



دبیرستان علامه حلی ۴

۱ اگر $\log(3x - 2) = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$ مقدار x کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

۳ $\frac{4}{3}$

۷ $\frac{5}{4}$

۱ ۱

۲ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است:

$A: 15, 14, 15, 16, 17, 19$

$B: 16, 14, 17, 14, 17, 18$

دقت عمل کدام بیش تر است؟

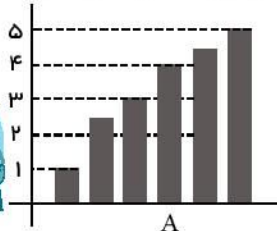
۱ A

۷ B

۳ یکسان

۴ غیر پیش بینی

۳ در مقایسه‌ی سطح زیر کشت غله‌ای در شش استان نمودار میله‌ای مقابل رسم شده است در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مرکزی متناظر استان A چند درجه است؟ (قسمت غیر صحیح هر دو میله $0/5$ است)



۷ ۷۲

۱ ۹۶

۴ ۶۴

۳ ۸۰

۴ در جدول فراوانی دسته‌بندی شده‌ی زیر، اگر به تمام داده‌ها $1/5$ واحد اضافه شود، میانگین داده‌های جدید، برابر 10 می‌شود. فراوانی دسته‌ی سوم کدام است؟

حدود دسته	۱ - ۵	۵ - ۹	۹ - ۱۳	۱۳ - ۱۷
فراوانی	۴	۵	a	۳

۴ ۶

۳ ۳

۷ ۴

۱ ۵

۵ اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{5x - x^2} = x + a$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۴ جواب دیگر ندارد.

۳ ۳

۷ ۲

۱ $\frac{1}{2}$

۶ در 12 داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها 72 و مجموع مجذورات آن‌ها 480 می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

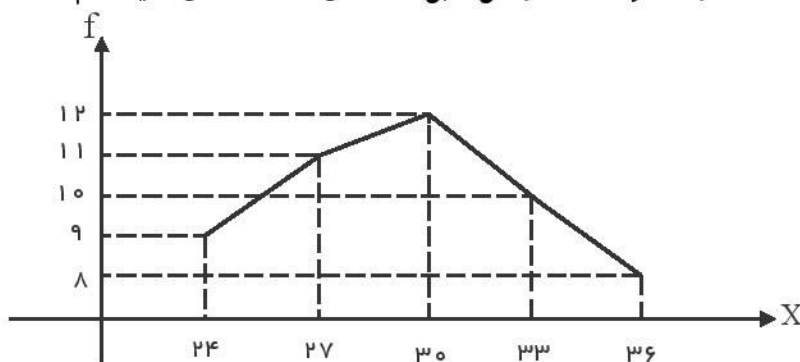
۴ $\frac{1}{4}$

۳ $\frac{1}{3}$

۷ $\frac{2}{9}$

۱ $\frac{2}{5}$

۷ به داده‌های آماری با نمودار چند بر روبرو، دو داده‌ی 29 و 32 افزوده شود، درصد فراوانی نسبی در دسته‌ی وسط داده‌های جدید کدام است؟



۱ ۳۳

۷ ۳۴

۳ ۳۵

۴ ۳۶



۸ داده‌های آماری به ۱۲ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. حدود دسته‌ی اول به صورت $(۲۳, ۲۶]$ می‌باشد. اگر این داده‌ها به ۹ طبقه دسته‌بندی شوند. مرکز دسته‌ی وسط کدام است؟

- ۴۰٫۵ (۱) ۴۱ (۲) ۴۱٫۵ (۳) ۴۲ (۴)

۹ نقطه‌ی $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۴, ۳) (۱) (۳, ۴) (۲) (۳, ۵) (۳) (۱, ۵) (۴)

۱۰ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - ۱۸(x^2 + x) + ۷۲ = ۰$ کدام است؟

- ۴ (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴)

۱۱ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m + ۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ می‌باشد؟

- $-\frac{۹}{۵}$ (۱) ۱ (۲) $-\frac{۹}{۵}, ۱$ (۳) $-\frac{۹}{۵}$ (۴)

۱۲ در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۳ از تساوی $\log_x(x^2 + ۴) = ۱ + \log_x^5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۲ (۴)

۱۴ قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله‌ی $f(x) = \frac{۲x^2 - x - ۱}{|x - ۱|}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - ۲|}{x - ۱} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

- هر مقدار a (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) هیچ مقدار a (۴)

۱۶ حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

- $\frac{۱}{۴}$ (۱) $\frac{۱}{۵}$ (۲) A (۳) $\frac{۱}{۳}$ (۴)

۱۷ هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام

احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

- $\frac{۳}{۴}$ (۱) $\frac{۴}{۵}$ (۲) $\frac{۵}{۶}$ (۳) $\frac{۶}{۷}$ (۴)

۱۸ از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام

احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

- $\frac{۲}{۷}$ (۱) $\frac{۵}{۱۴}$ (۲) $\frac{۳}{۷}$ (۳) $\frac{۴}{۷}$ (۴)

۱۹ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $\frac{۲}{۵}$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- ۲۲۹ (۱) ۲۳۲ (۲) ۲۳۴ (۳) ۲۳۶ (۴)

۲۰ در ۵۰ داده‌ی آماری، مجموع اختلافات داده‌ها از عدد ۱۲، برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده‌ها از عدد ۱۲، برابر ۴۵۰ می‌باشد.

ضریب تغییرات این داده‌ها، کدام است؟

- $\frac{۲}{۵}$ (۱) $\frac{۲۵}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۵}$ (۳) $\frac{۳۵}{۲}$ (۴)



۲۱) داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

۰٫۶ (۴)

۰٫۵۲ (۳)

۰٫۴۸ (۲)

۰٫۴ (۱)

۲۲) باتوجه به نمودار چند بر فراوانی مقابل، واریانس کل داده‌ها، کدام است؟

۴٫۵ (۱)

۴٫۸ (۲)

۴٫۹۲ (۳)

۵٫۱۲ (۴)

۲۳) در جدول فراوانی تجمعی زیر میانگین داده‌ها، کدام است؟

۹٫۵ (۴)

۹٫۴ (۳)

۹٫۳ (۲)

۹٫۲ (۱)

۲۴) به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ ، $2y + ax + 5 = 0$ ، $y + 3x = a$ ، همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

نشدنی (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۲۵) معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

$y + x = \frac{1}{3}$ (۴)

$y + x = \frac{2}{3}$ (۳)

$x = \frac{2}{3}$ (۲)

$y = \frac{2}{3}$ (۱)

۲۶) ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

$x^2 + 5x + 2 = 0$ (۴)

$x^2 - 5x + 2 = 0$ (۳)

$x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲)

$x^2 - 3x + 1 = 0$ (۱)

۲۷) اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

۲۸) در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = \frac{\pi}{2}$) اگر $AC = 2AB$ ، ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲۹) حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

$\frac{16}{9}$ (۴)

$\frac{9}{16}$ (۳)

$-\frac{9}{16}$ (۲)

$-\frac{16}{9}$ (۱)

۳۰) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

۳۱) اگر $\log 2 = k$ باشد حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

$2k$ (۴)

$1+k$ (۳)

$4k$ (۲)

$2+4k$ (۱)

۳۲) اگر $\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد لگاریتم عدد x در پایه‌ی ۸ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)



۳۳ از معادله ی لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ی ۸ ، کدام است؟

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

۳۴ از دو معادله ی دو مجهولی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۱ ④ $\frac{3}{2}$

۳۶ در بازه ی $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] - \{1\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ برابر کدام است؟

- ① $-\pi$ ② ۰ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π

۳۷ تابع با ضابطه ی $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱- چگونه است؟

- ① در ۱- ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ② در ۱- ناپیوسته - در ۱ پیوسته ③ در ۱- پیوسته - در ۱ پیوسته ④ در ۱- پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۳۸ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ تر از ۱ ، پیوسته است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

۳۹ تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است $a - b$ کدام است؟

- ① -۵ ② -۴ ③ ۴ ④ ۵

۴۰ مشتق تابع $y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ در نقطه ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ ، کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۱ در جعبه ای ۳ مهره ی سفید ۲ مهره ی سیاه و ۵ مهره ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟

- ① $\frac{28}{45}$ ② $\frac{29}{45}$ ③ $\frac{31}{45}$ ④ $\frac{32}{45}$

۴۲ در یک خانواده ی ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{8}$

۴۳ خانواده ای دارای چهار فرزند است می دانیم که دو فرزند اول آن ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

- ① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{3}{8}$



۴۴ در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی بافی دارند، اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

- ۱ ۰٫۸۵ (۱) ۲ ۰٫۷۵ (۲) ۳ ۰٫۸ (۳) ۴ ۰٫۷ (۴)

۴۵ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- ۱ ۰٫۱ (۱) ۲ ۰٫۱۵ (۲) ۳ ۰٫۲ (۳) ۴ ۰٫۲۵ (۴)

۴۶ در جعبه‌ای ۶ مهره ی سفید و ۹ مهره ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟

- ۱ $\frac{5}{14}$ (۱) ۲ $\frac{3}{7}$ (۲) ۳ $\frac{2}{5}$ (۳) ۴ $\frac{3}{5}$ (۴)

۴۷ پانزده داده‌ی آماری با واریانس ۱۲ و ده داده‌ی آماری دیگر با واریانس $\frac{7}{6}$ را با هم ترکیب می‌کنیم اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ داده‌ی حاصل کدام است؟

- ۱ $3\frac{1}{2}$ (۱) ۲ $3\frac{2}{3}$ (۲) ۳ $3\frac{2}{5}$ (۳) ۴ $3\frac{5}{8}$ (۴)

۴۸ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه‌ی اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و $\frac{1}{2}$ باشد میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- ۱ ۲۲۷ (۱) ۲ ۲۲۹ (۲) ۳ ۲۳۲ (۳) ۴ ۲۳۴ (۴)

