۱- اگر داده‌های آماری ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۱۶, ۱۴, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۱۴ را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معیار داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۱٫۱ ۲) ۱٫۲ ۳) ۱٫۲۵ ۴) ۱٫۳

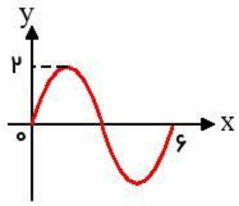
۲- در تابع خطی $f(x)$ اگر $f(3x-1)+3f(1-x)=4$, $f(5)=2$ باشد $f(14)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳- در نمودار تابع $f(x)=x^2$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی - قرینه نسبت به محور x ها- دو برابر کردن برد- انتقال ۳ واحد به طرف y های منفی-معادله‌ی نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=2x^2-8x-11$ ۲) $y=2x^2-16x-29$ ۳) $y=-2x^2-16x-35$ ۴) $y=-2x^2+16x-35$

۴- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۵- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{37}{64}$ ۳) $\frac{19}{32}$ ۴) $\frac{39}{64}$

۶- هشت داده‌ی آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده‌ی ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۴٫۸ ۴) ۵

۷- در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸٫۴ باشد، در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مربوط به بازه $[21,25)$ چند درجه است؟

حدود دسته	$9-13$	$13-17$	$17-21$	$21-25$	$25-29$
فراوانی	۳	۴	۷	x	۱

۱) ۹۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۶۰

۸- اگر $\left(\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)=x^{\sqrt{2}}$ باشد، x کدام است؟

۱) $(2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ۲) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۹- در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد فاصله نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۱٫۶ ۳) ۱٫۸ ۴) ۲

۱۰- اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{x^2-12x+1}{2x}$ مقدار $f(-4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -3 ۴) -5

۱۱ اگر $f(x+\frac{1}{x}) = x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۱۲ اگر $A = \frac{(4)^{0.75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 9^{0.25}$ باشد، $\log_A^{\sqrt{2}-1}$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳ در نمودار جعبه‌ای ۲۳ داده‌ی آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱٫۶ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

(۱) ۲۵٫۸ (۲) ۲۶ (۳) ۲۶٫۱ (۴) ۲۶٫۲

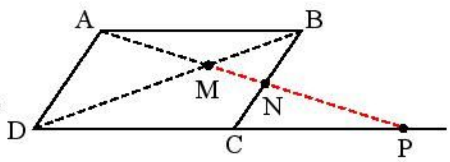
۱۴ به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

(۱) $a<-4$ (۲) $a>-4$ (۳) $a<4$ (۴) $a>4$

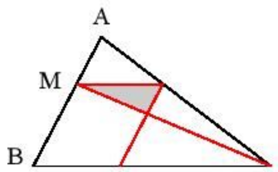
۱۵ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

(۱) -2 (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۶ در شکل روبه‌رو، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل $MP \times MN$ برابر کدام است؟



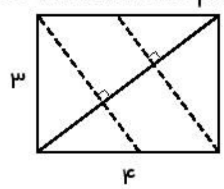
(۱) AB^2 (۲) AD^2 (۳) MD^2 (۴) MA^2



۱۷ در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۱۸ در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل، کدام است؟



(۱) ۵٫۲۵ (۲) ۵٫۷۵ (۳) ۶ (۴) ۷٫۵

۱۹ در مثلث ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶٫۷۶ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

(۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{2}{8}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۲۰ حد عبارت $\frac{\cos x}{1-\sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) 2 (۳) 1 (۴) $-\infty$

۲۱ در نمودار جعبه‌ای ۲۰ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت چپ برابر میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت راست است. انحراف معیار کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۰٫۵ (۳) ۱ (۴) جذر میانه

۲۲ هشتاد داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده‌ی جدید به این جدول افزوده شود فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۳ داده‌های آماری ۱۸, ۷, ۲۰, ۱۶, ۱۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۷, ۲۱, ۱۲, ۱۳ را با نمودار جعبه ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

(۱) ۴٫۵۹ (۲) ۴٫۹۵ (۳) ۵٫۲۴ (۴) ۵٫۷۱

۲۴ ضریب تغییرات، در داده‌های آماری زیر، با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟

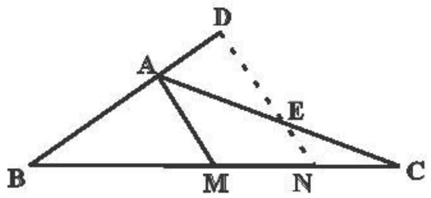
مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴	۵۰

(۱) ۰٫۱۶ (۲) ۰٫۱۸
(۳) ۰٫۲۴ (۴) ۰٫۲۸

۲۵ معادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$ چند جواب دارد؟

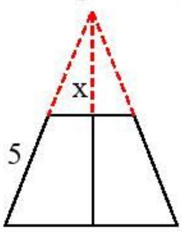
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۲۶ در مثلث ABC $(AB=\frac{2}{3}AC)$، پاره خط ND موازی میانه‌ی AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



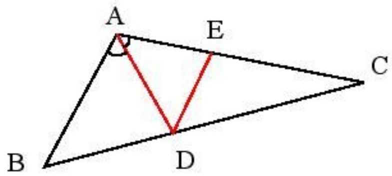
(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۷ در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟



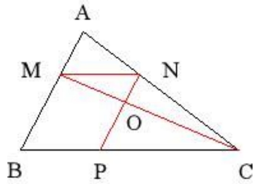
(۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۷ (۴) ۸

۲۸ در شکل مقابل $5AB=3AC=60$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. $DE||AB$، اندازه‌ی EC کدام است؟



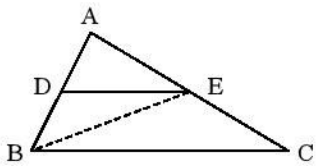
(۱) ۱۲ (۲) ۱۲٫۵
(۳) ۱۳٫۵ (۴) ۱۵

۲۹- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{7}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



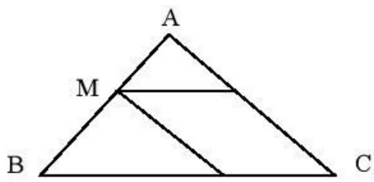
۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

۳۰- در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{4}{5}BD$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



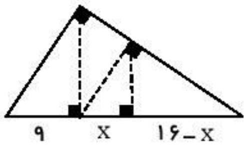
۱) ۲
۲) ۲٫۲۵
۳) ۲٫۵
۴) ۲٫۷۵

۳۱- در شکل مقابل، $AM=\frac{2}{3}MB$ و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۰
۳) ۵۴
۴) ۶۰

