} \left(\frac{4}{5}\right)}{8x(2+8)} = \frac{5^{2x} \times 2}{5 \times 10 \times 2^{3x}} = \frac{5^{2x-2}}{2^{3x-1}} = \frac{5^2}{2^5}$$

۲- هریک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$(الف) 2^{x^2 - 5x + 4} \leq 25^x - 4$$

$$(ب) \left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5}$$

$$(الف) 2^{x^2 - 5x + 4} \leq (2^4)^{x-4} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 8x - 32 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0$$

$$(ب) \left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+12} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow 3x + 12 \leq 2x + 5 \Rightarrow x \leq -7$$

۳- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$16^{4n+1} = 2^{38-n}$$

$$625(\sqrt{5})^{4x+1} = (\sqrt{5})^{15-2x}$$

$$\Rightarrow 16n + 4 = 38 - n \Rightarrow 17n = 34 \Rightarrow n = 2$$

$$\begin{aligned} \text{(ب)} 625(\sqrt{5})^{4x+1} &= (\sqrt{5})^{15-2x} \Rightarrow 5^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{4x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15-2x} \Rightarrow 5^4 \times 5^{2x+\frac{1}{2}} \\ &= 5^{\frac{15}{2}-x} \Rightarrow 4 + 2x + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - x \Rightarrow 3x = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3^x + y = 81 \\ 2^x - y = 8 \end{cases}$$

۴- دستگاه معادله‌ی مقابل را با استفاده از تعریف لگاریتم یا توان حل کنید:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^x + y = 81 = 3^4 \rightarrow x + y = 4 \\ 2^x - y = 8 = 2^3 \rightarrow x - y = 3 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۵- با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به صورت دیگر بنویسید.

$$\begin{array}{lll} 10^{-3} = 0.001 & \text{(ج)} & 3^4 = 81 \\ \text{(ب)} & & \text{(الف)} \end{array}$$

$$3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$$

$$5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$$

$$10^{-3} = 0.001 \Rightarrow \log_{10} 0.001 = -3$$

۶- با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به صورت دیگر بنویسید.

$$\begin{array}{lll} 2^{\frac{2}{3}} = 4 & \text{(ج)} & 625^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{125} \\ \text{(ب)} & & \text{(الف)} \end{array}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

$$625^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{125} \Rightarrow \log_{625} \frac{1}{125} = -\frac{3}{4}$$

$$2^0 = 1 \Rightarrow \log_2 1 = 0$$

۷- رابطه‌های داده شده را به صورت نماد بنویسید.

$$\text{Log}_\gamma 1 = 0 \quad (\text{ج}) \quad \text{Log}_\gamma 81 = 4 \quad (\text{ب}) \quad \text{Log}_\gamma 64 = 2 \quad (\text{الف})$$

$$\text{الف} \quad \text{Log}_\gamma 64 = 2 \Rightarrow \gamma^2 = 64$$

$$\text{ب) } \text{Log}_\gamma 81 = 4 \Rightarrow 81 = \gamma^4$$

$$\text{ج) } \text{Log}_\gamma 1 = 0 \Rightarrow \gamma^0 = 1$$

۸- دامنهٔ تابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{4 - \text{Log}_\gamma(x+3)}$$

$$4 - \text{Log}_\gamma(x+3) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_\gamma(x+3) \leq 4 \Rightarrow x+3 \leq 16 \Rightarrow x \leq 13 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (-3, 13]$$

۹- دامنهٔ تابع زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } f(x) = \text{Log}_{(x+1)}^{(\gamma^2 - 4)}$$

$$\text{ب) } g(x) = \text{Log}_{|x|}^{(x-5)}$$

$$D_g : \begin{cases} (x-5)^{\gamma} > 0 \Rightarrow x \neq 5 \\ |x| > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشترک}} D_g = \mathbb{R} - \{5, 0, \pm 1\}$$

۱۰- دامنهٔ تابع زیر را حساب کنید.

$$g(x) = \text{Log}_x^{|x-3|} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \text{Log}^{(4x^2 + 4x + 1)} \quad (\text{الف})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{ب) } |x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad (1)$$

$$x > 0 \quad (2)$$

$$x \neq 1 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} D_g = (0, +\infty) - \{1, 3\}$$

۱۱- وارون تابع با ضابطه $y = 2^{x+3}$ را حساب کنید.

