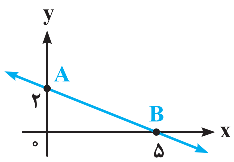
فصل اول
هندسهٔ تحلیلی و جبر

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

بچه‌ها سلام! به کتاب ریاضی یازدهم ما خوش‌اومدین. فصل اول کتاب رو با یه سری یادآوری در مورد نوشتن معادلهٔ خط و وضعیت دو خط نسبت به هم و از این جور چیزا شروع می‌کنیم. با ما همرا باشین.

۱- شیب خط گذرنده از نقاط A و B در شکل روبه‌رو کدام است؟



۱) $-۰/۴$ ۲) $-۰/۲$ ۳) $-۰/۳$ ۴) $-۰/۱$

۲- اگر سه نقطهٔ $(k,۲)$، $(۰,k)$ و $(-۱,۰)$ روی یک خط راست باشند، مقدار k کدام است؟

۱) -۱ ۲) $۲,-۱$ ۳) $۱,-۲$ ۴) ۲

۳- خطی که از نقاط $A(a,۴)$ و $B(۴,a)$ می‌گذرد، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۲ قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

۴- اگر خط به معادلهٔ $y=(۲m-n)x+n+۱$ از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۰)$ بگذرد، شیب خط به معادلهٔ $ny+۲mx+۱=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

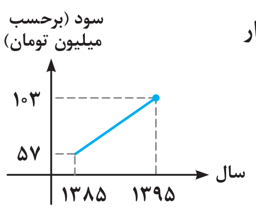
۵- عرض از مبدأ خط $\Delta: my-\left(۴+\frac{m}{۲}\right)x=۳$ برابر -۵ است. به ازای چه مقدار k، خط به معادلهٔ $\frac{۲x}{k}-\frac{y+۱}{k-۲}=۲$ موازی خط Δ است؟

۱) $\frac{۲۴}{۴۹}$ ۲) $\frac{۲۲}{۴۹}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۲}{۱۵}$

۶- دو نقطهٔ $A(۱,y_A)$ و $B(x_B,۵)$ روی خط $y=۴x-۳$ واقع‌اند. اگر تصاویر این دو نقطه روی محور yها به ترتیب D و C باشند، شیب قطر BD از ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۷- نمودار سود سالانهٔ یک کارخانهٔ تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ مطابق شکل مقابل است. در کدام سال، مقدار سود سالانه با میانگین سود ده‌ساله برابر است؟



۱) ۱۳۸۸ ۲) ۱۳۸۹ ۳) ۱۳۹۰ ۴) ۱۳۹۲

۸- خطی که از نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۲,-۲)$ می‌گذرد، خط $x+y=۱$ را در نقطهٔ C قطع می‌کند. $x_C+۲y_C$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۹- معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(۶,-۲)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن، ۵ باشد، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲y-x=۱۰$ ۲) $۲x-۳y=۶$ ۳) $x+۲y=۱۰$ ۴) $۲x+۳y=۶$

۱۰- چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطهٔ $(۱,۲)$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیهٔ اول، مثلثی به مساحت $\frac{۹}{۲}$ بسازد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

وضعیت دو خط نسبت به هم

دو خط می‌تونن با هم‌دیگه حالت‌های مختلفی داشته باشن. مثلاً بر هم عمود باشن، یا این‌که همدیگر رو قطع کنن ولی بر هم عمود نباشن، یا این‌که بر هم منطبق باشن و یا موازی هم باشن.

۱۱- معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد و موازی خط $y=۲x+۴$ باشد، از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟ آزمون‌های گاج

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۲,۷)$ ۳) $(۲,۵)$ ۴) $(۰,۴)$

۱۲- به‌ازای چه مقدار m، دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع، روی خطوط $2x-my=1$ و $(m-1)x+2my=5$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱- ۴) ۱

۱۳- مساحت ناحیهٔ محدود به محور xها و نیمساز ناحیهٔ سوم و خط به معادلهٔ $y=2(x+3)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۴- مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است به طوری که $A(5,1)$، $B(10,4)$ و $C(7,9)$. مشخصات رأس D کدام است؟ کار در کلاس کتاب درسی

۱) $(2,6)$ ۲) $(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$ ۳) $(\frac{3}{2},6)$ ۴) $(2,\frac{13}{2})$

۱۵- محل تلاقی ارتفاع‌های مثلثی به مختصات رئوس $A(-1,1)$، $B(-2,0)$ و $C(3,-1)$ کدام است؟

۱) $(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$ ۲) $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ ۳) $(\frac{8}{3},\frac{28}{3})$ ۴) $(-\frac{2}{3},\frac{8}{3})$

۱۶- معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=1$، $y=2x$ و $x=1$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=\frac{2}{3}$ ۲) $x=\frac{2}{3}$ ۳) $y+x=\frac{2}{3}$ ۴) $y+x=\frac{1}{3}$

۱۷- مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادلهٔ $y=x+3$ و $x=4$ و محور yها و نیمساز ناحیهٔ اول برابر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

فاصلهٔ دو نقطه

توی این بخش ذهنتون رو می‌بریم به سمت این که فاصلهٔ نقاط رو از هم دیگه به دست بیارین.

۱۸- اگر نقطهٔ $A(3,4)$ از مبدأ مختصات و از نقطهٔ B روی محور xها، به یک فاصله باشد، طول نقطهٔ B کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹- اگر طول نقاط M و N به ترتیب برابر ۲ و ۶ و شیب پاره‌خط MN برابر ۸ باشد، طول پاره‌خط کدام است؟

۱) $4\sqrt{65}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{65}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۲۰- دو نقطهٔ $A(1,-2)$ و $B(-3,0)$ دو سر قطری از یک مربع‌اند. مساحت مربع کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۱- شعاع دایره‌ای به مرکز $W(2,1)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(-2,3)$ برابر کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) ۴

۲۲- نقاط $A(1,1)$، $B(5,3)$ و $C(2,5)$ را در نظر بگیرید. محیط مثلث ABC کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $2\sqrt{5}+\sqrt{19}+\sqrt{17}$ ۲) $\sqrt{17}+3\sqrt{5}+\sqrt{19}$ ۳) $2\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{17}+4\sqrt{5}+\sqrt{13}$

۲۳- مثلث ABC با رئوس $A(1,2)$، $B(2,5)$ و $C(4,1)$ چگونه است؟ تمرین کتاب درسی

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۲۴- نقاط $A(1,0)$، $B(4,2)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار a، مثلث ABC متساوی‌الساقین و در رأس A قائمه است؟ آزمایشی سنجش

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵- اگر نقاط $A(0,0)$ و $B(6,0)$ دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشند، آن‌گاه فاصلهٔ رأس C از نقطهٔ $D(0,2\sqrt{3})$ کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۱) $4\sqrt{21}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{21}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۲۶- اگر نقاط $A(3,1)$ و $B(-3,-3)$ دو انتهای قطر بزرگ یک لوزی باشند و قطر کوچک آن، نصف قطر بزرگ آن باشد، مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲

۲۷- نقاط M و N را با طول‌های ۳ و ۴ روی خط $y=2x-5$ در نظر بگیرید. اگر تصاویر این نقاط را روی محور طول‌ها، P و Q بنامیم، مساحت ذوزنقهٔ $MNQP$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۸

۲۸- چند نقطه روی خط $y = x + ۱$ یافت می‌شود که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ $B(۱,۲)$ و $A(۰,۱)$، برابر ۲ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۹- اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $۲y + x = ۸$ ، $۳y + x = ۴$ و $y = ۲x - ۱$ هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع

نقطهٔ وسط پاره‌خط

iq چه جوری میشه مختصات نقطهٔ وسط یه پاره‌خط رو به دست آورد؟

۳۰- قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۳)$ کدام نقطه است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(-۶,۱)$ ۲) $(-۵,۳)$ ۳) $(-۶,۲)$ ۴) $(-۴,۲)$

۳۱- اگر $A(-۲,۳)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

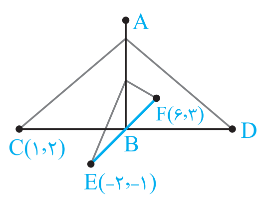
۳۲- اگر $A(۸,۴)$ و $B(۶,-۲)$ باشد، فاصلهٔ مبدأ مختصات از وسط پاره‌خط AB چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۳۳- در تست قبل، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $۲x + ۶y = ۵$ ۲) $x - ۳y = ۱۰$ ۳) $x + ۳y = ۱۰$ ۴) $۲x - ۶y = ۵$

۳۴- مطابق شکل مقابل، میلهٔ AB توسط طناب‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مجموع طول و عرض نقطهٔ D کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۵- نقاط $A(۶,۱)$ ، $B(۴,۳)$ و $C(-۱,-۲)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم مستطیل کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -۲ ۲) -۵ ۳) -۳ ۴) -۴

۳۶- اگر نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۲)$ دو انتهای یکی از قطرهای دایره باشند، مجموع طول و عرض مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن به ترتیب کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲},۵$

۳۷- شعاع دایره‌ای به مرکز $(۲,۱)$ و گذرنده از نقاط $(۲,a)$ و $(a,۴)$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۴

۳۸- دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۳۹- دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۴۰- دو نقطهٔ $A(۲a,a)$ و $B(a+۳,a-۴)$ دو رأس از مثلثی هستند. میانهٔ نظیر رأس C منطبق بر خط $y = ۵$ است. طول نقطهٔ وسط AB کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۴۱- نقاط $A(۴,۲)$ ، $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر H و M به‌ترتیب پای ارتفاع AH و میانهٔ AM باشند، طول MH کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۴۲- خطی به معادلهٔ $۲y - ۳x + ۶ = ۰$ ، محورهای x و y را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کرده است. نقطهٔ P بر امتداد AB با شرط $PB = ۲PA$ انتخاب شده است. فاصلهٔ P تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۳- مثلث ABC با رئوس $A(۱,۹)$ ، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ میانهٔ BM کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $y-۹x+۲۶=۰$ ۲) $y+۹x+۲۶=۰$ ۳) $y+۹x-۲۶=۰$ ۴) $y-۹x-۲۶=۰$

۴۴- نقاط $A(-۴,۱)$ ، $B(-۱,۳)$ و $C(۱,-۲)$ رئوس یک مثلث‌اند. اگر نقطهٔ $G(۲a+b,\frac{b}{۳}-۱)$ ، محل برخورد میانه‌های این مثلث باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۶}$ ۳) $\frac{۴۹}{۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۴۵- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۴۶- اگر نقاط $M(۳,۲)$ ، $N(۶,۲)$ و $P(۴,-۳)$ ، نقاط میانی اضلاع یک مثلث باشند، مساحت این مثلث برابر کدام است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۴۷- نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(-۵,۲)$ و $C(-۲,۵)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۴۸- اگر $A(۲,۱)$ و $B(-۲,۳)$ دو سر قطر یک مربع باشند، معادلهٔ قطر دیگر مربع کدام است؟

۱) $y=x+۲$ ۲) $y=۲x+۲$ ۳) $y=۳x+۲$ ۴) $y=-x+۲$

۴۹- معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB که در آن $A(-a,b)$ و $B(b,۰)$ ، به‌صورت $y=۳x+۴$ است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از A کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۵۰- در مثلث ABC که در آن $A(۱,-۲)$ ، $B(۳,۲)$ و $C(-۳,۲)$ ، مختصات محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث کدام است؟

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۱,۰)$ ۴) $(۰,۱)$

۵۱- مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$ ، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ مفروض است. نقطهٔ تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را D می‌نامیم. فاصلهٔ نقطهٔ D از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

۵۲- در مثلث ABC ، میانهٔ AM و ارتفاع AH به‌ترتیب دارای معادلات $x=۱$ و $y=-۴x+۶$ هستند. اگر رأس B به طول (-۱) روی محور طول‌ها واقع باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ C کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

۵۳- نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۵۴- معادلهٔ دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $y=x-۴$ و $x=۳$ است. اگر محل تلاقی قطرهای این متوازی‌الاضلاع، نقطهٔ $M(۱,-۱)$ باشد، مختصات رأس واقع در ربع اول کدام است؟

۱) $(۳,۱)$ ۲) $(۳,۳)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(۱,۳)$

فاصلهٔ نقطه از خط

بریم سراغ پیدا کردن فاصلهٔ یه نقطه از خط و حالت‌هایی که می‌شه ازشون سؤال طرح کرد.

۵۵- فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ از خط به معادلهٔ $y=-\frac{۴}{۳}x+۶$ کدام است؟ مثال کتاب درسی

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۵۶- فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۱)$ از خط به معادلهٔ $۲x+y+m=۰$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است. مقدار مثبت m کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۷- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $y=ax+b$ برابر ۱ واحد است. اگر این خط از نقطهٔ $(۱,۲)$ گذشته باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۸- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $۲y+m=mx+۴$ برابر ۲ است. این خط محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۵۹- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $a^2x+(a^2+1)y=5$ برابر یک است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $(a^2+1)x+a^2y=10$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۶۰- دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y=x-1$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $2x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) $-15,9$ ۲) $-15,11$ ۳) $-11,15$ ۴) $11,-9$

۶۱- طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x+y=5$ و مختصات یک رأس آن $(2,-1)$ باشد، کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۲- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y+x=6$ و $2x-y=7$ و یک رأس آن، نقطهٔ $A(8,5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۶۳- نقطهٔ $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $2y-x=5$ می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟ تجربی خارج ۹۳

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۶۴- اگر $A(1,1)$، $B(-2,3)$ و $C(-1,a)$ سه رأس یک مثلث باشند و $M(0,1)$ روی نیمساز زاویهٔ A واقع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۶۵- اگر $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع AH و طول آن، کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}\,,\,y=1-x$ ۲) $3\sqrt{2}\,,\,y=x-1$ ۳) $2\sqrt{2}\,,\,y=1-x$ ۴) $2\sqrt{2}\,,\,y=x-1$

۶۶- دایره‌ای بر محور xها و خط به معادلهٔ $3x+4y=0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور xها دارای کدام طول است؟ ریاضی خارج ۹۴

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۶۷- دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ بر خط $y=x$ در نقطهٔ A به طول ۲ مماس است. مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(3,1)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(2,0)$ ۴) $(2,1)$

فاصلهٔ بین دو خط موازی

حالا اگه دو تا خط با هم موازی باشن، چه‌جوری فاصلهٔ بین اونا رو تعیین کنیم؟

۶۸- فاصلهٔ دو خط موازی $2y=mx-3$ و $3y=4x+3$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۶۹- فاصلهٔ خطی که دو نقطهٔ $A(0,0)$ و $B(1,1)$ را به هم وصل می‌کند، از خطی که دو نقطهٔ $C(1,3)$ و $D(2,4)$ را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۷۰- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{25}{8}$ ۴) $\frac{25}{4}$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

بعضی وقتا لازمه به جای این‌که مقدار دقیق ریشه‌های معادلهٔ درجه دو رو پیدا کنیم، فقط مجموع و حاصل‌ضرب اونا رو بدون حل معادله به دست بیاریم.

۷۱- اگر به هریک از جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ یک واحد اضافه کنیم، به حاصل‌ضرب آن‌ها چقدر اضافه می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $1+\sqrt{2}$ ۴) ۱

۷۲- در معادلهٔ درجه دوم $2m(x+1)+x^2=2$، معکوس مجموع دو ریشه برابر با حاصل‌ضرب آن دو ریشه است. m کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۳- اگر معادلهٔ درجه دوم $x^2-6x+m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز α و β باشد، کدام گزینه، درست است؟

۱) $\alpha\beta<-9$ ۲) $\alpha\beta\le 9$ ۳) $\alpha\beta\ge -9$ ۴) $\alpha\beta<9$

۷۴- مقدار a چه‌قدر باشد تا حاصل‌ضرب طول نقاط تقاطع دو منحنی $y_1 = x^2 + ax$ و $y_2 = ax^2 - x + 3$ برابر ۱- گردد؟

۱) ۲-　۲) صفر　۳) ۲　۴) ۱

۷۵- به‌ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 + 13x + m + 4 = 0$ دو برابر معکوس ریشهٔ دیگر است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) به ازای هیچ مقدار m

۷۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta - 7\alpha$ کدام است؟

۱) ۴-　۲) ۴　۳) ۸　۴) ۸-

۷۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

۱) ۸-　۲) ۴-　۳) ۸　۴) ۴

۷۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) ۲-　۲) $-\frac{3}{2}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $\frac{3}{2}$

۷۹- اگر $x_1 = \sin\alpha$ و $x_2 = \cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{q}$　۲) $\frac{q}{p}$　۳) q　۴) $\frac{1}{q}$

۸۰- برای آن‌که ریشه‌های معادلهٔ $4x^2 - 2kx - 1 = 0$، سینوس و کسینوس یک کمان باشند، مقدار k کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$　۲) $-\sqrt{3}$　۳) $2\sqrt{2}$　۴) $\pm\sqrt{2}$

۸۱- اگر S و P به‌ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + mx - 2 = 0$ باشند، به‌ازای کدام مقدار m، اعداد $P - 1$، $\frac{1}{4}$ و S (به‌ترتیب) تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند؟

۱) ۳　۲) ۳-　۳) $-\frac{3}{2}$　۴) $\frac{3}{2}$

۸۲- اگر ریشه‌های معادلهٔ $7x^2 - 6x + 1 = 0$ برابر α و β باشند، کدام درست است؟

۱) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$　۲) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$　۳) $\alpha(1+\beta) = 1 - \beta$　۴) $\alpha + \beta > \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

۸۳- در معادلهٔ درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵　۲) ۴　۳) ۴/۵　۴) ۵

۸۴- ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2 - (3 - 3\sqrt{2})x + (6 - 4\sqrt{2}) = 0$ دو برابر ریشهٔ دیگر آن است. ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) $2 - 2\sqrt{2}$　۲) $2\sqrt{2} - 2$　۳) $1 - \sqrt{2}$　۴) ۲

۸۵- به‌ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 5 + m = 0$ مجذور دیگری است؟

۱) ۳۲　۲) ۲　۳) ۳۲-　۴) ۳-

۸۶- در معادلهٔ $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر، ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۱۰　۲) ۱۲　۳) ۱۴　۴) ۱۵

۸۷- به‌ازای چه مقادیری از k، معادلهٔ $(k-2)x^2 + kx + 1 = 0$ دارای دو ریشه در دو طرف $x = -1$ است؟

۱) $-2 < k < 1$　۲) $-1 < k < 2$　۳) $k > 2$　۴) $k < 2$

۸۸- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$، حاصل عبارت $(\alpha^2 - 4\alpha + 2)(\beta^2 - 4\beta + 4)$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۸　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۶

۸۹- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$، حاصل $\sqrt{\alpha^2(3\beta - 1)}$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\sqrt{2}$　۲) $\sqrt{3}$　۳) ۱　۴) ۲

۹۰- اگر α یک ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، حاصل $\frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}$ کدام است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۱-　۴) $-\frac{1}{2}$

۹۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x - 3 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^2 - 6\alpha - \beta$ کدام است؟

۱) ۲-　۲) ۲　۳) ۱-　۴) ۱

۹۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(x+۴)(x-۵)=۱$ باشند، مقدار عددی $\frac{\alpha+۴}{\beta-۵}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادلهٔ درجه دوم

در این قسمت معادله‌هایی رو مطرح کردیم که بتونید با یه تغییر متغیر مناسب به یه معادلهٔ درجه دو تبدیلشون کنید.

۹۳- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۴- معادلهٔ $(x^۲+x+۱)^۲+۳(x^۲+x+۱)-۴=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) چهار ریشه ۲) دو ریشه

۳) دو ریشهٔ متمایز و یک ریشهٔ مضاعف ۴) دو ریشهٔ مضاعف

۹۵- به‌ازای کدام مقدار a، عبارت $(x-۱)(x)(x+۱)(x+۲)-a$، یک عبارت مربع کامل است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۹۶- معادلهٔ $(x+\frac{۱}{x})^۲+۳(x+\frac{۱}{x})-۱=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۷- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x+\frac{۱}{x})^۲+۳(x+\frac{۱}{x})=۱۰$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۶ ۴) -۳

۹۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{\frac{۲}{۳}}+۷x^{\frac{۱}{۳}}=۴$ و $|\beta|<|\alpha|$ باشند، حاصل $۴\alpha-\beta$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۶۴/۵ ۲) ۶۵ ۳) ۶۳/۵ ۴) ۶۴

بریم سراغ معادله‌ای به اسم معادلهٔ دومجذوری.

۹۹- معادلهٔ $x^۴-۳x^۲+۱=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها کدام است؟

۱) دو ریشه، ۳ ۲) دو ریشه، ۶ ۳) چهار ریشه، ۳ ۴) چهار ریشه، ۶

۱۰۰- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(۴-x^۲)^۲=۲۳-۲x^۲$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۷ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۱- منحنی به معادلهٔ $y^۴-۳xy+۴=۰$، نیمساز ربع دوم را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۰۲- اگر معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ تجربی داخل ۸۵

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

۱۰۳- به‌ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $۳x^۴+۵x^۲+a^۲=۱$ فقط دو جواب قرینهٔ هم برای x دارد؟

۱) $۰<a<۲$ ۲) $-۱<a<۱$ ۳) $a<-۱$ یا $a>۱$ ۴) هر مقدار a

۱۰۴- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، از معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

۱) $m\geq۱$ ۲) $m<۲$ ۳) $۱\leq m<۲$ ۴) هیچ مقدار m

۱۰۵- به‌ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ تجربی داخل ۸۸

۱) $-\frac{۳}{۲}<m<۲$ ۲) $۰<m<۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}<m<\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲<m<۳$

حالا می‌خوایم بپردازیم به بررسی یه سری تست که توی همشون داستان S و P و این چیزا رو داریم.