۴۹ در ۵۰ داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها برابر ۱۰۰ و مجموع مجذورات این داده‌ها برابر ۲۷۲ می‌باشد ضریب تغییرات کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{5}$ (۱) ۲ $\frac{4}{5}$ (۲) ۳ $\frac{5}{8}$ (۳) ۴ $\frac{6}{5}$ (۴)

۵۰ داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌ی چهارم و پنجم به ترتیب $\frac{28}{40}$ و $\frac{40}{40}$ است. در نمودار دایره ای، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم چند درجه است؟

- ۱ $40\frac{5}{8}$ (۱) ۲ $41\frac{4}{5}$ (۲) ۳ $42\frac{6}{5}$ (۳) ۴ $43\frac{2}{5}$ (۴)

۵۱ داده‌های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است، چند درصد داده‌ها، در فاصله‌ی $(\frac{21}{5}, \frac{18}{5}]$ قرار دارند؟

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

- ۱ ۲۰ (۱) ۲ ۳۰ (۲) ۳ ۴۰ (۳) ۴ ۲۵ (۴)

۵۲ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها $27\frac{5}{8}$ باشد آن‌گاه میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

- ۱ $29\frac{5}{8}$ (۱) ۲ $28\frac{5}{8}$ (۲) ۳ ۲۹ (۳) ۴ ۲۸ (۴)

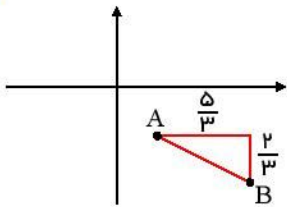
۵۳ نمره‌ی کل آزمون عمومی یک داوطلب مطابق جدول زیر ۵۸ درصد است. نمره‌ی آزمون زبان انگلیسی او چند درصد است؟

زبان انگلیسی معارف اسلامی عربی ادبیات فارسی درس	۷۰	۵۲	۶۵	?
ضریب	۳	۲	۴	۲

- ۱ ۳۱ (۱) ۲ ۳۳ (۲) ۳ ۳۴ (۳) ۴ ۳۲ (۴)

۵۴ نقاط $A|_7^1$ و $B|_7^{-5}$ و $C|_5^{-2}$ سه رأس یک مربع هستند مجموع طول و عرض رأس چهارم آن کدام است؟

- ۱ -۳ (۱) ۲ -۵ (۲) ۳ -۱ (۳) ۴ ۱ (۴)



۵۵ در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه A, B می‌گذرد کدام است؟

۲/۵ (۱)
-۵/۲ (۲)
۲/۵ (۳)
-۲/۵ (۴)

۵/۲ (۱)
-۲/۵ (۲)
۲/۵ (۳)
-۵/۲ (۴)

۵۶ معادله‌ی خطی که به موازات نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه‌ی دوم را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ قطع می‌کند کدام است؟

$y - x = -۴$ (۱)

$y - x = ۴$ (۲)

$y + x = -۴$ (۳)

$y + x = ۴$ (۴)

۵۷ خطی که از نقاط $A|_{-1}^0$ و $B|_{-2}^1$ می‌گذرد نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$|_{-2}^{-1}$ (۱)

$|_{-1}^1$ (۲)

$|_{-2}^{-1}$ (۳)

$|_{-1}^1$ (۴)

۵۸ چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی $A|_{-1}^1$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول، مثلاً به مساحت $\frac{9}{۲}$ بسازد؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

صفر (۴)

۵۹ دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y = x - ۱$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

$-۱۱, ۱۵$ (۱)

$۱۱, -۹$ (۲)

$-۱۵, ۱۱$ (۳)

$-۱۵, ۹$ (۴)

۶۰ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

$\frac{۲۵}{۴}$ (۱)

$\frac{۲۵}{۸}$ (۲)

$\frac{۹}{۴}$ (۳)

$\frac{۹}{۸}$ (۴)

۶۱ فاصله‌ی خطی که دو نقطه‌ی $A|_{-1}^0$ و $B|_{-1}^1$ را به هم وصل می‌کند از خطی که دو نقطه‌ی $C|_{-1}^1$ و $D|_{-2}^2$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟

$۲\sqrt{۲}$ (۱)

$\sqrt{۲}$ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۶۲ یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی $(k+1)y + ۲kx - k + ۱ = ۰$ برخط گذشته بر دو نقطه‌ی $(۲, -۱)$ و $(۸, ۳)$ عمود است، معادله‌ی آن خط کدام است؟

$۳y - ۲x = -۵$ (۱)

$۲y - ۳x = -۵$ (۲)

$۲y + ۳x = ۱$ (۳)

$۲y + ۳x = ۴$ (۴)

۶۳ مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y = x + ۳$ و $x = ۴$ و محور y ها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

۱۵ (۱)

۱۴ (۲)

۱۲ (۳)

۸ (۴)

۶۴ مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = ۲$ و $۲y - x = ۴$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

۶۵ به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^2 + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

$۳ < a < ۴$ (۱)

$۲ < a < ۶$ (۲)

$a < ۳$ یا $a > ۴$ (۳)

$a < ۲$ یا $a > ۶$ (۴)

۶۶ اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^2 + ax + b = ۰$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $۴x^2 - ۷x + ۳ = ۰$ باشد، a کدام است؟

-۶ (۱)

-۸ (۲)

-۱۲ (۳)

-۱۴ (۴)

۶۷ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = ۰$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^2 + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است. b کدام است؟

$\frac{۴}{۳}$ (۱)

$\frac{۲}{۳}$ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

۶۸ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = (a-1)x^2 + x + ۳$ نسبت به خط $x = ۲$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۶ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)



۶۹ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

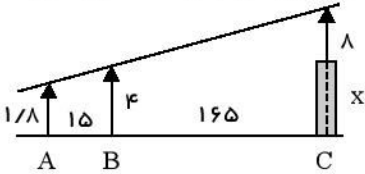
۳۶ (۶)

۳۴ (۳)

۳۲ (۷)

۳۰ (۱)

۷۰ در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱٫۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟



۲۰٫۲ (۷)

۱۹٫۸ (۱)

۲۱٫۲ (۴)

۲۰٫۸ (۳)

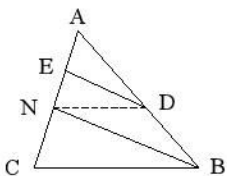
۷۱ در دوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱۲٫۸ (۶)

۱۲٫۲ (۳)

۱۱٫۶ (۷)

۱۱٫۴ (۱)



۷۲ در شکل مقابل $DE \parallel BN$ و $DN \parallel BC$ و $AE = ۴$ و $EN = ۶$ ، اندازه‌ی AC کدام است؟

۲۰ (۷)

۱۸ (۱)

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)

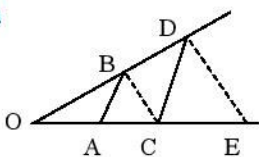
۷۳ در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۶$ و $AC = ۴$ و $BC = ۴$ نقاط D و E و F را به ترتیب بر AB و BC و AC انتخاب کرده‌ایم. اگر چهارضلعی $ADEF$ لوزی باشد، طول AD کدام است؟

$\frac{۱۲}{۵}$ (۶)

۳ (۳)

$\frac{۵}{۲}$ (۷)

۲ (۱)



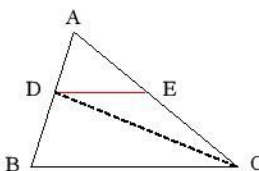
۷۴ در شکل زیر $AB \parallel CD$ و $BC \parallel DE$ و $OA = ۴$ و $AC = ۶$ است. اندازه‌ی CE کدام است؟

۱۵ (۷)

۱۲ (۱)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)



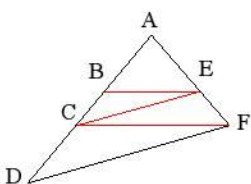
۷۵ در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$ ، $DE \parallel BC$ ، مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟

۷۵ (۶)

۷۸ (۳)

۸۴ (۷)

۷۰ (۱)



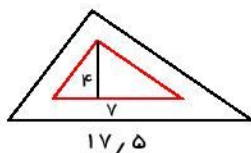
۷۶ در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ است. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ ، آنگاه اندازه‌ی CD کدام است؟

۴٫۸ (۷)

۴٫۵ (۱)

۵٫۶ (۴)

۵٫۴ (۳)



۷۷ اضلاع مثلث کوچک‌تر موازی اضلاع مثلث بزرگ‌تر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

۷۸٫۵ (۷)

۷۷٫۵ (۱)

۸۸٫۵ (۴)

۸۷٫۵ (۳)

۷۸ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{۴}{۹}$ است. اگر اندازه‌ی ضلع یکی از آن‌ها ۶ باشد، اندازه‌ی ضلع دیگر برابر کدام است؟

۱۲ یا ۵ (۶)

۸ یا ۹ (۳)

۹ یا ۴ (۷)

۸ یا ۴ (۱)

۷۹ فرض کنیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - ۴$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ ، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

$x^2 + ۴$ (۶)

$x^2 - ۴$ (۳)

$x^2 + ۲$ (۷)

$x^2 - ۲$ (۱)



۸۰ نمودار تابع $y = x - [x]$; $x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, l) کدام است؟

- ۱) $(4, 1)$ ۲) $(4, \sqrt{2})$ ۳) $(5, 1)$ ۴) $(5, \sqrt{2})$

۸۱ اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه 8 کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{2}{2}$

۸۲ اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$ حاصل $\log_{\sqrt{e}} e^{32}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{A}{4}$ ۲) $\frac{A}{2}$ ۳) $\frac{2}{A}$ ۴) $\frac{4}{A}$

۸۳ از معادله $\log(2x - 1) + \log(x + 3) = \log 30 - \log 2$ مقدار $\log_8 x$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{2}$