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \log_2(x+3) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x+3)$$

۱۲- وارون تابع با ضابطه $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(2x+4)$ را حساب کنید.

$$y = \log_{\sqrt{2}}(2x+4) \Rightarrow 2x+4 = 2^y \Rightarrow 2x = 2^y - 4 \Rightarrow x = \frac{2^y - 4}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2^x - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2^x - 4}{2}$$

۱۳- هرگاه داشته باشیم $\log v = 0.8451$ و $\log 3 = 0.4771$ و $\log 2 = 0.3010$ مطلوب است محاسبه:

$$\log \frac{12 \times v^3}{25}$$

$$\log \frac{12 \times v^3}{25} = \log 12 + \log v^3 - \log 25 = \log 2^4 \times 3 + \log v^3 - \log \frac{100}{4}$$

$$= 4 \log 2 + \log 3 + 3 \log v - 2 = 2/2164$$

۱۴- هرگاه داشته باشیم $\log v = 0.8451$ و $\log 3 = 0.4771$ و $\log 2 = 0.3010$ مطلوب است محاسبه:

$$\log \frac{49}{3 \sqrt[3]{12}}$$

$$\log \frac{49}{3 \sqrt[3]{12}} = \log 49 - \log 3 - \frac{1}{3} \log 12$$

$$= 2 \log 7 - \log 3 - \frac{1}{3} (2 \log 2 + \log 3)$$

$$= 2 \log 7 - \frac{4}{3} \log 3 - \frac{2}{3} \log 2 = 0.8534$$

$$\log 3 + \log 3 = \log 3^2$$

۱۵- نشان دهید:

$$\log 3 + \log 3 = \log(3 \times 3) = \log 3^2$$

$$\log 5 + \log 5 + \log 5 = \log 5^3$$

۱۶- نشان دهید:

$$\log 5 + \log 5 + \log 5 = \log(5 \times 5) + \log 5 = \log(5 \times 5 \times 5) = \log 5^3$$

$$\log \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b} \sqrt[4]{a^4}} \right)$$

۱۷- با استفاده از سه قضیه‌ی ۳، ۴ و ۵ عبارت زیر را تبدیل کنید:

$$\log \sqrt[3]{a^2} - \log \sqrt{b} \sqrt[4]{a^4} = \frac{1}{3} \log a - \left[\log \sqrt{b} + \log \sqrt[4]{a^4} \right] =$$

$$5 \log a - 2 \log b + 3 \log c$$

۱۸- به یک لگاریتم تبدیل کنید.

$$\log a^5 - \log b^2 + \log c^3 = \log \frac{a^5 c^3}{b^2}$$

۱۹- اگر $\log_4 3 = a$ آن‌گاه حاصل $\log_{18} 8$ را بر حسب a بیابید.

$$\log_{18} 8 = \log_{18} 2 \times 3^2 = \frac{1}{3} (\log_4 2 + 2 \log_4 3) = \frac{1}{3} (1 + 4 \log_4 3) = \frac{1}{3} (1 + 4a)$$

۲۰- با فرض $3 = 0/3$ و $\log 2 = 0/5$ مقدار عددی $\log_{27} 25 \sqrt[3]{3}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \log_{27} 25 \sqrt[3]{3} &= \frac{\log 25 \sqrt[3]{3}}{\log 27} = \frac{\log 25 + \log \sqrt[3]{3}}{\log 27} = \frac{\log \frac{100}{4} + \frac{1}{3} \log 3}{3 \log 3} \\ &= \frac{2 - 2 \log 2 + \frac{1}{3} \log 3}{3 \log 3} = \frac{2 - 0/6 + 0/25}{3 \times 0/5} = \frac{1/65}{1/5} = 1/1 \end{aligned}$$

$$4 \log a - \frac{2}{5} \log x + \log b =$$

۲۱- عبارت رو به رو را به یک لگاریتم تبدیل کنید.

