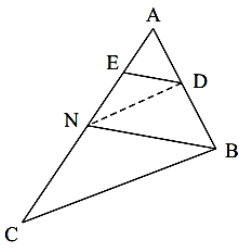
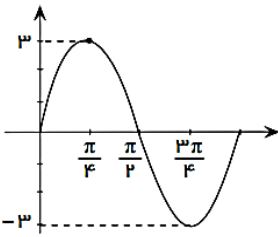
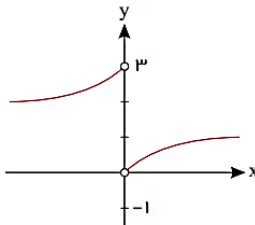


نام و نام خانوادگی: .....  
 مقطع و رشته: یازدهم تجربی  
 نام پدر: .....  
 شماره داوطلب: .....  
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران  
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ  
 آزمون پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰

نام درس: ریاضی ۲  
 نام دبیر: روزبه سیگارودی  
 تاریخ امتحان: ۱۷ / ۰۳ / ۱۴۰۰  
 ساعت امتحان: ۰۸ : ۳۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره به عدد:	نمره به حروف:
			نام دبیر:
محل مهر و امضا: مدیر		نمره به عدد:	نمره به حروف:
		نام دبیر:	تاریخ و امضا:
۱	اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.		
۱/۵	 <p>در شکل زیر <math>DE \parallel BN</math> و <math>DN \parallel BC</math>، <math>AE = 4</math> و <math>EN = 6</math> می‌باشد. اندازه‌ی <math>AC</math> را بدست آورید.</p>		
۱	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x+1)^3 - 4 \end{cases}$		ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.
۱			مقدار عبارت $\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right)$ را بدست آورید.
۱			معادله‌ی توابع مثلثاتی را که منحنی‌های آن‌ها داده شده است، تعیین کنید.
۱/۵			اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 3$ از دو نقطه $A(2, 6)$ و $B(1, 0)$ بگذرد، مقدار $f(-1)$ را بیابید.
۱	<p><b>الف</b></p> $3^{3n-2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2}$		معادلات نمایی زیر را حل کنید.
۱/۵			از معادله‌ی لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار $\log_8(2x - 1)$ را بیابید.

نمره	سؤالات	نقطه
۱	 <p>شکل زیر، نمودار تابع <math>f</math> است. <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)</math> را محاسبه کنید.</p>	۹
۲	<p><b>الف</b></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] +  x }{x + 1}$ <p><b>ب</b></p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{ [x] + [-x] }$	۱۰
۱/۵	<p>مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری بدست آورید که تابع <math>f(x) = \begin{cases} x^2 + 2[x], &amp; x &gt; 1 \\ a + 3, &amp; x = 1 \\ bx + 6, &amp; x &lt; 1 \end{cases}</math> در نقطه <math>x = 1</math> پیوسته باشد.</p>	۱۱
۱/۵	<p>دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرطی که بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را بدست آورید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد از فضای نمونه <math>S</math> باشند و داشته باشیم <math>P(A') = \frac{2}{3}</math> و <math>P(B) = \frac{1}{4}</math> و <math>P(A B) = \frac{1}{6}</math>، مقدار <math>P(A \cup B)</math> را بدست آورید.</p>	۱۳
۱/۵	<p>هشت داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ داریم. اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده حاصل را بدست آورید.</p>	۱۴
۱/۵	<p>میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۲/۰ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها را بدست آورید.</p>	۱۵



ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha} \rightarrow X = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{X}$ $\beta \rightarrow \frac{1}{\beta}$ $\rightarrow 4\left(\frac{1}{X}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{X}\right) - 5 = 0 \rightarrow \frac{4}{X^2} - \frac{5}{X} - 5 = 0 \rightarrow 4 - 5X - 5X^2 = 0 \rightarrow \boxed{5x^2 + 5x - 4 = 0}$	
۲	$DE \parallel BN \xrightarrow{\text{ثبات}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AN} \quad (1)$ $DN \parallel BC \xrightarrow{\text{ثبات}} \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$ $(1), (2) \rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{AC} \rightarrow \boxed{AC = 25}$	
۳	$y = (x+1)^2 - 4 \rightarrow y+4 = (x+1)^2 \rightarrow \sqrt{y+4} = x+1 \rightarrow x = \sqrt{y+4} - 1$ $\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y+4} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 1 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 1 \end{cases}$	
۴	$\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{179\pi}{6}\right)$ $= -\sin\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$ $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	
۵	<p>طبق شکل دوره تناوب برابر <math>T = \pi</math> است. با در نظر گرفتن شکل کلی تابع به صورت <math>y = a \sin bx</math> داریم:</p> $T = \frac{2\pi}{ b } = \pi \rightarrow  b  = 2 \rightarrow b = \pm 2$ <p>با در نظر گرفتن <math>b = \pm 2</math>، طبق شکل <math>a = \pm 3</math> خواهد بود.</p> $y = 3 \sin(2x) \quad (1)$ <p>در حالت کلی برای توابع به صورت <math>y = a \sin bx</math>، <math>ab &gt; 0</math> برای <math>a &gt; 0</math> و <math>ab &lt; 0</math> برای <math>a &lt; 0</math>. اگر در این سؤال <math>b = -2</math> را در نظر بگیریم، برای <math>a</math> نیز داریم: <math>a = -3</math> بنابراین:</p> $y = -3 \sin(-2x) \quad (2)$ <p>(۲) که هر دو جواب یعنی معادلات (۱) و (۲) قابل قبول اند.</p>	
۶	$\begin{cases} A(2, 6) \rightarrow f(2) = 6 \rightarrow ab^2 - 3 = 6 \rightarrow ab^2 = 9 \div \boxed{b=3}, \boxed{a=1} \\ B(1, 0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow ab - 3 = 0 \rightarrow ab = 3 \end{cases}$ $\rightarrow \boxed{f(x) = 3^x - 3} \rightarrow f(-1) = 3^{-1} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = \frac{1-27}{3} \rightarrow \boxed{f(-1) = \frac{-26}{3}}$	
۷	<p>الف</p> $2^{3n-2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} \rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{(2^5)^2} \rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{2^{10}}$ $\rightarrow 2^{3n-2} = 2^{-10} \rightarrow 3n - 2 = -10 \rightarrow 3n = -8 \rightarrow \boxed{n = -\frac{8}{3}}$	