۸۴ از دو معادله $\log_2 x + \log_2 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ لگاریتم $(x + y)$ در پایه 4 کدام است؟

- ۱) $1,5$ ۲) 2 ۳) 3 ۴) $2,5$

۸۵ از معادلات $2^x \times 8^y = 4$ و $\log x = \log 2 + \log y$ مقدار x کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۸۶ اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ باشد مقدار y کدام است؟

- ۱) $7,5$ ۲) $12,5$ ۳) 15 ۴) 25

۸۷ اگر $\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k$ آنگاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایه 2 کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۸۸ حد چپ تابع $f(x) = \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است)

- ۱) 1 ۲) -1 ۳) 0 ۴) ∞

۸۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۹۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

۹۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- ۱) $a = 1$ ۲) $a = -1$ ۳) $a = 5$ ۴) $a = -5$

۹۲ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)[x] & x < 3 \\ ax+3 & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه ای به طول $x = 3$ پیوسته باشد آنگاه a کدام است؟

- ۱) $a = 12$ ۲) $a = -3$ ۳) $a = 4$ ۴) $a = 3$



۹۳ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

- ① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{16}{21}$

۹۴ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

- ① $\frac{11}{56}$ ② $\frac{17}{56}$ ③ $\frac{13}{56}$ ④ $\frac{15}{56}$

۹۵ احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$

۹۶ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{3}{5}$

۹۷ در یک خانواده‌ی سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$

۹۸ میانگین داده‌های ۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۰، ۹۹، ۳، ۰۰۰، ۱، ۲، ۳، ۰۰۰، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۰ کمتر است؟

- ① $\frac{99}{101}$ ② $\frac{99}{100}$ ③ $\frac{19}{15}$ ④ $\frac{23}{15}$

۹۹ میانگین داده‌های $a+3, a+6, a+9, \dots, a+105$ کدام است؟

- ① $2a+108$ ② $a+54$ ③ $35a+108$ ④ $35a+54$

۱۰۰ میانگین چهار داده برابر ۸ و میانگین هشت داده‌ی دیگر ۴ است. میانگین هر ۱۲ داده کدام است؟

- ① $\frac{16}{3}$ ② ۶ ③ $\frac{20}{3}$ ④ ۴

۱۰۱ اگر واریانس داده‌های $a, b, c, 4$ برابر صفر باشد آن‌گاه میانگین داده‌های $a+1, b+2, c+3, 8$ چقدر است؟

- ① ۶٫۵ ② ۶ ③ ۷٫۵ ④ ۵

۱۰۲ در داده‌های آماری با میانگین $\bar{x}$ و انحراف معیار σ اگر به هر یک از داده‌ها، مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات در داده‌های قبلی است؟

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۱ ④ ۲

۱۰۳ در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم. تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

- ① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{8}{9}$

۱۰۴ امتیازات مهارت کاری دو فرد A و B در پنج روز متوالی چنین است: A : ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۷، ۲۹ و B : ۲۱، ۲۴، ۲۵، ۲۷، ۲۸. دقت عمل کدام فرد بیشتر است؟

- ① یکسان ② غیر قابل بررسی ③ A ④ B



۱۰۵ اگر ۲۰ داده‌ی آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضرب تغییرات داده‌های جدید، ۱/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟

- ۱) ۲۱۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۵۰ ۴) ۴۲۰

۱۰۶ در داده‌های آماری ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۱، ۹، ضریب تغییرات کدام است؟

- ۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۰۹ ۳) ۰/۱۳ ۴) ۰/۱۶

۱۰۷ ضریب تغییرات در داده‌های آماری، ۰/۰۸ محاسبه شده است. اگر به هر داده‌ی مفروض ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل ۰/۰۷۵ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

- ۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۰۸ مقادیر ۱۲۰ داده‌ی آماری، در بازه‌ی [۲۳، ۵۹] می‌باشند. این داده‌ها در ۹ طبقه، دسته‌بندی شده‌اند. اگر مجموع فراوانی‌های دو دسته‌ی آخر ۱۵ باشد، چند درصد داده‌ها کمتر از ۵۱ هستند؟

- ۱) ۸۲/۵ ۲) ۸۷/۵ ۳) ۹۰ ۴) ۹۲/۵

۱۰۹ جدول مقابل درصد نمرات داوطلبی با ضرایب متفاوت است. اگر حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ باشد. حداقل نمره‌ی ادبیات وی برای پذیرش کدام است؟

اختصاصی	زبان	معارف	ادبیات فارسی	درس
۷۰	۸۱	۹۰	?	درصد نمره
۸	۳	۲	۴	ضریب

- ۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

۱۱۰ جدول مقابل، درصد فراوانی تجمعی در گروه‌های سنی مختلف در یک جامعه را نشان می‌دهد. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به سطح گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال چند درجه است؟

۱۲۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	کران بالای سن
۱۰۰	۷۰	۵۱	۳۶	۱۷	درصد فراوانی تجمعی

- ۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

۱۱۱ در دسته‌بندی ۱۳۵ داده‌ی آماری در ۱۵ طبقه، حدود دسته‌ی چهارم به صورت (۷۴، ۷۷) است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، کران پایین دسته‌ی آخر، کدام است؟

- ۱) ۹۵ ۲) ۹۸ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۰۵

۱۱۲ در جدول فراوانی داده‌های پیوسته و دسته‌بندی شده دو نقطه‌ی (۲۱، ۴۲) و (۲۴، ۵۱) متوالیاً از نمودار فراوانی تجمعی است. کدام نقطه در رسم چندبر فراوانی به کار می‌رود؟

- ۱) (۲۱، ۵۱) ۲) (۲۲/۵، ۹) ۳) (۲۲/۵، ۴۲) ۴) (۲۴، ۹)

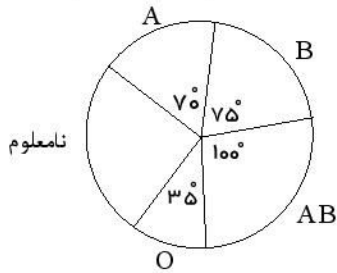
۱۱۳ در یک نمونه‌گیری از حرکت اتومبیل‌ها، F تعداد اتومبیل‌هایی با x سرشین است. چند درصد اتومبیل‌ها با سرشین ۳ یا ۴ نفر هستند؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
F	۹۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۵۰

- ۱) ۴۵ ۲) ۵۴ ۳) ۵۸ ۴) ۶۰



۱۱۴) نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آنها، دارای نوع خون B هستند؟



- ۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۶
۴) ۴۰

۱۱۵) در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده‌ی

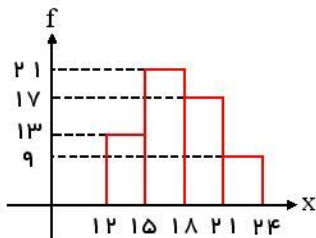
مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰

، اگر درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط

۲۴ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم کدام است؟

- ۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷

۱۱۶) از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی مقابل، سه داده‌ی ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگترین زاویه‌ی مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟



- ۱) ۹۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

۱۱۷) داده‌های آماری در ۹ طبقه با طول دسته‌ی ۴ دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۸ داده، بین چارک اول و سوم به آنها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته‌بندی جدید، تعداد دسته‌ها کدام است؟

- ۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۱۱۸) در جدول فراوانی مقابل، میانگین به صورت $\bar{x} = 12 + 2a$ محاسبه شده است. کدام است؟

x	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
F	۲	۵	۵	۹	۳

- ۱) ۰٫۲۵
۲) ۰٫۳۶
۳) ۰٫۴۵
۴) ۰٫۵۴

۱۱۹) فراوانی تجمعی در داده‌های آماری دسته‌بندی شده‌ی زیر آورده شده است. میانگین داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶	۲۶-۳۰
فراوانی تجمعی	۸	۲۰	۲۷	۳۵	۴۰

- ۱) ۱۹
۲) ۱۹٫۵
۳) ۱۹٫۶
۴) ۲۰

۱۲۰) میانگین ۵۰ داده‌ی دسته‌بندی شده‌ی زیر با روش سریع کدام است؟

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
F	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

- ۱) ۱۲۳٫۶۲
۲) ۱۲۳٫۶۸
۳) ۱۲۴٫۰۲
۴) ۱۲۴٫۰۶

۱۲۱) دو نفر در یک آزمایشگاه، در ۵ روز متوالی همزمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان، مطابق جدول زیر است، دقت کاری کدام بیشتر است؟

نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

- ۱) نفر اول
۲) نفر دوم
۳) یکسان
۴) نیاز به اطلاعات بیشتر



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

می‌دانیم: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$

$$\log(3x - 2) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \rightarrow \log(3x - 2) = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)$$

$$\rightarrow \log(3x - 2) = \log\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow 3x - 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

در ابتدا میانگین دقت این دو کارگر را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\bar{x}_A = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} = \frac{96}{6} = 16, \quad \bar{x}_B = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 9) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \rightarrow \sigma_A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} (0 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \rightarrow \sigma_B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

می‌دانیم $C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ است و چون $C_{V_A} > C_{V_B}$ است پس دقت کاری A از B بیش‌تر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

در ابتدا جمع ارتفاع میله‌ها و یا به عبارت دیگر، تعداد کل داده‌ها (N) را به دست می‌آوریم.

$$N = 1 + 2,5 + 3 + 4 + 4,5 + 5 = 20 \rightarrow d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{20} \times 4 = 72^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

اگر به تمام داده‌ها ۱٫۵ واحد اضافه کنیم به میانگین نیز ۱٫۵ واحد اضافه می‌شود بنابراین میانگین در این جدول، برابر $8,5 = 10 - 1,5$ است و مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ می‌باشند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \Rightarrow 8,5 = \frac{3 \times 4 + 7 \times 5 + 11a + 15 \times 3}{12 + a} \Rightarrow 92 + 11a = 8,5a + 102$$

$$\Rightarrow 92 + 2,5a = 102 \Rightarrow 2,5a = 10 \Rightarrow a = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$x = 4$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x = 4 \Rightarrow 4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = -2$$

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{2 \text{ توان}} x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1=4} 4 + x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$x_2 = \frac{1}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند ($x - 2 = \sqrt{5x - x^2}$) پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{480}{12} - (6)^2 = 40 - 36 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



با توجه به نمودار، جدول فراوانی بدین صورت خواهد شد.