$$\log a^4 - \log \sqrt[5]{x^2} + \log b = \log \frac{a^4 b}{\sqrt[5]{x^2}}$$

۲۲- اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3 + 2 \log_a^{(2x+1)}$ از نقطه‌ی $(2, 5)$ عبور کند، مقدار a چه قدر است؟

$$f(2) = 5 \Rightarrow 3 + 2 \log_a^5 = 5 \Rightarrow 2 \log_a^5 = 2 \Rightarrow \log_a^5 = 1 \Rightarrow a = 5$$

۲۳- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3 + 3 \log_a \left(\frac{x}{4} + 20 \right)$ از نقطه‌ی (۱۲، ۲۸) عبور کند، مقدار a چه قدر است؟

$$f(28) = 12 \Rightarrow 3 + 3 \log_a \left(\frac{28}{4} \right) = 12 \Rightarrow 3 \log_a 7 = 9 \Rightarrow \log_a 7 = 3 \Rightarrow a^3 = 7$$

۲۴- اگر $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[4]{2}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt[2]{3}} \sqrt[4]{a}$ را برحسب a بیابید.

$$\log_{\sqrt[4]{2}} a = \log_2 a \Rightarrow \log_2 a = \frac{a}{4}$$

$$\log_{\sqrt[2]{3}} \sqrt[4]{2} = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{2 + \log_2 9}{1 + 2 \log_2 2} = \frac{2 + \frac{a}{4}}{1 + \frac{2a}{4}} = \frac{8 + a}{4 + 2a}$$

۲۵- معادله‌ی مقابل را حل کنید.

($x + 1 > 0$ ، $x > -1$) \cap ($x - 3 > 0$ ، $x > 3$) $\Rightarrow D_f = x > 3$ ابتدا دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$\log \frac{x+1}{x-3} = \log 3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 3 \Rightarrow x+1 = 3x-9 \Rightarrow x=5$$

۲۶- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را برای متغیر x حل کنید:

$$\log(p-q) = \log(p^2 - q^2) - \frac{1}{2} \log x \Rightarrow \log \frac{(p-q)(p+q)}{p-q} = \log \sqrt{x} \rightarrow$$

$$\log(p+q) = \log \sqrt{x} \rightarrow (p+q)^2 = x$$

۲۷- جواب‌های معادله‌ی $\log_2 2 = \log_2(x - 2) - \log_2(x^2 - 2x + 5)$ را بیابید.

$$\log_2 = \log_2(x - 2)^2 - \log_2(x^2 - 2x + 5) = \log_2 \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 5}$$

$$\log_2 = \log_2(x - 2)^2 - \log_2(x^2 - 2x + 5)$$

$$\log_2 = \log_2 \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 5} \rightarrow \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 5} = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 12x + 40$$

$$\rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$$

جواب ندارد .

۲۸- دستگاه $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ را حل کنید.

$$\log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 y = 1 \rightarrow 2 \log_2 x - \log_2 y = 2 \rightarrow \log_2 \frac{x^2}{y} = 2$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{y} = 4 \rightarrow x^2 = 4y$$

$$2x - y = 2 \rightarrow 2x - \frac{x^2}{4} = 2 \rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x = 4 \text{ یا } 16 \rightarrow y = 4 \text{ یا } 16$$

۲۹- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \log_2(x+1) - \log_2(x+4) = 9 \log_2 \sqrt{1/5} - \log_2 \sqrt{0.1}$$

$$\log_2(x+1)^2 - \log_2(x+4) = 2 \log_2 \sqrt{1/5} - \log_2 10^{-2} \Rightarrow \log_2 \frac{(x+1)^2}{x+4} = \frac{2}{2} - \left(-\frac{2}{2} \right)$$

$$\frac{(x+1)^2}{x+4} = 2^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 6x = 15 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 84$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 84 \Rightarrow \begin{cases} x-3=8 \Rightarrow x=11 \\ x-3=-8 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