$\log_r(rx^r + 1) - \log_r(x + r) = 1 \rightarrow \log_r \frac{rx^r + 1}{x + r} = \log_r r \rightarrow \frac{rx^r + 1}{x + r} = r$ $\rightarrow rx^r + 1 = rx + r \rightarrow rx^r - rx - r = 0 \rightarrow (x + 1)(rx - r) = 0 \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ rx - r = 0 \rightarrow x = \frac{r}{r} \end{cases}$ $x = -1 \rightarrow \log_r(rx - 1) = \log_r(r(-1) - 1) = \log_r(-r) \quad \text{غ}$ $x = \frac{r}{r} \rightarrow \log_r(rx - 1) = \log_r(r(\frac{r}{r}) - 1) = \log_r r = \log_r r^r = \frac{r}{r} \log_r r \rightarrow \log_r(rx - 1) = \frac{r}{r}$	۸
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + r = r$	۹
<p><b>الف</b></p> $x \rightarrow 0^+ : x > 0 \rightarrow [x] = 0, x \rightarrow 0^- : x < 0 \rightarrow [x] = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]+[x]}{x+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]+[x]}{x+1} = \frac{-1+0}{0+1} = -1$ <p>حد ندارد. <math>\rightarrow</math></p> <p><b>ب</b></p> $x \rightarrow 0^- : x < 0 \rightarrow [x] = -1$ $x \rightarrow 0^- : x < 0 \xrightarrow{x-1} -x > 0 \rightarrow [-x] = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-r}{ [x] + [-x] } = \frac{-r}{ -1 + 0 } = -r$	۱۰
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^r + r[x] = (1)^r + r[1^+] = 1 + r(1) = r$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx + r = b(1) + r = b + r, f(1) = a + r$ $\rightarrow \begin{cases} a + r = r \rightarrow a = 0 \\ b + r = a + r \rightarrow b + r = r \rightarrow b = -r \end{cases}$	۱۱
<p>پیشامد هر دو عدد زوج <math>A = \{(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)\}</math></p> <p>پیشامد مجموع اعداد رو شده برابر ۸ <math>B = \{(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)(r, r)\}</math></p> <p><math>A \cap B = \{(r, r)(r, r)(r, r)\}</math></p> $P(A B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{r}{r} \rightarrow P(A B) = \frac{r}{r}$	۱۲
$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{r}{r} \rightarrow P(A) = \frac{1}{r}$ $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{r^2}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{1^2}{r^2}$	۱۳
$\frac{x_1 + x_r + \dots + x_n}{n} = 15 \rightarrow x_1 + x_r + \dots + x_n = 15n$ $r = \frac{(x_1 - 15)^r + (x_r - 15)^r + \dots + (x_n - 15)^r}{n}$ $\rightarrow (x_1 - 15)^r + (x_r - 15)^r + \dots + (x_n - 15)^r = nr$ <p style="text-align: right;">اگر دو داده جدید ۱۲ و ۱۸ را اضافه کنیم داریم:</p>	۱۴

$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + 12 + 18}{n + 2} = \frac{120 + 30}{10} \rightarrow \boxed{\bar{X} = 15}$ $\sigma^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_n - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2}{10} = \frac{32 + 9 + 9}{10}$ $\rightarrow \sigma^2 = \frac{50}{10} \rightarrow \boxed{\sigma^2 = 5}$	
<p style="text-align: right;">اگر طول ضلع مربع‌ها را <math>x_1, x_2, \dots, x_N</math> در نظر بگیریم:</p> $\bar{X} = 15, \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \boxed{\sigma = 3}$ <p style="text-align: right;">مساحت مربع‌ها را می‌توانیم بصورت <math>x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2</math> بنویسیم و داریم:</p> $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - \bar{X}^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - 15^2$ $\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 9 + 225 \rightarrow \boxed{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 234}$	۱۵
<b>امضاء:</b>	<b>جمع بارم : ۲۰ نمره</b>