۱۰۶- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $-mx^۲+۳x+m-۱=۰$ برابر با -۲ است. مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۱۰۷- به‌ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{9}{5},1$ ۴) $-1,\frac{9}{5}$

۱۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

۱۰۹- در معادلهٔ درجه دوم $ax^2-2x+b=0$، رابطهٔ $4a-4+b=0$ بین ضرایب برقرار است. اگر مجموع مجذور ریشه‌ها برابر ۲۰ باشد، b کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۸- ۴) ۲

۱۱۰- در معادلهٔ $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$، حاصل $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{41}{2}$ ۴) $\frac{41}{8}$

۱۱۱- در معادلهٔ $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$، حاصل $\alpha^6+\beta^6$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۵ ۲) ۶۵ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۱۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-1=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۲۷- ۴) ۲۷

۱۱۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+1=0$ باشند و $\frac{\alpha}{\beta+m}+\frac{\beta}{\alpha+m}=-7$ باشد، مقدار طبیعی m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ باشند، مقدار عبارت $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

۱) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ۲) $2\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ۴) $2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

۱۱۶- اگر $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ باشد، حاصل $\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $2\sqrt[4]{3}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[4]{3}$

۱۱۷- به‌ازای کدام مقدار a، بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-a^2x+27=0$ رابطهٔ $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=5$ برقرار است؟(α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\pm4\sqrt{5}$ ۲) ±3 ۳) $\pm2\sqrt{5}$ ۴) $\pm8\sqrt{5}$

۱۱۸- در معادلهٔ $3x^2-15x+m=0$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۱۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+x-1=0$ باشند و $\alpha>\beta$، مقدار عبارت $5\alpha^2+3\beta^2$ کدام است؟

۱) $12+\sqrt{5}$ ۲) $12-\sqrt{5}$ ۳) $24+\sqrt{5}$ ۴) $24-\sqrt{5}$

۱۲۰- با شرط $m>0$، اگر نقطهٔ $A(-2,1)$ روی منحنی $y=mx^2+2mx+m^2$ واقع باشد و خط $y=k$ وتری به طول ۱ از منحنی جدا کند، k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

۱۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-6x+1=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۳۶

۱۲۲- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۲۳- در معادلهٔ $x^2 + 2x - 1 = 0$، حاصل $\alpha^4 + 4\beta^2 - 4\beta$ چه‌قدر است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۱۲۴- به‌ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$، معکوس یک‌دیگرند؟ تجربی خارج ۹۰

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۲۵- به‌ازای کدام مقدار m، معادلهٔ $(m^2+1)x^2 + (m^2-1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی و قرینهٔ هم است؟

۱) ± 1 ۲) $1, 2$ ۳) -1 ۴) 1

۱۲۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $kx^2 - (k-1)x - \frac{k^2}{4} = 0$ باشند، به‌طوری که نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار داشته باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

می‌خوایم در مورد نحوهٔ تشکیل معادلهٔ درجه دوم با داشتن جمع و ضرب ریشه‌ها، حرفایی رو باهاتون بزنیم.

۱۲۷- در کدام معادله، مجموعهٔ جواب‌ها به‌صورت $\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right\}$ است؟ آزمایشی سنجش

۱) $4x^2 + 4x - 1 = 0$ ۲) $4x^2 - 4x - 1 = 0$ ۳) $4x^2 - 2x + 1 = 0$ ۴) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

۱۲۸- طول مستطیلی که محیط و مساحت آن به ترتیب $11cm$ و $6cm^2$ باشد، چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۲۹- معادلهٔ درجه دومی که دارای ضرایب گویا بوده و $2 - \sqrt{3}$ یکی از ریشه‌های آن است، کدام است؟

۱) $x^2 - 4x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 4x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 4x - 1 = 0$ ۴) $x^2 + 4x - 1 = 0$

۱۳۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر، $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ است؟

۱) $x^2 - 18x + 1 = 0$ ۲) $x^2 - 14x + 1 = 0$ ۳) $x^2 + 14x + 1 = 0$ ۴) $x^2 + 18x + 1 = 0$

۱۳۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ ۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ ۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۳۲- ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$، یک واحد کم‌تر است؟ تجربی داخل ۹۴

۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۱۳۳- معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2 - 10x - 27 = 0$ ۲) $x^2 + 10x + 27 = 0$ ۳) $x^2 + 10x - 27 = 0$ ۴) $x^2 - 10x + 27 = 0$

۱۳۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به‌ازای کدام مقدار k، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۳۵- اگر هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 + ax + b = 0$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

تجربی داخل ۸۶

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

۱۳۶- ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادلهٔ $(x-2)^2 = x + 1$ یک واحد کم‌تر است؟ آزمایشی سنجش

۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲) $x^2 - 3x - 1 = 0$ ۳) $x^2 - 4x - 2 = 0$ ۴) $x^2 - 4x + 1 = 0$

ماکزیمم یا می‌نیمم سهمی

سال گذشته با تابع‌های درجه دو یا همون سهمی‌ها آشنا شدین. در اینجا می‌خوایم بیشتر در مورد ماکزیمم یا می‌نیمم این تابع‌ها باهاتون صحبت کنیم.

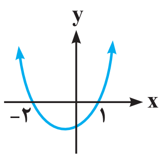
۱۳۷- کم‌ترین مقدار منحنی $y = 2x^2 - 3x + 4$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{21}{8}$ ۴) $\frac{23}{8}$

۱۳۸- اگر بیشترین مقدار منحنی با ضابطهٔ $y = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

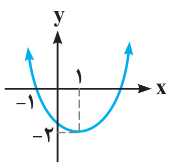
۱۳۹- معادلهٔ سهمی در شکل مقابل، کدام است؟



۱) $y = 2x^2 - 2x - 4$ ۲) $y = 2x^2 + 2x - 4$

۳) $y = -2x^2 + 2x - 4$ ۴) $y = -2x^2 + 4x - 4$

۱۴۰- معادلهٔ سهمی شکل روبه‌رو کدام است؟



۱) $y = x^2 - x - 3$ ۲) $y = 2x^2 + x - 1$

۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ ۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

۱۴۱- راکتی که به طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن $h(t) = 200t - 10t^2$ $(t \geq 0)$ است. چند ثانیه طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

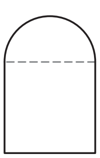
۱۴۲- در تست قبل، ارتفاع نقطهٔ اوج راکت چند متر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۵۰۰ ۴) ۲۰۰۰

۱۴۳- استادیومی را به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در نظر بگیرید. اگر محیط آن ۱۲۰۰ متر باشد، طول مستطیل چند متر باشد تا مساحت مستطیل، بیشترین مقدار ممکن گردد؟ $(\pi \simeq 3)$ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

۱۴۴- پنجره‌ای را که از یک مستطیل و یک نیم‌دایره مطابق شکل مقابل درست شده است، در نظر بگیرید. اگر محیط مستطیل ۶ متر باشد، طول مستطیل چند متر باشد تا پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد؟ $(\pi \simeq 3)$



برگرفته از کتاب درسی

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۲

۳) ۱/۸ ۴) ۲/۴

۱۴۵- بیشترین مقدار سهمی $y = -x^2 + bx + c$ برابر ۱ است. این سهمی از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد، هم‌چنین محور yها را به عرض ۳- قطع می‌نماید. طول رأس سهمی چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

۱۴۶- نمودار سهمی با ضابطهٔ $y = ax^2 + bx + c$ محور xها را در نقاط $x = -1$ و $x = 3$ و محور yها را در نقطهٔ $y = -1$ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ می‌نیمم سهمی، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۴۷- خط به معادلهٔ $y = -\frac{5}{2}$، محور تقارن منحنی با ضابطهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۸- منحنی با ضابطهٔ $y = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادلهٔ $y = 7$ مماس است. فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟ تجربی خارج ۸۵

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۹- محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. بیشترین مساحت این مستطیل، کدام است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۵۵۰ ۳) ۶۲۵ ۴) ۷۰۰

۱۵۰- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ به‌ازای مقادیر مثبت x، کدام است؟ مسألهٔ کتاب درسی

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۵۱- به‌ازای کدام مقدار m، می‌نیمم سهمی $y = ۲x^۲ - \frac{m}{۴}x + ۲m$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

صفرهای تابع درجه دو

بر نیست کمی هم حواستون رو به محل‌های برخورد نمودار سهمی با محور xها جمع کنین. بهشون می‌گن صفرهای تابع درجه دو یا همون ریشه‌های معادلهٔ درجه دو.

۱۵۲- شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است، توپی را با سرعت اولیهٔ ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتـاب می‌کنـد. بعد از t ثانیه، ارتفاع توپ از سطح زمین برابر با $h = -۵t^۲ + ۲۰t + ۸۰$ می‌شود. پس از چند ثانیه، توپ به زمین می‌رسد؟

۱) $۲ + \sqrt{۱۰}$ ۲) $۲ + ۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴ + ۲\sqrt{۵}$ ۴) $-۲ + ۲\sqrt{۵}$

۱۵۳- در تست قبل، چند ثانیه پس از پرتاب، توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۵۴- نقطهٔ $(۳,۴)$ رأس یک سهمی است که نمودار آن، پاره‌خطی به طول ۸ واحد روی محور xها جدا می‌کند. نمودار این سهمی، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۱۵۵- به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار منحنی $y = x(۲x + m - ۱) + ۱$ مماس بر محور xها است؟

۱) $۱ \pm \sqrt{۲}$ ۲) $۱ \pm ۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱ \pm \sqrt{۲}$ ۴) $۱ \pm ۲\sqrt{۲}$

۱۵۶- به‌ازای چند مقدار m، نمودار منحنی $y = \left(۳ - \frac{x}{m}\right)(mx - ۱)$ مماس بر محور xها است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۷- به‌ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۴$ بر منحنی به معادلهٔ $y = (m + ۳)x^۲ + mx$، مماس است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) $-۲, ۸$ ۲) $-۲, ۲۲$ ۳) $۲, ۲۲$ ۴) $۴, ۱۱$

۱۵۸- اگر عبارت $(a - ۱)x^۲ + (a - ۱)x + ۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $\{a : ۱ < a < ۵\}$ ۲) $\{a : a < ۱\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۵۹- به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (m - ۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۶۰- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (m - ۲)x^۲ + ۴mx + ۱$ همواره بالای خط $y = -۱$ قرار دارد. حدود m کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $m \in \mathbb{R}$ ۲) $۲ < m < ۴$ ۳) $۲ < m < ۷$ ۴) هیچ مقدار m

در برخی از تست‌ها، در مورد علامت ریشه‌ها حرف زده می‌شه. تست‌های زیر رو ببینید.

۱۶۱- معادلهٔ $(x - ۱)(x - ۳) + ۲ + k^۲ = ۰$ چه وضعی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) دو ریشهٔ منفی دارد. ۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد. ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۶۲- اگر معادلهٔ $x^۲ + mx + n = ۰$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، کدام‌یک از معادلات زیر همواره دارای ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $x^۲ - mx - n = ۰$ ۲) $x^۲ + mx + n^۲ = ۰$ ۳) $-x^۲ - mx - (n + ۱) = ۰$ ۴) $-nx^۲ + mx + n - ۱ = ۰$

۱۶۳- اگر منحنی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کنـد، آن‌گـاه مجموعـهٔ مقـادیر m به‌کدام صورت است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) $m > ۳$ ۲) $۳ < m < ۴$ ۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $۴ < m < ۵$

۱۶۴- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $a < -9$ ۲) $a < -3$ ۳) $a > -1$ ۴) $-3 < a < 0$

۱۶۵- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، معادلهٔ $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ تجربی خارج ۹۴

۱) $a < -4$ ۲) $a > -4$ ۳) $a < 4$ ۴) $a > 4$

۱۶۶- به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m < 1$ ۲) $m > 2$ ۳) $1 < m < 2$ ۴) $-1 < m < 2$

۱۶۷- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $0 < a \le 2$ ۲) $a \le 2$ ۳) $2 < a < 3$ ۴) $0 < a < 3$

۱۶۸- نمودار تابع $y = x^2 - (m-3)x + 2m$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد. m در کدام بازهٔ زیر، می‌تواند قرار بگیرد؟

۱) $1 \le m < 4$ ۲) $0 \le m < \frac{1}{4}$ ۳) $-1 \le m < 0$ ۴) $2 \le m < 3$

معادلات گویا

رسیدیم به نوعی از معادلات به نام معادلات گویا. شما عزیزان رو با نحوهٔ حل این‌گونه معادلات آشنا می‌کنیم.

۱۶۹- معادلهٔ $2x + \frac{3}{x} = -1$ چه وضعی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۳) دو ریشهٔ منفی دارد. ۴) ریشهٔ مضاعف دارد.

۱۷۰- معادلهٔ $\frac{x-1}{x-2} = \frac{1+x}{x} - \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۱- به‌ازای چه مقداری از a، معادلهٔ $\frac{a}{x} = \frac{a-x}{x} + \frac{x}{a-x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۸

۱۷۲- اگر $x = 5$ یک جواب معادلهٔ $\frac{x-k}{x^2-x-6} = \frac{1}{x^2-4} + \frac{k-1}{2x-4}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۷۳- به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $1 - \frac{m}{x} = 2(\frac{x-1}{x+1})$ جواب حقیقی ندارد؟

۱) $m < 1$ ۲) $-9 < m < 1$ ۳) $m > 9$ ۴) $1 < m < 9$

۱۷۴- کدام گزینه در مورد معادلهٔ $\frac{-6x-2}{x^2+3} = 2 + \frac{x^2+3}{6x+2}$ درست است؟

۱) دو جواب مثبت دارد. ۲) دو جواب منفی دارد. ۳) دو جواب مختلف‌العلامت دارد. ۴) جواب ندارد.

۱۷۵- به‌ازای کدام مقدار m، دو منحنی $y = \frac{m(x-3)}{2x+1}$ و $y = \frac{2x+1}{x-3}$ در دو نقطه، متقاطع‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -2

۱۷۶- معادلهٔ $19 - x^2 = (1 + \frac{2}{x-4})(3 - \frac{6}{x-2})$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۷۷- اگر طول مستطیل طلایی برابر ۲ باشد، عرض آن برابر کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $2\sqrt{5}+1$ ۲) $2\sqrt{5}-1$ ۳) $\sqrt{5}+1$ ۴) $\sqrt{5}-1$

۱۷۸- اگر عدد $(\frac{\sqrt{a}}{2} + 0/5)$ برابر عدد طلایی باشد، آن‌گاه مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{x} = a - \frac{1}{x-2}$ کدام است؟

۱) $1/6$ ۲) ۲ ۳) $2/4$ ۴) $0/4$

۱۷۹- علی یک‌روز در میان، یک آزمون ۲۰ امتیازی می‌دهد. پس از ۸ آزمون، او جمعاً ۶۸ امتیاز کسب کرده است. او از آزمون نهم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۱۵ را کسب می‌کند به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۱۴ می‌شود. علی از آزمون نهم به بعد، در چند آزمون متوالی، نمرهٔ ۱۵ گرفته است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۱۸۰- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۱۸۱- محمد یک متن ادبی را در ۳ ساعت ویرایش می‌کند. اگر علی به کمک او بیاید، کار ویرایش یک ساعت و چهل دقیقه به طول می‌انجامد. علی به تنهایی کار ویرایش را در چند ساعت انجام می‌دهد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴/۲۵ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۳/۷۵

۱۸۲- اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۸ ساعت چمن یک زمین را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها چهار برابر دیگری باشد، ماشینی که کندتر کار می‌کند، به تنهایی در چند ساعت می‌تواند این کار را انجام دهد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۱۸۳- آرش و بابک با هم، کاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اگر هر یک از آن‌ها به تنهایی کار کنند، آرش ۱۵ روز زودتر از بابک کارش را تمام می‌کند. بابک به تنهایی کار را طی چند روز تمام می‌کند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

۱۸۴- قیمت چند خودکار خریداری شده روی هم ۷۸۰۰ تومان است. اگر فروشنده برای هر خودکار ۴۰ تومان تخفیف بدهد، می‌توانیم ۴ خودکار دیگر بخریم. قیمت هر خودکار قبل از تخفیف چند تومان بوده است؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۵۰

معادلات رادیکالی

منظور از معادلهٔ رادیکالی چیه؟ چه‌جوری می‌شه اونا رو حل کرد؟

۱۸۵- کدام‌یک از معادلات زیر، دو ریشه دارد؟

۱) $(x^2-1)\sqrt{x+2}=0$ ۲) $x\sqrt{x-3}=0$ ۳) $(x-4)\sqrt{x+2}=0$ ۴) $(x+2)\sqrt{x+1}=0$

۱۸۶- اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد.

۱۸۷- جواب معادلهٔ $\sqrt{7+x}-1=\sqrt{x}$ چند برابر جواب معادلهٔ $\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{3}{\sqrt{x}}=0$ است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۱۸۸- معادلهٔ $x^3=\sqrt{1-x}+1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۹- معادلهٔ $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+5}=1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۰- معادلهٔ $200(2x-7)=\sqrt{9-x^2}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۱- اگر معادلهٔ $\frac{2}{kx}+\frac{kx}{3x-4}=-2$ دارای مجموعهٔ جواب $\{2\}$ باشد، معادلهٔ $\sqrt{x+1+k}+\sqrt{x+k}=1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بستگی به مقدار k دارد.

۱۹۲- اگر α جواب معادلهٔ $\sqrt{15+\sqrt{2x+80}}=5$ و β جواب معادلهٔ $x=\sqrt{2-x}$ باشد، α و β جواب‌های کدام معادلهٔ زیر هستند؟

۱) $x^2-11x+10=0$ ۲) $x^2+11x+10=0$ ۳) $x^2-8x-2=0$ ۴) $x^2+8x-2=0$

۱۹۳- معادلهٔ $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}+\sqrt{۳-x}=۳$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۹۴- معادلهٔ $۳x-۲+\sqrt{۴x-۳}=۰$ از نظر تعداد جواب‌ها، چگونه است؟

۱) یک جواب ۲) دو جواب هم علامت ۳) دو جواب مختلف‌العلامت ۴) جواب ندارد.

۱۹۵- معادلهٔ $\sqrt{x^۳-x}+\sqrt{x+۲}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۶- چه تعداد از معادلات رادیکالی زیر دارای ریشهٔ حقیقی هستند؟ برگرفته از کتاب درسی

الف) $۲\sqrt{x}+۳=۰$ ب) $\sqrt{۳x-۱}+\sqrt{۴-x}=۰$ پ) $\sqrt{۴x-۱}+\sqrt{۱-x}+۲=۰$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۷- معادلهٔ $(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۴}+x^۲-۳x+۲=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

۱۹۸- معادلهٔ $(x-۲)\sqrt{x^۲-۹}-(x-۳)\sqrt{x^۲-۴}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

۱۹۹- معادلهٔ $\sqrt{\frac{۳x+۱}{x-۴}}+\sqrt{\frac{x-۴}{۳x+۱}}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰۰- معادلهٔ $\sqrt[۴]{۳x^۲+۶}+\sqrt{۳x^۲+۶}=۱۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۱- معادلهٔ $(x-\sqrt{x})^۲-\frac{۱۱}{۱۰}(x-\sqrt{x})+\frac{۱}{۱۰}=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲۰۲- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۳- معادلهٔ $(x^۲+x+۱)-۳\sqrt{x^۲+x+۱}+۲=۰$ دارای:

۱) چهار ریشهٔ حقیقی است. ۲) دو ریشهٔ حقیقی است.

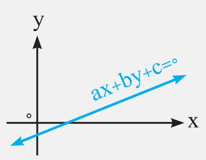
۳) دو ریشهٔ مضاعف است. ۴) چهار ریشهٔ غیرحقیقی (موهومی) است.

یادداشت

پاسخنامه تشریحی

۱ | ۱ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط



معادلهٔ یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax+by+c=0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند.

اگر $b\neq 0$ باشد، با تقسیم طرفین معادلهٔ $ax+by+c=0$ بر b داریم:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

حواستان باشد که:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{اگر } ax+by+c=0 \Rightarrow \text{شیب خط}: m=-\frac{a}{b}=-\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} \\ \text{اگر } y=ax+b \Rightarrow \text{شیب خط}: m=a \end{array}}$$

نوشتن معادلهٔ خط: معادلهٔ خطی که با شیب m از نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از:

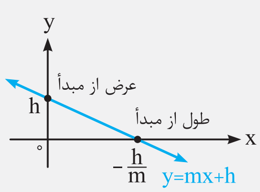
$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

* شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ می‌گذرد، برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارتی می‌توان نوشت:

$$\boxed{m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، عبارت است از:

$$\boxed{y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)}$$



* عرض نقطهٔ تلاقی خط با محور yها را **عرض از مبدأ** می‌نامیم، پس برای به دست آوردن آن کافی است در معادلهٔ خط به جای x، صفر قرار دهید. هم‌چنین طول نقطهٔ تلاقی خط با محور xها را **طول از مبدأ** می‌نامیم و در نتیجه برای به دست آوردن آن کافی است به جای y، صفر قرار دهید.

* *این رو هم بدونید:* معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(a,0)$ و $B(0,b)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ است.

روش اول: معادلهٔ خط در حالت کلی به صورت $y=mx+h$ است. نقطهٔ $A(0,2)$ روی خط قرار دارد، پس:

$$2=m(0)+h\Rightarrow h=2$$

از طرفی نقطهٔ $B(5,0)$ هم روی خط قرار دارد، پس:

$$0=m(5)+h\xRightarrow{h=2}0=5m+2\Rightarrow 5m=-2\Rightarrow m=-\frac{2}{5}=-0/4$$

بنابراین شیب خط گذرنده از نقاط A و B در شکل برابر $-0/4$ است.