۳۰- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(x+4) = \frac{1}{2} \log(2x+11) \quad (ب)$$

$$\log_{\sqrt{v}} + \log_{\sqrt{v}} = 2 \quad (\text{الف})$$

$$\log_{\sqrt{v}} = 2 \Rightarrow (x+4)(x-3) = (\sqrt{v})^2 = v \quad (\text{الف})$$

۴ - x غیرقابل قبول است زیرا به ازای آن عبارت جلوی لگاریتمها منفی می‌شود.

$$\log(x+4) = \frac{1}{2} \log(2x+11) \Rightarrow 2 \log(x+4) = \log(2x+11) \quad (ب)$$

$$\Rightarrow \log(x+4)^2 = \log(2x+11) \Rightarrow (x+4)^2 = 2x+11$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$$

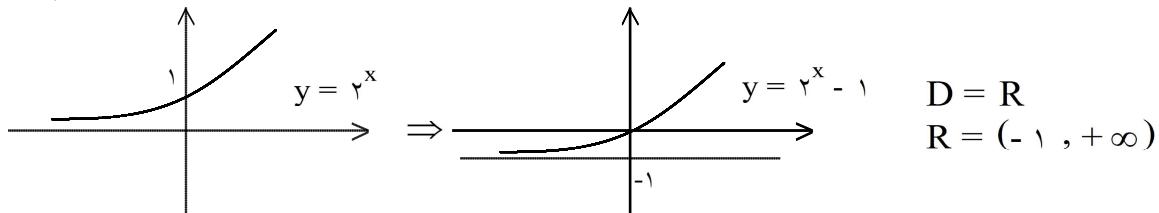
۵ - x غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن عبارت جلوی $\log(x+4)$ منفی خواهد شد.

۳۱- نمودارهای زیر را به کمک انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد را حساب کنید.

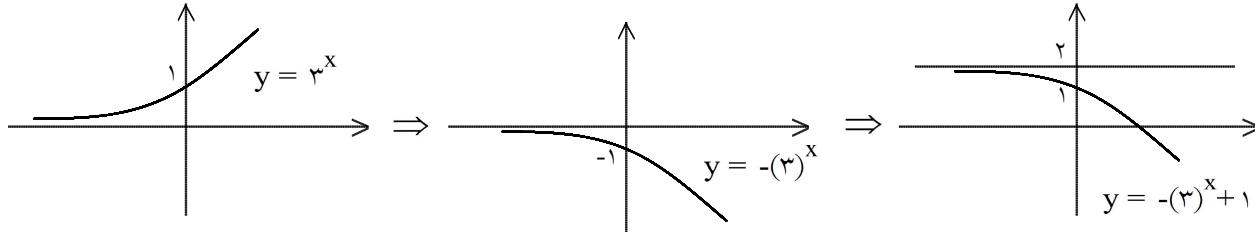
$$y = 2 - (3)^x \quad (ب)$$

$$y = 2^x - 1 \quad (\text{الف})$$

(الف)



(ب)



$$D = R$$

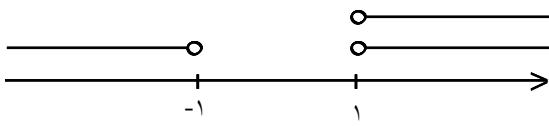
$$R = (-\infty, 1)$$

۳۲- نمودار تابع $y = \log(x^2 - 1) - \log(x - 1)$ را رسم کنید.