۳۲- در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

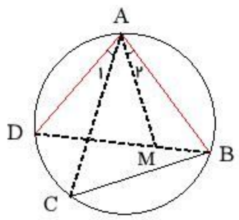


۱) ۴٫۵۴
۲) ۵٫۳۶
۳) ۵٫۷۶
۴) ۶٫۷۵

۳۳- در مثلث ABC، داریم $\hat{A}=2\hat{B}$ و $BC=6$ و $AC=4$، اندازه‌ی ضلع AB کدام است؟

۱) ۴٫۵
۲) ۵
۳) ۵٫۵
۴) ۶

۳۴- در شکل مقابل $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ، حاصل $AD\cdot BC$ برابر کدام است؟



۱) $DM\cdot AC$
۲) $BM\cdot AC$
۳) $AB\cdot CD$
۴) $BD\cdot BM$

۳۵- اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ برابر کدام است؟

۱) $-\tan\alpha$
۲) $-\cot\alpha$
۳) $\tan\alpha$
۴) $\cot\alpha$

۳۶- از دو معادله‌ی $x^2-y^2=32, \log_2^x=1+\log_2^{y+1}$، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۳۷- اگر $2^{-x}<0.000001$ و $\log 2=0.301$، کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

۱) ۱۹٫۸۹
۲) ۱۹٫۹۱
۳) ۱۹٫۹۴
۴) ۱۹٫۹۷

۳۸ حاصل $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

۳۹ بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۲۵ ۳) ۰٫۳ ۴) ۰٫۴

۴۰ در ۲۵ داده‌ی آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده های ناجور ۱۰ ، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ ، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

۱) ۱۴٫۷۲ ۲) ۱۴٫۸۱ ۳) ۱۵٫۳۳ ۴) ۱۶٫۶۶

۴۱ در دسته‌بندی ۱۲۰ داده‌ی آماری در ۹ طبقه، دسته‌ی اول به صورت $25 - 22$ می‌باشد. می‌دانیم ۴۵ درصد داده‌ها کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۰٫۲ است. تعداد داده‌های کمتر از ۳۷ کدام است؟

۱) ۶۷ ۲) ۷۶ ۳) ۷۸ ۴) ۸۷

۴۲ کوچکترین و بزرگترین داده‌های آماری ۳۱ و ۵۲ می‌باشند این داده‌ها در ۷ دسته، دسته بندی شده‌اند. ۳۷ درصد داده‌ها کمتر از ۴۰ و ۴۸ درصد آن‌ها بیشتر یا مساوی ۴۳ می‌باشند. اگر فراوانی کل ۸۰ باشد فراوانی دسته‌ی وسط کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۴۳ داده‌های آماری در ۸ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. بازه‌ی دسته چهارم به‌صورت $[26, 29)$ می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۶ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی پنجم کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۴٫۵ ۳) ۳۵ ۴) ۳۵٫۵

۴۴ در داده‌های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۸، ۶، ۶، ۴، ۳، ۳ داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۰٫۱۵ ۲) ۰٫۱۷ ۳) ۰٫۲۱ ۴) ۰٫۲۵

۴۵ در نمودار جعبه‌ای ۳۱ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت چپ ۱۲ و سمت راست ۲۱ می‌باشد. اگر میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۱۵ باشد، میانگین کل این داده‌ها، تقریباً کدام است؟

۱) ۱۵٫۴۵ ۲) ۱۵٫۵۴ ۳) ۱۵٫۶۷ ۴) ۱۵٫۷۶

۴۶ ضریب تغییرات داده‌ها در جدول فراوانی مقابل، کدام است؟

x_i	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
F_i	۳	۲	۱۲	۶	۱

۱) ۰٫۰۸ ۲) ۰٫۱ ۳) ۰٫۲ ۴) ۰٫۲۵

۴۷ باتوجه به جدول آماری دسته‌بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

$x-44$	-3	-1	۱	۳	۵
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

۱) ۰٫۰۵ ۲) ۰٫۰۸ ۳) ۰٫۱ ۴) ۰٫۲

۴۸ در داده‌هایی با جدول فراوانی

حدود دسته	۷ − ۵	۹ − ۷	۱۱ − ۹	۱۳ − ۱۱	۱۵ − ۱۳
فراوانی	۳	۲	a	۶	۱

اگر واریانس برابر ۶ باشد، فراوانی دسته‌ی سوم، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۹ جدول زیر فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است، با تعیین α، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی دسته	۰٫۱	۰٫۲۵	۰٫۲	α

(۱) ۱۶٫۵ (۲) ۱۶٫۸

(۳) ۱۷٫۲ (۴) ۱۷٫۶

۵۰ اگر میانگین داده‌های دسته بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته‌ی چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

(۱) ۴٫۸۵ (۲) ۴٫۹۲

(۳) ۵٫۵۵ (۴) ۵٫۷۴

پاسخنامه تشریحی

۱ **گزینه ۱** داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$\underbrace{9, 11, 11, 12, 14}, \underbrace{14}_{\text{میانه}}, \underbrace{15, 15, 16, 17, 18} \rightarrow$$

۱۶= چارک سوم و ۱۱= چارک اول

داده‌های داخل جعبه عبارتند از: $12, 14, 14, 15, 15$ ، می‌توانیم برای راحتی کار از همه داده‌ها ۱۱ واحد کم کنیم (انحراف معیار تغییر نمی‌کند) و داده‌های جدید عبارتند از: $1, 3, 3, 4, 4$.

$$\bar{x} = \frac{1+3+3+4+4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5}\left((1-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2\right)$$

$$= \frac{6}{5} = 1/2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1/2} \approx 1/1$$

۲ **گزینه ۲** تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(3x-1) + 3f(1-x) = 4 \rightarrow a(3x-1) + b + 3\left(a(1-x) + b\right) = 4$$

$$\rightarrow 3ax - a + b + 3a - 3ax + 3b = 4 \rightarrow 2a + 4b = 4 \rightarrow a + 2b = 2$$

$$f(5) = 2 \rightarrow 5a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 5a + b = 2 \end{cases} \rightarrow a = \frac{2}{9}, b = \frac{8}{9} \rightarrow f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$

$$\rightarrow f(14) = \frac{28}{9} + \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

۳ **گزینه ۳**

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{ های منفی}} f_1(x) = (x+4)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} f_2(x) = -(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_3(x) = -2(x+4)^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3$$

$$f_4(x) = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 \rightarrow y = -2x^2 - 16x - 35$$

۴ **گزینه ۳** دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

$$y = a\ \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\,\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm\frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a\sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

بنابراین $a = 2$ است پس $a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

۵ **گزینه ۲** در هر پرتاب احتمال آنکه هر دو تاس زوج باشند، برابر با $\frac{1}{4} = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$ است و لذا احتمال آنکه هر دو تاس زوج نباشند، $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ است. اگر A_i پیشامد این باشد که در پرتاب i اُم نتیجه حاصل شده باشد، یعنی در $(i-1)$ پرتاب قبلی هر دو تاس زوج نبوده و در پرتاب i اُم هر دو تاس زوج ظاهر شده است، پس $P(A_i) = (\frac{3}{4})^{i-1}(\frac{1}{4})$.