روش دوم: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$A(0,2),B(5,0)\Rightarrow \text{شیب خط گذرنده از } B,A = m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{5-0}=-\frac{2}{5}=-0/4$$

۲ | ۳ چون نقاط $A(-1,0)$، $B(0,k)$ و $C(k,2)$ روی یک خط راست قرار دارند، پس $m_{AB}=m_{BC}$، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{k-0}{0-(-1)}=k \\ m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-k}{k-0}=\frac{2-k}{k} \end{cases}\Rightarrow k=\frac{2-k}{k}\Rightarrow k^2+k-2=0\Rightarrow\begin{cases}k=1\\k=-2\end{cases}$$

۳ ۴ منظور سؤال این است که نقاط $A(a,۴)$، $B(۴,a)$ و $C(۰,-۲)$ روی یک خط قرار دارند، پس $m_{AB}=m_{AC}$ و داریم:

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\Rightarrow\frac{a-۴}{۴-a}=\frac{-۲-۴}{۰-a}\Rightarrow -۱=\frac{-۶}{-a}\Rightarrow a=-۶$$

۴ ۳ خط به معادلهٔ $y=(۲m-n)x+n+۱$ از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۰)$ عبور می‌کند، پس مختصات این دو نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$A(۱,۲):۲=(۲m-n)(۱)+n+۱\Rightarrow ۲=۲m+۱\Rightarrow ۱=۲m\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$B(-۳,۰):۰=\left(۲(\frac{۱}{۲})-n\right)(-۳)+n+۱\Rightarrow ۰=-۳+۳n+n+۱\Rightarrow ۲=۴n\Rightarrow n=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه به ازای $m=\frac{۱}{۲}$ و $n=\frac{۱}{۲}$ معادلهٔ خط $ny+۲mx+۱=۰$ به صورت $\frac{۱}{۲}y+x+۱=۰$ در می‌آید و خواهیم داشت:

$$\text{شیب خط}=-(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}})=-۲$$

۵ ۱ عرض از مبدأ خط Δ به معادلهٔ $my-(۴+\frac{m}{۲})x=۳$ برابر -۵ است، پس نقطهٔ $(۰,-۵)$ در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$m(-۵)-۰=۳\Rightarrow m=-\frac{۳}{۵}$$

حال برویم سراغ خط به معادلهٔ $\frac{۲x}{k}-\frac{y+۱}{k-۲}=۲$ و آن را به صورت زیر بنویسیم:

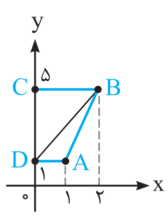
$$\frac{۲}{k}x-(\frac{۱}{k-۲})y-\frac{۱}{k-۲}-۲=۰\Rightarrow \text{شیب خط}=-\frac{\frac{۲}{k}}{-(\frac{۱}{k-۲})}=\frac{\frac{۲}{k}}{\frac{۱}{k-۲}}=\frac{۲k-۴}{k}\quad(*)$$

چون دو خط با هم موازی‌اند، پس شیب‌های برابر دارند، بنابراین شیب خط Δ را به دست آورده و مساوی $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta\ \text{شیب خط}=-\frac{-(۴+\frac{m}{۲})}{m}=\frac{۴+\frac{m}{۲}}{m}\xlongequal{m=-\frac{۳}{۵}}\frac{۴-\frac{۳}{۱۰}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{\frac{۳۷}{۱۰}}{-\frac{۳}{۵}}=-\frac{۳۷}{۶}\quad(*)$$

$$(*)\Rightarrow\frac{۲k-۴}{k}=-\frac{۳۷}{۶}\Rightarrow ۱۲k-۲۴=-۳۷k\Rightarrow ۴۹k=۲۴\Rightarrow k=\frac{۲۴}{۴۹}$$

۶ ۳ نقاط A و B روی خط $y=۴x-۳$ قرار دارند، پس:



$$x=۱\Rightarrow y_A=۴(۱)-۳=۱\Rightarrow A(۱,۱)$$

$$y=۵\Rightarrow ۵=۴x_B-۳\Rightarrow x_B=۲\Rightarrow B(۲,۵)$$

تصویر نقطهٔ A روی محور yها نقطهٔ $D(۰,۱)$ و تصویر نقطهٔ B روی محور yها نقطهٔ $C(۰,۵)$ می‌شود، بنابراین داریم:

$$BD\ \text{شیب قطر}:\ m=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{۱-۵}{۰-۲}=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

۷ ۳ میانگین سود ده ساله برابر است با:

$$\frac{۵۷+۱۰۳}{۲}=\frac{۱۶۰}{۲}=۸۰$$

حال از طریق نقاط $A(۱۳۸۵,۵۷)$ و $B(۱۳۹۵,۱۰۳)$ معادلهٔ خط AB را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵}=\frac{۴۶}{۱۰}=۴/۶\Rightarrow AB\ \text{معادلهٔ خط}:y-۵۷=۴/۶(x-۱۳۸۵)$$

$$\xrightarrow{y=۸۰}۸۰-۵۷=۴/۶(x-۱۳۸۵)\Rightarrow ۲۳=۴/۶(x-۱۳۸۵)\Rightarrow\frac{۲۳}{۴/۶}=x-۱۳۸۵\Rightarrow x=۱۳۹۰$$

بنابراین در سال ۱۳۹۰، مقدار سود سالانه با میانگین سود ده ساله برابر می‌شود.

۸ ۲ خطی که از نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۲,-۲)$ می‌گذرد، خط $y=-۲$ است و بنا به گفتهٔ مسأله، خط $x+y=۱$ را در نقطهٔ C قطع کرده است، پس داریم:

$$\begin{cases}x+y=۱\\y=-۲\end{cases}\Rightarrow x-۲=۱\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=-۲\Rightarrow C(۳,-۲)\Rightarrow x_C+۲y_C=۳+۲(-۲)=-۱$$

۹ **۴** معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن a و عرض از مبدأ آن b باشد، به‌صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ است، پس داریم:

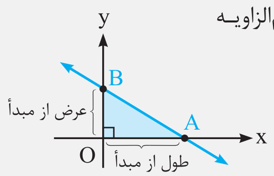
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \xrightarrow{a+b=5} \frac{x}{a}+\frac{y}{5-a}=1 \xrightarrow[y=-2]{x=6} \frac{6}{a}-\frac{2}{5-a}=1 \Rightarrow \frac{30-6a-2a}{a(5-a)}=1 \Rightarrow 30-8a=5a-a^2 \Rightarrow a^2-13a+30=0$$

$$\Rightarrow (a-10)(a-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \Rightarrow b=-5 \Rightarrow \frac{x}{10}+\frac{y}{-5}=1 \xrightarrow{\times 10} x-2y=10 \\ a=3 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \xrightarrow{\times 6} 2x+3y=6 \end{cases}$$

۱۰ **۳**

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط، مخالف صفر باشند، آن‌گاه توسط خط و محورهای مختصات، مثلثی قائم‌الزاویه ساخته می‌شود که مساحت آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$S_{\overset{\Delta}{AOB}}=\frac{1}{2}\,|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}|$$



معادلهٔ خطوطی که با شیب m از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرند، عبارت است از: $y-2=m(x-1)$ یا $y=mx+2-m$، بنابراین می‌توانیم محل برخورد این خط را با محورهای مختصات پیدا کنیم (نقاط A و B):

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\frac{m-2}{m} :\text{طول از مبدأ} \\ x=0 \Rightarrow y=2-m :\text{عرض از مبدأ} \end{cases} \Rightarrow S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}\times\left|\frac{m-2}{m}\times(2-m)\right|=\frac{9}{2} \Rightarrow \left|\frac{(m-2)^2}{m}\right|=9 \Rightarrow (m-2)^2=9|m|$$

با توجه به این‌که خط با محورهای مختصات مثلثی در ناحیهٔ اول ساخته است، پس شیب خط، منفی است، بنابراین:

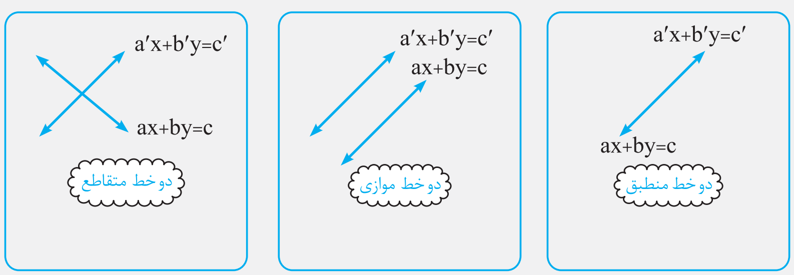
$$m<0 \Rightarrow (m-2)^2=-9m \Rightarrow m^2+5m+4=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-4 \end{cases}$$

پس دو خط با شیب‌های ۱- و ۴- می‌توانیم رسم کنیم که شرایط گفته شده را تأمین کند.

۱۱ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

وضعیت دو خط نسبت به هم

سه حالت زیر وجود دارد:



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

* دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند (دو خطی که شیب‌های برابر ندارند، متقاطع هستند و نقطهٔ تلاقی از حل دستگاه معادلات دو خط به‌دست می‌آید).

خطوط عمود برهم: دو خط d و d' برهم عمودند، هرگاه: $m_d=-\frac{1}{m_{d'}}$ یا $m_d\times m_{d'}=-1$

* دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ وقتی برهم عمود می‌شوند که $aa'+bb'=0$ باشد.

شیب خط $y=2x+4$ برابر ۲ است. معادلهٔ خطی هم که می‌خواهیم بنویسیم، موازی این خط است، پس شیب آن هم برابر ۲ است و چون از نقطهٔ $(-1,1)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$\text{معادلهٔ خط}: y-1=2(x-(-1)) \Rightarrow y=2x+3$$

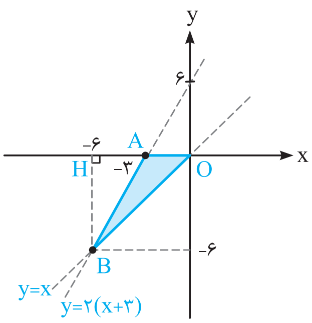
با توجه به گزینه‌ها، خط به‌دست آمده تنها از نقطهٔ $(2,7)$ می‌گذرد، چون مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۱۲ **۲** اضلاع مقابل یک متوازی‌الاضلاع با هم موازی‌اند، پس شیب‌های برابر دارند، بنابراین:

$$\begin{cases} ۲x - my = ۱ \Rightarrow m_۱ = \frac{-۲}{-m} = \frac{۲}{m} \\ (m-۱)x + ۲my = ۵ \Rightarrow m_۲ = \frac{۱-m}{۲m} \end{cases} \xrightarrow{m_۱=m_۲} \frac{۲}{m} = \frac{۱-m}{۲m} \Rightarrow m - m^۲ = ۴m \Rightarrow m^۲ + ۳m = ۰$$

$\Rightarrow m = ۰ \,,\, m = -۳ \Rightarrow$ در گزینه‌ها فقط $m = -۳$ وجود دارد.

۱۳ **۳** با توجه به شکل مقابل، باید طول قاعدهٔ مثلث (OA) و ارتفاع آن (BH) را تعیین کنیم تا مساحت مثلث تشکیل شده، به‌دست آید.



$$\begin{cases} y = x \\ y = ۲(x+۳) \end{cases} \Rightarrow x = ۲(x+۳) \Rightarrow x = -۶ : B \text{ طول نقطهٔ }$$

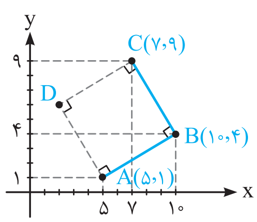
$$\xrightarrow{y=x} y = -۶ \Rightarrow B(-۶,-۶)$$

از طرف: $y = ۲(x+۳) \xrightarrow{y=۰} x = -۳$: طول نقطهٔ $A \Rightarrow \begin{cases} OA = ۳ \\ BH = ۶ \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ = ۹$

۱۴ **۱** با توجه به معلومات مسأله، خواهیم داشت:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴-۱}{۱۰-۵} = \frac{۳}{۵}$$

چون AD بر AB عمود است، پس $m_{AD} = -\frac{۵}{۳}$. از طرفی CD موازی AB است، پس $m_{CD} = \frac{۳}{۵}$. در نتیجه:



$$\begin{cases} C(۷,۹) \\ m_{CD} = \frac{۳}{۵} \end{cases} \Rightarrow CD \text{ معادلهٔ خط} : y - ۹ = \frac{۳}{۵}(x-۷) \Rightarrow y = \frac{۳}{۵}x + \frac{۲۴}{۵}$$

$$\begin{cases} A(۵,۱) \\ m_{AD} = -\frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow AD \text{ معادلهٔ خط} : y - ۱ = -\frac{۵}{۳}(x-۵) \Rightarrow y = -\frac{۵}{۳}x + \frac{۲۸}{۳}$$

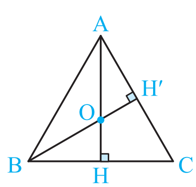
نقطهٔ D محل برخورد دو خط AD و CD است، پس:

$$-\frac{۵}{۳}x + \frac{۲۸}{۳} = \frac{۳}{۵}x + \frac{۲۴}{۵} \Rightarrow -\frac{۵}{۳}x - \frac{۳}{۵}x = \frac{۲۴}{۵} - \frac{۲۸}{۳} \Rightarrow \frac{-۳۴x}{۱۵} = \frac{-۶۸}{۱۵} \Rightarrow ۳۴x = ۶۸ \Rightarrow x = ۲$$

$$\xrightarrow{y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}} y = \frac{۳}{۵}(۲) + \frac{۲۴}{۵} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

بنابراین مختصات نقطهٔ D برابر $(۲,۶)$ است.

۱۵ **۴** برای درک بهتر مسأله، شکل فرضی روبه‌رو را درنظر می‌گیریم. معادلهٔ دو تا از ارتفاع‌ها را به‌دست می‌آوریم و محل تلاقی آن‌ها را مشخص می‌کنیم، به این‌صورت:



$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-۱-۰}{۳-(-۲)} = \frac{-۱}{۵} \Rightarrow m_{AH} = \frac{-۱}{m_{BC}} = ۵$$

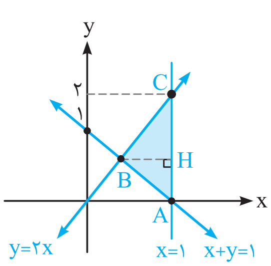
$$\Rightarrow AH \text{ معادلهٔ خط} :\ y - ۱ = ۵(x-(-۱)) \Rightarrow y = ۵x + ۶$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-۱-۱}{۳-(-۱)} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{BH'} = \frac{-۱}{m_{AC}} = ۲$$

$$\Rightarrow BH' \text{ معادلهٔ خط} :\ y - ۰ = ۲(x-(-۲)) \Rightarrow y = ۲x + ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = ۵x + ۶ \\ y = ۲x + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۵x + ۶ = ۲x + ۴ \Rightarrow ۳x = -۲ \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow y = \frac{۸}{۳} \Rightarrow O(-\frac{۲}{۳}, \frac{۸}{۳})$$

۱۶ **۱** با توجه به معادلات سه ضلع مثلث، می‌توانیم شکل مثلث را در دستگاه مختصات رسم کنیم. همان‌طور که می‌بینید ارتفاع BH کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث است و چون ضلع AC به‌صورت قائم است، پس ارتفاع BH افقی می‌شود و برای تعیین معادلهٔ خط آن باید عرض نقطهٔ B را پیدا کنیم. برای این منظور محل تلاقی دو خط $x + y = ۱$ و $y = ۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

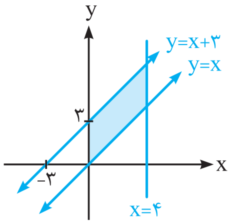


$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ y = ۲x \end{cases} \Rightarrow x + ۲x = ۱ \Rightarrow ۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \,,\, y = \frac{۲}{۳} \Rightarrow B(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

بنابراین معادلهٔ کوتاه‌ترین ارتفاع (یعنی BH) به‌صورت $y = \frac{۲}{۳}$ است.

۱۷ **۲** با رسم نمودار به‌سادگی حل می‌شود.

مساحت متوازی‌الاضلاع = ارتفاع × قاعده = $۴ \times ۳ = ۱۲$



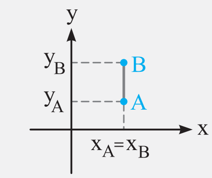
۱۸ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

فاصلهٔ دو نقطه

برای این‌که فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به دست آوریم، می‌توانیم حالت‌های زیر را در نظر بگیریم:

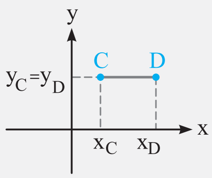
۱ اگر A و B دو نقطهٔ **هم‌طول** در صفحه باشند، آن‌گاه:

$$AB = |y_A - y_B|$$



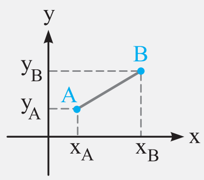
۲ اگر A و B دو نقطهٔ **هم‌عرض** در صفحه باشند، آن‌گاه:

$$CD = |x_C - x_D|$$



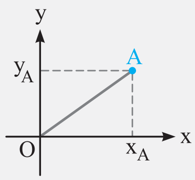
۳ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$



* فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲}$$



نقطهٔ $A(۳,۴)$ از نقاط $O(۰,۰)$ و $B(x,۰)$ به یک فاصله است، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x-۳)^۲ + (۰-۴)^۲} = \sqrt{۳^۲+۴^۲} \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+۱۶} = ۵ \xRightarrow{\text{توان ۲}} (x-۳)^۲+۱۶ = ۲۵$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۹ \xRightarrow{\text{جذر}} |x-۳| = ۳ \Rightarrow x-۳ = \pm ۳ \Rightarrow x = ۰, x = ۶ \Rightarrow x_B = ۶$$

۱۹ **۱** با توجه به معلومات مسأله داریم:

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow ۸ = \frac{y_N - y_M}{۶-۲} \Rightarrow y_N - y_M = ۳۲$$

بنابراین طول پاره‌خط MN مساوی است با:

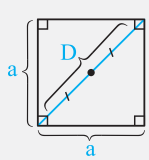
$$\sqrt{(x_M - x_N)^۲ + (y_M - y_N)^۲} = \sqrt{(۲-۶)^۲ + (-۳۲)^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳۲^۲} = \sqrt{(۲^۲)^۲ + (۲^۵)^۲} = \sqrt{۲^۴ + ۲^{۱۰}}$$

$$= \sqrt{۲^۴(۱+۲^۶)} = ۲^۲\sqrt{۱+۲^۶} = ۴\sqrt{۶۵}$$

۲۰ **۲**

یادآوری مربع نوعی متوازی‌الاضلاع است که طول اضلاعش با هم برابرند و چهار زاویهٔ قائمه دارد. قطرهـای مربـع، عمودمنصـف یک‌دیگرند و طول آن‌ها با هم برابر است (در واقع می‌توان گفت مربع، نوعی لوزی است که قطرهایش با هم برابرند).

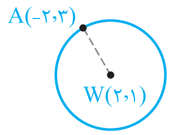
طول قطر : $D = \sqrt{۲}a$; مساحت : $S = a^۲ = \frac{D^۲}{۲}$; محیط : $P = ۴a$



با محاسبهٔ فاصلهٔ بین نقاط A و B، طول قطر مربع به‌دست می‌آید و از طریق آن می‌توانیم مساحت مربع را حساب کنیم:

$$AB = \sqrt{(-۳-۱)^۲ + (۰+۲)^۲} = \sqrt{۲۰} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = \frac{(\text{قطر})^۲}{۲} = \frac{(\sqrt{۲۰})^۲}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

۲۱ **۲** فاصلهٔ بین مرکز دایره تا هر نقطه‌ای روی محیط دایره برابر با شعاع دایره است، پس می‌توان نوشت:

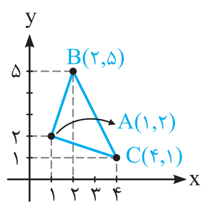


$$\text{شعاع دایره} = AW = \sqrt{(x_A - x_W)^۲ + (y_A - y_W)^۲} = \sqrt{(-۲-۲)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۲ **۳** نقاط $A(۱,۱)$، $B(۵,۳)$ و $C(۲,۵)$ رئوس مثلث‌اند، پس با محاسبهٔ طول اضلاع AB، AC و BC خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \\ AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۱+۱۶} = \sqrt{۱۷} \\ BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۵-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳} \end{cases} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۱۷} + \sqrt{۱۳}$$

۲۳ **۴** با توجه به شکل مقابل، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰} \\ AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۲-۵)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \\ BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۲-۴)^۲ + (۵-۱)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} \end{cases}$$

با توجه به این‌که $AB = AC \neq BC$ ، پس مثلث از نوع متساوی‌الساقین است. از طرفی تساوی $(AC)^۲ + (AB)^۲ = (BC)^۲$ هم برقرار است، بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورث، مثلث قائم‌الزاویه هم هست.

۲۴ **۴** مثلث ABC متساوی‌الساقین و در رأس A قائمه است. بنابراین باید $AB = AC$ و رابطهٔ فیثاغورث بین اضلاع برقرار باشد (ضلع رو به رو به زاویهٔ قائمه (یعنی $\widehat{A}$) وتر مثلث است؛ پس وتر، همان ضلع BC است)، بنابراین:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳} \\ AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱-a)^۲ + (۰-(-a))^۲} = \sqrt{(۱-a)^۲ + a^۲} \\ BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۴-a)^۲ + (۲-(-a))^۲} = \sqrt{(۴-a)^۲ + (۲+a)^۲} \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{فیثاغورث}} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow (۴-a)^۲ + (۲+a)^۲ = ۱۳ + (۱-a)^۲ + a^۲$$

$$\Rightarrow (۱۶ - ۸a + \cancel{a^۲}) + (۴ + ۴a + \cancel{a^۲}) = ۱۳ + (۱ - ۲a + \cancel{a^۲}) + \cancel{a^۲} \Rightarrow ۲۰ - ۴a = ۱۴ - ۲a \Rightarrow ۶ = ۲a \Rightarrow a = ۳$$

در نتیجه به ازای $a = ۳$، $AB = AC$ است.

۲۵ **۳** نقاط $A(۰,۰)$، $B(۶,۰)$، $C(\alpha,\beta)$ رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند، پس:

$$\begin{cases} AB = ۶ \\ AC = \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲} \\ BC = \sqrt{(a-۶)^۲ + \beta^۲} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲} = \sqrt{(a-۶)^۲ + \beta^۲} \xRightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^۲ + \cancel{\beta^۲} = (\alpha - ۶)^۲ + \cancel{\beta^۲} \Rightarrow \cancel{\alpha^۲} = \cancel{\alpha^۲} - ۱۲\alpha + ۳۶$$

$$\Rightarrow ۱۲\alpha = ۳۶ \Rightarrow \alpha = ۳$$

از طرفی $\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲} = ۶$ بنابراین:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۳۶ \xRightarrow{\alpha = ۳} ۹ + \beta^۲ = ۳۶ \Rightarrow \beta^۲ = ۲۷ \Rightarrow \begin{cases} \beta = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow C(۳, ۳\sqrt{۳}) \\ \beta = -۳\sqrt{۳} \Rightarrow C(۳, -۳\sqrt{۳}) \end{cases}$$

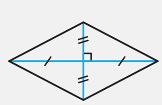
و در آخر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{اگر } C(۳, ۳\sqrt{۳}), D(۰, ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow CD = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۹ + (\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳} \\ \text{اگر } C(۳, -۳\sqrt{۳}), D(۰, ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow CD = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (-۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۹ + (-۵\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۹+۷۵} = \sqrt{۸۴} = ۲\sqrt{۲۱} \end{cases}$$

۲۶ **۱**

یادآوری لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که طول اضلاعش با هم برابرند. قطرهای لوزی، عمودمنصف یک‌دیگرند.

$$\text{مساحت لوزی}: S = \frac{۱}{۲}(\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ})$$

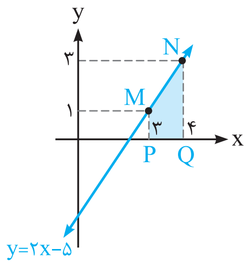


نقاط A و B دو انتهای قطر بزرگ لوزی‌اند، پس داریم:

$$\text{طول قطر بزرگ لوزی} = AB = \sqrt{(۳-۳)^۲+(-۳-۱)^۲} = ۴ \Rightarrow \text{طول قطر کوچک} = \frac{۱}{۲}\times ۴ = ۲$$

$$\Rightarrow \text{مساحت لوزی} = \frac{۱}{۲}(\text{قطر کوچک}\times\text{قطر بزرگ}) = \frac{۱}{۲}(۴\times ۲) = ۴$$

۲۷ **۳** شکل مقابل را ببینید:



$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲}(۱+۳)(۱) = ۲$$

۲۸ **۳** نقطهٔ $M(a,a+۱)$ را روی خط $y=x+۱$ در نظر می‌گیریم. قرار است مجموع فاصلهٔ آن از نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۱,۲)$ برابر ۲ باشد، پس داریم:

$$MA+MB=۲ \Rightarrow \sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}+\sqrt{(x_M-x_B)^۲+(y_M-y_B)^۲}=۲$$

$$\sqrt{(a-۰)^۲+((a+۱)-۱)^۲}+\sqrt{(a-۱)^۲+((a+۱)-۲)^۲}=۲ \Rightarrow \sqrt{a^۲+a^۲}+\sqrt{(a-۱)^۲+(a-۱)^۲}=۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲a^۲}+\sqrt{۲(a-۱)^۲}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲}\,|a|+\sqrt{۲}\,|a-۱|=۲ \xrightarrow{\div\sqrt{۲}} |a|+|a-۱|=\sqrt{۲} \quad (*)$$

حال باید معادلهٔ $(*)$ را حل کنیم. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{اگر } a<۰ \Rightarrow -a-a+۱=\sqrt{۲} \Rightarrow -۲a=\sqrt{۲}-۱ \Rightarrow a=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}<۰ \text{ قابل قبول} \\ \text{اگر } ۰\le a\le ۱ \Rightarrow a-a+۱=\sqrt{۲} \Rightarrow ۱=\sqrt{۲} \text{ غیرقابل قبول} \\ \text{اگر } a>۱ \Rightarrow a+a-۱=\sqrt{۲} \Rightarrow ۲a=\sqrt{۲}+۱ \Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}>۱ \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به این‌که معادلهٔ $(*)$ دو جواب دارد، پس دو نقطه روی خط $y=x+۱$ یافت می‌شود که شرایط گفته شده را دارا باشد.