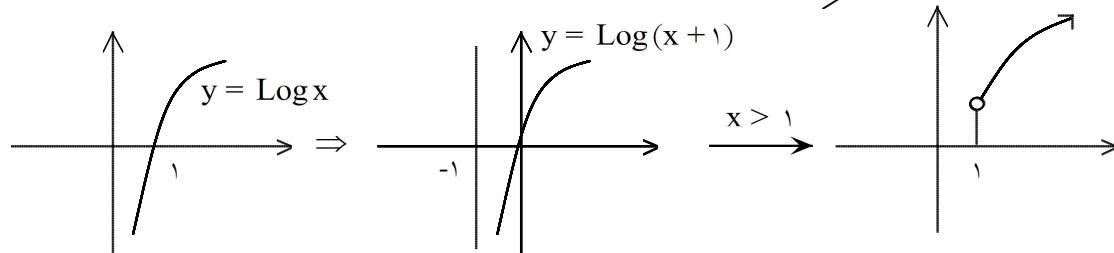
$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \quad (1)$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow D = (1, +\infty)$$



$$y = \log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = \log \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \log \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Rightarrow y = \log(x+1)$$



۳۳- به ازای چه مقادیری از k تابع $y = (5 - 4k)^x$ به صورت‌های زیر می‌باشد

(الف) یک تابع نمایی باشد.

(ب) یک تابع نمایی صعودی (افزایشی) باشد.

(ج) یک تابع نمایی نزولی (کاهشی) باشد.

(الف)

$$\begin{cases} 5 - 4k > 0 \Rightarrow -4k > -5 \Rightarrow k < \frac{5}{4} \\ 5 - 4k \neq 1 \Rightarrow -4k \neq -4 \Rightarrow k \neq 1 \end{cases} \Rightarrow k \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) - \{1\}$$

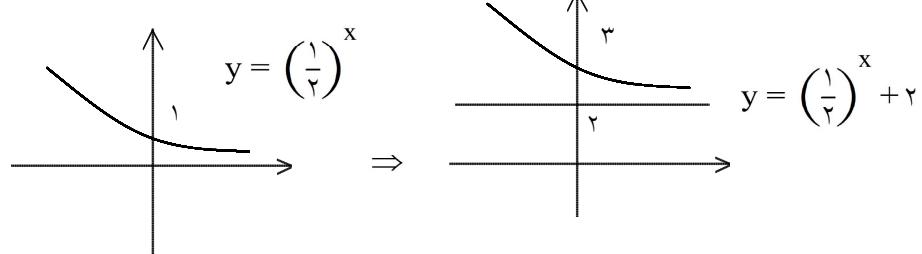
$$5 - 4k > 1 \Rightarrow -4k > -4 \Rightarrow k < 1 \quad (\text{ب})$$

$$0 < 5 - 4k < 1 \xrightarrow{-5} -5 < -4k < -4 \xrightarrow{\div(-4)} 1 < k < \frac{5}{4} \quad (\text{ج})$$

۳۴- نمودار $y = 3^{-x} + 2$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

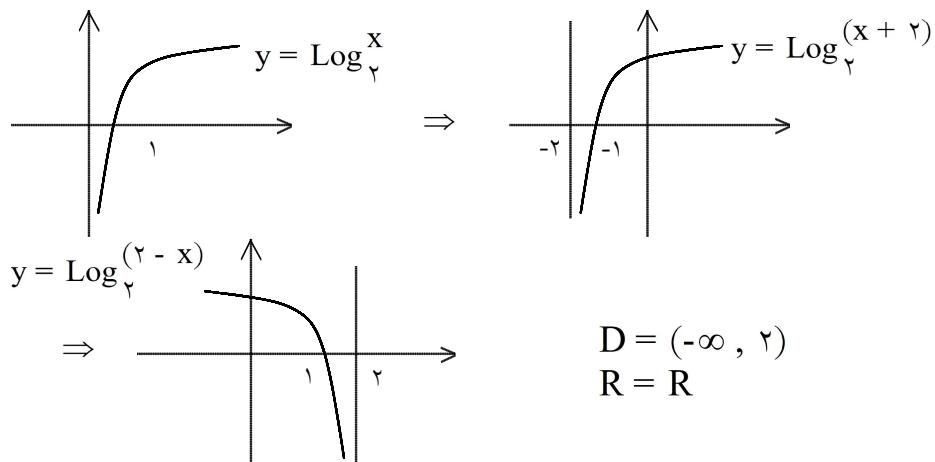
$$a^{\log_a b} = b$$

$$y = 3^{-x} + 2 \Rightarrow y = 3^{\log_3^{-1}(x)} + 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$$