بنابراین احتمال آنکه حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل شود، برابر است با:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{4} + (\frac{3}{4})(\frac{1}{4}) + (\frac{3}{4})(\frac{3}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

یا به زبان ساده تر:

پرتاب اول هر دو زوج باشند : $\frac{1}{4}$

پرتاب اول هر دو زوج نباشند و پرتاب دوم هر دو زوج باشند : $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

$\frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴}$: پرتاب اول و پرتاب دوم هر دو زوج نباشند و پرتاب سوم هر دو زوج باشند

پس $P(A) = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$ است.

۶ گزینه ۴

$$\bar{x} = ۱۵ \Rightarrow \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸}{۸} = ۱۵ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸ = ۱۲۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۸}\left((x_۱ - ۱۵)^۲ + (x_۲ - ۱۵)^۲ + \cdots + (x_۸ - ۱۵)^۲\right) = ۴$$

$$\Rightarrow (x_۱ - ۱۵)^۲ + (x_۲ - ۱۵)^۲ + \cdots + (x_۸ - ۱۵)^۲ = ۳۲$$

چون میانگین دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۱۵ است پس در ده داده‌ی حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^۲_{\text{جدید}} = \frac{۱}{۱۰}(\underbrace{(x_۱ - ۱۵)^۲ + (x_۲ - ۱۵)^۲ + \cdots + (x_۸ - ۱۵)^۲}_{۳۲} + (۱۲ - ۱۵)^۲ + (۱۸ - ۱۵)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۱۰}(۳۲ + ۹ + ۹) = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵$$

۷ گزینه ۱ مراکز دسته‌ها به‌ترتیب ۱۱, ۱۵, ۱۹, ۲۳, ۲۷ می‌باشد.

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۹ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - ۱۹ = \frac{۱}{۱۵ + x}((۳ \times (-۸)) + (۴ \times (-۴)) + (۷ \times ۰) + (x \times ۴) + (۱ \times ۸))$$

$$\to -۰/۶ = \frac{۱}{۱۵ + x}(-۲۴ - ۱۶ + ۴x + ۸) \to -۰/۶ = \frac{۴x - ۳۲}{x + ۱۵}$$

$$\to -۰/۶x - ۹ = ۴x - ۳۲ \to ۴/۶x = ۲۳ \to x = ۵$$

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N} \times F_i = \frac{۳۶۰}{۱۵ + ۵} \times ۵ = ۹۰^\circ$$

۸ گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می کنیم.

$$\left(\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \left(\sqrt[۴]{۵ \times ۵^{\frac{۱}{۳}}}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \left(\sqrt[۴]{۵^{\frac{۴}{۳}}}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \left(۵^{\frac{۴}{۱۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$$

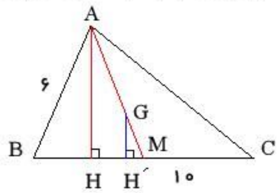
$$\sqrt{۶ - ۲\sqrt{۵}} = \sqrt{\left(\sqrt{۵} - ۱\right)^۲} = \underbrace{\left|\sqrt{۵} - ۱\right|}_{+} = \sqrt{۵} - ۱$$

پس داریم: $\sqrt{۵} - (\sqrt{۵} - ۱) = x^{\sqrt{۲}} \to ۱ = x^{\sqrt{۲}} \to x = ۱$

۹ گزینه ۲ طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \to BC = ۱۰$$

حال اگر G مرکز ثقل مثلث باشد و از G عمود GH' را بر BC وارد کنیم، آنگاه داریم:



$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{۶\times۸}{۲} \\ S &= \frac{AH\times۱۰}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AH = \frac{۶ \times ۸}{۱۰} = ۴/۸$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GH'}{AH} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow GH' = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳} \times ۴/۸ = ۱/۶$$

بنابراین می‌توانیم نکته‌ی زیر را به خاطر بسپاریم:

فاصله‌ی محل تلاقی میانه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه از وتر برابر است با $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع وارد بر وتر.

۱۰ گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}\rightarrow ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^۲+bx+a+bx}{x}$$

$$=\frac{ax^۲+۲bx+a}{x}=\frac{۲ax^۲+۴bx+۲a}{۲x}=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}\xrightarrow{\text{مقایسه}}a=\frac{۱}{۲},\ ۴b=-۱۲\ ,\ b=-۳$$

بنابراین $f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳\rightarrow f(-۴)=-۲-۳=-۵$

۱۱ گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)}$

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}\rightarrow f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x(\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$$

$$\rightarrow f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t}f(t)=t^۳-۳t\rightarrow f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^۳-۳\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}$$

۱۲ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

ابتدا عبارت A را خلاصه می‌کنیم.

$$A=\frac{(۲^۲)^{\frac{۳}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+(۳^۲)^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)}{\left(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right)\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{\left(۱+\sqrt{۲}\right)^۲-\left(\sqrt{۳}\right)^۲}+\sqrt{۳}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۱+۲\sqrt{۲}+۲-۳}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۲\left(\sqrt{۲}+۲\right)}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۲}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}$$

توجه کنید که $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱$ است.

$$\log_A^{\sqrt{۲}-۱}=\log_{۱+\sqrt{۲}}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}=\log_{۱+\sqrt{۲}}^{(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}}=-۱$$

۱۳ گزینه ۲ داده‌ی دوازدهم، میانه است. داده‌ی ششم، چارک اول و داده‌ی هجدهم، چارک سوم می‌باشند. بنابراین ۱۳ داده داخل و روی جعبه هستند و دنباله‌ی سمت چپ و سمت راست هر کدام شامل ۵داده می باشند.