دسته ها	(۲۲,۵,۲۵,۵)	(۲۵,۵,۲۸,۵)	(۲۸,۵,۳۱,۵)	(۳۱,۵,۳۴,۵)	(۳۴,۵,۳۷,۵)
فراوانی مطلق	۹	۱۱	۱۲	۱۰	۸

$$N = 9 + 11 + 12 + 10 + 8 = 50$$

دو داده‌ی ۲۹ و ۳۲ که اضافه شوند در دسته‌های سوم و چهارم قرار می‌گیرند یعنی فراوانی مطلق دسته‌ی وسط برابر ۱۳ می‌شود و تعداد کل داده‌ها برابر ۵۲ می‌گردد.

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط} = \frac{1}{4} \times 100 = 25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$C = 26 - 23 = 3 \rightarrow \text{طول دسته} (C) = 3$$

$$C = \frac{R}{n} \rightarrow 3 = \frac{R}{12} \rightarrow R = 3 \times 12 = 36$$

تغییر تعداد دسته‌ها در دامنه‌ی تغییرات، تأثیری ندارد.

$$C' = \frac{R'}{n'} \rightarrow C' = \frac{36}{9} \rightarrow C' = 4$$

پس در دسته‌بندی جدید طول دسته‌ها ۴ است یعنی در دسته‌بندی جدید دسته‌ها به صورت:

$$[23 - 27), [27 - 31), [31 - 35), [35 - 39), [39 - 43), \dots$$

خواهد بود. دسته‌ی وسط در بین ۹ دسته، دسته‌ی پنجم است که حدود آن ۳۹ - ۴۳ است و مرکز آن برابر است با:

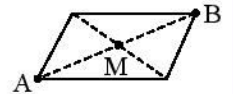
$$\text{مرکز دسته} = \frac{39 + 43}{2} = 41$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا

مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{cases} 3y - 3x = 11 \\ -2(3y + 4x) = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left(-1, 4 \right)$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = A} A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A - 12)(A - 6) = 0$$

$$\begin{aligned} A = 12 &\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2 \\ A = 6 &\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1 \end{aligned}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\text{فرض مسئله: } x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

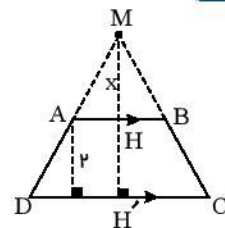
$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه‌ها نیست} \end{cases}$$



۱۲ در مثلث MCD با توجه به این مطلب که AB و CD موازی هستند، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MH}{MH'} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{x+2} \rightarrow 9x = 6x + 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$$



بنابراین فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر برابر $6 = 4 + 2 = MH'$ است.

۱۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_x^{x^2+4} = 1 + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^x + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \text{ غ ق} \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

(می‌تواند یک باشد) غ ق

$$\log_x^x \xrightarrow{x=4} \log_4^4 = \log_4^4 = 1$$

۱۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 1}{1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x - 1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 1}{-1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

۱۵

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 1$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۶

$$n(S) = \frac{6!}{3!} = 120 \text{ (جابه‌جایی حروف ATAXIA)}$$

$$\boxed{AAA} \text{ TXI} \Rightarrow n(A) = 4! = 24 \text{ (جابه‌جایی ۳ حرف A با هم اهمیت ندارد)}$$

$$P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} \text{ پس}$$

۱۷

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60 \rightarrow n(s) = 60$$

برای آنکه عدد رو شده، مضرب ۳ باشد، باید مجموع ارقامش باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد که شامل دسته‌بندی‌های زیر باشد.

$$\left. \begin{aligned} 1, 2, 3 &\rightarrow 3! = 6 \\ 1, 3, 5 &\rightarrow 3! = 6 \\ 2, 3, 4 &\rightarrow 3! = 6 \\ 3, 4, 5 &\rightarrow 3! = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow n(A) = 4 \times 6 = 24$$



پس $P(A) = \frac{24}{60} = 0,4$ است.

۱۸ برای آنکه هر دو کارت هم رنگ باشند، باید هر دو سفید یا هر دو سبز باشند، پس داریم:

دومی سبز و اولی سبز یا دومی سفید و اولی سفید

$$P = \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) = \frac{6}{42} + \frac{12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

۱۹ اگر اضلاع مربع ها را به صورت x_i نشان دهیم، در این صورت $\sum_{i=1}^N x_i^2$ مجموع مساحت های این مربع ها و $\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$ برابر میانگین مساحت این مربع ها می باشد.

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 0,2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \sigma = 3 \rightarrow \sigma^2 = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow 9 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (15)^2 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = 234$$

۲۰ می دانیم مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین میانگین داده ها برابر $\bar{x} = 12$ می باشد و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12)^2 + \dots + (x_{50} - 12)^2}{50} = \frac{\text{مجموع مجزورات اختلاف داده ها از 12}}{50} = \frac{450}{50} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

۲۱ ابتدا ضریب تغییرات داده های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب می کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} ((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2)$$

$$= \frac{1}{5} (4 + 1 + 0 + 1 + 4) = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow \sigma = \sqrt{2} \sim 1,4$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,4}{3}$$

حال اگر داده ها را ۱۲ برابر کنیم میانگین و انحراف معیار نیز ۱۲ برابر می شوند و اگر ۶ واحد به داده ها اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی کند و به میانگین ۶ واحد اضافه می شود.

$$C_{V_{\text{جدا}}} = \frac{12 \times 1,4}{(12 \times 3) + 6} = \frac{16,8}{42} = 0,4$$

۲۲ در نمودار چند بر فراوانی، طول نقاط نشان دهنده ی مرکز دسته و عرض نقاط نشان دهنده ی فراوانی مطلق دسته ها هستند.

مرکز دسته	۳	۵	۷	۹	۱۱
فراوانی مطلق	۲	۷	۸	۵	۳

برای راحتی در محاسبات از تمام داده ها ۷ واحد کم می کنیم و واضح است که واریانس تغییر نمی کند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i = \frac{1}{25} ((2 \times (-4)) + (7 \times (-2)) + (8 \times 0) + (5 \times 2) + (3 \times 4)) = \frac{0}{25} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{25} (2(-4-0)^2 + 7(-2-0)^2 + 8(0-0)^2 + 5(2-0)^2 + 3(4-0)^2)$$

$$= \frac{1}{25} (32 + 28 + 0 + 20 + 48) = \frac{128}{25} = 5,12$$

۲۳ ابتدا فراوانی مطلق دسته ها را بدست می آوریم (اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته ی i ام و $(i+1)$ ام، فراوانی مطلق دسته ی $(i+1)$ ام را می دهد).

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی مطلق	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{7 \times 8 + 8 \times 16 + 9 \times 20 + 10 \times 24 + 11 \times 12}{80} = 9,2$$

۲۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله ی خط سوم صدق کند.

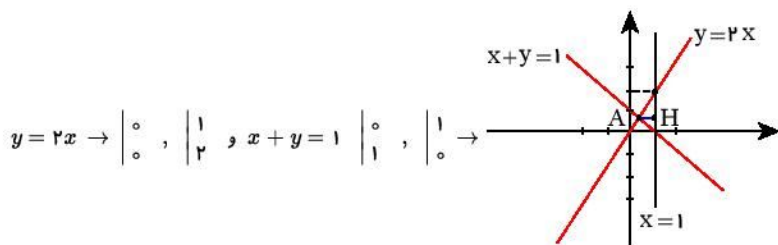


$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$

$$A \begin{vmatrix} a & -2a \\ -2a & 2y+ax+\delta \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + \delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + \delta = 0$$

این سه خط هیچگاه متقارب نیستند. $\rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

سه خط داده شده را رسم می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y = \frac{2}{3}$ است زیرا اگر با دو خط $y = 2x$ و $x + y = 1$ تشکیل دهیم داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی A به صورت $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ است پس معادله‌ی ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 1 = 0 & \xrightarrow{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0 \\ & \xrightarrow{\text{جای } a, c \text{ عوض}} -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \end{aligned}$$

بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض رأس سهمی است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

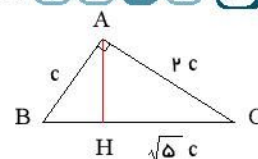
$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \rightarrow 4ac - b^2 = 0 \rightarrow 4(k+3)(k) - 16 = 0$$

$$\rightarrow 4k^2 + 12k - 16 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{4}{3} = -4 \end{cases}$$

تابع درجه‌ی دوم وقتی دارای Max است که ضریب x^2 منفی باشد پس فقط $k = -4$ قابل قبول است.