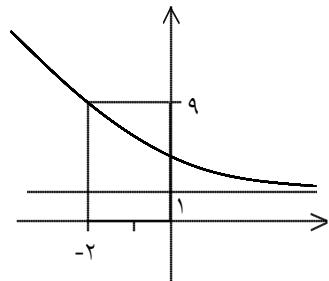


$$D = R \\ R = (2, +\infty)$$

۳۵- نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{2}}(2 - x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا حساب کنید.



۳۶- در دستگاه محور مختصات رو به رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(b-x)}$ رسم شده است. b و a را به دست آورید.



$$\begin{aligned} 2^{(b-x)} &> 0 \xrightarrow{+a} a + 2^{(b-x)} > a \\ \text{با توجه به نمودار} \quad &\xrightarrow{} y = a + 2^{(b-x)} > 1 \\ y = 1 + 2^{(b-x)} \quad &\xrightarrow{x = -2} 9 = 1 + 2^{(b+2)} \Rightarrow b = 2^{(b+2)} \Rightarrow 2^3 = 2^{(b+2)} \Rightarrow b + 2 = 3 \\ \Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

۳۷- فرض کنید جمعیت کشوری ۱۰ میلیون نفر باشد، اگر جمعیت به طور نمایی و با ضریب ثابت ۳% در سال رشد کند، پس از گذشت چند سال جمعیت این کشور به ۳۰ میلیون نفر خواهد رسید؟ ($\log 10/0.3 = 0.128$, $\log 3 = 0.477$)

$$\begin{aligned} P_t &= P_0 (1+r)^t \Rightarrow 30 = 10 (1 + 0.03)^t \Rightarrow 3 = (1/0.3)^t \Rightarrow \log 3 = t \log 1/0.3 \\ 0.477 &= t(0.128) \Rightarrow t = \frac{0.477}{0.128} = 3.75 \end{aligned}$$

۳۸- اگر در یک شهر زلزله‌ای به شدت $7/2$ ریشتر رخ داده باشد. میزان انرژی آزاد شده چه قدر است؟

$$\begin{aligned} \log E &= 11/8 + 1/5(7/2) \Rightarrow \log E = 11/8 + 10/8 = 22/6 \\ E &= 10^{22/6} \text{ Erg} \end{aligned}$$

- ۳۹- تحت شرایط ایدهآل، جرم یک توده‌ی معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰ میلی‌گرم باکتری وجود داشته باشد:
- (الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.
- (ب) جرم توده را پس از ۸ ساعت برآورد کنید.

(الف)

زمان t (ساعت)	۰	۱	۲	۳
y جرم (میلی‌گرم)	10	10×2	$(10 \times 2) \times 2$	$(10 \times 2) \times 2 \times 2$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2^2$ $\times 2^3$

$$\Rightarrow y = 10 \times 2^t$$

$$y = 10 \times 2^t \xrightarrow{t=8} y = 10 \times 2^8 = 2560 \quad (\text{میلی‌گرم}) \quad (\text{ب})$$

- ۴۰- زلزله‌ای به بزرگی $5/9$ ریشتر در ۳۰ کیلومتری شهر کاکی استان بوشهر در صبح پنج شنبه ۳۰ فروردین به وقوع پیوست. انرژی آزاد شده بر حسب ارگ را حساب کنید. ($\log 4/5 = 0/65$)

$$M = 5/9$$

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5(5/9) \Rightarrow \log E = 11/8 + 8/85$$

$$\Rightarrow \log E = 20/85 \Rightarrow E = 10^{20/85} = 10^{0/85} \times 10^{20} \xrightarrow{\log 4/5 = 0/65} E = 4/5 \times 10^{20}$$