میانگین داده‌های سمت چپ $=۲۱/۶\rightarrow$ مجموع داده‌های سمت چپ $=۵\times ۲۱/۶=۱۰۸$

میانگین داده‌های سمت راست $=۳۳\rightarrow$ مجموع داده‌های سمت راست $=۵\times ۳۳=۱۶۵$

میانگین داده‌های داخل و روی جعبه $=۲۵\rightarrow$ مجموع داده‌های داخل و روی جعبه $=۱۳\times ۲۵=۳۲۵$

میانگین کل داده‌ها $=\frac{۱۰۸+۱۶۵+۳۲۵}{۲۳}=\frac{۵۹۸}{۲۳}=۲۶$

۱۴ گزینه ۱

$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=۱$ است و معادله بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l}
x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴ & x-۱ \\ \cline{2-2}
-x^۳+x^۲ & x^۲+ax+۴ \\ \cline{1-1}
ax^۲+(۴-a)x-۴ & \\
-ax^۲+ax & \\ \cline{1-1}
۴x-۴ & \\
-۴x+۴ & \\ \cline{1-1}
\text{صفر} &
\end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=۱$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه

ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$\Delta > 0 \to b^2 - 4ac > 0 \to a^2 - 16 > 0 \to a^2 > 16 \to a > 4$ یا $a < -4 \quad (I)$

$S > 0 \to -\dfrac{b}{a} > 0 \to -a > 0 \to a < 0 \quad (II)$

$P > 0 \to \dfrac{c}{a} > 0 \to 4 > 0$ همواره برقرار است (III)

از اشتراک $I\,,\,II\,,\,III$ به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

۱۵ گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x = 2$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

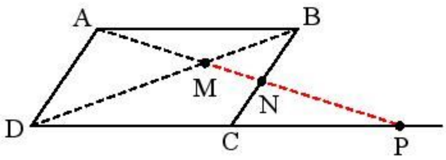
پس معادله به صورت $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x - 2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$ می‌شود.

۱۶ گزینه ۴

از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

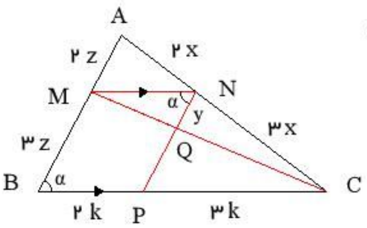


$$\left.\begin{aligned} &BN(\| AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ &AB \| DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN \times MP$$

۱۷ گزینه ۱

فرض کنیم $AM = 2z$ و $MB = 3z$ باشد، حال طبق قضیه‌ی تالس $AN = 2x$ و $NC = 3x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN \| BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم، با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم $NQ = y$ داریم:



$$\frac{y}{2} = \frac{3x}{2x + 3x} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

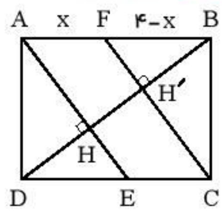
هم چنین باز بر طبق تالس:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{PC}{BP} \Rightarrow \begin{cases} PC = 3k \\ BP = 2k = MN \end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{BMNP}} = \frac{\frac{1}{2} \times MN \times NQ \times \sin\alpha}{MB \times BP \times \sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \times 2k \times \frac{6}{5} \times \sin\alpha}{3 \times 2k \times \sin\alpha} = \frac{1}{5} = 20\%$$

۱۸ گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABD} : AB^2 + AD^2 = BD^2 \to 4^2 + 3^2 = BD^2 \to BD = 5$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : AD^2 = DH \times BD \to 9 = DH \times 5 \to \begin{cases} DH = \dfrac{9}{5} \\[2mm] BH' = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

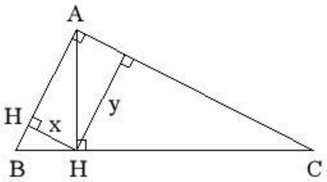
$$\to HH' = BD - DH - BH' = 5 - \frac{9}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : FH' \| AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BH'}{BH} \to \frac{4 - x}{4} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{9}{16} \to 16 - 4x = 9 \to x = \frac{7}{4}$$

$$S_{AFCE} = AD \times AF = 3 \times x = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$$

۱۹ گزینه ۱

مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث ABH را S' و مساحت مثلث ACH را S'' می‌نامیم.



$$\frac{S}{S'}=۶/۷۶\rightarrow\frac{S'+S''}{S'}=۶/۷۶\xrightarrow{\text{تفکیک}}۱+\frac{S''}{S'}=۶/۷۶\rightarrow\frac{S''}{S'}=۵/۷۶$$

چون دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر مجذور نسبت تشابه است، لذا داریم:

$$\frac{S''}{S'}=۵/۷۶=k^۲\rightarrow k=۲/۴$$

طراح سوال نسبت ارتفاع های دو مثلث متشابه را خواسته است که همان برابر نسبت تشابه است.

$$\frac{y}{x}=۲/۴=\frac{۲۴}{۱۰}=\frac{۱۲}{۵}\longrightarrow\frac{x}{y}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲۰ گزینه ۴ می‌توان برای رفع ابهام از روابط مثلثاتی استفاده نمود. بدین منظور مخرج کسر را در مزدوج ضرب کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{۱-\sin x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}=\frac{\cancel{\cos}\,x(۱+\sin x)}{\cancel{\cos^۲}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

۲۱ گزینه ۱

در ۲۰ داده‌ی آماری، میانه برابر با میانگین داده‌های دهم و یازدهم است:

$$\text{میانه}=\frac{x_{۱۰}+x_{۱۱}}{۲}$$

چارک اول، میانه‌ی ۱۰ داده‌ی اول است، یعنی برابر با میانگین داده‌های پنجم و ششم:

$$Q_۱=\frac{x_۵+x_۶}{۲}$$

و چارک سوم، میانه‌ی ۱۰ داده‌ی آخر است، یعنی برابر با میانگین داده‌های پانزدهم و شانزدهم:

$$Q_۳=\frac{x_{۱۵}+x_{۱۶}}{۲}$$

$$\overbrace{x_۱,\cdots x_۵}^{\text{دنباله‌ی چپ}}\underset{\underset{Q_۱}{\downarrow}}{,}\ x_۶,\cdots x_{۱۰}\underset{\underset{Q_۲}{\downarrow}}{,}\ x_{۱۱},\cdots x_{۱۵}\underset{\underset{Q_۳}{\downarrow}}{,}\ \overbrace{x_{۱۶},\cdots x_{۲۰}}^{\text{دنباله‌ی راست}}$$

بنا به فرض،میانگین دنباله‌ی سمت چپ و دنباله‌ی سمت راست با هم برابر است،پس:

$$\frac{x_۱+\cdots x_۵}{۵}=\frac{x_{۱۶}+\cdots x_{۲۰}}{۵}\Rightarrow x_۱+\cdots x_۵=x_{۱۶}+\cdots x_{۲۰}$$

اما می‌دانیم داده‌های دنباله‌ی چپ همواره کوچک‌تر یا مساوی داده‌های دنباله‌ی راست‌اند، پس:

$$x_۱+\cdots+x_۵\leq x_{۱۶}+\cdots+x_{۲۰}$$

پس حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که همه‌ی داده‌ها با هم برابر باشند، یعنی:

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_{۱۰}=x_{۱۱}=\cdots=x_{۲۰}$$

بنابراین در این داده‌ها، شاخص‌های پراکندگی از جمله انحراف معیار، برابر صفر است.