بچه‌های گلم، نکتهٔ زیر رو هم بلد باشید:

نکته **در مورد معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$ $(a<b, k>۰)$ می‌توان نوشت:**

۱ اگر $|a-b|<k$، آن‌گاه معادله دو جواب دارد $\left(x_۱=\frac{a+b+k}{۲}, x_۲=\frac{a+b-k}{۲}\right)$.

۲ اگر $|a-b|=k$، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب در بازهٔ $[a,b]$ دارد.

۳ اگر $|a-b|>k$، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

هم‌چنین در مورد معادلهٔ $|x-a|-|x-b|=k$ $(a\ne b, k\in\mathbb{R})$ می‌توان نوشت:

۱ اگر $|k|<|a-b|$، آن‌گاه معادله یک جواب دارد که برابر $x=\frac{a+b+k}{۲}$ و یا $x=\frac{a+b-k}{۲}$ است. باید هر دوی آن‌ها را در معادله جایگذاری کنیم و هر کدام را که صدق کرد به عنوان جواب بپذیریم).

۲ اگر $|a-b|=k$، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد.

۳ اگر $|a-b|<k$، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

۲۹ **۱** شیب خطوط $۲y+x=۸$ و $y=۲x-۱$ به‌ترتیب برابر $-\frac{۱}{۲}$ و ۲ است، پس این دو خط برهم عمودند، بنابراین مثلث موردنظر قائم‌الزاویه است. حالا در مورد این که مثلث متساوی‌الساقین هست یا نه، باید طول اضلاع را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} ۲y+x=۸ \\ ۳y+x=۴ \end{cases} \Rightarrow y=-۴ \;,\; x=۱۶ \Rightarrow A(۱۶,-۴)$$

$$\begin{cases} ۲y+x=۸ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow y=۳ \;,\; x=۲ \Rightarrow B(۲,۳) \Rightarrow \begin{cases} AB=\sqrt{۱۴^۲+۷^۲}=۷\sqrt{۵} \\ AC=\sqrt{۱۵^۲+۵^۲}=۵\sqrt{۱۰} \\ BC=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵} \end{cases}$$

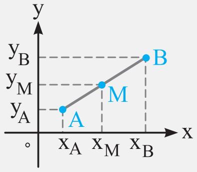
$$\begin{cases} ۳y+x=۴ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow y=۱ \;,\; x=۱ \Rightarrow C(۱,۱)$$

پس هیچ دوضلعی از مثلث با هم برابر نیستند و در نتیجه متساوی‌الساقین نیست.

۳۰ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

نقطهٔ وسط پاره‌خط

نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ را در نظر بگیرید. مختصات نقطهٔ M، وسط نقاط A و B از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$M(x_M,y_M):\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}\end{cases}$$

فرض کنید نقطهٔ B، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد، در این صورت نقطهٔ M وسط نقاط A و B قرار دارد و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow -۲=\dfrac{۲+x_B}{۲}\Rightarrow -۴=۲+x_B\Rightarrow x_B=-۶ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow ۳=\dfrac{۴+y_B}{۲}\Rightarrow ۶=۴+y_B\Rightarrow y_B=۲\end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ B به صورت $(-۶,۲)$ است.

۳۱ **۲** ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۲+۰}{۲}=۱ \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۰+(-۲)}{۲}=-۱\Rightarrow M(۱,-۱)$$

$$AM=\sqrt{(۱-(-۲))^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۳۲ **۱** با توجه به معلومات مسأله، می‌توان نوشت:

$$A(۸,۴)\ ,\ B(۶,-۲)\Rightarrow \text{نقطهٔ وسط } AB: M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۸+۶}{۲},\frac{۴+(-۲)}{۲}\right)=(۷,۱)$$

بنابراین فاصلهٔ مبدأ مختصات (نقطهٔ O) از نقطهٔ M برابر است با:

$$OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

۳۳ **۳** عمود منصف AB از وسط A و B (یعنی نقطهٔ M به مختصات $(۷,۱)$) می‌گذرد. ضمناً شیب آن، عکس قرینهٔ شیب پاره‌خط AB است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}A(۸,۴)\\B(۶,-۲)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۴}{۶-۸}=\frac{-۶}{-۲}=۳\Rightarrow m':\text{شیب عمود منصف}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m'=-\frac{۱}{۳}\\M(۷,۱)\end{cases}\Rightarrow \text{معادلهٔ عمود منصف}: y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۷)\xrightarrow{\times ۳} ۳y-۳=-x+۷\Rightarrow x+۳y=۱۰$$

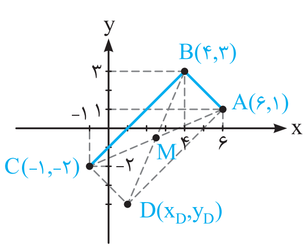
۳۴ **۲** با توجه به شکل داده شده، می‌توان نوشت:

$$\text{وسط پاره‌خط } EF: B\left(\frac{x_E+x_F}{۲},\frac{y_E+y_F}{۲}\right)=\left(\frac{-۲+۶}{۲},\frac{-۱+۳}{۲}\right)=(۲,۱)$$

از طرفی وسط پاره‌خط CD نیز همان نقطهٔ B است، پس:

$$\begin{cases}x_B=\dfrac{x_C+x_D}{۲}\Rightarrow ۲=\dfrac{۱+x_D}{۲}\Rightarrow ۴=۱+x_D\Rightarrow x_D=۳\\ y_B=\dfrac{y_C+y_D}{۲}\Rightarrow ۱=\dfrac{۲+y_D}{۲}\Rightarrow ۲=۲+y_D\Rightarrow y_D=۰\end{cases}\Rightarrow x_D+y_D=۳$$

۳۵ **۳** با توجه به نقاط $A(۶,۱)$ و $B(۴,۳)$ و $C(-۱,-۲)$ شکل زیر را خواهیم داشت. فراموش نکنید که در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}\text{وسط پاره‌خط } AC: M\left(\dfrac{x_A+x_C}{۲},\dfrac{y_A+y_C}{۲}\right)=\left(\dfrac{۶+(-۱)}{۲},\dfrac{۱+(-۲)}{۲}\right)=\left(\dfrac{۵}{۲},-\dfrac{۱}{۲}\right)\quad (*)\\ \text{وسط پاره‌خط } BD: M\left(\dfrac{x_B+x_D}{۲},\dfrac{y_B+y_D}{۲}\right)\xRightarrow{(*)}\begin{cases}\dfrac{۴+x_D}{۲}=\dfrac{۵}{۲}\Rightarrow ۴+x_D=۵\Rightarrow x_D=۱\\ \dfrac{۳+y_D}{۲}=-\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow ۳+y_D=-۱\Rightarrow y_D=-۴\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین $x_D+y_D=۱+(-۴)=-۳$ است.

۳۶ **۱** نقطهٔ وسط A و B همان مرکز دایره است، پس:

$$\begin{cases} \text{مرکز}: M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=(\frac{۴+۱}{۲},\frac{۲+(-۲)}{۲})=(\frac{۵}{۲},۰)\Rightarrow x_M+y_M=\frac{۵}{۲}+۰=\frac{۵}{۲} \\ \text{شعاع}: \frac{۱}{۲}(AB)=\frac{۱}{۲}\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲-(-۲))^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵}=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۳۷ **۳** فرض کنیم $O'(۲,۱)$ ، $A(۲,a)$ و $B(a,۴)$ ، بنابراین طبق گفتهٔ مسأله داریم:

$$O'A=O'B\Rightarrow\sqrt{(۲-۲)^۲+(a-۱)^۲}=\sqrt{(a-۲)^۲+(۴-۱)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(a-۱)^۲=(a-۲)^۲+۹\Rightarrow a^۲-۲a+۱=a^۲-۴a+۴+۹$$

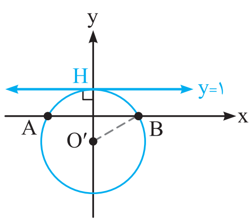
$$\Rightarrow ۲a=۱۲\Rightarrow a=۶\Rightarrow A(۲,۶)\Rightarrow R=O'A=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۶-۱)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۳۸ **۳** معادلهٔ یک قطر دایره به فرم $y=x-۲$ است و چون قطر دایره از مرکز آن عبور می‌کند، پس مختصات مرکز دایره را $O'(\alpha,\alpha-۲)$ می‌گیریم.
از طرفی نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ روی محیط دایره قرار دارند، پس $O'A=O'B=R$ است، یعنی:

$$\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\alpha-۲-۱)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۲-۰)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲+(\alpha-۳)^۲=(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۲)^۲$$

$$\Rightarrow\alpha^۲=(\alpha-۲)^۲\Rightarrow\alpha^۲=\alpha^۲-۴\alpha+۴\Rightarrow۴\alpha=۴\Rightarrow\alpha=۱\Rightarrow\begin{cases}\text{مرکز}: O'(۱,-۱)\\ \text{شعاع}: O'A=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۵}\end{cases}$$

۳۹ **۳** با توجه به شکل مقابل، عمودمنصف دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(-۲,۰)$ ، محور y ها (یعنی خط $x=۰$) است، پس مرکز دایره روی این خط قرار دارد، بنابراین مختصات مرکز دایره به‌صورت $O'(۰,b)$ است و داریم:



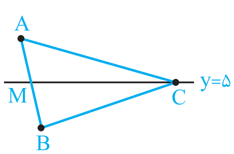
$$R=O'A=O'H\Rightarrow\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-b)^۲}=\sqrt{(۰-۰)^۲+(۱-b)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}b^۲+۴=(۱-b)^۲$$

$$\Rightarrow b^۲+۴=۱-۲b+b^۲\Rightarrow۲b=-۳\Rightarrow b=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\text{مرکز}: O'(۰,-\frac{۳}{۲})$$

بنابراین داریم:

$$R=O'A=\sqrt{(۲-۰)^۲+\left(۰-(-\frac{۳}{۲})\right)^۲}=\sqrt{۴+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$$

۴۰ **۴** از آن‌جا که میانهٔ نظیر رأس C (CM)، منطبق بر خط $y=۵$ است، پس عرض نقطهٔ M (وسط A و B) برابر ۵ می‌باشد و داریم:

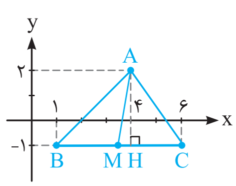


$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow۵=\frac{(a)+(a-۴)}{۲}\Rightarrow۱۰=۲a-۴\Rightarrow۲a=۱۴\Rightarrow a=۷$$

بنابراین:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow x_M=\frac{(۲a)+(a+۳)}{۲}\overset{a=۷}{=\!=}\frac{۱۴+۱۰}{۲}=۱۲$$

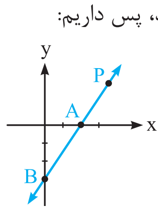
۴۱ **۱** ابتدا مثلث ABC را رسم می‌کنیم، سپس مختصات نقاط M و H را تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases}H(۴,-۱)\\ M(\frac{۶+۱}{۲},\frac{-۱-۱}{۲})=(\frac{۷}{۲},-۱)\end{cases}\Rightarrow MH=\sqrt{(۴-\frac{۷}{۲})^۲+(-۱+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

۴۲ **۴** خط به معادلهٔ $۲y-۳x+۶=۰$ محورهای x و y را در نقاط A و B قطع می‌کند، پس داریم:

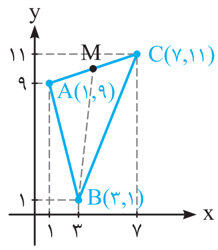
$$\begin{cases}y=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow A(۲,۰)\\ x=۰\Rightarrow y=-۳\Rightarrow B(۰,-۳)\end{cases}$$



همچنین نقطهٔ P بر امتداد AB است، به طوری که $PB=۲PA$ ، پس نقطهٔ A بین P و B قرار دارد، بنابراین:

$$\begin{cases}x_A=\frac{x_P+x_B}{۲}\Rightarrow۲=\frac{x_P+۰}{۲}\Rightarrow x_P=۴\\ y_A=\frac{y_P+y_B}{۲}\Rightarrow۰=\frac{y_P-۳}{۲}\Rightarrow y_P=۳\end{cases}\Rightarrow P(۴,۳)\Rightarrow OP=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

۴۳ ۱



$$\Rightarrow AC \text{ نقطهٔ وسط}: M\left(\frac{x_A+x_C}{۲},\frac{y_A+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{۱+۷}{۲},\frac{۹+۱۱}{۲}\right)=(۴,۱۰)$$

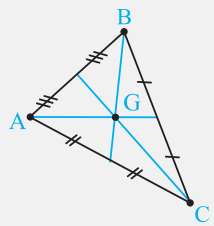
$$\Rightarrow m_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{۱۰-۱}{۴-۳}=\frac{۹}{۱}=۹$$

با داشتن مختصات نقطهٔ $B(۳,۱)$ و شیب خط (یعنی ۹) می‌توانیم معادلهٔ میانهٔ BM را بنویسیم:

$$y-۱=۹(x-۳)\Rightarrow y-۹x+۲۶=۰$$

۴۴ ۴

نیم‌نگاه



مختصات مرکز ثقل مثلث: مثلث ABC را با سه رأس $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ در نظر بگیرید. مختصات مرکز ثقل مثلث (محل برخورد سه میانه) از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$G(x_G,y_G):\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}\end{cases}$$

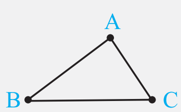
مختصات رئوس را داریم، بنابراین:

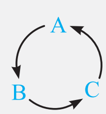
$$\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\dfrac{-۴+(-۱)+۱}{۳}=-\dfrac{۴}{۳}\Rightarrow ۲a+b=-\dfrac{۴}{۳}\quad (*)\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\dfrac{۱+۳+(-۲)}{۳}=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow \dfrac{b}{۳}-۱=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow \dfrac{b}{۳}=\dfrac{۵}{۳}\Rightarrow b=۵\overset{(*)}{\Longrightarrow} ۲a+۵=-\dfrac{۴}{۳}\Rightarrow ۲a=-\dfrac{۱۹}{۳}\Rightarrow a=-\dfrac{۱۹}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{۱۹}{۶}+۵=\frac{۱۱}{۶}$$

۴۵ ۲

نیم‌نگاه





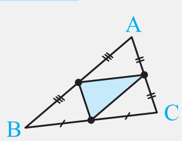
مساحت مثلث از طریق مختصات رئوس آن: مثلث ABC را با سه رأس $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ درنظر بگیرید. در این حالت مساحت مثلث از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۲(۰-۲)+۳(۲-۵)+۰(۵-۰)\right|=\frac{۱}{۲}\left|-۴-۹+۰\right|=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

۴۶ ۴

نیم‌نگاه



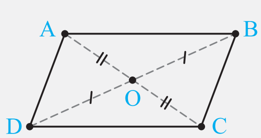
اگر نقاط میانی اضلاع مثلث ABC را به‌هم وصل کنید، مثلثی ساخته می‌شود که متشابه با مثلث ABC است (با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$)، در نتیجه:

$$\boxed{S_{\text{مثلث جدید}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}}=\frac{۱}{۲}\left|x_M(y_N-y_P)+x_N(y_P-y_M)+x_P(y_M-y_N)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۳(۲-(-۳))+۶(-۳-۲)+۴(۲-۲)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۱۵-۳۰+۰\right|=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

در نتیجه مساحت مثلثی که مدنظر سؤال است برابر $۴\times۷/۵=۳۰$ می‌باشد.

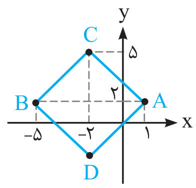
۴۷ ۱



یادآوری متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌رو با هم موازی و مساوی‌اند. قطرهای متوازی‌الاضلاع، یک‌دیگر را نصف می‌کنند. مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع، همان محل برخورد قطرها می‌باشد. اگر A، B، C و D رئوس آن باشند، آن‌گاه:

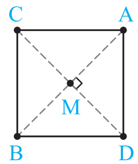
$$\boxed{x_A+x_C=x_B+x_D=۲x_O\quad,\quad y_A+y_C=y_B+y_D=۲y_O}$$

از آن‌جا که مربع، نوعی متوازی‌الاضلاع است، پس با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow ۱-۵ = -۲ + x_D \Rightarrow x_D = -۲ \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow ۲+۲ = ۵ + y_D \Rightarrow y_D = -۱ \end{cases} \Rightarrow D(-۲,-۱) \Rightarrow x_D + y_D = -۳$$

۴۸ **۲** اگر نقطهٔ وسط A و B را M بنامیم، آن‌گاه:

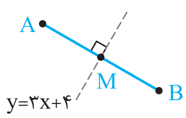


$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲+(-۲)}{۲} = ۰ \ , \ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲ \Rightarrow M(۰,۲)$$

از طرفی شیب خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم و چون قطرهای مربع برهم عمودند، پس با عکس و قرینه کردن m_{AB} می‌توانیم شیب خط گذرنده از نقاط C و D را به‌دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳-۱}{-۲-۲} = \frac{۲}{-۴} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow m_{CD} = ۲ \Rightarrow \text{معادلهٔ خط گذرنده از C و D} : \ y-۲ = ۲(x-۰) \Rightarrow y = ۲x+۲$$

۴۹ **۳** با توجه به شکل مقابل، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است و روی خط $y = ۳x+۴$ قرار دارد، پس:



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right) = \left(\frac{-a+b}{۲}, \frac{b}{۲}\right) \xrightarrow{y=۳x+۴} \frac{b}{۲} = \frac{۳(-a+b)}{۲} + ۴$$

$$\Rightarrow b = -۳a + ۳b + ۸ \Rightarrow ۲b - ۳a = -۸ \qquad (۱)$$

از طرفی پاره‌خط AB بر خط $y = ۳x+۴$ عمود است، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{۳} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰-b}{b-(-a)} \Rightarrow b + a = ۳b \Rightarrow ۲b = a \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a = ۴ \ , \ b = ۲ \Rightarrow A(-۴,۲) \Rightarrow OA = \sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۵۰ **۴** معادلهٔ دو تا از عمودمنصف‌ها را به‌دست می‌آوریم و محل برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{وسط AB} : M\left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right) = \left(\frac{۱+۳}{۲}, \frac{-۲+۲}{۲}\right) = (۲,۰) \\ \text{وسط BC} : M'\left(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}\right) = \left(\frac{۳-۳}{۲}, \frac{۲+۲}{۲}\right) = (۰,۲) \end{cases}$$

از طرفی:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲-(-۲)}{۳-۱} = ۲ \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف AB} : \ m = \frac{-۱}{۲} \xrightarrow{M(۲,۰)} y = \frac{-۱}{۲}(x-۲) \\ m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۲-۲}{-۳-۳} = ۰ \Rightarrow \text{شیب عمود منصف BC} : \ m = \text{تعریف نشده} \xrightarrow{M'(۰,۲)} \text{معادلهٔ عمودمنصف} : x = ۰ \end{cases}$$

در نتیجه محل برخورد عمودمنصف‌ها با حل دستگاه زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} x = ۰ \\ y = \frac{-۱}{۲}(x-۲) \end{cases} \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$$

نیم‌نگاه

خط افقی گذرنده از $A\Big|_b^a$ با شیب صفر، عبارت است از $y = b$ و خط عمودی گذرنده از $A\Big|_b^a$ با شیب تعریف‌نشده، عبارت است از $x = a$.