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC = \sqrt{5}c$ داریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}c}{c}\right)^2 = 5$$



ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \end{aligned}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = -\frac{128}{72} = -\frac{16}{9}$$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha, \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha, \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰



$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \Delta$$

نکته: جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^{a^n} = n \log_k^a$$

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log \underbrace{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}_{\text{مربوع}} = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x$$

$$\log \frac{2}{x} + \log(x + 1) = 1 \Rightarrow \log \frac{2x + 2}{x} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x + 2}{x} = 10 \Rightarrow 10x = 2x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_x^x = \log_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} = \log_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} = -\frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x$$

$$\begin{aligned} \log_7^{2x^2+1} - \log_7^{x+2} &= 1 \Rightarrow \log_7^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = 7^1 \\ \rightarrow 2x^2 + 1 &= 7x + 6 \rightarrow 2x^2 - 7x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه ی $\log_7^{2x-1}$ فقط به جای x ، می‌توانیم مقدار $x = \frac{5}{2}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -1$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_7^{2x-1} \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_7^{\frac{2(\frac{5}{2})-1}{2}} = \log_7^{\frac{5-1}{2}} = \log_7^{\frac{4}{2}} = \log_7^2 = \frac{2}{3}$$

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$$

$$2^{x-y} \times 2^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-y} \times (2^2)^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-y+2x+2y} = 1 \rightarrow 2^{3x+y-y} = 1 \rightarrow 3x + 2y - y = 0$$

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \rightarrow \log y = \log 9 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$$

$$\text{پس: } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = 9x \end{cases} \rightarrow 3x + 18x = 7 \rightarrow 21x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 9(\frac{1}{3}) = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \sin 2x}{2x} = \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 4 \cos 2x}{2} &= \frac{-1 + 4(1)}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{4x^2}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$ می‌باشد.

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x = 1$ و $x = -1$ بدست آوریم.

$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) = 2 \\ f(1) = 2(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = 2(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -1-1 = -2 \\ f(-1) = 2(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$ باید با هم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} (a + \cos^2 \frac{\pi x}{36}) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{2}$) ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos 2x = b \cos \pi = -b \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a + \sin 2x) = a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

$$\text{پس: } -b = 2 \rightarrow b = -2, \quad a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow a - b = 5$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$y = 2 \cos^2 (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \rightarrow y' = (2 \cos (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})) (\frac{-1}{4}) (-\sin (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}))$$

$$\rightarrow y' = \sin (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \cos (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \rightarrow y' = \frac{1}{2} \sin 2 (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) = \frac{1}{2} \sin (\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$$

$$\rightarrow y' (\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \sin (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

روش دوم:

$$y = \cos^2 u \rightarrow y' = -u' \sin 2u \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$y = 2 \cos^2 (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \rightarrow y' = -2 (\frac{-1}{4}) \sin 2 (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \rightarrow y' = \frac{1}{2} \sin (\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$$



$$\rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

برای هم رنگ نبودن دو مهره یکی از حالت های زیر باید اتفاق بیفتد

$$\left. \begin{aligned} \text{یکی سفید و یکی سیاه} & \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6 \\ \text{یکی سفید و یکی قرمز} & \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15 \\ \text{یکی سیاه و یکی قرمز} & \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 2 \times 5 = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 6 + 15 + 10 = 31$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{31}{45} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$PPDD \text{ یا } DDDP \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!} = 6 + 6 = 12$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$S_{\text{جذب}} = \{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S) = 4, \quad A = \{PPDD\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

B : مهارت قالی بافی داشتن و A : تحصیلات ابتدایی داشتن

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - (\frac{60}{100} \times \frac{25}{100}) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0.7 \end{aligned}$$

دقت کنید که دو پیشامد A و B مستقل هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

روش اول:

$$P(\text{فرد اولی}) \times P(\text{زوج دومی}) \times P(\text{سومی فرد}) \times P(\text{چهارمی زوج}) \times P(\text{پنجمی فرد}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{12}{120} = 0.1$$

روش دوم:

$$n(S) = 5!$$

$$n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جابجایی مهره های زوج}} \times \underbrace{2!}_{\text{جابجایی مهره های فرد}} \rightarrow \text{ف ز ف ز ف}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3!2!}{5!} = \frac{1}{10} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶ روش اول:

P (اولی سیاه و دومی سفید) یا P (اولی سفید و دومی سفید)

$$\begin{aligned} \text{احتمال مطلوب} &= (\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}) + (\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}) = \frac{30 + 54}{15 \times 14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \\ &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

روش دوم: چون نمی دانیم مهره ی اول خارج شده چه رنگی است فرض می کنیم اصلاً مهره های خارج نشده است پس احتمال سفید بودن می شود $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$



$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow 12 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 180$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow 7,6 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 76$$

باتوجه به اینکه میانگین هر دو دسته، یکسان است پس وقتی آنها را با هم ترکیب کنیم میانگین تغییر نمی کند و فقط تعداد داده ها، ۲۵ می شود.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{25} (180 + 76) = \frac{256}{25}$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5} = 3,2$$

۴۸ اگر طول اضلاع مربع ها را با x_i و تعداد مربع ها را N در نظر بگیریم داریم:

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 0,2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \sigma = 3$$

۴۹ مساحت مربع ها برابر $\sum_{i=1}^N x_i^2$ می باشد بنابراین میانگین مساحت مربع ها برابر $\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$ است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow 9 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (15)^2 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = 234$$

میانگین این داده ها برابر $\bar{x} = \frac{100}{50} = 2$ است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{272}{50} - (2)^2 = \frac{136}{25} - 4 = \frac{36}{25} \rightarrow \sigma = \frac{6}{5}$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

۵۰ اختلاف فراوانی تجمعی نسبی دو دسته ی i ام و $(i+1)$ ام، فراوانی نسبی دسته ی $(i+1)$ ام را می دهد.

$$0,12 = 0,28 - 0,16 = \text{فراوانی نسبی دسته ی پنجم}$$

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i = 360 \times 0,12 = 43,2 = 360 \times \text{فراوانی نسبی}$$

$$(18,5, 21,5) \Rightarrow \text{مرکز دسته} = \frac{18,5 + 21,5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

طرح سوال درصد فراوانی نسبی دسته ای که مرکز دسته ی آن ۲۰ می باشد را خواسته است.

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده ها}} \times 100 \Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = 100 \times \text{فراوانی نسبی}$$

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{25 - 13}{40} \times 100 = \frac{12}{40} \times 100 = 30$$

دقت کنید فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول برابر تعداد کل داده ها است. و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته ی i ام و $(i+1)$ ام فراوانی مطلق دسته ی $(i+1)$ ام را می دهد.

فرض کنید $\bar{x}$ میانگین کل ۳۶ داده، $\bar{x}_1$ میانگین ۹ داده ی سمت چپ، $\bar{x}_2$ میانگین ۱۸ داده ی درون جعبه و $\bar{x}_3$ میانگین ۹ داده ی سمت راست جعبه می باشد.

$$\bar{x} = \frac{9\bar{x}_1 + 18\bar{x}_2 + 9\bar{x}_3}{36} \rightarrow 27,5 = \frac{(9 \times 22) + 18\bar{x}_2 + (9 \times 30)}{36}$$



$$\rightarrow 990 = 468 + 18\bar{x}_r \rightarrow 18\bar{x}_r = 522 \rightarrow \bar{x}_r = \frac{522}{18} = 29$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

نمره ی کل آزمون عمومی این داوطلب همان میانگین نمرات دروس عمومی ولی با حساب کردن ضریب هر درس است.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow 58 = \frac{1}{11} ((4 \times 65) + (2 \times 52) + (3 \times 70) + 2x)$$

$$\rightarrow 58 = \frac{260 + 104 + 210 + 2x}{11} \rightarrow 638 = 574 + 2x \rightarrow x = 32$$

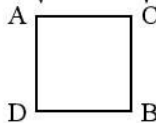
۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

طول پاره خطهای AB و AC و BC را پیدا می‌کنیم تا مشخص شود ترتیب قرار گرفتن رئوس، در مربع چگونه است.

$$AB = \sqrt{(1+5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$

$$AC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

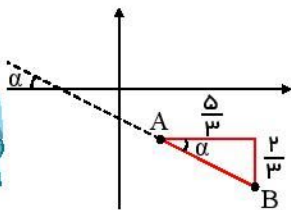
$$BC = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$



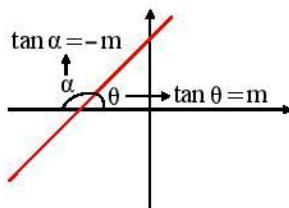
واضح است که AC و BC اضلاع مربع و AB قطر مربع است. (قطر مربع، از حاصلضرب یک ضلع در $\sqrt{2}$ بدست می‌آید) یعنی:

$$\left. \begin{aligned} x_A + x_B &= x_C + x_D \rightarrow 1-5 = -2 + x_D \rightarrow x_D = -2 \\ y_A + y_B &= y_C + y_D \rightarrow 2+2 = 5 + y_D \rightarrow y_D = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_D + y_D = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



$$\text{پس: } \tan \alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

معادله ی خط نیمساز ناحیه ی اول و سوم $y = x$ است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب

هم، یک می‌باشد. چون این خط، نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم ($y = -x$) را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ قطع می‌کند پس عرض آن $y = -2$ است.

$$A|_{-2}, m = 1 \rightarrow y - (-2) = 1(x - 2) \rightarrow y + 2 = x - 2 \rightarrow y - x = -4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

کافی است ابتدا معادله ی خط گذرنده از دو نقطه ی A و B را بنویسیم و آن را با معادله ی نیمساز ناحیه ی اول و سوم ($y = x$) تلاقی دهیم.