۲۲ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}x=\text{فراوانی مطلق دسته‌ی وسط قبل از تغییر}\\ N=۸۰=\text{تعداد کل داده‌های جامعه قبل از تغییر}\\ a=\text{تعداد داده‌های افزایش یافته در دسته‌ی وسط}\\ N+۲۰=۱۰۰=\text{تعداد کل داده‌های جامعه بعد از تغییر}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فراوانی نسبی}=\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}}\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{۸۰}=\text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط قبل از تغییر}\\ \frac{x+a}{۱۰۰}=\text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط بعد از تغییر}\end{array}\right.$$

در سوال گفته شده است که فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نکرده است و باید $\frac{a}{x}$ را پیدا کنیم

$$\frac{x}{۸۰}=\frac{x+a}{۱۰۰}\rightarrow ۱۰۰x=۸۰x+۸۰a\rightarrow ۲۰x=۸۰a\rightarrow\frac{a}{x}=\frac{۲۰}{۸۰}=\frac{۱}{۴}$$

۲۳ گزینه ۴ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, \underbrace{۱۳}_{\text{میانه}}, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱$

چارک اول برابر $۱۰٫۵ = \frac{۱۰ + ۱۱}{۲}$ و چارک سوم برابر $۱۷٫۵ = \frac{۱۷ + ۱۸}{۲}$ است. بنابراین داده‌های بین ۱۰٫۵ و ۱۷٫۵ داخل جعبه قرار می‌گیرند. یعنی:

$۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷$

$$\bar{x} = \frac{۱۱ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۷}{۷} = \frac{۹۸}{۷} = ۱۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$= \frac{۱}{۷}\left((۱۱ - ۱۴)^۲ + (۱۲ - ۱۴)^۲ + (۱۲ - ۱۴)^۲ + (۱۳ - ۱۴)^۲ + (۱۶ - ۱۴)^۲ + (۱۷ - ۱۴)^۲ + (۱۷ - ۱۴)^۲\right)$$

$$= \frac{۱}{۷}(۹ + ۴ + ۴ + ۱ + ۹ + ۹) = \frac{۴۰}{۷} \simeq ۵٫۷۱$$

۲۴ گزینه ۳ ابتدا جدول داده شده را براساس فراوانی مطلق می‌نویسیم (اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی iاُم و $(i+۱)$اُم، فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+۱)$اُم را می‌دهد).

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۰ واحد کم می‌کنیم و می‌دانیم اگر از تمام داده‌ها مقداری ثابت کم کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x} - ۱۰ = \frac{۱}{۵۰}((۷ \times (-۴)) + (۹ \times (-۲)) + (۱۷ \times ۰) + (۱۱ \times ۲) + (۶ \times ۴))$$

$$\to \bar{x} - ۱۰ = \frac{۱}{۵۰}(-۲۸ - ۱۸ + ۲۲ + ۲۴) \to \bar{x} - ۱۰ = ۰ \to \bar{x} = ۱۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۵۰}\left(۷(۶-۱۰)^۲ + ۹(۸-۱۰)^۲ + ۱۷(۱۰-۱۰)^۲ + ۱۱(۱۲-۱۰)^۲ + ۶(۱۴-۱۰)^۲\right)$$

$$= \frac{۱}{۵۰}(۱۱۲ + ۳۶ + ۰ + ۴۴ + ۹۶) = \frac{۲۸۸}{۵۰} = ۵٫۷۶ \to \sigma = ۲٫۴$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲٫۴}{۱۰} = ۰٫۲۴$$

۲۵ گزینه ۱ شرط اولیه‌ی جواب آن است که زیر رادیکال‌ها بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$-x^۳ + ۴x^۲ + ۲۵x - ۱۰۰ \geq ۰ \to x^۳ - ۴x^۲ - ۲۵x + ۱۰۰ \leq ۰$$

$$\to x^۲(x - ۴) - ۲۵(x - ۴) \leq ۰ \to (x - ۴)(x^۲ - ۲۵) \leq ۰$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		-۵		۴		۵		$+\infty$
عبارت ≤ ۰		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow x \leq -۵$ یا $۴ \leq x \leq ۵ \quad (I)$

$$-x^۲ + ۶x - ۸ \geq ۰ \to x^۲ - ۶x + ۸ \leq ۰ \to (x - ۴)(x - ۲) \leq ۰$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
عبارت ≤ ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow ۲ \leq x \leq ۴ \quad (II)$

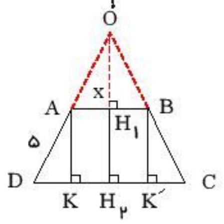
تنها اشتراک بین I, II عدد $x = ۴$ است که در معادله هم صدق می‌کند (امتحان کنید) پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۶ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} AM \parallel DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{MN}{MC} \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = ۱ \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}} \frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

۲۷ گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AK و BK' را رسم کنیم آنگاه دو مثلث قائم الزاویه ADK و $BK'C$ همنهشت می‌شوند پس $DK = K'C$ داریم:



$$DK = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۱۵ - ۹}{۲} = ۳$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DAK داریم:

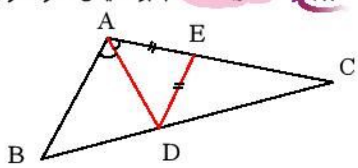
$$\text{فیثاغورس}: AK = \sqrt{AD^۲ - DK^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴ \Rightarrow H_۱H_۲ = ۴$$

از طرفی $AB \| DC$ است پس در مثلث تالس می‌نویسیم:

$$O\overset{\Delta}{D}H_۲ : \frac{OH_۱}{OH_۲} = \frac{AH_۱}{DH_۲} \Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱۵}{۲}} \Rightarrow ۵x = ۳x + ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