۵۱ **۴** ابتدا باید معادلهٔ خطوط AM و BH را پیدا کنیم، سپس محل تلاقی آن دو را به‌دست آوریم تا مختصات نقطهٔ D معلوم شود:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۲+۴}{۲} = ۱ \ , \ y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{-۲+۲}{۲} = ۰ \Rightarrow M(۱,۰)$$

$$m_{AM} = \frac{۴-۰}{۱-۱} = \frac{۴}{۰} : \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{معادلهٔ AM} : \ x = ۱$$

از طرفی داریم:

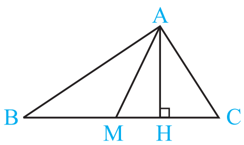
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{۲-۴}{۴-۱} = \frac{-۲}{۳} \xrightarrow{m_{AC} \cdot m_{BH} = -۱} m_{BH} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ BH} : \ y-(-۲) = \frac{۳}{۲}(x-(-۲)) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۱$$

و حالا محل تلاقی دو خط $x = ۱$ و $y = \frac{۳}{۲}x + ۱$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = \frac{۳}{۲}x + ۱ \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۱) + ۱ = \frac{۵}{۲} \ ، \ x = ۱ \Rightarrow OD = \sqrt{۱ + \frac{۲۵}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۹}{۴}} = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$$

۵۲ ۳ با توجه به شکل مقابل، نقطهٔ A از تلاقی معادلات AM و AH به دست می‌آید، بنابراین:



$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۴x+۶ \end{cases} \Rightarrow x=۱\,,\ y=۲ \Rightarrow A(۱,۲)$$

هم‌چنین نقطهٔ B به طول (۱-) روی محور طول‌ها قرار دارد، پس $B(-۱,۰)$. حالا معادلهٔ خط شامل BC را تعیین می‌کنیم و از تلاقی معادلهٔ BC و AM، مختصات نقطهٔ M را که وسط B و C قرار دارد، به‌دست می‌آوریم:

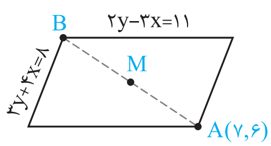
$$AH: y=-۴x+۶ \Rightarrow m_{AH}=-۴ \Rightarrow m_{BC}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{B(-۱,۰)} BC: y-۰=\frac{۱}{۴}(x+۱) \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}(x+۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=\frac{۱}{۴}(x+۱) \end{cases} \Rightarrow x=۱\,,\ y=\frac{۱}{۲} \Rightarrow M(۱,\frac{۱}{۲})$$

و حالا مختصات رأس C را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲} \Rightarrow ۱=\dfrac{-۱+x_C}{۲} \Rightarrow x_C=۳ \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۰+y_C}{۲} \Rightarrow y_C=۱ \end{cases} \Rightarrow C(۳,۱) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض نقطهٔ } C = ۳+۱=۴$$

۵۳ ۳ از آن‌جا که مختصات نقطهٔ $A(۷,۶)$ در هیچ‌یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند، پس اگر معادلات دو ضلع داده شده را با هم قطع دهیم، مختصات رأس مقابل A به‌دست می‌آید. شکل مقابل را ببینید:



$$\begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \xrightarrow{\times ۴} ۸y-۱۲x=۴۴ \\ ۳y+۴x=۸ \xrightarrow{\times ۳} ۹y+۱۲x=۲۴ \end{cases} \Rightarrow y=۴\,,\ x=-۱ \Rightarrow B(-۱,۴)$$

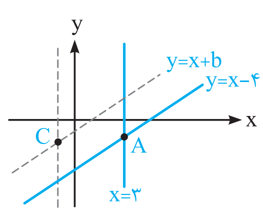
بنابراین مختصات وسط قطر متوازی‌الاضلاع (یعنی نقطهٔ M) به‌دست می‌آید:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\,,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵ \Rightarrow M(۳,۵)$$

۵۴ ۲ محل تلاقی اضلاع $x=۳$ و $y=x-۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-۴ \xrightarrow{x=۳} y=-۱ \Rightarrow A(۳,-۱) : \text{ربع چهارم}$$

از طرفی محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع، نقطهٔ $M(۱,-۱)$ است که اگر AC را یکی از قطرها در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۱=\dfrac{۳+x_C}{۲} \Rightarrow x_C=-۱ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow -۱=\dfrac{-۱+y_C}{۲} \Rightarrow y_C=-۱ \end{cases} \Rightarrow C(-۱,-۱) : \text{ربع سوم}$$

در ضمن با توجه به معادلهٔ دو ضلع داده شده، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ اضلاع دیگر به فرم $x=a$ و $y=x+b$ هستند و نقطهٔ C روی هر دوی آن‌ها وجود دارد، در نتیجه:

$$-۱=a \quad \text{و} \quad -۱=-۱+b \Rightarrow b=۰$$

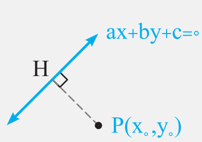
بنابراین مختصات رأس واقع در ربع اول از تلاقی خطوط $y=x$ و $x=۳$ به‌دست می‌آید، به‌این صورت:

$$y=x \xrightarrow{x=۳} y=۳ \Rightarrow (۳,۳) : \text{رأس واقع در ربع اول}$$

۵۵ ۲ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

فاصلهٔ نقطه از خط

فرض کنیم P نقطه‌ای خارج از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ باشد. برای تعیین فاصلهٔ این نقطه از خط مذکور، از نقطهٔ P خطی بر خط $ax+by+c=۰$ عمود کرده (مطابق شکل روبرو) و بعد فاصلهٔ PH را تعیین می‌کنیم. در واقع فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که از این نقطه بر خط رسم می‌شود و از طریق فرمول زیر محاسبه می‌گردد:



$$PH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

اینم بلد باشید: فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ از خط $x=a$ برابر $|x_0-a|$ است، زیرا:

$$x=a \Rightarrow 1x+0y-a=0\ ,\ P(x_0,y_0) \Rightarrow \text{فاصلهٔ نقطه از خط}: d=\frac{|1\times x_0+0\times y_0-a|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|x_0-a|}{\sqrt{1}}=|x_0-a|$$

هم‌چنین فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ از خط $y=b$ برابر $|y_0-b|$ است، زیرا:

$$y=b \Rightarrow 0x+1y-b=0\ ,\ P(x_0,y_0) \Rightarrow \text{فاصلهٔ نقطه از خط}: d=\frac{|0\times x_0+1\times y_0-b|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|y_0-b|}{\sqrt{1}}=|y_0-b|$$

روش اول: شیب خط $y=-\frac{4}{3}x+6$ برابر $-\frac{4}{3}$ و در نتیجه شیب خط عمود بر آن برابر $\frac{3}{4}$ است. حال معادلهٔ خط عمود بر خط داده شده و گذرنده از نقطهٔ $A(7,5)$ را می‌نویسیم:

$$y-5=\frac{3}{4}(x-7) \xrightarrow{\times 4} 4y-20=3x-21 \Rightarrow 3x-4y=1$$

از طرفی معادلهٔ خط $y=-\frac{4}{3}x+6$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=-\frac{4}{3}x+6 \xrightarrow{\times 3} 3y=-4x+18 \Rightarrow 4x+3y=18$$

حالا مختصات نقطهٔ P که محل برخورد خطوط $3x-4y=1$ و $4x+3y=18$ است را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3x-4y=1 \xrightarrow{\times 3} \\ 4x+3y=18 \xrightarrow{\times 4} \end{cases} \begin{cases} 9x-12y=3 \\ 16x+12y=72 \end{cases} \xrightarrow{+} 25x=75 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=2$$

بنابراین $P(3,2)$ است و مسأله طول پاره‌خط AP را می‌خواهد، در نتیجه:

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

روش دوم: ابتدا معادلهٔ خط $y=-\frac{4}{3}x+6$ را به صورت $\frac{4}{3}x+y-6=0$ می‌نویسیم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A(7,5) \\ \frac{4}{3}x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \text{فاصلهٔ نقطه از خط}: d=\frac{|\frac{4}{3}(7)+5-6|}{\sqrt{(\frac{4}{3})^2+1^2}}=\frac{|\frac{28}{3}-1|}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=\frac{\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{25}{5}=5$$

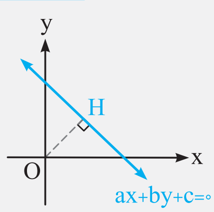
۵۶ | ۴ با توجه به گفته‌های مسأله، داریم:

$$d=\frac{|2(2)+1+m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5} \Rightarrow |5+m|=2(5) \Rightarrow \begin{cases} 5+m=10 \Rightarrow m=5>0 \\ 5+m=-10 \Rightarrow m=-15<0 \end{cases}$$

۵۷ | ۲

نیم‌نگاه

فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$OH=\frac{|a(0)+b(0)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \boxed{OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $O(0,0)$ از خط به معادلهٔ $ax-y+b=0$ برابر ۱ است، پس داریم:

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1 \Rightarrow |b|=\sqrt{a^2+1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} b^2=a^2+1$$

در ضمن خط $y=ax+b$ از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد، پس می‌توان نوشت:

$$2=a(1)+b \Rightarrow b=2-a \Rightarrow b^2=(2-a)^2 \xrightarrow{b^2=a^2+1} (2-a)^2=a^2+1 \Rightarrow 4-4a+a^2=a^2+1 \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۵۸ | ۳ می‌توان نوشت:

$$mx-2y-m+4=0\ ,\ O(0,0) \Rightarrow \text{فاصلهٔ مبدأ از خط}=\frac{|-m+4|}{\sqrt{m^2+(-2)^2}}=2 \Rightarrow |4-m|=2\sqrt{m^2+4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (4-m)^2=4(m^2+4) \Rightarrow 16-8m+m^2=4m^2+16 \Rightarrow 3m^2+8m=0$$

$$\Rightarrow m(۳m+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۰ & \text{غیرقابل قبول (زیرا در این حالت معادله‌ی خط به فرم } y=۲ \text{ درمی‌آید که اصلاً محور } x \text{ ها را قطع نمی‌کند.)}\\ m=-\dfrac{۸}{۳} & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

و حالا با جایگذاری $m=-\frac{۸}{۳}$ در معادلهٔ خط داده شده، خواهیم داشت:

$$۲y-\frac{۸}{۳}=-\frac{۸}{۳}x+۴\xrightarrow{y=۰}-\frac{۸}{۳}=-\frac{۸}{۳}x+۴\Rightarrow-\frac{۲۰}{۳}=-\frac{۸}{۳}x\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۸}=\frac{۵}{۲}$$

۵۹ | ۱ فاصلهٔ نقطهٔ $O(۰,۰)$ از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y-۵=۰$ برابر ۱ است، پس داریم:

$$\frac{|-۵|}{\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}}=۱\Rightarrow\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}=۵\qquad(*)$$

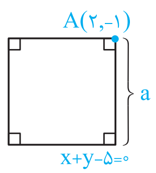
و حالا فاصلهٔ نقطهٔ $O(۰,۰)$ را از خط $(a^۲+۱)x+a^۲y-۱۰=۰$ می‌خواهیم به‌دست آوریم، به این صورت:

$$\frac{|-۱۰|}{\sqrt{(a^۲+۱)^۲+a^۴}}=\frac{۱۰}{\sqrt{(a^۲+۱)^۲+a^۴}}\overset{(*)}{=}\frac{۱۰}{۵}=۲$$

۶۰ | ۲ نقطهٔ $M(a,a-۱)$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر می‌گیریم. قرار است فاصلهٔ این نقطه از خط $۲x-۳y-۵=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{|۲a-۳(a-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|-a-۲|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow|a+۲|=۱۳\Rightarrow a+۲=\pm۱۳\Rightarrow\begin{cases}a=۱۱\\a=-۱۵\end{cases}$$

۶۱ | ۳ مختصات نقطهٔ $(۲,-۱)$ در معادلهٔ خط $x+y=۵$ صدق نمی‌کند، پس فاصلهٔ این نقطه از خط $x+y-۵=۰$ برابر طول ضلع مربع است:

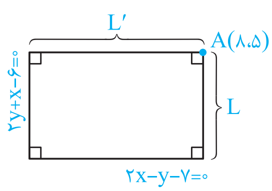


$$\text{طول ضلع مربع}: a=\frac{|۲+(-۱)-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $d=\sqrt{۲}a$ است و داریم:

$$\text{طول قطر مربع}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲}=۴$$

۶۲ | ۲ از آن‌جا که دو خط داده شده برهم عمودند و مختصات نقطهٔ $A(۸,۵)$ در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند، پس با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از هر یک از این خطوط، اندازهٔ طول و عرض مستطیل به‌دست می‌آیند و به این ترتیب می‌توانیم مساحت مستطیل را تعیین کنیم.

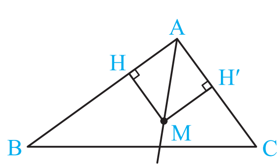


$$\begin{cases}L=\dfrac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\dfrac{۴}{\sqrt{۵}}\\[2ex] L'=\dfrac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\dfrac{۱۲}{\sqrt{۵}}\end{cases}\Rightarrow S=L\times L'=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

۶۳ | ۴ نقطهٔ A وسط قطر مربع است، پس مرکز مربع همان نقطهٔ A است، بنابراین فاصلهٔ این نقطه تا هر یک از اضلاع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است، در نتیجه داریم:

$$\text{فاصلهٔ نقطه از خط}: d=\frac{|۲(-۱)-۳-۵|}{\sqrt{(-۱)^۲+۲^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\text{طول ضلع مربع}=۲d=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow S=\left(\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\frac{۴۰۰}{۵}=۸۰$$

۶۴ | ۳ نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از خطوط AB و AC برابر است (زیرا هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است).



$$\begin{cases}A(۱,۱)\\B(-۲,۳)\end{cases}\Rightarrow AB: y-۱=\frac{۳-۱}{-۲-۱}(x-۱)\Rightarrow ۲x+۳y-۵=۰$$

$$\begin{cases}A(۱,۱)\\C(-۱,a)\end{cases}\Rightarrow AC: y-۱=\frac{a-۱}{-۱-۱}(x-۱)\Rightarrow(a-۱)x+۲y-a-۱=۰$$

و حالا فاصلهٔ نقطهٔ M را از اضلاع AB و AC به‌دست می‌آوریم و مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$MH=\frac{|۲(۰)+۳(۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\quad\text{و}\quad MH'=\frac{|(a-۱)(۰)+۲(۱)-a-۱|}{\sqrt{(a-۱)^۲+۲^۲}}=\frac{|۱-a|}{\sqrt{(a-۱)^۲+۴}}$$

$$\xrightarrow{MH=MH'}\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}=\frac{|۱-a|}{\sqrt{(a-۱)^۲+۴}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۴}{۱۳}=\frac{(۱-a)^۲}{(a-۱)^۲+۴}\Rightarrow۱۳(a-۱)^۲=۴(a-۱)^۲+۱۶\Rightarrow۹(a-۱)^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow(a-۱)^۲=\frac{۱۶}{۹}\xrightarrow{\text{جذر}}|a-۱|=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\begin{cases}a-۱=\dfrac{۴}{۳}\Rightarrow a=\dfrac{۷}{۳}>۰\\[2ex] a-۱=-\dfrac{۴}{۳}\Rightarrow a=-\dfrac{۱}{۳}<۰\end{cases}$$

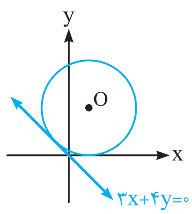
۶۵ **۱** ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. ابتدا شیب BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-۲-۰}{۱-۳}=۱\xrightarrow{m_{AH}.m_{BC}=-۱}m_{AH}=-۱\Rightarrow \text{معادلهٔ ارتفاع AH}:\ y-۲=-۱(x-(-۱))\Rightarrow y=-x+۱$$

در ضمن برای محاسبهٔ طول ارتفاع AH، معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آورده و فاصلهٔ نقطهٔ A از این خط را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{معادلهٔ ضلع BC}:\ y-۰=۱(x-۳)\Rightarrow y=x-۳\Rightarrow x-y-۳=۰\Rightarrow AH=\frac{|-۱-۲-۳|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

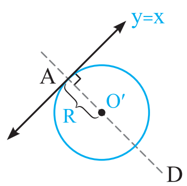
۶۶ **۱** اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایرهٔ موردنظر باشد، با توجه به این‌که در ربع اول بر محور xها مماس و شعاع آن برابر ۳ است، پس $\beta=۳$. از طرفی دایره بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس است، پس فاصلهٔ مرکز یعنی $O(\alpha,\beta)$ از خط موردنظر برابر شعاع، یعنی ۳ است:



$$\frac{|۳\alpha+۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳\Rightarrow|۳\alpha+۱۲|=۱۵\xrightarrow{\alpha>۰}۳\alpha+۱۲=۱۵\Rightarrow\alpha=۱$$

طول نقطهٔ مشترک دایره با محور xها همان طول مرکز دایره، یعنی ۱ است.

۶۷ **۱** با توجه به شکل مقابل، مختصات نقطهٔ A، $(۲,۲)$ است. در ضمن خط D که در نقطهٔ A بر خط $y=x$ عمود شده است، از مرکز دایره می‌گذرد. در نتیجه داریم:



$$y=x\Rightarrow m=۱\Rightarrow m_D=-۱,A(۲,۲)$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط D}:y-۲=-۱(x-۲)\Rightarrow y=-x+۴$$

اگر طول مرکز دایره را a فرض کنیم، آن‌گاه عرض آن $-a+۴$ می‌شود (چون مرکز دایره روی خط $y=-x+۴$ قرار دارد)، بنابراین:

$$\text{فاصلهٔ } O' \text{ تا خط } y-x=۰=R=\frac{|(-a+۴)-(a)|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}}=\frac{|۴-۲a|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|۴-۲a|=۲$$

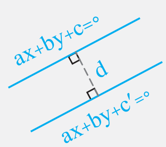
$$\Rightarrow\begin{cases}۴-۲a=۲\Rightarrow a=۱\Rightarrow O'(۱,۳)\\ ۴-۲a=-۲\Rightarrow a=۳\Rightarrow O'(۳,۱)\end{cases}$$

۶۸ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

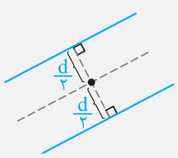
فاصلهٔ بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:

$$\boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$



یادتان باشد: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ به یک فاصله باشند، خطی است به موازات آن دو و معادلهٔ آن عبارت است از:

$$\boxed{ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰}$$



چون خطوط داده شده با هم موازی‌اند، پس شیب‌های برابر دارند، بنابراین:

$$\begin{cases}۲y=mx-۳\Rightarrow m_۱=\frac{m}{۲}\\ ۳y=۴x+۳\Rightarrow m_۲=\frac{۴}{۳}\end{cases}\xrightarrow{m_۱=m_۲}\frac{m}{۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow m=\frac{۸}{۳}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}۲y=\frac{۸}{۳}x-۳\xrightarrow{\times۳}۶y-۸x+۹=۰\\ ۳y=۴x+۳\xrightarrow{\times۲}۶y-۸x-۶=۰\end{cases}\Rightarrow \text{فاصلهٔ دو خط}:d=\frac{|۹-(-۶)|}{\sqrt{(-۸)^۲+۶^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۰۰}}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲}$$

۶۹ **۳** با نوشتن معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B و خط گذرا از نقاط C و D، نتیجه می‌گیریم که این خطوط با هم موازی‌اند، بنابراین داریم:

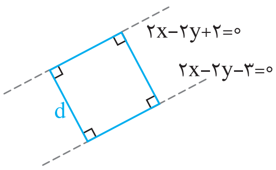
$$A(۰,۰)\ ,\ B(۱,۱)\Rightarrow m_{AB}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱\Rightarrow \text{معادلهٔ خط AB}:y-۰=۱(x-۰)\Rightarrow y=x\Rightarrow m=۱$$

$$C(۱,۳)\ ,\ D(۲,۴)\Rightarrow m_{CD}=\frac{۴-۳}{۲-۱}=۱\Rightarrow \text{معادلهٔ خط CD}:y-۳=۱(x-۱)\Rightarrow y=x+۲\Rightarrow m'=۱$$

در نتیجه فاصلهٔ بین خطوط موازی به‌دست آمده، برابر است با:

$$\begin{cases}y-x=۰\\ y-x-۲=۰\end{cases}\Rightarrow \text{فاصله}:d=\frac{|۰-(-۲)|}{\sqrt{(-۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۷۰ **۳** معادلهٔ خطوط داده شده، نشان می‌دهد که این دو خط با هم موازیند (چون شیب خطوط با هم برابر است)، بنابراین فاصلهٔ بین این دو خط بیانگر طول ضلع مربع است، پس می‌توان نوشت:



$$d=\frac{|۲-(-۳)|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}\Rightarrow \text{مساحت مربع}=\left(\frac{۵}{\sqrt{۸}}\right)^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

۷۱ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فرض کنید ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر α و β باشند، در این صورت داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b}{۲a}=\frac{-b}{a}\Rightarrow \boxed{S=-\frac{b}{a}}$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\alpha.\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\frac{c}{a}\Rightarrow \boxed{P=\frac{c}{a}}$$

مثال **به ازای کدام مقدار m، عدد $۲\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های معادلهٔ $(m-۱)x^۲+۷x+۳m+۲=۰$ است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادله باشند و $۲\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین آن دو باشد، آن‌گاه داریم:

$$(۲\sqrt{۲})^۲=\alpha\beta\Rightarrow ۸=\alpha\beta\xRightarrow{\alpha\beta=\frac{c}{a}}۸=\frac{۳m+۲}{m-۱}\Rightarrow ۳m+۲=۸m-۸\Rightarrow ۵m=۱۰\Rightarrow m=۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

مثال **به ازای کدام مقدار k، در معادلهٔ $۲x^۲-x+k=۰$ بین ریشه‌ها رابطهٔ $\alpha+۲\beta=۳$ برقرار است؟**

۱) -۱۲ ۲) -۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ:

$$\alpha+۲\beta=۳\Rightarrow\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}}+\beta=۳\Rightarrow\beta=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

در ضمن ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، در نتیجه:

$$۲\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲-\frac{۵}{۲}+k=۰\Rightarrow\frac{۲۵}{۲}-\frac{۵}{۲}+k=۰\Rightarrow k=-۱۰\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

اگر جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ را برابر α و β بگیریم، آن‌گاه $\alpha\beta=-۱$ و $\alpha+\beta=۱$. حال به هر یک از جواب‌ها یک واحد اضافه می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$(\alpha+۱)(\beta+۱)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱=-۱+۱+۱=۱$$

همان‌طور که می‌بینید وقتی به هریک از جواب‌ها یک واحد اضافه می‌کنیم، حاصل‌ضرب جواب‌ها از عدد (-۱) به عدد (۱) تغییر می‌کند، یعنی ۲ واحد اضافه می‌شود.

۷۲ **۴** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲m(x+۱)+x^۲=۲$ باشند، داریم:

$$x^۲+۲mx+(۲m-۲)=۰\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۲m\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۲m-۲$$

قرار است معکوس مجموع دو ریشه با حاصل‌ضرب دو ریشه برابر باشد، یعنی:

$$\frac{۱}{\alpha+\beta}=\alpha\beta\Rightarrow\frac{۱}{S}=P\Rightarrow\frac{۱}{-۲m}=۲m-۲\Rightarrow(۲m-۲)(-۲m)=۱\Rightarrow۴m^۲-۴m+۱=۰\Rightarrow(۲m-۱)^۲=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۷۳ **۴** معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد، پس دلتای آن مثبت است، بنابراین:

$$x^۲-۶x+m=۰\Rightarrow\Delta=(-۶)^۲-۴(۱)(m)>۰\Rightarrow۳۶-۴m>۰\Rightarrow۴m<۳۶\Rightarrow m<۹$$

از طرفی داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{۱}=m\Rightarrow\alpha\beta<۹$$

۷۴ **۱** ابتدا دو منحنی $y_۱$ و $y_۲$ را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y_۱=x^۲+ax\\ y_۲=ax^۲-x+۳\end{cases}\Rightarrow \text{نقاط تلاقی}: x^۲+ax=ax^۲-x+۳\Rightarrow(a-۱)x^۲-(a+۱)x+۳=۰\ \ (*)$$

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ باشند، آن‌گاه α و β طول‌های نقاط برخورد دو منحنی $y_۱$ و $y_۲$ خواهند بود، بنابراین:

$$\text{حاصل‌ضرب طول‌های نقاط تقاطع دو منحنی}=\alpha.\beta=\frac{۳}{a-۱}=-۱\Rightarrow a-۱=-۳\Rightarrow a=-۲$$

۷۵ **۳** با توجه به گفته‌های مسأله، می‌توانیم یکی از ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲+۱۳x+m+۴=۰$ را α و ریشهٔ دیگرش را $\frac{۲}{\alpha}$ درنظر بگیـریم، در ایـن صورت داریم:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \alpha\times\frac{۲}{\alpha}=\frac{c}{a}=\frac{m+۴}{m}\Rightarrow ۲=\frac{m+۴}{m}\Rightarrow ۲m=m+۴\Rightarrow m=۴$$

(چون به‌ازای $m=۴$، معادله دو ریشهٔ حقیقی خواهد داشت، پس $m=۴$ را می‌پذیریم.)