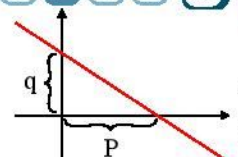
$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y}{x+1} = \frac{0-2}{-1-0} = 2 \rightarrow y = 2x+2$$

$$\begin{cases} y = 2x+2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow x = -2, y = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

شیب خط مورد نظر را m در نظر گرفته و معادله ی خطی را که از نقطه ی A می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$y - 2 = m(x - 1) \rightarrow y = mx - m + 2$$



حال یک بار به x و یک بار به y صفر می‌دهیم. تا محل برخورد خط با محورهای مختصات را به دست آوریم.

$$x = 0 \rightarrow y = -m + 2 \rightarrow q = 2 - m$$



$$y = 0 \rightarrow 0 = mx - m + 2 \rightarrow x = \frac{m-2}{m} \rightarrow p = \frac{m-2}{m}$$

$$S = \frac{1}{2} |pq| \xrightarrow{\text{باتوجه به صورت سوال}} \frac{9}{2} = \frac{1}{2} (2-m) \left(\frac{m-2}{m} \right) \rightarrow 9 = \frac{-(m-2)^2}{m}$$

$$\rightarrow 9m = -m^2 + 4m - 4 \rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \rightarrow (m+1)(m+4) = 0$$

بنابراین دو خط با این ویژگی وجود دارند که اگر معادلات آنها خواسته شد به صورت زیر می باشند:

$$m = -1 \rightarrow y = -x + 1 + 2 \rightarrow y = -x + 3$$

$$m = -4 \rightarrow y = -4x + 4 + 2 \rightarrow y = -4x + 6$$

نقطه ی $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{smallmatrix} \right.$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر گرفته و فاصله ی آن را از خط $2x - 3y = 5$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{13}$ قرار می دهیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{smallmatrix} \right. \rightarrow AH = \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-\alpha - 2| = 13 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right.$$

$$-\alpha - 2 = 13 \rightarrow \alpha = -15, \quad -\alpha - 2 = -13 \rightarrow \alpha = 11$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ از رابطه ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$\begin{array}{c} x - y + 1 = 0 \\ \hline x - y - \frac{3}{4} = 0 \end{array}$$

شیب هر دو خط یک می باشد یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله ی بین این دو ضلع مربع را می دهد.

$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{4})|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{7}{4\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{49}{32}$$

(در محاسبه ی فاصله ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله ی خط باید یکسان باشند)

برای محاسبه ی فاصله ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

معادلات خطوط AB و CD را می نویسیم.

$$\text{معادله ی خط } AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} \rightarrow y = x \rightarrow x - y = 0$$

$$\text{معادله ی خط } CD: \frac{y - y_C}{x - x_C} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} \rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{3 - 4}{1 - 2} = 1 \rightarrow y - 3 = x - 1 \rightarrow x - y + 2 = 0$$

حال، فاصله این دو خط موازی را از یکدیگر بدست می آوریم.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

توجه کنید برای محاسبه ی فاصله ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می کنیم.

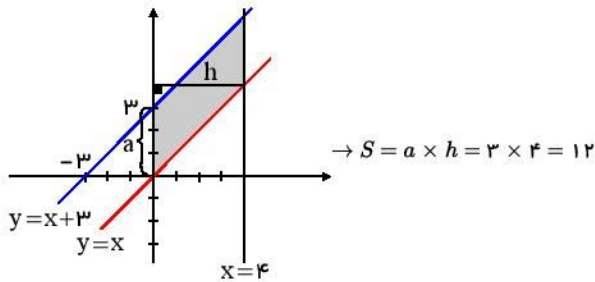
ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه ی $A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ و $B \left| \begin{smallmatrix} 8 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ را بدست می آوریم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عود}} m_{\text{نمونه خط}} = -\frac{3}{2}$$

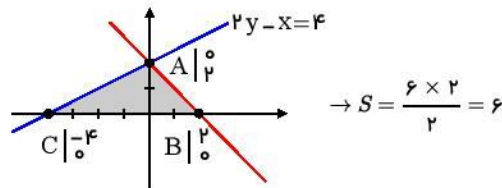
$$m_{\text{نمونه خط}} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$$

$$k = 3 \xrightarrow{\text{معادله ی نمونه خطوط}} 4y + 6x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2y + 3x = 1$$



$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}, 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.



اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 6) > 0$$

$$\rightarrow \frac{a}{\text{عبارت } < 0} \begin{matrix} -\infty & 2 & 6 & +\infty \\ + & 0 & - & 0 & + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a > 6 \\ a < 2 \end{cases}$$

روش اول: اگر t ریشه ی معادله ی جدید و x ریشه ی معادله ی قدیم باشد آن گاه:

$$t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \rightarrow 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$\frac{3x^2 + ax + 1 = 0 \text{ مقایسه با } 3t^2 - 14t + 16 = 0}{\rightarrow a = -14, b = 16}$$

روش دوم: ابتدا معادله ی درجه ی دومی مینویسیم که ریشه هایش معکوس ریشه های معادله ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله ی درجه ی دومی می نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه های معادله ی درجه ی دوم بدست آمده باشد پس جای a ، c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در ۳ ضرب کنیم.

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 16 = 0$$

این معادله را با $3x^2 + ax + b = 0$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -14, b = 16$$

توجه کنید ریشه های معادله ی $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ است. و ریشه های معادله ی $k, ax^2 + b, cx^2 + ck^2 = 0$ برابر ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ می باشند.

معادله ی درجه ی دومی که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$$

پس کافی است x را به $x - 1$ تبدیل کنیم.

$$3(x - 1)^2 + 7(x - 1) + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 7x - 7 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

برای مقایسه با $x^2 + ax + b = 0$ معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

خط $x = 2$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow 4a-4 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \xrightarrow{y=0} y = 0 \Rightarrow 0x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x = 6$ جواب مسأله است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

اگر در این مثلث طول قاعده را a و ارتفاع وارد بر آن را h بنویسیم در این صورت $a + h = 16$ است.

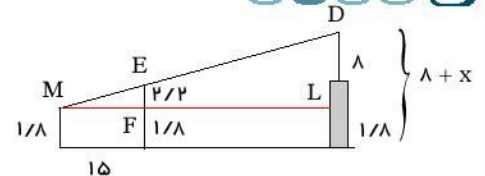
تابع درجه‌ی دوم: $S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$

$$S_{Max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-\frac{1}{2})(0) - 64}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

از نقطه‌ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2/2}{1+x-1/8} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 20,2$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

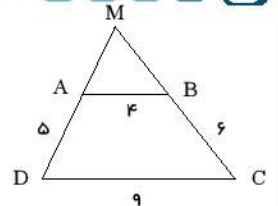
بنابر فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفاضل در مخرج}} \frac{MA}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow MA = 4$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفاضل در مخرج}} \frac{MB}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow MB = \frac{24}{5} = 4,8$$

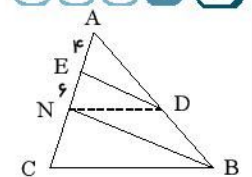
$$\Delta MAB \text{ محیط} = MA + MB + AB = 4 + 4 + 4,8 = 12,8$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

$$ED \parallel NB \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AB} \quad (1)$$

$$ND \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$$

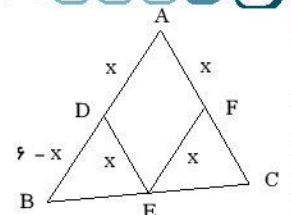


از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC}$ پس:

$$\frac{4}{10} = \frac{10}{AC} \Rightarrow AC = 25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳ با فرض اینکه طول ضلع لوزی x باشد: $AD = x$ و در لوزی $ADFE$ اضلاع $ED \parallel AF$ پس داریم:

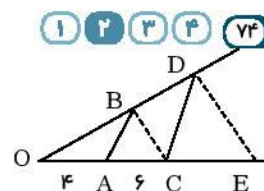
$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{6-x}{6} = \frac{x}{4} = 24 - 4x = 6x \Rightarrow x = AD = \frac{12}{5}$$



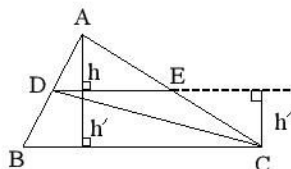


$$\left. \begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ BC \parallel DE &\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{OE} \Rightarrow OE = 25$$

$$CE = 25 - OC = 25 - 10 = 15$$



چون $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$ است پس $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ می باشد.



رابطه‌ی تالان در $\triangle ABC$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{h}{h'} = \frac{3}{4}$$

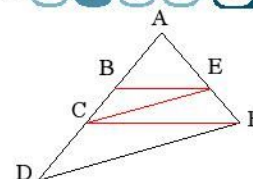
پس:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{DE \times h}{2}}{\frac{DE \times h'}{2}} = \frac{h}{h'} = \frac{3}{4} = 0,75$$

اگر CD را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \times AD \Rightarrow 8^2 = 5AD \Rightarrow AD = \frac{64}{5}$$

$$CD = AD - AC = \frac{64}{5} - 8 = \frac{24}{5} = 4,8$$



اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{4}{17,5}\right)^2 \Rightarrow \frac{4 \times 7}{S'} = \left(\frac{4}{17,5}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{175}{2} = 87,5$$

هر دو پنج ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست، بنابراین:

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} = (\text{نسبت تشابه})$$

$$\frac{6}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 9 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4$$

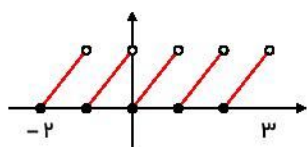


بستگی به اینکه اگر عدد ۶ اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی بزرگ‌تر است ۹ یا اگر عدد ۶ عدد ضلع بزرگ‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی کوچک‌تر ۴ است.

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4$$

$$x - \frac{1}{x} = t \rightarrow f(t) = t^2 - 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

توجه کنید که $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ می باشد.



نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $(-2, 3)$ ، ۵ پاره خط به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ وجود دارد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow b^x = N$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{r}}^a = \frac{r}{r} \Rightarrow a = (\sqrt{r})^{\frac{r}{r}} \Rightarrow a = (r^{\frac{1}{2}})^{\frac{r}{r}} = r^{\frac{r}{2}} = r^{\frac{r}{2}}$$

$$\log_{\lambda}^{(a^r + r)} = \log_{\lambda}^{(r^{\frac{r}{r}})^r + r} = \log_{\lambda}^{r^r + r} = \log_{\lambda}^{1^r} = \log_{r^r}^{1^r} = \frac{r}{r}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$, $\log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}$

$$\log_{\sqrt{e}}^{\Delta} = A \Rightarrow \log_e^{\frac{\Delta}{2}} = A \Rightarrow \frac{r}{\Delta} \log_e^{\Delta} = A \Rightarrow \log_e^{\Delta} = \frac{\Delta A}{r} \Rightarrow \log_e^r = \frac{r}{\Delta A}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{rr} = \log_{\frac{1}{e}}^{r\Delta} = 1 \circ \log_e^r = 1 \circ \left(\frac{r}{\Delta A}\right) = \frac{r}{A}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log(2x - 1) + \log(x + 3) = \log 3 \circ - \log 2 \rightarrow \log(2x - 1)(x + 3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + \Delta x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + \Delta x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 144}}{4}$$

$$x = \frac{-\Delta \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ قی} \\ x = -\frac{18}{4} \text{ (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \end{cases}$$

$$\log_{\lambda} x = \log_{\sqrt{r}}^r = \frac{1}{r}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴

می‌دانیم:

$$a^r + b^r = (a + b)^r - rab, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow b^x = N, \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$$

$$\log_r^x + \log_r^y = 2 \rightarrow \log_r^{xy} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = r^2 = 9$$

$$x^r + y^r = 46 \rightarrow (x + y)^r - rxy = 46 \rightarrow (x + y)^r - 18 = 46$$

$$\rightarrow (x + y)^r = 64 \rightarrow x + y = 4 \text{ یا } x + y = -8 \text{ غ قی (اعدادی مثبت هستند).}$$

$$\log_r^{x+y} = \log_r^4 = \log_{\sqrt{r}}^{r^2} = \frac{r}{r}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\left. \begin{aligned} r^x \times \lambda^y &= 4 \Rightarrow r^x \times r^{\frac{1}{r}y} = r^2 \Rightarrow r^{x+\frac{y}{r}} = r^2 \Rightarrow x + \frac{y}{r} = 2 \\ \log x &= \log 2 + \log y \Rightarrow \log x = \log ry \Rightarrow x = ry \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{r}{\Delta}, y = \frac{r}{\Delta}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$r\sqrt{r} = r^x \Rightarrow r^{\frac{1}{2}} \times r^{\frac{1}{r}} = r^x \Rightarrow r^{\frac{\Delta}{2}} = r^{rx} \Rightarrow rx = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow x = \frac{\Delta}{4}$$

$$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \Rightarrow \log 1 \circ + \log \sqrt{\frac{\Delta}{4} + 1} = \log y$$

$$\Rightarrow \log 1 \circ + \log \frac{r}{r} = \log y \Rightarrow \log 1 \circ \times \frac{r}{r} = \log y \Rightarrow y = 15$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log 3 + \log \sqrt[5]{3} = \log(31)^k \rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{5}} = \log 3^{rk} \rightarrow \log 3 \times 3^{\frac{1}{5}} = \log 3^{rk}$$

$$\rightarrow \log 3^{\frac{6}{5}} = \log 3^{rk} \rightarrow rk = \frac{6}{5} \rightarrow k = \frac{6}{16}$$

$$\log_3^{\frac{6}{5}} \stackrel{k=\frac{6}{16}}{=} \log_3^{\frac{6}{16}} = \log_3^{\frac{3}{8}} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [3^-])\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

برای رسیدن به مبهم شناخته شده $\frac{0}{0}$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - (x + 1)x}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 4)(x + 3)}{(x - 2)x} = -\frac{5}{2}$$

می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف کرد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x) \cos x}{(\sin x + \cos x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cot x = -1$$

ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1 + \sqrt{5x + 16}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x + 3)(1 + \sqrt{5x + 16})}{1 - 5x - 16}$$

$$= \frac{3a}{-5} = 2 \rightarrow 3a = -10 \rightarrow a = -\frac{10}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۲

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 3$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (ax + 3) = 3a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3)[x] = 6(2) = 12 \\ f(3) &= 3a + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a + 3 = 12 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است و بر روی ۴ موش آزمون مهارت انجام نشده است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۳

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است یعنی: بر روی هر دو آزمون انجام شده است یا بر روی یکی آزمون انجام شده و بر روی دیگری آزمون انجام نشده است.

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \binom{4}{1} = 3 + 12 = 15$$



پس $P(A) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴ دو حالت داریم:

(۱) موش اول سفید و موش دوم سفید و موش سوم سیاه

(۲) موش اول سفید و موش دوم سیاه و موش سوم سیاه

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{56}$$

پس $P = \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$ است.

روش دوم: چون در تست به رنگ موش دوم اشاره نشده است فرض می‌کنیم موشی که به رنگ آن اشاره نشده است را انتخاب نکرده‌ایم و تنها می‌خواهیم دو موش را پشت سرهم (متوالیا) انتخاب کنیم یعنی موش دوم تأثیری در حل مسأله ندارد

$$P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$PPDD \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۶

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{3} = 3 \times 10 = 30$$

پس $P(A) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است پس می‌توان فضای نمونه ای جدیدی ساخت:

$$S_{\text{جدید}} = \{DPD, DPP, DDP, DDD\} \Rightarrow n(S) = 4$$

$$A = \{DPD, DPP, DDP\} \Rightarrow n(A) = 3$$

پس $P(A) = \frac{3}{4}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۸ میانگین داده‌های اول و دوم را باید حساب کنیم.

$$\text{میانگین داده‌های اول} = \frac{1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100}{101} = \frac{1+k}{101}$$

$$\text{میانگین داده‌های دوم} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 100}{101} = \frac{k+100}{101}$$

$$\text{پس داریم: } \frac{k+100}{101} - \frac{1+k}{101} = \frac{99}{101}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۹ داده‌ها، جملاتی متوالی یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۲ می‌باشند که مجموع آنها از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بدست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a + 3 + a + 105)}{n} = \frac{2a + 108}{2} = \frac{2(a + 54)}{2} = a + 54$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۰

$$\text{میانگین چهار دانه} = 8 \rightarrow \text{مجموع چهار دانه} = 4 \times 8 = 32$$

$$\text{میانگین هشت دانه} = 4 \rightarrow \text{مجموع هشت دانه} = 8 \times 4 = 32$$



$$\text{میانگین دوازده داده} = \frac{32 + 32}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

چون واریانس داده‌ها برابر صفر است یعنی تمام داده‌ها با هم برابر هستند یعنی $a = b = c = 4$ است. 1 2 3 4 101

$$8, c + 3, b + 2, a + 1 \rightarrow 8, 7, 6, 5 \rightarrow \bar{x} = \frac{8 + 7 + 6 + 5}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2} = 6,5$$

اگر به هریک از داده‌ها مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود. 1 2 3 4 102

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + \bar{x}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{\sigma}{2\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{1}{2}$$

1 2 3 4 103

اگر هریک از داده‌ها را دو برابر کنیم انحراف معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی ۳ واحد به آن‌ها اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نکرده و به میانگین ۳ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{2\bar{x}}{2\bar{x} + 3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

1 2 3 4 104

$$(A) \text{ میانگین } \bar{x} = \frac{22 + 23 + 24 + 27 + 29}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

$$(B) \text{ میانگین } \bar{x} = \frac{21 + 24 + 25 + 27 + 28}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

اکنون ضریب تغییرات هر دو را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \frac{(22-25)^2 + (23-25)^2 + (24-25)^2 + (27-25)^2 + (29-25)^2}{5} \\ &= \frac{9 + 4 + 1 + 4 + 16}{5} = \frac{34}{5} = 6,8 \rightarrow \sigma_A = \sqrt{6,8} \rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{6,8}}{25} \\ \sigma_B^2 &= \frac{(21-25)^2 + (24-25)^2 + (25-25)^2 + (27-25)^2 + (28-25)^2}{5} \\ &= \frac{16 + 1 + 0 + 4 + 9}{5} = 6 \rightarrow \sigma_B = \sqrt{6} \rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{6}}{25} \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ضریب تغییرات فرد B کمتر از فرد A است یعنی پراکندگی دقت عمل او کمتر است پس دقت عمل بیش‌تری دارد.

وقتی داده‌های آماری را دو برابر کنیم، انحراف معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی از داده‌ها ۷ واحد کم می‌کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی از میانگین ۷ واحد کم می‌شود. 1 2 3 4 105

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} - 7}$$

$$\text{طبق سوال: } CV_{\text{جدید}} = 1,5 CV_{\text{قدیم}} \rightarrow \frac{2\sigma}{2\bar{x} - 7} = 1,5 \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{2}{2\bar{x} - 7} = \frac{1,5}{\bar{x}}$$

$$\rightarrow 3\bar{x} - 10,5 = 2\bar{x} \rightarrow \bar{x} = 10,5$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 10,5 = \frac{x}{20} \rightarrow x = 210$$

1 2 3 4 106

$$\text{میانگین } \bar{x} = \frac{9 + 2(11) + 2(12) + 13 + 2(14)}{8} = \frac{9 + 22 + 24 + 13 + 28}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8} ((9-12)^2 + 2(11-12)^2 + 2(12-12)^2 + (13-12)^2 + 2(14-12)^2)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9 + 2 + 0 + 1 + 8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5 \rightarrow \sigma = \sqrt{2,5} \sim 1,6$$

$$CV = \frac{1,6}{12} = \frac{16}{120} \sim 0,13$$



$$CV_{جدید} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow ۰,۰۸ = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = ۰,۰۸\bar{x}$$

اگر به تمام داده‌ها ۵ واحد اضافه شود انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، ۵ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{جدید} = \frac{\sigma}{\bar{x} + ۵} \rightarrow ۰,۰۷۵ = \frac{۰,۰۸\bar{x}}{\bar{x} + ۵} \rightarrow \frac{۷۵}{۱۰۰۰} = \frac{\frac{\lambda}{۱۰۰}\bar{x}}{\bar{x} + ۵} \rightarrow \lambda\bar{x} = ۷۵\bar{x} + ۳۷۵$$

$$\rightarrow ۵\bar{x} = ۳۷۵ \rightarrow \bar{x} = \frac{۳۷۵}{۵} = ۷۵$$

$$R = Max - Min = ۵۹ - ۲۳ = ۳۶, C = \frac{R}{n} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$$