۲۸ گزینه ۲ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$، چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۲$، بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$۵AB = ۳AC = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲۰ \\ AB = ۱۲ \end{cases}$$



$$DE \| AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

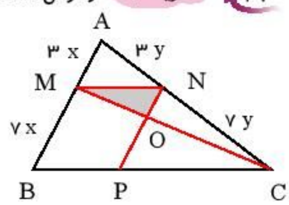
$$\frac{DE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۱۲}{۲۰} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow EC = ۱۲/۵$$

۲۹ گزینه ۳ از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می‌گیریم.

$$ON \| AM \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{ON}{AM} \Rightarrow \frac{۷y}{۱۰y} = \frac{ON}{۳x} \Rightarrow ON = \frac{۲۱}{۱۰}x$$

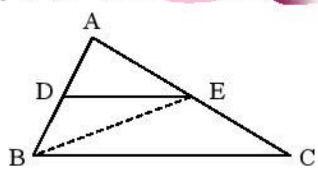
$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{۱}{۲}ON \times MN \sin \hat{N}}{\frac{۱}{۲}AM \times MN \sin \hat{M}} \xrightarrow{\hat{N}=\hat{M}} \frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{ON}{AM} = \frac{\frac{۲۱}{۱۰}x}{۳x} = \frac{۷}{۱۰} = ۷۰\%$$



۳۰ گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.

$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{۵}{۴}$$

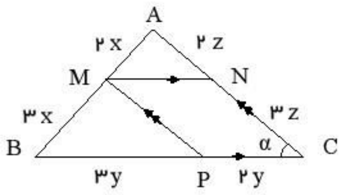
$$\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{AB} = \frac{۵}{۹}$$



دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}}}{\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۳۱ گزینه ۱ با توجه به فرض تست داریم:



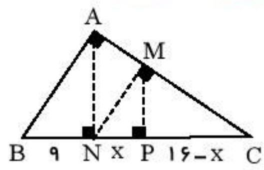
$$AM=\frac{۲}{۳}MB\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$$

$$MP||AC\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{MNPC}}{S_{ABC}}=\frac{۲y\times ۳z\times\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times ۵y\times ۵z\times\sin\alpha}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. توجه کنید که مساحت مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین دو ضلع می‌باشد.

۳۲ گزینه ۳ MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند.



$$\overset{\Delta}{ABC}: MN\parallel AB\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{CM}{MA}=\frac{CN}{NP}=\frac{۱۶}{۹}\quad (I)$$

$$\overset{\Delta}{ACN}: MP\parallel AN\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{CM}{MA}=\frac{CP}{PN}=\frac{۱۶-x}{x}\quad (II)$$

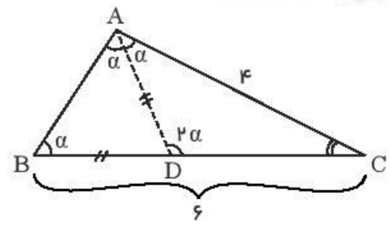
$$I,II\xrightarrow{\text{نسبت }\frac{CM}{MA}\text{ در هر دو تناسب وجود دارد}}\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}\rightarrow ۱۶x=۱۴۴-۹x\rightarrow ۲۵x=۱۴۴$$

$$\rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۲۵}=\frac{۵۷۶}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

۳۳ گزینه ۲ در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی رأس A را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ACD به علت برابری دو زاویه، متشابه هستند.

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ACD}\rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}\rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{۴}{CD}=\frac{۶}{۴}$$

$$\rightarrow CD=\frac{۸}{۳},\quad BD=۶-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$



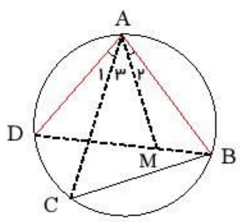
چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است پس $AD=BD=\frac{۱۰}{۳}$.

نسبت تشابه: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}\rightarrow\frac{AB}{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{۴}{\frac{۸}{۳}}=\frac{۶}{۴}\rightarrow AB=۵$

۳۴ گزینه ۱

چون $\hat{A}_1=\hat{A}_2$، پس $\hat{A}_1+\hat{A}_3=\hat{A}_2+\hat{A}_3$؛ و در نتیجه، $C\hat{A}B=M\hat{A}D$.

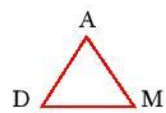
هم چنین:

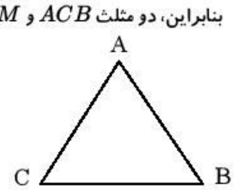


$$A\hat{C}B=\frac{\widehat{AB}}{۲}=A\hat{D}M$$

بنابراین، دو مثلث ACB و ADM بنابر سه زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{DM}{BC}\Rightarrow AD\cdot BC=AC\cdot DM$$





۳۵ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}$

$$\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=|\overbrace{\frac{1}{\sin\alpha}}^{+}|=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج}}\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$$

$$=|\overbrace{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}^{+}|=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

پس: $\sqrt{1+\cot^2\alpha}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

۳۶ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_2^x=1+\log_2^{y+1}\Rightarrow\log_2^x=\log_2^2+\log_2^{y+1}\Rightarrow\log_2^x=\log_2^{2y+2}\Rightarrow x=2y+2$$

$$x^2-y^2=32\Rightarrow(2y+2)^2-y^2=32\Rightarrow(4y^2+8y+4)-y^2=32\Rightarrow 3y^2+8y-28=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}\begin{cases}y=2\Rightarrow x=6\\ y=-\frac{14}{3}\Rightarrow \text{چون جلوی لگاریتم را منفی می کند، غیر قابل قبول است}\end{cases}$$

$$\log_4^{x+y}\xrightarrow[y=2]{x=6}\log_4^{6+2}=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}$$

۳۷ گزینه ۳

$$2^{-x}<0{,}000001\to 2^{-x}<10^{-6}$$

از طرفین رابطه‌ی داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می گیریم.

$$\log 2^{-x}<\log 10^{-6}\to -x\log 2<-6\xrightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}}x\log 2>6\to x(\frac{301}{1000})>6$$

$$\to x>\frac{6000}{301}\to x>19{,}934$$

پس کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار، ۱۹٫۹۴ است.

۳۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\lim\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\times\frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$$

$$\lim\frac{(1-x)+(2+\sqrt{5-x})}{\underbrace{(4-5+x)}_{(x-1)}(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{5-x})}{\cancel{(x-1)}(1+\sqrt{x})}=\frac{-4}{2}=-2$$

۳۹ گزینه ۳ A پیشامد حالات مطلوب است.