۷۶ **۱** α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۷x+۴=۰$ است، پس در معادله صدق می‌کند و داریم: $۲\alpha^۲-۷\alpha+۴=۰$

به عبارتی می‌توان گفت $۲\alpha^۲-۷\alpha=-۴$. از طرفی حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر است با $\frac{c}{a}=۲$ یا به عبارتی $\alpha\beta=۲$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\alpha^۳\beta-۷\alpha=\underbrace{\alpha\beta}_{۲}.\alpha^۲-۷\alpha=۲\alpha^۲-۷\alpha=-۴$$

۷۷ **۳** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ هستند، پس:

$$\alpha+\frac{۱}{\alpha}+\beta+\frac{۱}{\beta}=\alpha+\beta+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=S+\frac{S}{P}\xrightarrow{S=\frac{-b}{a}=۴,P=\frac{c}{a}=۱}۴+\frac{۴}{۱}=۸$$

۷۸ **۲** $x=۲$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$x(ax^۲-x-۵)=۲\xrightarrow{x=۲}۲(۴a-۲-۵)=۲\Rightarrow ۴a-۷=۱\Rightarrow ۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x(۲x^۲-x-۵)=۲\Rightarrow ۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰\xrightarrow{*}(x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

پس مجموع دو ریشهٔ دیگر معادله، برابر می‌شود با مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$، یعنی $S=-\frac{۳}{۲}$.

* چون $x=۲$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس عبارت درجه سوم بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است و $(۲x^۲+۳x+۱)$، خارج قسمت تقسیم بر $(x-۲)$ می‌باشد.

۷۹ **۴**

$$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\frac{c}{a}}=\frac{۱}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}=\frac{۱}{q}$$

۸۰ **۴** فرض کنیم $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$، ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۲kx-۱=۰$ باشند، در این صورت داریم:

$$S=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۲k}{۴}=\frac{k}{۲}\ ,\ P=\sin\alpha\ .\ \cos\alpha=-\frac{۱}{۴}$$

با توجه به رابطهٔ مثلثاتی $(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}+۲\sin\alpha\cos\alpha$، می‌توان نوشت:

$$(\frac{k}{۲})^۲=۱+۲(\frac{-۱}{۴})\Rightarrow\frac{k^۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k^۲=۲\Rightarrow k=\pm\sqrt{۲}$$

۸۱ **۱** در مورد معادلهٔ $۲x^۲+mx-۲=۰$ داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{۲}\quad \text{و}\quad \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{c}{a}=-\frac{۲}{۲}=-۱$$

می‌گوید اعداد $۱-P$، $\frac{۱}{۴}$ و S تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس $\frac{۱}{۴}$ واسطهٔ حسابی بین دو عدد دیگر است، در نتیجه:

$$\frac{۱}{۴}=\frac{S+(۱-P)}{۲}\Rightarrow S+(۱-P)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{m}{۲}+۱-(-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{m}{۲}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow m=۳$$

۸۲ **۳** α و β ریشه‌های معادلهٔ $۷x^۲-۶x+۱=۰$ هستند، بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۶}{۷}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۷}\end{cases}\Rightarrow ۰<\alpha,\beta<۱$$

چون هر دو ریشهٔ معادله، اعدادی بین صفر و یک هستند، پس داریم:

$$\begin{cases}\sqrt[۳]{\alpha}>\sqrt{\alpha}>\alpha\\ \sqrt[۳]{\beta}>\sqrt{\beta}>\beta\end{cases}\Rightarrow\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta}>\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>\alpha+\beta$$

در نتیجه گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند! حالا به گزینهٔ (۳) نگاه کنید:

$$\alpha(۱+\beta)=۱-\beta\Rightarrow\alpha+\alpha\beta=۱-\beta\Rightarrow\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+\underbrace{\alpha\beta}_{P}=۱\xrightarrow{S=\frac{۶}{۷},P=\frac{۱}{۷}}۱=۱\Rightarrow \text{درست است.}$$

۸۳ **۳** **روش اول:**

$$۲x^۲+ax+۹=۰\Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \alpha,\beta\ \text{و}\ \alpha=۲\beta$$

$$\text{از طرفی}: \alpha+\beta=\frac{-a}{۲}\quad,\quad\alpha\beta=\frac{۹}{۲}\xrightarrow{\alpha=۲\beta}۲\beta^۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\beta^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\beta=\pm\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\alpha=۲\beta}\alpha=\pm۳\xrightarrow{\alpha>۰}\beta=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=۴/۵\ \ \text{مجموع دو ریشهٔ مثبت}$$

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، k برابر ریشهٔ دیگر باشد (یعنی $\alpha=k\beta$)، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{\frac{b^{۲}}{ac}=\frac{(k+۱)^{۲}}{k}}$$

اثبات: فرض کنیم یکی از ریشه‌ها α و ریشهٔ دیگر $k\alpha$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} S=k\alpha+\alpha=(k+۱)\alpha=-\dfrac{b}{a} \xRightarrow{\text{توان ۲}} (k+۱)^{۲}\alpha^{۲}=\dfrac{b^{۲}}{a^{۲}} \\ P=k\alpha\times\alpha=k\alpha^{۲}=\dfrac{c}{a} \end{cases} \xRightarrow{\div} \frac{(k+۱)^{۲}}{k}=\frac{b^{۲}}{ac}$$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+ax+۹=۰$ دو برابر ریشهٔ دیگر آن است، پس داریم:

$$\frac{a^{۲}}{۲\times۹}=\frac{(۲+۱)^{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{a^{۲}}{۱۸}=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a^{۲}=۸۱\Rightarrow a=\pm۹$$

در نتیجه مجموع دو ریشهٔ مثبت معادله، با جایگذاری $a=-۹$ به‌دست می‌آید:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{a}{۲}=\frac{-(-۹)}{۲}=۴/۵$$

۸۴ **۱** اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه داریم:

$$x^{۲}-(۳-۳\sqrt{۲})x+(۶-۴\sqrt{۲})=۰\Rightarrow\alpha+\beta=۳-۳\sqrt{۲}\xRightarrow{\alpha=۲\beta\ :\ \text{طبق صورت مسأله}}۳\beta=۳-۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\beta=۱-\sqrt{۲}\Rightarrow\alpha=۲\beta=۲-۲\sqrt{۲}$$

۸۵ **۳** اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، طبق گفتهٔ مسأله، داریم $\alpha=\beta^{۲}$ و از طرفی می‌توان نوشت:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۶\xRightarrow{\alpha=\beta^{۲}}\beta^{۲}+\beta=۶\Rightarrow\beta^{۲}+\beta-۶=۰\Rightarrow(\beta+۳)(\beta-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=-۳\xRightarrow{\text{جایگذاری در خود معادله}}۹+۱۸+۵+m=۰\Rightarrow m=-۳۲\Rightarrow\Delta>۰\\ \beta=۲\xRightarrow{\text{جایگذاری در خود معادله}}۴-۱۲+۵+m=۰\Rightarrow m=۳\Rightarrow\Delta>۰\end{cases}$$

در بین گزینه‌ها $m=-۳۲$ موجود است.

۸۶ **۲** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۸x+m=۰$ باشند، با توجه به گفته‌های مسأله داریم:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta}{۲}+۵\\ \alpha+\beta=۸\end{cases}\Rightarrow(\frac{\beta}{۲}+۵)+\beta=۸\Rightarrow\frac{۳\beta}{۲}=۳\Rightarrow\beta=۲\xRightarrow{\text{جایگذاری در خود معادله}}۲^{۲}-۸(۲)+m=۰\Rightarrow m=۱۲$$

۸۷ **۳** α و β در دو طرف $x=-۱$ قرار دارند، بنابراین:

$\alpha<-۱<\beta\Rightarrow\alpha+۱<۰<\beta+۱\Rightarrow$ $(\alpha+۱)$ و $(\beta+۱)$ غیر هم علامت هستند. $\Rightarrow(\alpha+۱)(\beta+۱)<۰\Rightarrow\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱<۰$

$$\Rightarrow\frac{۱}{k-۲}-\frac{k}{k-۲}+۱<۰\Rightarrow\frac{۱-k+k-۲}{k-۲}<۰\Rightarrow\frac{-۱}{k-۲}<۰\Rightarrow k-۲>۰\Rightarrow k>۲$$

۸۸ **۲** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۱=۰$ هستند، پس در معادله صدق می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases}\alpha^{۲}-۴\alpha+۱=۰\Rightarrow\alpha^{۲}-۴\alpha=-۱\\ \beta^{۲}-۴\beta+۱=۰\Rightarrow\beta^{۲}-۴\beta=-۱\end{cases}\Rightarrow(\underbrace{\beta^{۲}-۴\beta}_{-۱}+۴)(\underbrace{\alpha^{۲}-۴\alpha}_{-۱}+۲)=۳\times۱=۳$$

۸۹ **۳** β یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۱=۰$ است، پس در خود معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\beta^{۲}-۳\beta+۱=۰\Rightarrow۳\beta-۱=\beta^{۲}\Rightarrow\sqrt{\alpha^{۲}(۳\beta-۱)}=\sqrt{\alpha^{۲}\times\beta^{۲}}=|\alpha\beta|=|\frac{c}{a}|=۱$$

۹۰ **۳** α ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}-۲x-۱=۰$ است، پس در معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\alpha^{۲}-۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^{۲}-۲\alpha=۱\Rightarrow\frac{(\alpha-۱)^{۲}}{(\alpha+۱)(\alpha-۳)}=\frac{\overbrace{\alpha^{۲}-۲\alpha}^{۱}+۱}{\underbrace{\alpha^{۲}-۲\alpha}_{۱}-۳}=\frac{۱+۱}{۱-۳}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

۹۱ **۱** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۵x-۳=۰$ هستند، پس: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۵$. از طرفی ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، در نتیجه داریم:

$$x^{۲}-۵x-۳=۰\xRightarrow{x=\alpha}\alpha^{۲}-۵\alpha-۳=۰\Rightarrow\alpha^{۲}=۵\alpha+۳$$

و می‌توان نوشت:

$$\alpha^۲-۶\alpha-\beta=(۵\alpha+۳)-۶\alpha-\beta=۳-\alpha-\beta=۳-(\alpha+\beta)=۳-۵=-۲$$

۹۲ **۱** ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$x=\beta \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (\beta+۴)(\beta-۵)=۱$$

حال صورت و مخرج $\frac{\alpha+۴}{\beta-۵}$ را در $(\beta+۴)$ ضرب می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\frac{(\alpha+۴)(\beta+۴)}{(\beta-۵)(\beta+۴)}=\frac{\alpha\beta+۴(\alpha+\beta)+۱۶}{(\beta-۵)(\beta+۴)}=\frac{P+۴S+۱۶}{(\beta-۵)(\beta+۴)}$$

از طرفی داریم:

$$(x+۴)(x-۵)=۱\Rightarrow x^۲-x-۲۱=۰\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۱ \text{ و } P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۲۱\Rightarrow\frac{P+۴S+۱۶}{(\beta-۵)(\beta+۴)}=\frac{-۲۱+۴(۱)+۱۶}{۱}=-۱$$

۹۳ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

روش تغییر متغیر برای حل معادلهٔ درجه دوم

در ریاضی دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه دوم یاد گرفتید. این روش‌ها عبارتند از:

۱ حل معادلهٔ درجه دو به روش تجزیه
۲ حل معادلهٔ درجه دو به کمک ریشه‌گیری
۳ حل معادلهٔ درجه دو به روش مربع کامل
۴ حل معادلهٔ درجه دو به روش فرمول کلی

تذکر در روش فرمول کلی برای حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq۰)$ می‌گفتیم:

$$\text{(دلتا یا مبین)}\ \Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow\begin{cases}\text{اگر } \Delta>۰\Rightarrow \text{معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.}\Rightarrow x',x''=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\\ \text{اگر } \Delta=۰\Rightarrow \text{معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.}\Rightarrow x'=x''=\frac{-b}{۲a}\\ \text{اگر } \Delta<۰\Rightarrow \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.}\end{cases}$$

نکته اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، آن‌گاه همواره $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ و در نتیجه معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز خواهد داشت.

نکته اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، ضریب x (یعنی b) زوج باشد، می‌توانیم به جای دستور Δ از دستور Δ' استفاده کنیم که به صورت زیر است:

$$b'=\frac{b}{۲},\Delta'=b'^۲-ac\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

تذکر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

اگر $a+c=b\Rightarrow x'=-۱\ ,\ x''=-\frac{c}{a}$ اگر $a+b+c=۰\Rightarrow x'=۱\ ,\ x''=\frac{c}{a}$

حال می‌خواهیم با نحوهٔ حل معادلاتی که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دو هستند، آشنا شویم. معادلاتی با فرم کلی $a(f(x))^۲+b(f(x))+c=۰$.
برای حل این گونه معادلات از **تغییر متغیر** استفاده می‌کنیم. با فرض $\mathbf{f(x)=t}$، معادله را به فرم $at^۲+bt+c=۰$ می‌نویسیم، سپس مقادیر t را از حل این معادله به دست می‌آوریم و $f(x)$ را برابر آن‌ها قرار می‌دهیم تا مقادیر x مشخص شوند.

مثال **معادلهٔ $۳x^۶+۱=۴x^۳$ را حل کنید.**

پاسخ: فرض کنیم $x^۳=t$ باشد، در این صورت معادلهٔ $۳x^۶-۴x^۳+۱=۰$ به صورت $۳t^۲-۴t+۱=۰$ در می‌آید و خواهیم داشت:

$$۳t^۲-۴t+۱=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}t=۱\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱\\ t=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x^۳=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\end{cases}$$

فرض کنیم $x^۲+x=t$، بنابراین معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ به صورت زیر در می‌آید:

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰\Rightarrow t=۶ \text{ یا } t=۱۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow x=-۳ \text{ یا } x=۲\\ x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۳)=۰\Rightarrow x=-۴ \text{ یا } x=۳\end{cases}$$

در نتیجه مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:

$$-۳+۲+(-۴)+۳=-۲$$

۹۴ **۲** فرض کنیم $x^2+x+1=t$، در این صورت معادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$t^2+3t-4=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-1 \\ t=-4 \Rightarrow x^2+x+1=-4 \Rightarrow x^2+x+5=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ داده‌شده کلاً دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

۹۵ **۲** $x(x+1)=x^2+x$ و $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$، در نتیجه عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2+x)(x^2+x-2)-a \xrightarrow{x^2+x=t} t(t-2)-a=t^2-2t-a \quad (*)$$

برای این که عبارت $(*)$، مربع کامل شود، باید $\Delta=0$ باشد (چون عبارت مربع کامل، ریشهٔ مضاعف دارد)، یعنی:

$$(-2)^2-4(1)(-a)=0 \Rightarrow 4+4a=0 \Rightarrow a=-1$$

۹۶ **۴**

نیم‌نگاه

معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=a$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

الف) اگر $|a|<2$، آن‌گاه معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب) اگر $|a|=2$، آن‌گاه معادله، یک ریشهٔ هم‌علامت با a دارد. (اگر $a=2$ باشد، $x=1$ و اگر $a=-2$ باشد، $x=-1$ است.)

ج) اگر $|a|>2$، آن‌گاه معادله، دو ریشهٔ هم‌علامت با a دارد.

فرض کنیم $x+\frac{1}{x}=t$، در این صورت معادلهٔ داده شده، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$t^2+3t-1=0 \Rightarrow \Delta=9-4(1)(-1)=13 \Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\simeq\frac{-3\pm 3/5}{2} \Rightarrow t_1\simeq 0/25\ ,\ t_2\simeq -3/25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=\underbrace{0/25}_{a} \xrightarrow{|a|<2} \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.} \\ x+\frac{1}{x}=\underbrace{-3/25}_{a} \xrightarrow{|a|>2} \text{دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله دو ریشهٔ حقیقی و منفی دارد.}$$

۹۷ **۴** فرض کنیم $x+\frac{1}{x}=t$، بنابراین معادلهٔ $(x+\frac{1}{x})^2+3(x+\frac{1}{x})=10$ به صورت زیر در می‌آید:

$$t^2+3t=10 \Rightarrow t^2+3t-10=0 \Rightarrow (t+5)(t-2)=0 \Rightarrow t=-5 \text{ یا } t=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=-5 \xrightarrow[x\neq 0]{\times x} x^2+1=-5x \Rightarrow x^2+5x+1=0 \Rightarrow \Delta=5^2-4(1)(1)=25-4=21 \\ \Rightarrow x=\frac{-5+\sqrt{21}}{2} \text{ یا } x=\frac{-5-\sqrt{21}}{2} \\ x+\frac{1}{x}=2 \xrightarrow[x\neq 0]{\times x} x^2+1=2x \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 ، x=1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{-5+\sqrt{21}}{2}+\frac{-5-\sqrt{21}}{2}+1+1=\frac{-5+\cancel{\sqrt{21}}-5-\cancel{\sqrt{21}}}{2}+2=-\frac{10}{2}+2=-5+2=-3$$

۹۸ **۱** فرض کنیم $x^{\frac{1}{3}}=t$ باشد، در این صورت معادلهٔ $2x^{\frac{2}{3}}+7x^{\frac{1}{3}}-4=0$ به صورت $2t^2+7t-4=0$ در می‌آید و خواهیم داشت:

$$\Delta=(7)^2-4(2)(-4)=49+32=81 \Rightarrow t=\frac{-7\pm 9}{2(2)} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \text{ یا } t=-4$$

$$\xrightarrow{t=x^{\frac{1}{3}}} \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x=\frac{1}{8} \\ x^{\frac{1}{3}}=-4 \xrightarrow{\text{توان ۳}} x=-64 \end{cases}$$

چون $|-64|>|\frac{1}{8}|$، پس $\alpha=\frac{1}{8}$ و $\beta=-64$ است و در نتیجه داریم:

$$4\alpha-\beta=4(\frac{1}{8})-(-64)=\frac{1}{2}+64=64/5$$

۹۹ **۴**

نیم‌نگاه

حالت خاصی از معادلاتی که گفتیم، **معادلهٔ دومجذوری ($ax^4 + bx^2 + c = 0$)** است که در آن $f(x) = x^2$ می‌باشد. همان‌طور که بیان شد برای حل آن از **روش تغییر متغیر** استفاده می‌کنیم. به این صورت که فرض می‌کنیم $x^2 = t$ باشد تا معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ به فرم معادلهٔ درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ درآید، سپس با حل این معادله، مقادیر t را به‌دست می‌آوریم و بعد با حل معادلهٔ $x^2 = t$، مقادیر x را در صورت وجود، تعیین می‌کنیم.

* توجه داشته باشید که به ازای هر ریشهٔ **مثبتی** که معادلهٔ $at^2 + bt + c = 0$ داشته باشد، معادلهٔ دومجذوری، دارای دو ریشهٔ حقیقی قرینه خواهد بود. (چون $x^2 = t > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$). اگر $t = 0$ باشد، $x = 0$ می‌شود و اگر $t < 0$ باشد، مقدار حقیقی برای x وجود ندارد. در نتیجه می‌توان گفت:

۱ اگر Δ یا $\Delta' > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$ $\xrightarrow[\text{دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0}$ معادلهٔ دومجذوری، چهار ریشهٔ حقیقی دارد که دوبه‌دو، قرینهٔ هم هستند.

۲ اگر Δ یا $\Delta' > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ $\xrightarrow[\text{دو ریشهٔ حقیقی منفی دارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0}$ معادلهٔ دومجذوری، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳ اگر $\frac{c}{a} < 0$ $\xrightarrow[\text{دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0}$ معادلهٔ دومجذوری، دو ریشهٔ حقیقی و قرینه دارد.

۴ اگر Δ یا $\Delta' = 0$ $\xrightarrow[\text{حقیقی مضاعف } x=-\frac{b}{2a} \text{ دارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0 \text{ یک ریشهٔ}}$
- اگر $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow$ معادلهٔ دومجذوری، دو ریشهٔ حقیقی و قرینه دارد.
- اگر $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow$ معادلهٔ دومجذوری، یک ریشهٔ مضاعف صفر دارد.
- اگر $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow$ معادلهٔ دومجذوری، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۵ اگر Δ یا $\Delta' < 0$ $\xrightarrow[\text{ریشهٔ حقیقی ندارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0}$ معادلهٔ دومجذوری، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۶ اگر $c = 0$ $\xrightarrow[\text{مضاعف صفر و یک ریشهٔ } -\frac{b}{a} \text{ دارد.}]{\text{معادلهٔ } at^2+bt+c=0 \text{ یک ریشهٔ}}$
- اگر $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$ معادلهٔ دومجذوری، یک ریشهٔ مضاعف صفر و دو ریشهٔ حقیقی و قرینه دارد.
- اگر $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$ معادلهٔ دومجذوری، فقط یک ریشهٔ مضاعف صفر دارد.