بنابراین ۹ دسته به صورت زیر هستند.

$$\underbrace{[۲۳, ۲۷), [۲۷, ۳۱), [۳۱, ۳۵), [۳۵, ۳۹), [۳۹, ۴۳), [۴۳, ۴۷), [۴۷, ۵۱)]}_x, \underbrace{[۵۱, ۵۵), [۵۵, ۵۹)]}_{۱۵}$$

$$۵۱ \rightarrow x \rightarrow x + ۱۵ = ۱۲۰ \rightarrow x = ۱۲۰ - ۱۵ = ۱۰۵$$

$$۵۱ \text{ درصد داده‌های کمتر از } = \frac{x}{۱۲۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۵}{۱۲۰} \times ۱۰۰ = ۸۷,۵$$

وقتی گفته می‌شود که حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ است یعنی $\bar{x} \geq ۷۵$ است.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \frac{1}{۴+۲+۳+۸} (۴x + (۲ \times ۹۰) + (۳ \times ۸۱) + (۸ \times ۷۰)) \geq ۷۵$$

$$\rightarrow \frac{1}{۱۷} (۴x + ۱۸۰ + ۲۴۳ + ۵۶۰) \geq ۷۵ \rightarrow \frac{۴x + ۹۸۳}{۱۷} \geq ۷۵$$

$$\rightarrow ۴x + ۹۸۳ \geq ۱۲۷۵ \rightarrow ۴x \geq ۱۲۷۵ - ۹۸۳ \rightarrow ۴x \geq ۲۹۲ \rightarrow x \geq \frac{۲۹۲}{۴} \rightarrow x \geq ۷۳$$

بنابراین حداقل نمره‌ی ادبیات باید ۷۳ باشد.

اولاً چون کران بالای دسته‌ها مشخص شده است، پس گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال (دارای کران بالای ۳۰ است) همان دسته‌ی سوم می‌باشد. بنابراین به

دنیا زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم داده‌ها در نمودار دایره‌ای می‌باشیم.

از طرفی می‌توان درصد فراوانی هر دسته را از تفاضل درصد فراوانی تجمعی آن دسته و دسته‌ی ماقبل آن به دست آورد، بنابراین:

$$\text{درصد فراوانی دسته‌ی سوم} = \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۰,۱۵$$

$$d_p = \frac{F_p}{N} \times ۳۶۰^\circ = ۰,۱۵ \times ۳۶۰^\circ = ۵۴^\circ$$

فراوانی نسبی

$$n = ۱۵ \text{ تعداد دسته‌ها} \Rightarrow R = n \cdot C = ۳ \times ۱۵ = ۴۵$$

$$C = ۷۷ - ۷۴ = ۳ \text{ طول دسته}$$

از طرفی داریم:

$$(۱۵ - ۴)C = ۷۷ + ۱۱ \times ۳ = ۱۱۰$$

باید دانست که با تغییر طول دسته یا تعداد دسته‌ها، دامنه‌ی تغییرات تغییر نمی‌کند.

حال با تغییر تعداد طبقات داریم:

$$C' = \frac{R}{n'} = \frac{۴۵}{۹} = ۵$$

$$-C' = ۱۱۰ - ۵ = ۱۰۵ \text{ ماکسیمم داده‌ها کران پایین دسته‌ی آخر}$$

توجه کنید در رسم نمودار چندبر فراوانی، طول نقاط نشان‌دهنده‌ی مرکز دسته و عرض نقاط نشان‌دهنده‌ی فراوانی مطلق دسته است. در نمودار فراوانی

تجمعی، طول نقاط نشان‌دهنده‌ی کران بالای دسته و عرض نقاط نشان‌دهنده‌ی فراوانی تجمعی آن دسته است. پس فراوانی تجمعی داده‌های کوچک‌تر یا مساوی ۲۱ برابر ۴۲ و فراوانی تجمعی

$$\frac{۲۱ + ۲۴}{۲} = ۲۲,۵ \text{ با مرکز دسته‌ی } [۲۱, ۲۴]$$

برابر ۹ $۴۲ - ۵۱$ است، پس نقطه‌ی (۲۲,۵، ۹) یک نقطه از نمودار چندبر فراوانی است.

$$۹۰ + ۱۸۰ + ۲۲۰ + ۲۶۰ + ۵۰ = ۸۰۰ \text{ تعداد کل اتومبیل‌ها = تعداد کل داده‌ها}$$

$$۲۲۰ + ۲۶۰ = ۴۸۰ \text{ فراوانی مطلق اتومبیل‌های با ۳ یا ۴ سرنشین}$$



$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times 100 = \frac{380}{800} \times 100 = 60$$

جمع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر 360° است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۴

$$70 + 75 + 100 + 35 + x = 360^\circ \rightarrow x = 80^\circ$$

$$d_i = \frac{360}{N} F_i \rightarrow 80 = \frac{360}{N} \times 32 \rightarrow N = \frac{360 \times 32}{80} = 144$$

تعداد کل افراد: ۱۴۴

$$d_i = \frac{360}{N} F_i \rightarrow 75 = \frac{360}{144} F_i \rightarrow F_i = \frac{75 \times 144}{360} = 30$$

البته پس از پیدا کردن زاویه‌ی 80° می‌توان، با یک تناسب مسئله را حل کرد.

زاویه	تعداد
80°	۳۲
75°	$x \rightarrow F_B = \frac{32 \times 75}{80} = 30$

تعداد کل داده‌ها ۵۰ می‌باشد (فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر) و فراوانی مطلق دسته‌ی وسط از تفاضل فراوانی‌های تجمعی این دسته و دسته‌ی قبل از آن بدست می‌آید یعنی $a - 14$. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۵

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{تعداد کل داده‌ها}}{\text{فراوانی مطلق}} \times 100 \rightarrow 24 = \frac{a - 14}{50} \times 100 \rightarrow a = 26$$

$$15 = 41 - a = 41 - 26 = 15$$

فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم

ابتدا با توجه به نمودار مستطیلی، جدول فراوانی را می‌نویسیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۶

حدود دسته‌ها	۱۲ - ۱۵	۱۵ - ۱۸	۱۸ - ۲۱	۲۱ - ۲۴
فراوانی مطلق	۱۳	۲۱	۱۷	۹

اگر داده‌های ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ را حذف کنیم یک داده از دسته‌ی اول و دو داده از دسته‌ی دوم کم می‌شوند پس جدول فراوانی جدید به این صورت است:

حدود دسته‌ها	۱۲ - ۱۵	۱۵ - ۱۸	۱۸ - ۲۱	۲۱ - ۲۴
فراوانی مطلق	۱۲	۱۹	۱۷	۹

$$\rightarrow N = 12 + 19 + 17 + 9 = 57$$

و می‌دانیم بزرگترین زاویه‌ی مرکزی در نمودار دایره‌ای مربوط به دسته‌ای است که فراوانی مطلق آن بیشتر است. (دسته‌ی دوم)

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{57} \times 19 = 120^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۷

$$C = \frac{R}{n} \rightarrow 4 = \frac{R}{9} \rightarrow R = 36$$

اگر ۸ داده بین چارک اول و سوم، اضافه کنیم دامنه‌ی تغییرات تغییر نمی‌کند زیرا کوچکترین و بزرگترین داده تغییری نکرده‌اند. یک واحد هم از طول دسته کم شده است یعنی طول دسته‌ی جدید برابر ۳ می‌باشد.

$$C' = \frac{R'}{n'} \rightarrow 3 = \frac{36}{n'} \rightarrow n' = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۸

برای راحتی در محاسبات از داده‌ها ۱۲ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{1}{24} ((2 \times (-4)) + (5 \times (-2)) + (5 \times 0) + (9 \times 2) + (3 \times 4))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{1}{24} (-8 - 10 + 0 + 18 + 12) \rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{12}{24} \rightarrow \bar{x} = 12 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 12.5 = 12 + 2a \rightarrow 2a = 0.5 \rightarrow a = 0.25$$

با استفاده از جدول فراوانی تجمعی داده شده، مرکز دسته و فراوانی مطلق آن را بدست می‌آوریم و توجه کنید اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی ۱ام و ۲ام، فراوانی مطلق دسته‌ی $(i + 1)$ ام را می‌دهد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۹

مرکز دسته	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸
فراوانی مطلق	۸	۱۲	۷	۸	۵

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم.



$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 20 = \frac{1}{40} ((8 \times (-8)) + (12 \times (-4)) + (7 \times 0) + (8 \times 4) + (5 \times 8))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 20 = \frac{1}{40} (-64 - 48 + 32 + 32) \rightarrow \bar{x} - 20 = \frac{-40}{40} = -1 \rightarrow \bar{x} = 19$$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۲۰ واحد کم می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۰

$x_i - 120$	-10	-4	2	8	14
F_i	5	8	15	12	10

$$\bar{x} - 120 = \frac{1}{50} ((-10 \times 5) + (-4 \times 8) + (2 \times 15) + (8 \times 12) + (14 \times 10))$$

$$= \frac{1}{50} (-50 - 32 + 30 + 96 + 140) = \frac{184}{50} = 3,68 \rightarrow \bar{x} = 120 + 3,68 = 123,68$$

در ابتدا میانگین امتیازات دو نفر را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۱

$$\bar{x}_1 = \frac{7 + 9 + 8 + 9 + 7}{5} = 8, \quad \bar{x}_2 = \frac{10 + 8 + 6 + 7 + 9}{5} = 8$$

حال که میانگین‌ها برابر است دقت کاری نفری بیشتر است که ضریب تغییرانش کمتر باشد.

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(10-8)^2 + (8-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5} = \frac{10}{5}$$

چون میانگین‌ها برابر هستند بنابراین ضریب تغییرات نسبت مستقیم با واریانس دارد پس دقت نفر اول بیشتر است.

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \Rightarrow CV_1 < CV_2$$