ابتدا ۳ رقم از ۵ رقم را انتخاب، سپس به !۳ حالت با آن ها عدد سه رقمی می سازیم.

$$n(S)=\binom{5}{3}\times 3!$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{انتخاب دو رقم فرد}}\times\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یک رقم زوج}}\times\underbrace{3!}_{\text{جابجایی سه رقم انتخابی}}$$

پس $P(A)=\frac{\binom{2}{2}\times\binom{3}{1}\times 3!}{\binom{5}{3}\times 3!}=0{,}3$ است.

۴۰ گزینه ۴

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{21} + 10 + 15 + 45 + 50}{25} = 30$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_{21} + 120 = 750 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_{21} = 630$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{21}}{21} = \frac{630}{21} = 30$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow 64 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2 = 1600$$

اما مجموع مربعات انحراف از میانگین ۴ داده‌ی ناجور برابر است با:

$$(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 = 1250$$

بنابراین: $1250 + \sum_{i=1}^{21}(x_i - \bar{x})^{21} = 1600 \Rightarrow \sum_{i=1}^{21}(x_i - \bar{x})^2 = 350$

حال به راحتی می‌توانیم واریانس ۲۱ داده‌ی باقی‌مانده را حساب کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{350}{21} = 16/66$$

۴۱ گزینه ۳ چون داده‌ها در ۹ دسته طبقه‌بندی شده‌اند، دسته‌ی پنجم دسته‌ی وسط است و طول دسته‌ها ۳ می‌باشد، بنابراین می‌توان دسته‌ی پنجم را نوشت.

$22 - 25 \quad 25 - 28 \quad 28 - 31 \quad 31 - 34 \quad \overset{\text{دسته‌ی پنجم}}{34 - 37} \cdots\cdots$

فراوانی مطلق دسته‌ی وسط: $F_i = 24 \leftarrow \frac{F_i}{120} = \frac{2}{10} \leftarrow \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده ها}} =$ فراوانی نسبی دسته‌ی وسط

چون ۴۵ درصد داده ها کمتر از ۳۴ هستند یعنی $\frac{45}{100} \times 120 = 54$ داده کمتر از ۳۴ هستند. پس تعداد داده های کمتر از ۳۷ برابر $78 = 54 + 24$ می‌باشد.

۴۲ گزینه ۲

$$C = \frac{R}{n} \Rightarrow C = \frac{52 - 31}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

طول دسته‌ها ۳ می‌باشد بنابراین می توان کران پایین دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی چهارم را پیدا کرد .

کران پایین دسته‌ی چهارم $= Min + 3C = 31 + 9 = 40$

پس دسته‌ی وسط $[40, 43)$ است می‌دانیم مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است بنابراین می توان درصد داده‌هایی که در این بازه قرار می گیرند را بدست آورد.

$$37 + x + 48 = 100 \Rightarrow x = 15$$

بنابراین ۱۵ درصد کل داده‌ها در دسته وسط قرار می‌گیرند یعنی: $\frac{15}{100} \times 80 = 12$.

۴۳ گزینه ۳

طول دسته $= C = 29 - 26 = 3 \quad , \quad C\frac{R}{n} \rightarrow 3 = \frac{R}{n} \rightarrow R = 24$

اگر داده‌ها در ۶ طبقه‌بندی شوند آن‌گاه طول دسته‌ها تغییر خواهد کرد ولی اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها یعنی دامنه، تغییر نمی‌کند.

$$C_{\text{جدید}} = \frac{R}{n'} = \frac{24}{6} = 4$$

در حالت اولیه کران پایین دسته‌ی اول ۱۷ بوده است زیرا:

کران پایین دسته‌ی چهارم = کران پایین دسته‌ی اول $+3C$

کران پایین دسته‌ی اول $= 17 = 26 - 9 = x \Rightarrow 26 = x + 9 \Rightarrow 26 = x + 3(3) \leftarrow$

پس دسته‌بندی جدید (با طول دسته‌ی ۴ $= C$) به صورت زیر خواهد بود:

$$[17 - 21), [21 - 25), [25 - 29), [29 - 33), [33 - 37), \cdots$$

مرکز دسته‌ی پنجم برابر است با:

$$\text{مرکز دسته‌ی پنجم} = \frac{۳۳+۳۷}{۲} = \frac{۷۰}{۲} = ۳۵$$

۴۴ **گزینه ۳**

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب‌شده داده شده‌اند.

$$\underbrace{۳,۳,۴,۶,۶,۸}_{\text{نیمه‌ی اول داده‌ها}},\underbrace{۸,۹,۱۱,۱۲,۱۲,۱۳}_{\text{نیمه‌ی دوم داده‌ها}}$$

تعداد داده‌ها ۱۲ تاست. در هر سری شش داده داریم که میانه‌ی شش داده برابر با نصف مجموع دو داده‌ی وسط است، پس داریم:

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها} = \text{چارک اول} = Q_۱ = \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها} = \text{چارک سوم} = Q_۳ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

طبق گفته‌ی مسأله از بین داده‌ها، اعداد کم‌تر از ۵ و بیش‌تر از ۱۱/۵ را حذف می‌کنیم که اعداد باقی‌مانده عبارتند از:

۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱

حالا ضریب تغییرات آن‌ها را می‌خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۲(۶)+۲(۸)+۹+۱۱}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

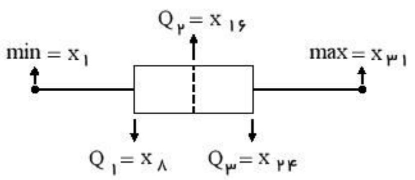
حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{۲(۶-۸)^۲+۲(۸-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۱۱-۸)^۲}{۶} = \frac{۸+۰+۱+۹}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{۳}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} \cong \frac{۱/۷}{۸} \cong ۰/۲۱$$

۴۵ **گزینه ۳**



اگر ۳۱ داده‌ی آماری مرتب شده را با $x_۱, x_۲, \cdots, x_{۳۱}$ نمایش دهیم، آن‌گاه میانه‌ی داده‌ها برابر با داده‌ی شانزدهم $(x_{۱۶})$ و چارک اول برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی اول، یعنی $x_۸$ و چارک سوم برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی آخر، یعنی $x_{۲۴}$ می‌باشد:

بنابراین باتوجه به رابطه‌ی $\sum_{i=۱}^{N} x_i = N\bar{x}$ در هر یک از سه گروه داده، داریم:

$$\text{دنباله‌ی چپ}: x_۱,\cdots,x_۷ \xrightarrow{N_۱=۷,\ \bar{x}_۱=۱۲} x_۱+\cdots+x_۷ = ۷\times۱۲ = ۸۴$$

$$\text{داخل و روی جعبه}: x_۸,\cdots,x_{۲۴} \xrightarrow{N_۲=۱۷,\ \bar{x}_۲=۱۵} x_۸+\cdots+x_{۲۴} = ۱۷\times۱۵ = ۲۵۵$$

$$\text{دنباله‌ی راست}: x_{۲۵},\cdots,x_{۳۱} \xrightarrow{N_۳=۷,\ \bar{x}_۳=۲۱} x_{۲۵}+\cdots+x_{۳۱} = ۷\times۲۱ = ۱۴۷$$

$$\bar{x} = \frac{(x_۱+\cdots+x_۷)+(x_۸+\cdots+x_{۲۴})+(x_{۲۵}+\cdots+x_{۳۱})}{۳۱} = \frac{۸۴+۲۵۵+۱۴۷}{۳۱} = \frac{۴۸۶}{۳۱} \simeq ۱۵/۶۷$$

۴۶ **گزینه ۲** برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۰ واحد کم می‌کنیم (دقت کنید که واریانس و انحراف معیار، تغییری نمی‌کنند.)

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i x_i \to \bar{x}-۱۰ = \frac{۱}{۲۴}((۳\times(-۲۱))+(۲\times(-۱))+(۱۲\times۰)+(۶\times۱)+(۱\times۲))$$

$$\to \bar{x}-۱۰ = \frac{۱}{۲۴}(-۶-۲+۶+۲) \to \bar{x}-۱۰ = ۰ \to \bar{x}_{\text{اولیه}} = ۱۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$= \frac{۱}{۲۴}(۳(-۲-۰)^۲+۲(-۱-۰)^۲+۱۲(۰-۰)^۲+۶(۱-۰)^۲+۱(۲-۰)^۲) = \frac{۱}{۲۴}(۱۲+۲+۶+۴) = \frac{۲۴}{۲۴} = ۱$$

$$\to \sigma_{\text{اولیه}} = ۱ \to C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

۴۷ گزینه ۱ وقتی از داده‌ها ۴۴ واحد کم می‌کنیم از میانگین نیز ۴۴ واحد کم می‌شود ولی انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}F_i x_i \to \bar{x}-۴۴=\frac{۱}{۲۰}((۴\times(-۳))+(۷\times(-۱))+(۵\times۱)+(۳\times۳)+(۱\times۵))$$

$$\to \bar{x}-۴۴=۰\to \bar{x}=۴۴$$

$$\sigma^۲=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i-\bar{x})^۲\to\sigma^۲=\frac{۱}{۲۰}(۴(-۳)^۲+۷(-۱)^۲+۵(۱)^۲+۳(۳)^۲+۱(۵)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲۰}(۳۶+۷+۵+۲۷+۲۵)=\frac{۱۰۰}{۲۰}=۵\to\sigma=\sqrt{۵}$$

$$C_V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴۴}\sim\frac{۲/۲}{۴۴}=۰/۰۵$$

۴۸ گزینه ۱

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ می‌باشند.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i x_i=\frac{۱}{۱۲+a}((۳\times۶)+(۲\times۸)+(a\times۱۰)+(۶\times۱۲)+(۱\times۱۴))=\frac{۱۲۰+۱۰a}{۱۲+a}=\frac{۱۰(۱۲+a)}{۱۲+a}=۱۰$$

$$\sigma^۲=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{۱۲+a}(۳(۶-۱۰)^۲+۲(۸-۱۰)^۲+a(۱۰-۱۰)^۲+۶(۱۲-۱۰)^۲+۱(۱۴-۱۰)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۲+a}(۴۸+۸+۰+۲۴+۱۶)=\frac{۹۶}{۱۲+a}=۶\to۷۲+۶a=۹۶\to۶a=۲۴\to a=۴$$

۴۹ گزینه ۴ مجموع فراوانی‌های نسبی N داده‌ی آماری برابر یک می‌باشد.

$$۰/۱+۰/۲۵+۰/۲+\alpha=۱\to\alpha=۰/۴۵$$

میانگین داده ها را می توان از مجموع حاصلضرب فراوانی نسبی هر دسته در مرکز آن دسته بدست آورد.

$$\bar{x}=(۰/۱\times۸)+(۰/۲۵\times۱۲)+(۰/۲\times۱۶)+(۰/۴۵\times۲۰)=۱۶$$

$$\sigma^۲=\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i-\bar{x})^۲=۰/۱(۸-۱۶)^۲+۰/۲۵(۱۲-۱۶)^۲+۰/۲(۱۶-۱۶)^۲+۰/۴۵(۲۰-۱۶)^۲$$

$$=۶/۴+۴+۰+۷/۲=۱۷/۶$$

توجه کنید که واریانس را برحسب فراوانی نسبی بدین گونه بدست می‌آورند.

$$\sigma^۲=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲=\frac{F_۱}{N}(x_۱-\bar{x})^۲+\frac{F_۲}{N}(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots=f_۱(x_۱-\bar{x})^۲+f_۲(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots$$

۵۰ گزینه ۳ با توجه به اینکه میانگین برابر ۱۶ می‌باشد داریم:

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
$x_i-\bar{x}$	−۴	−۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۵	۷	۱۰	a	۳

مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر می‌باشد پس:

$$(۵\times(-۴))+(۷\times(-۲))+(۱۰\times۰)+(a\times۲)+(۳\times۴)=۰\to-۲۰-۱۴+۲a+۱۲=۰\to a=۱۱$$

$$\sigma^۲=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۵+۷+۱۰+۱۱+۳}((۵\times۱۶)+(۷\times۴)+(۱۰\times۰)+(۱۱\times۴)+(۳\times۱۶))=\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)=۵/۵۵$$

پاسخنامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۱	۱۱	۳	۲۱	۱	۳۱	۱	۴۱	۳
۲	۲	۱۲	۳	۲۲	۳	۳۲	۳	۴۲	۲
۳	۳	۱۳	۲	۲۳	۴	۳۳	۲	۴۳	۳
۴	۳	۱۴	۱	۲۴	۳	۳۴	۱	۴۴	۳
۵	۲	۱۵	۲	۲۵	۱	۳۵	۴	۴۵	۳
۶	۴	۱۶	۴	۲۶	۳	۳۶	۳	۴۶	۲
۷	۱	۱۷	۱	۲۷	۲	۳۷	۳	۴۷	۱
۸	۳	۱۸	۱	۲۸	۲	۳۸	۲	۴۸	۱
۹	۲	۱۹	۱	۲۹	۳	۳۹	۳	۴۹	۴
۱۰	۴	۲۰	۴	۳۰	۲	۴۰	۴	۵۰	۳