فرض کنیم $x^2 = t$، در این صورت معادلهٔ $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ به فرم $t^2 - 3t + 1 = 0$ درمی‌آید و می‌توان نوشت:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 5 > 0 \ , \ \frac{c}{a} = 1 > 0 \ , \ -\frac{b}{a} = 3 > 0 \Rightarrow$$ معادله دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

بنابراین معادلهٔ $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ چهار ریشهٔ حقیقی دارد. از طرفی اگر ریشه‌های معادلهٔ $t^2 - 3t + 1 = 0$ را t_1 و t_2 بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{t_1} \ , \ x_2 = -\sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{t_2} \ , \ x_4 = -\sqrt{t_2} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مجذورات ریشه‌ها} = \overset{t_1}{x_1^2} + \overset{t_1}{x_2^2} + \overset{t_2}{x_3^2} + \overset{t_2}{x_4^2} = 2(t_1 + t_2) = 2\left(-\frac{b}{a}\right) = 2(3) = 6$$

۱۰۰ **۲**

$$(4 - x^2)^2 = 23 - 2x^2 \Rightarrow 16 - 8x^2 + x^4 = 23 - 2x^2 \Rightarrow x^4 - 6x^2 - 7 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 7)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر می‌شود با:

$$-\sqrt{7} \times \sqrt{7} = -7$$

۱۰۱ **۴** برای تعیین نقاط برخورد منحنی $y^4 - 3xy + 4 = 0$ و نیمساز ربع دوم (یعنی $y = -x$ با شرط $x < 0$)، دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^4 - 3xy + 4 = 0 \\ y = -x \Rightarrow -y = x \end{cases} \Rightarrow y^4 - 3(-y)(y) + 4 = 0 \Rightarrow y^4 + 3y^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

اگر در معادلهٔ $(*)$ فرض کنیم $y^2 = t$، در این صورت خواهیم داشت:

$$t^2 + 3t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$$

بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و در نتیجه معادلهٔ $(*)$ ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت. نتیجه می‌گیریم منحنی داده‌شده و نیمساز ربع دوم، اصلاً هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۰۲ **۲** فرض کنیم $x^۲=t$، در این صورت معادلهٔ داده‌شده به فرم $t^۲-(m+۲)t+(m+۵)=۰$ درمی‌آید و شرط این‌که معادلهٔ اصلی (در صورت مسأله) دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، این است که معادلهٔ ثانویه دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد، پس باید:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow(m+۲)^۲-۴(m+۵)>۰\Rightarrow m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m<-۴ \text{ یا } m>۴\\ -\dfrac{b}{a}>۰\Rightarrow m+۲>۰\Rightarrow m>-۲\\ \dfrac{c}{a}>۰\Rightarrow m+۵>۰\Rightarrow m>-۵\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} m>۴$$

۱۰۳ **۲** فرض کنیم $x^۲=t$، در این صورت معادلهٔ داده‌شده به فرم $۳t^۲+۵t+(a^۲-۱)=۰$ درمی‌آید و شرط این‌که فقط دو جواب قرینهٔ هم در معادلهٔ اصلی برای x وجود داشته باشد، این است که یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\text{حالت (۱)}: \dfrac{c}{a}<۰\Rightarrow\dfrac{a^۲-۱}{۳}<۰\Rightarrow a^۲-۱<۰\Rightarrow -۱<a<۱\\ \text{حالت (۲)}: \Delta=۰\ ,\ -\dfrac{b}{۲a}>۰\Rightarrow\Delta=۰\ ,\ -\dfrac{۵}{۶}>۰\Rightarrow \text{غیرممکن است.}\end{cases}$$

۱۰۴ **۳** فرض کنیم $\sqrt{x}=t$، در این صورت معادله به فرم $t^۲-۲t+m-۱=۰$ درمی‌آید. به‌ازای هر $t>۰$، یک مقدار برای x به‌دست می‌آید، پس برای این‌که دو جواب متمایز برای x حاصل شود، باید معادلهٔ $t^۲-۲t+(m-۱)=۰$ دارای $\underbrace{\text{دو ریشهٔ حقیقی مثبت}}_{\text{حالت (۱)}}$ و یا $\underbrace{\text{یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت}}_{\text{حالت (۲)}}$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}\text{حالت (۱)}: \dfrac{c}{a}>۰,-\dfrac{b}{a}>۰,\Delta>۰\Rightarrow\begin{cases}m-۱>۰\Rightarrow m>۱\\ ۲>۰\\ ۴-۴(m-۱)>۰\Rightarrow m-۱<۱\Rightarrow m<۲\end{cases}\Rightarrow ۱<m<۲\quad(۱)\\ \text{حالت (۲)}: \dfrac{c}{a}=۰,-\dfrac{b}{a}>۰\Rightarrow\begin{cases}m-۱=۰\Rightarrow m=۱\\ ۲>۰\end{cases}\Rightarrow m=۱\quad(۲)\end{cases}$$

از اجتماع موارد (۱) و (۲) به‌دست می‌آید: $۱\le m<۲$.

۱۰۵ **۲** فرض کنیم $\sqrt{x}=t$، در این صورت معادله به فرم $mt^۲-۳t+m-۲=۰$ درمی‌آید. به‌ازای هر $t>۰$، یک مقدار برای x به‌دست می‌آید، پس برای این‌که فقط یک جواب برای x حاصل شود، باید معادلهٔ $mt^۲-۳t+(m-۲)=۰$ $\underbrace{\text{یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی (یعنی دو ریشهٔ مختلف‌العلامه)}}_{\text{حالت (۱)}}$ و یا $\underbrace{\text{یک ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد}}_{\text{حالت (۲)}}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{حالت (۱)}: P=\dfrac{c}{a}<۰\Rightarrow\dfrac{m-۲}{m}<۰\xrightarrow{\text{تداخل علامت}}۰<m<۲\quad(۱)\\ \text{حالت (۲)}: \begin{cases}t=\dfrac{-b}{۲a}>۰\Rightarrow\dfrac{۳}{۲m}>۰\Rightarrow m>۰\\ \Delta=۰\Rightarrow ۹-۴m(m-۲)=۰\Rightarrow -۴m^۲+۸m+۹=۰\Rightarrow m=\dfrac{۲\pm\sqrt{۱۳}}{۲}\xrightarrow{m>۰}m=\dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\end{cases}\quad(۲)\end{cases}$$

از اجتماع موارد (۱) و(۲) به‌دست می‌آید: $m\in(۰,۲)\cup\left\{\dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\right\}$ که فقط گزینهٔ (۲) زیرمجموعه‌ای از آن است.

۱۰۶ **۲** ابتدا نکتهٔ زیر را با دقت بخوانید.

نکته اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه داریم:

۱ $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$

۲ $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$

۳ $\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$

۴ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$ (α و β هر دو مثبت‌اند.)

۵ $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^۲}=\sqrt{\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}$ (α و β هر دو مثبت‌اند.)

۶ $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta}=\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}=\sqrt{S^۲-۴P}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال در معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟ (α و β جواب‌های معادله‌اند.)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$

پاسخ:

گزینهٔ (۴) درست است. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}} \xlongequal{S=-\frac{b}{a}=۴,P=\frac{c}{a}=۱} \sqrt{۴+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۶} \Rightarrow$

مثال در معادلهٔ درجه دوم $x^۲-ax+a+۲=۰$، تفاضل دو ریشه برابر ۲ است، a کدام است؟

۱) $-۶,-۲$ ۲) $-۶,۲$ ۳) $۶,-۲$ ۴) ۲ و ۶

پاسخ:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|\text{ضریب } x^۲|}=\frac{\sqrt{a^۲-۴(a+۲)}}{۱}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲-۴a-۸=۴ \Rightarrow a^۲-۴a-۱۲=۰ \Rightarrow (a-۶)(a+۲)=۰ \Rightarrow a=۶,a=-۲$$

هر دو مقدار به دست آمده برای a قابل قبول هستند، چون به ازای هر دوی آن‌ها مقدار Δ برابر عددی مثبت می‌شود پس گزینهٔ (۳) درست است.

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۳=۰$ باشند، حاصل $(\alpha^۲-۳)(\beta^۲-۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\alpha^۲-\alpha-۳=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۳=\alpha \\ \beta^۲-\beta-۳=۰ \Rightarrow \beta^۲-۳=\beta\end{cases} \Rightarrow (\alpha^۲-۳)(\beta^۲-۳)=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۳ \Rightarrow$$

گزینهٔ (۲) درست است.

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $-mx^۲+۳x+m-۱=۰$ برابر α و β باشند، داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۲ \Rightarrow \frac{m-۱}{-m}=-۲ \Rightarrow m-۱=۲m \Rightarrow m=-۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x^۲+۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(-\frac{b}{a})^۲-۲(\frac{c}{a})=(-۳)^۲-۲(-۲)=۹+۴=۱۳$$

۱۰۷ **۱** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(\frac{m+۳}{m})^۲-\frac{۱۰}{m}=۶ \Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶ \xrightarrow{\times m^۲} (m^۲+۶m+۹)-۱۰m=۶m^۲$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} m=۱\ ,\ m=-\frac{۹}{۵}$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمدهٔ m در معادلهٔ اصلی، متوجه می‌شویم که $m=۱$ قابل قبول نیست، زیرا دلتای معادله، منفی می‌شود و معادله، ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت. *(با توجه به گزینه‌ها، دیگه نمی‌خواد $m=-\frac{۹}{۵}$ رو امتحان کنیم.)*

۱۰۸ **۲** α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۲=۰$ هستند، پس داریم:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow \begin{cases}\frac{۱}{\beta}=\alpha \\ \frac{۱}{\alpha}=\beta\end{cases} \Rightarrow \Big(\underbrace{\alpha+\frac{۱}{\beta}}_{۲\alpha}\Big)^۲+\Big(\underbrace{\beta+\frac{۱}{\alpha}}_{۲\beta}\Big)^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴(S^۲-۲P)$$

$$\xlongequal{S=-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲},P=\frac{c}{a}=۱} ۴\Big(\frac{۲۵}{۴}-۲(۱)\Big)=۲۵-۸=۱۷$$

۱۰۹ **۲** **روش اول:** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲-۲x+b=۰$ باشند، آن‌گاه:

$$S=\alpha+\beta=\frac{۲}{a}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{b}{a}$$

طبق گفتهٔ مسأله داریم: $\alpha^۲+\beta^۲=۲۰$؛ در نتیجه:

$$S^۲-۲P=۲۰ \Rightarrow (\frac{۲}{a})^۲-۲(\frac{b}{a})=۲۰ \Rightarrow \frac{۴}{a^۲}-\frac{۲b}{a}=۲۰ \xrightarrow{\times a^۲} ۲۰a^۲+۲ab-۴=۰$$

$$\xrightarrow{\text{بنا به صورت مسأله } b=۴-۴a} ۲۰a^۲+۲a(۴-۴a)-۴=۰ \Rightarrow ۱۲a^۲+۸a-۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}a=-۱ \Rightarrow b=۸ \\ a=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=\frac{۸}{۳}\end{cases}$$

در بین گزینه‌ها $b=۸$ موجود است.

روش دوم: با توجه به رابطهٔ $۴a-۴+b=۰$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲-۲x+b=۰$ برابر $\alpha=۲$ است (کافی است $\alpha=۲$ را در معادلـه جایگـذاری کنید) و چون مجموع مجذورات ریشه‌ها برابر ۲۰ است، پس داریم:

$$۲^۲+\beta^۲=۲۰\Rightarrow \beta^۲=۱۶\Rightarrow \beta=\pm ۴$$

$$\alpha=۲\,,\,\beta=۴\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{۲}{a}\Rightarrow ۶=\dfrac{۲}{a}\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۳}\\ \alpha\beta=\dfrac{b}{a}\Rightarrow ۸=\dfrac{b}{a}\xrightarrow{a=\frac{۱}{۳}} b=\dfrac{۸}{۳}\end{cases}\qquad \alpha=۲\,,\,\beta=-۴\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{۲}{a}\Rightarrow -۲=\dfrac{۲}{a}\Rightarrow a=-۱\\ \alpha\beta=\dfrac{b}{a}\xrightarrow{a=-۱} -۸=\dfrac{b}{-۱}\Rightarrow b=۸\end{cases}$$

۱۱۰ **۴** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x+\frac{۳}{۴}=۰$ هستند، پس داریم:

$$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲\xrightarrow{S=\frac{-b}{a}=۲,P=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}}\left(۴-\frac{۳}{۲}\right)^۲-۲\left(\frac{۹}{۱۶}\right)=\frac{۲۵}{۴}-\frac{۹}{۸}=\frac{۴۱}{۸}$$

۱۱۱ **۴** مجموع ضرایب معادلهٔ $x^۲-(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}=۰$ برابر صفر است، پس یک ریشهٔ معادله، $\alpha=۱$ و ریشهٔ دیگرش $\beta=\frac{c}{a}=\sqrt{۲}$ است، بنابراین:

$$\alpha^۶+\beta^۶=۱^۶+(\sqrt{۲})^۶=۱+۲^۳=۹$$

۱۱۲ **۳** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۱=۰$ هستند، پس:

$$\alpha^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳=S^۳=\left(-\frac{b}{a}\right)^۳=(-۳)^۳=-۲۷$$

۱۱۳ **۱** α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+۱=۰$ هستند، پس داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-۶\,,\,\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

از طرفی طبق فرض $\frac{\alpha}{\beta+m}+\frac{\beta}{\alpha+m}=-۷$، در نتیجه:

$$\frac{\alpha(\alpha+m)+\beta(\beta+m)}{(\beta+m)(\alpha+m)}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+m(\alpha+\beta)}{(\beta+m)(\alpha+m)}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+m(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+m(\alpha+\beta)+m^۲}=\frac{۳۶-۲-۶m}{۱-۶m+m^۲}=-۷$$

$$\Rightarrow ۷m^۲-۴۸m+۴۱=۰\xrightarrow{a+b+c=۰} m=۱\,,\,m=\frac{۴۱}{۷}$$

بنابراین مقدار طبیعی m، برابر ۱ است.

۱۱۴ **۳** α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ هستند، پس داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۳\,,\,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{۳+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۱۱۵ **۴** به محاسبات زیر دقت کنید:

$$x^۲-۲\sqrt{۳}x+۲=۰\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۲\sqrt{۳}\,,\,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۲$$

$$\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{P}(\sqrt{S+۲\sqrt{P}})=\sqrt{۲}(\sqrt{۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}})$$

$$=\sqrt{۲}(\sqrt{۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})})=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

۱۱۶ **۱** مجموع ضرایب معادلهٔ $x^۲-(۱+\sqrt{۳})x+\sqrt{۳}=۰$ برابر صفر است، پس:

$$\alpha=۱,\beta=\sqrt{۳}\Rightarrow|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=|\underbrace{۱-\sqrt{\sqrt{۳}}}_{\text{منفی}}|+۱+\sqrt{\sqrt{۳}}=(\sqrt{\sqrt{۳}}-۱)+۱+\sqrt{\sqrt{۳}}=۲\sqrt[۴]{۳}$$

۱۱۷ **۱** می‌توان نوشت:

$$x^۲-a^۲x+۲۷=۰\Rightarrow\alpha\beta=۲۷\,,\,\alpha+\beta=a^۲\Rightarrow(\sqrt[۳]{\alpha})^۳+(\sqrt[۳]{\beta})^۳=a^۲$$

$$\Rightarrow(\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta})^۳-۳\sqrt[۳]{\alpha}\sqrt[۳]{\beta}(\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta})=a^۲\Rightarrow ۱۲۵-۳\sqrt[۳]{۲۷}(۵)=a^۲\Rightarrow a^۲=۸۰\Rightarrow a=\pm۴\sqrt{۵}$$

۱۱۸ **۴** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۱۵x+m=۰$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\alpha=\beta+۲\Rightarrow\alpha-\beta=۲\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\Rightarrow\frac{\sqrt{(-۱۵)^۲-۴(۳)(m)}}{۳}=۲\Rightarrow\sqrt{۲۲۵-۱۲m}=۶\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲۲۵-۱۲m=۳۶\Rightarrow۱۲m=۱۸۹\Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

۱۱۹ ۱ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-۱=۰$ هستند و $\beta>\alpha$، بنابراین:

$$۵\alpha^۲+۳\beta^۲=\alpha^۲+۴\alpha^۲+۴\beta^۲-\beta^۲=(\alpha^۲-\beta^۲)+۴(\alpha^۲+\beta^۲)=\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{منفی}}(\alpha+\beta)+۴(\alpha^۲+\beta^۲)$$

$$\overset{*}{=}\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S)+۴(S^۲-۲P)=\left(-\frac{\sqrt{۵}}{۱}\right)(-۱)+۴(۱+۲)=\sqrt{۵}+۱۲$$

$$*:|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\xrightarrow{\beta>\alpha}\beta-\alpha=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow\alpha-\beta=-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۱۲۰ ۳ مختصات نقطهٔ $A(-۲,۱)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$y=mx^۲+۲mx+m^۲\xrightarrow{x=-۲,y=۱}۱=۴m-۴m+m^۲\Rightarrow m^۲=۱\xrightarrow{m>۰}m=۱$$

با جایگذاری $m=۱$ در ضابطهٔ تابع خواهیم داشت:

$$y=x^۲+۲x+۱\xrightarrow{y=k}x^۲+۲x+۱=k\Rightarrow x^۲+۲x+(۱-k)=۰\qquad(*)$$

با توجه به گفته‌های مسأله می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ مساوی ۱ است، در نتیجه:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۴-۴(۱-k)}}{۱}=۱\Rightarrow\sqrt{۴k}=۱\Rightarrow ۴k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

۱۲۱ ۱ **روش اول:** α یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۶x+۱=۰$ است، پس در معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\alpha^۲-۶\alpha+۱=۰\xrightarrow{\div\alpha}\Rightarrow\alpha+\frac{۱}{\alpha}=۶\Rightarrow\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha^۲}=\left(\alpha+\frac{۱}{\alpha}\right)^۲-۲=(۶)^۲-۲=۳۴$$

روش دوم:

$$x^۲-۶x+۱=۰\Rightarrow\text{ریشه‌ها}:\alpha,\beta\ \text{و}\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\beta=\frac{۱}{\alpha}\Rightarrow\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha^۲}=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(۶)^۲-۲(۱)=۳۶-۲=۳۴$$

۱۲۲ ۱ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ هستند، پس در معادله صدق می‌کنند، بنابراین:

$$x^۲-۲x-۴=۰\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰\Rightarrow\alpha^۲-۴=۲\alpha$$

$$\Rightarrow(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲=(۲\alpha)^۲+۴\beta^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴(S^۲-۲P)\xrightarrow{S=۲,P=-۴}۴(۴+۸)=۴۸$$

۱۲۳ ۲ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ هستند، پس داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۲\ \text{و}\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

از طرفی $x=\alpha$ (که ریشهٔ معادله است) در خود معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\alpha^۲+۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^۲=۱-۲\alpha\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۴=۱+۴\alpha^۲-۴\alpha$$

بنابراین:

$$\alpha^۴+۴\beta^۲-۴\beta=(۱+۴\alpha^۲-۴\alpha)+۴\beta^۲-۴\beta=۱+۴(\alpha^۲+\beta^۲)-۴(\alpha+\beta)=۱+۴(S^۲-۲P)-۴S=۱+۴(۴+۲)+۸=۳۳$$

۱۲۴ ۲

نیم‌نگاه

* اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، **عکس** یکدیگر باشند (یعنی $\alpha=\frac{۱}{\beta}$)، آن‌گاه $a=c$ و $\Delta>۰$ است.
* اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، **قرینهٔ** یکدیگر باشند (یعنی $\alpha=-\beta$)، آن‌گاه $b=۰$ و a و c مختلف‌العلامه و $\Delta>۰$ است.
* اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، **عکس و قرینهٔ** یکدیگر باشند (یعنی $\alpha=-\frac{۱}{\beta}$)، آن‌گاه $a=-c$ و $\Delta>۰$ است.

در این‌جا داریم:

$$mx^۲+۳x+(m^۲-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}\Delta=۹-۴m(m^۲-۲)>۰\\ \frac{c}{a}=\frac{m^۲-۲}{m}=۱\Rightarrow m^۲-۲=m\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\m=۲\end{cases}\end{cases}$$

اگر $m=-۱$ باشد، $\Delta=۵$ می‌شود و اگر $m=۲$ باشد، $\Delta=-۷$ می‌شود، پس فقط $m=-۱$ را قبول می‌کنیم.

۱۲۵ ۳ قرار است معادلهٔ $(m^۲+۱)x^۲+(m^۲-۱)x+(m^۲+۳m-۲)=۰$ دو ریشهٔ حقیقی و قرینهٔ هم داشته باشد، بنابراین باید $b=۰$ و a و c مختلف‌العلامه باشند (چون $a=m^۲+۱$، همواره مثبت است، پس باید $c=m^۲+۳m-۲$، منفی باشد). در نتیجه داریم:

$$b=۰\Rightarrow m^۲-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\Rightarrow c=m^۲+۳m-۲=۲>۰\quad\text{غیرقابل قبول}\\ m=-۱\Rightarrow c=m^۲+۳m-۲=-۴<۰\quad\text{قابل قبول}\end{cases}$$

۱۲۶ **۱** نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد، پس $\alpha=-\beta$، بنابراین می‌توان گفت که معادلهٔ $kx^۲-(k-۱)x-\frac{k^۲}{۴}=۰$ دو ریشهٔ قرینهٔ هم دارد که این امر با داشتن دلتای مثبت، زمانی رخ می‌دهد که $b=۰$ باشد، در نتیجه:

$$b=۱-k=۰\Rightarrow k=۱\xRightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}x^۲-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}\,,\,\beta=-\frac{۱}{۲}$$

فاصلهٔ نقطهٔ A یا B از مبدأ مختصات:
$$\Rightarrow A(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})\,,\,B(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\Rightarrow AO=BO=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۷ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

حالت اول: اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشند، ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را به‌ترتیب S و P می‌نامیم، سپس معادلهٔ موردنظر را به‌صورت $\boxed{x^۲-Sx+P=۰}$ می‌نویسیم. دلیلش را هم ببینید:

$$ax^۲+bx+c=۰\xRightarrow{\times\frac{۱}{a}}x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰\xRightarrow{S=\frac{-b}{a},P=\frac{c}{a}}x^۲-Sx+P=۰$$

* حواستان باشد که اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\boxed{ax^۲+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

حالت دوم: اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش، رابطهٔ مشخصی با ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم داده‌شده در مسأله، داشته باشند، به دو طریق می‌توانیم عمل کنیم:

الف) ابتدا فرض کنیم ریشه‌های معادلهٔ اولی برابر α و β باشند، سپس ریشه‌های معادلهٔ جدید را برحسب α و β بنویسیم و مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را تعیین کنیم (یعنی در واقع S و P معادلهٔ جدید را تعیین کنیم) و بعد از طریق فرمول $x^۲-Sx+P=۰$، معادلهٔ درجه دوم جدید را به‌دست آوریم.

ب) x را برابر ریشه‌های معادلهٔ اولی و X را برابر ریشه‌های معادلهٔ جدید درنظر بگیریم. سپس ارتباط بین x و X را مشخص کنیم و x را برحسب X بنویسیم و بعد با جایگذاری آن در معادلهٔ اول، به معادلهٔ درجه دوم جدید دست پیدا کنیم.

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۱=۰$ باشند، ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر $\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۲}$ است؟**

۱) $x^۲+۴۹x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۴۷x+۱=۰$ ۳) $x^۲-۴۹x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۴۷x+۱=۰$

پاسخ: α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۱=۰$ هستند، پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۷\quad\text{و}\quad\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

حالا می‌خواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۲}$ باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}S=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۷^۲-۲(۱)}{(۱)^۲}=۴۷\\ P=\frac{۱}{\alpha^۲}\times\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{۱}{(\alpha\beta)^۲}=۱\end{cases}\xRightarrow{x^۲-Sx+P=۰}x^۲-۴۷x+۱=۰\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

مثال **اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲+ax+b=۰$، یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیشتر باشد، b کدام است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: اگر x ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ و X ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ باشند، آن‌گاه طبق گفتهٔ مسأله، $X=x+۱$، در نتیجه داریم:

$$x=X-۱\xRightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}۳(X-۱)^۲+۷(X-۱)+۱=۰\Rightarrow ۳X^۲+X-۳=۰\xRightarrow{\div۳}X^۲+\frac{۱}{۳}X-۱=۰$$

با مقایسهٔ معادلهٔ به‌دست آمده و معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{۱}{۳}$ و $b=-۱$ است، پس گزینهٔ (۲) درست است.

می‌خواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$ و $\beta=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$ باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}=۱\\ P=\alpha\beta=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱-۲}{۴}=-\frac{۱}{۴}\end{cases}\xRightarrow{x^۲-Sx+P=۰}x^۲-x-\frac{۱}{۴}=۰\xRightarrow{\times۴}۴x^۲-۴x-۱=۰$$

۱۲۸ ۳ فرض کنیم ابعاد مستطیل برابر a و b باشند، در این صورت:

$$\begin{cases} \text{محیط} = ۱۱ \Rightarrow ۲(a+b) = ۱۱ \Rightarrow a+b = \frac{۱۱}{۲} = S \\ \text{مساحت} = ۶ \Rightarrow a.b = ۶ = P \end{cases}$$

$$\xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ - \frac{۱۱}{۲}x + ۶ = ۰ \xRightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱۱)^۲ - ۴(۲)(۱۲) = ۱۲۱ - ۹۶ = ۲۵$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۲(۲)} = \frac{۱۱ \pm ۵}{۴} \Rightarrow a = ۴, b = \frac{۳}{۲} (\text{یا برعکس})$$

در نتیجه اختلاف بین اندازهٔ طول و عرض مستطیل برابر است با:

$$۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۱۲۹ ۱

نیم‌نگاه

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا، $a - \sqrt{b}$ باشد، آن‌گاه ریشهٔ دیگر آن، $a + \sqrt{b}$ می‌باشد.

از آن‌جا که $۲ - \sqrt{۳}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا است، پس ریشهٔ دیگر معادله، $۲ + \sqrt{۳}$ در نتیجه:

$$\begin{cases} S = (۲ - \sqrt{۳}) + (۲ + \sqrt{۳}) = ۴ \\ P = (۲ - \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳}) = ۴ - ۳ = ۱ \end{cases} \xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

۱۳۰ ۴ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$ هستند، پس:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۴ \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱$$

و حالا می‌خواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{۱۶ + ۲}{-۱} = -۱۸ \\ P = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = ۱ \end{cases} \xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ + ۱۸x + ۱ = ۰$$

۱۳۱ ۳ α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ هستند. حالا قرار است معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha} + ۱$ و $\frac{۱}{\beta} + ۱$ باشند، برای این منظور، داریم:

$$\begin{cases} S = (\frac{۱}{\alpha} + ۱) + (\frac{۱}{\beta} + ۱) = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۲ = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{-۲} + ۲ = -\frac{۳}{۴} + ۲ = \frac{۵}{۴} \\ P = (\frac{۱}{\alpha} + ۱)(\frac{۱}{\beta} + ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} + \underbrace{\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}}_{-\frac{۳}{۴}} + ۱ = \frac{۱}{-۲} - \frac{۳}{۴} + ۱ = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ - \frac{۵}{۴}x - \frac{۱}{۴} = ۰ \xRightarrow{\times ۴} ۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$$

۱۳۲ ۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۲}$$

حالا قرار است معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} S = (\frac{۱}{\alpha} - ۱) + (\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} - ۲ = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} - ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} - ۲ = -۳ - ۲ = -۵ \\ P = (\frac{۱}{\alpha} - ۱)(\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} + ۱ = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + ۱ = \frac{۱}{\frac{-۱}{۲}} - \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} + ۱ = -۲ + ۳ + ۱ = ۲ \end{cases} \xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

۱۳۳ ۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + x - ۳ = ۰$ باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -۱ \ , \ \alpha\beta = -۳$$

حالا قرار است معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} S = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = -۱ - ۳(-۳)(-۱) = -۱ - ۹ = -۱۰ \\ P = \alpha^۳\beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = (-۳)^۳ = -۲۷ \end{cases} \xRightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ + ۱۰x - ۲۷ = ۰$$

۱۳۴ **۲** α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ هستند، پس $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$ و حالا قرار است $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ باشند، پس داریم:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-\frac{k}{8}\Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{k}{8}\Rightarrow -\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{k}{8}\Rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{k}{8}\Rightarrow k=6$$

۱۳۵ **۱** **روش اول:** اگر x ریشهٔ معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$ و X ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-7x+3=0$ باشد، آن‌گاه طبق گفتهٔ مسأله، داریم: $X=\frac{2}{x}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$X=\frac{2}{x}\xRightarrow{4x^2-7x+3=0}4\left(\frac{2}{x}\right)^2-7\left(\frac{2}{x}\right)+3=0\Rightarrow\frac{16}{x^2}-\frac{14}{x}+3=0\xRightarrow[x\neq 0]{\times x^2}3x^2-14x+16=0$$

با مقایسهٔ معادلهٔ به‌دست آمده و معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$، نتیجه می‌گیریم $a=-14$ است.

روش دوم: در معادلهٔ $4x^2-7x+3=0$ داریم $a+b+c=0$، بنابراین یکی از ریشه‌هایش ۱ و ریشهٔ دیگرش $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$ است، پس طبق گفتهٔ مسأله، ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$ برابر ۲ و $\frac{8}{3}$ هستند، بنابراین:

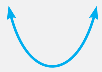
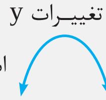
مجموع دو ریشه: $2+\frac{8}{3}=-\frac{a}{3}\Rightarrow\frac{14}{3}=-\frac{a}{3}\Rightarrow a=-14$

۱۳۶ **۲** اگر x ریشهٔ معادلهٔ $(x-2)^2=x+1$ و X ریشهٔ معادله‌ای باشد که قرار است آن را تعیین کنیم، آن‌گاه داریم:

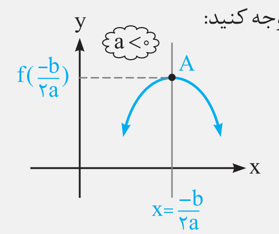
$$X=x-1\Rightarrow x=X+1\xRightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}((X+1)-2)^2=(X+1)+1\Rightarrow(X-1)^2=X+2\Rightarrow X^2-2X+1=X+2\Rightarrow X^2-3X-1=0$$

۱۳۷ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

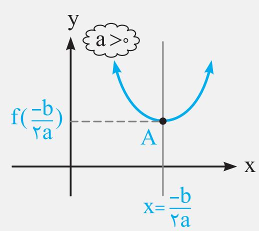
ماکزیمم یا مینیمم سهمی

ضابطهٔ یک سهمی در حالت کلی به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ است که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$. حدود تغییرات x در آن، $\mathbb{R}$ و حدود تغییرات y در آن، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. اگر $a>0$ باشد، نمودار سهمی به‌صورت  و اگر $a<0$ باشد، نمودار آن به‌صورت  است. هم‌چنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، **خط تقارن سهمی** نامیده می‌شود.

* به نمودارهای زیر و نتایج آن‌ها توجه کنید:



* نقطهٔ ماکزیمم با مختصات $\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ دارد.
* خط تقارن به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.
* $x\in\mathbb{R}$ و بردش $y\in\left(-\infty,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$ است.



* نقطهٔ مینیمم با مختصات $\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ دارد.
* خط تقارن به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.
* $x\in\mathbb{R}$ و بردش $y\in\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),+\infty\right)$ است.

* ضابطهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $y=a(x-h)^2+k$ نیز نوشت که در این صورت، مختصات رأس سهمی (ماکزیمم یا مینیمم) به‌صورت (h,k) است و خط تقارنی به معادلهٔ $x=h$ دارد.
* عرض نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم برابر $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ یا $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

مثال **اگر منحنی $y=-x^2+kx+k$ دارای ماکزیممی برابر $2k$ باشد، مقدار k کدام است؟**

۱) ۰,۴ ۲) ۰,۶ ۳) ۲,۴ ۴) ۲,۶

پاسخ: طول نقطهٔ ماکزیمم، برابر $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{k}{2(-1)}=\frac{k}{2}$ است، درنتیجه داریم:

$y=-\left(\frac{k}{2}\right)^2+k\left(\frac{k}{2}\right)+k=2k\Rightarrow-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}-k=0\Rightarrow\frac{k^2}{4}-k=0\Rightarrow k\left(\frac{k}{4}-1\right)=0\Rightarrow k=0\ ,\ k=4\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

روش اول:

$f(x)=2x^2-3x+4\Rightarrow$ طول نقطهٔ مینیمم سهمی: $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ عرض مینیمم: $f\left(\frac{3}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+4=\frac{23}{8}$

روش دوم:

عرض نقطهٔ مینیمم: $y=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(2)(4)-(-3)^2}{4(2)}=\frac{32-9}{8}=\frac{23}{8}$

۱۳۸ **۱** منحنی، ماکزیمم دارد، پس ضریب $x^{۲}$ در این منحنی، مقداری منفی است، یعنی $k+۳<۰$ و در نتیجه $k<-۳$. از طرفی عرض نقطهٔ ماکزیمم یعنی $-\frac{\Delta}{۴a}$ برابر صفر است که در این صورت، داریم:

$$\Delta=(-۴)^{۲}-۴(k+۳)(k)=۰\Rightarrow k^{۲}+۳k-۴=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = ۰}k=۱\,,\,k=-۴$$

با توجه به این‌که $k<-۳$ است، پس $k=-۴$ را قبول می‌کنیم.

۱۳۹ **۲** با توجه به این‌که سهمی از نقاط $(-۲,۰)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به فرم $y=a(x-۱)(x+۲)$ است و چون سهمی دارای می‌نیمم است، پس $a>۰$ می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها باید یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) را انتخاب کنیم و البته مشخص است که $a=۲$ است *(از روی این دو گزینه!)*، در نتیجه داریم:

$$y=۲(x-۱)(x+۲)=۲(x^{۲}+x-۲)\Rightarrow y=۲x^{۲}+۲x-۴$$

۱۴۰ **۴** با توجه به نمودار، نقطهٔ $(۱,-۲)$ رأس سهمی است، پس فرم کلی آن به‌صورت $y=a(x-۱)^{۲}-۲$ می‌باشد و چون سهمی دارای نقطهٔ می‌نیمم است، نتیجه می‌گیریم $a>۰$ می‌باشد. از طرفی نمودار سهمی از نقطهٔ $(-۱,۰)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات آن در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$۰=a(-۱-۱)^{۲}-۲\Rightarrow ۲=۴a\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۱)^{۲}-۲=\frac{۱}{۲}(x^{۲}-۲x+۱)-۲\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x-\frac{۳}{۲}$$

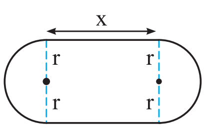
۱۴۱ **۴** می‌خواهیم مقدار $h(t)=-۱۰t^{۲}+۲۰۰t$ به حداکثر برسد که این موضوع در نقطهٔ رأس منحنی اتفاق می‌افتد:

$$t_{max}=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۲۰۰}{۲(-۱۰)}=\frac{-۲۰۰}{-۲۰}=۱۰\ \text{ثانیه}$$

۱۴۲ **۲** می‌خواهیم بیشترین مقدار h را در رابطهٔ $h(t)=-۱۰t^{۲}+۲۰۰t$ به دست آوریم، در زمان $t=۱۰$ ثانیه این اتفاق می‌افتد، بنابراین داریم:

$$\text{بیشترین ارتفاع}=h(۱۰)=-۱۰(۱۰)^{۲}+۲۰۰(۱۰)=-۱۰۰۰+۲۰۰۰=۱۰۰۰\ \text{متر}$$

۱۴۳ **۳** با توجه به معلومات مسأله، می‌توان شکل روبه‌رو را فرض کرد:



$$\text{محیط}=۲\pi r+۲x\simeq ۲(۳)(r)+۲x=۶r+۲x=۱۲۰۰\Rightarrow ۲x=۱۲۰۰-۶r\Rightarrow x=۶۰۰-۳r\ (*)$$

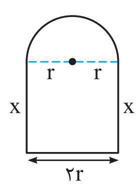
$$\text{مساحت مستطیل}: S=۲r.x\overset{(*)}{=}۲r(۶۰۰-۳r)=-۶r^{۲}+۱۲۰۰r$$

برای این‌که مساحت مستطیل (S) به بیشترین مقدار خودش برسد، باید:

$$r=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲۰۰}{۲(-۶)}=\frac{-۱۲۰۰}{-۱۲}=۱۰۰\Rightarrow\begin{cases}x=۶۰۰-۳r=۶۰۰-۳(۱۰۰)=۳۰۰\ \text{متر}\\ ۲r=۲(۱۰۰)=۲۰۰\ \text{متر}\end{cases}$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۳۰۰ متر است.

۱۴۴ **۴** با توجه به شکل مقابل، می‌توان نوشت:



$$\text{محیط مستطیل}=۴r+۲x=۶\Rightarrow ۲x=۶-۴r\Rightarrow x=۳-۲r\ (*)$$

برای این‌که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن ماکزیمم شود، پس:

$$S=۲rx+\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}\simeq ۲rx+\frac{۱}{۲}(۳)r^{۲}\overset{(*)}{=}۲r(۳-۲r)+\frac{۳}{۲}r^{۲}=۶r-۴r^{۲}+\frac{۳}{۲}r^{۲}\Rightarrow S=-\frac{۵}{۲}r^{۲}+۶r$$

برای این که مساحت (S) به بیشترین مقدار خودش برسد، باید:

$$r_{max}=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۶}{۲(\frac{-۵}{۲})}=\frac{-۶}{-۵}=\frac{۶}{۵}=۱/۲\Rightarrow\begin{cases}x=۳-۲r=۳-۲(۱/۲)=۳-۲/۴=۰/۶\\ ۲r=۲(۱/۲)=۲/۴\end{cases}$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۲/۴ متر است.

۱۴۵ **۳** می‌توانیم ضابطهٔ سهمی $y=-x^{۲}+bx+c$ را به‌صورت $y=-(x-h)^{۲}+k$ بنویسیم که $(h$ و $k)$ مختصات رأس سهمی است، چون بیشترین مقدار سهمی برابر ۱ است، پس $k=۱$ می‌باشد. از طرفی نمودار سهمی، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطهٔ $(۰,-۳)$ در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند، در نتیجه داریم:

$$y=-(x-h)^{۲}+۱\xrightarrow[y=-۳]{x=۰}-۳=-(۰-h)^{۲}+۱\Rightarrow -۴=-h^{۲}\Rightarrow h^{۲}=۴\Rightarrow h=\pm ۲$$

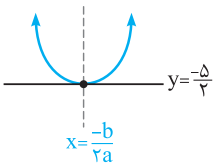
از آن‌جا که نمودار سهمی از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد، پس $h=۲$ غیرقابل قبول است و $h=-۲$ را می‌پذیریم، پس طول رأس سهمی برابر ۲- است.

۱۴۶ **۴** از گفته‌های مسأله، نتیجه می‌گیریم که مختصات نقاط $(-۱,۰)$، $(۳,۰)$ و $(۰,-۱)$ در ضابطهٔ منحنی صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$y=ax^{۲}+bx+c\Rightarrow\begin{cases}(-۱,۰)\in y\Rightarrow ۰=a-b+c\\(۳,۰)\in y\Rightarrow ۰=۹a+۳b+c\\(۰,-۱)\in y\Rightarrow -۱=۰+۰+c\Rightarrow c=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=۱\\ ۹a+۳b=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}a=\frac{۱}{۳},b=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x^{۲}-\frac{۲}{۳}x-۱\Rightarrow y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-\frac{۲}{۳})^{۲}-۴(\frac{۱}{۳})(-۱)}{۴(\frac{۱}{۳})}=-\frac{\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۳}}{\frac{۴}{۳}}=-\frac{\frac{۱۶}{۹}}{\frac{۴}{۳}}=-\frac{۴}{۳}$$

۱۴۷ **۴** **روش اول:** با توجه به گفته‌های مسأله، عرض نقطهٔ می‌نیمم منحنی، $y=\frac{-۵}{۲}$ است، پس داریم:



$$y_{min}=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۹-۴(\frac{۱}{۲})(a)}{۴(\frac{۱}{۲})}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۹-۲a=۵\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

روش دوم: با چیزهایی که در صورت مسأله گفته شده، نتیجه می‌گیریم خط $y=-\frac{۵}{۲}$ بر منحنی، مماس است، پس معادلهٔ تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+a=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+a+\frac{۵}{۲}=۰\Rightarrow\Delta=۹-۴(\frac{۱}{۲})(a+\frac{۵}{۲})=۰\Rightarrow ۹-۲a-۵=۰\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

۱۴۸ **۲** خط $y=۷$ بر نمودار منحنی، مماس است، پس معادلهٔ تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف می‌باشد، در نتیجه داریم:

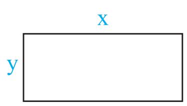
$$-x^۲+bx+۳=۷\Rightarrow x^۲-bx+۴=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۱۶=۰\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow b=\pm۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=۴\Rightarrow \text{معادلهٔ تلاقی}: x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow(x-۲)^۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow \text{نقطهٔ تماس}: A(۲,۷)\\ b=-۴\Rightarrow \text{معادلهٔ تلاقی}: x^۲+۴x+۴=۰\Rightarrow(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow \text{نقطهٔ تماس}: B(-۲,۷)\end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ بین نقاط A و B برابر می‌شود با:

$$AB=|۲-(-۲)|=۴$$

۱۴۹ **۳** **روش اول:**



$$۲x+۲y=۱۰۰\Rightarrow x+y=۵۰\Rightarrow y=۵۰-x\quad(*)$$

$$\text{مساحت}: S=xy\overset{(*)}{\Longrightarrow}S=x(۵۰-x)=۵۰x-x^۲\quad\Rightarrow x_{max}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵۰}{۲(-۱)}=۲۵$$

$$\Rightarrow y_{max}=۵۰-۲۵=۲۵\Rightarrow S_{max}=۲۵\times۲۵=۶۲۵$$

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر مجموع دو متغیر مثبت، عدد ثابتی باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که آن دو متغیر با هم، برابر باشند.

در این‌جا $۲x+۲y=۱۰۰$ و در نتیجه $x+y=۵۰$، بنابراین عبارت $S=x\times y$ زمانی به بیشترین مقدار خودش می‌رسد که $x=y$ باشد، در نتیجه:

$$x+x=۵۰\Rightarrow ۲x=۵۰\Rightarrow x=۲۵\Rightarrow y=۲۵\Rightarrow \max(S)=۲۵\times۲۵=۶۲۵$$

۱۵۰ **۱** **روش اول:**

$$f(x)=x+\frac{۴}{x}=(\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}})^۲+۴$$

برای این‌که تابع f به کم‌ترین مقدار خودش برسد باید $\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}=۰$، در نتیجه $x=۲$ خواهد بود و کم‌ترین مقدار f برابر ۴ می‌شود.

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر ضرب دو متغیر مثبت، عددی ثابت باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار برای مجموع آن دو عدد، زمانی به‌دست می‌آید که دو عدد، مساوی باشند.

در این‌جا $x\times\frac{۴}{x}=۴$، بنابراین عبارت $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ زمانی به کم‌ترین مقدار خودش می‌رسد که $x=\frac{۴}{x}$ باشد، در نتیجه:

$$x^۲=۴\Rightarrow x=\underset{\uparrow\,\text{قابل قبول}}{\pm۲}\Rightarrow\min(f)=۲+\frac{۴}{۲}=۴$$

۱۵۱ **۴** ابتدا عرض نقطهٔ می‌نیمم سهمی $y=۲x^۲-\frac{m}{۴}x+۲m$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-(\frac{m^۲}{۱۶}-۴(۲)(۲m))}{۴(۲)}=\frac{-\frac{m^۲}{۱۶}+۱۶m}{۸}=\frac{-m^۲}{۱۲۸}+۲m\quad(*)$$

حالا قرار است مقدار m را طوری انتخاب کنیم تا عبارت $(*)$ به بیشترین مقدار خودش برسد، پس داریم:

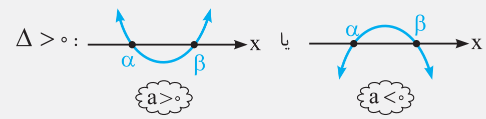
$$m=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(\frac{-۱}{۱۲۸})}=۱۲۸$$

۱۵۲ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

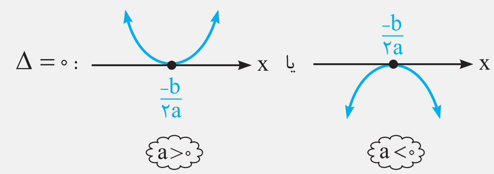
صفرهای تابع درجه دو

اگر $f(x)=ax^{۲}+bx+c\,,\,a\neq ۰$ باشد، آن‌گاه حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

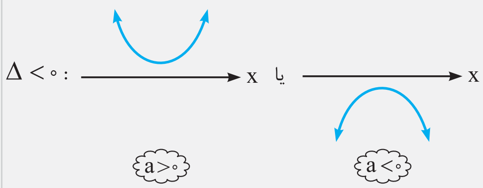
۱ اگر $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای دو ریشهٔ متمایز α و $\beta\,(\alpha<\beta)$ است و $f(x)$ به صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ تجزیه می‌شود که در این صورت خواهیم داشت:



۲ اگر $\Delta=b^{۲}-۴ac=۰$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای یک ریشهٔ مضاعف $\left(\alpha=\frac{-b}{۲a}\right)$ دارد و به صورت $f(x)=a(x-\alpha)^{۲}$ نوشته می‌شود که در این حالت خواهیم داشت:



۳ اگر $\Delta=b^{۲}-۴ac<۰$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد و خواهیم داشت:



* همان‌طور که می‌بینید اگر $\boldsymbol{a>۰,\Delta<۰}$ باشد، عبارت درجهٔ دوم همواره **مثبت** و اگر $\boldsymbol{a<۰,\Delta<۰}$ باشد، عبارت درجهٔ دوم همواره **منفی** است.

وقتی توپ به زمین برسد، ارتفاع آن از سطح زمین، صفر می‌شود (یعنی $h=۰$)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$h=-۵t^{۲}+۲۰t+۸۰=۰\xrightarrow{\text{زوج: }b=۲۰}b'=\frac{۲۰}{۲}=۱۰\Rightarrow\Delta'=(۱۰)^{۲}-(-۵)(۸۰)=۵۰۰\Rightarrow t=\frac{-۱۰\pm۱۰\sqrt{۵}}{-۵}=\begin{cases}t=۲-۲\sqrt{۵}<۰ & \text{غیرقابل قبول}\\ t=۲+۲\sqrt{۵}>۰ & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

۱۵۳ **۲** منظور سؤال این است که مشخص کنیم چند ثانیه بعد از پرتاب، توپ دوباره در ارتفاع ۸۰ متری از سطح زمین قرار می‌گیرد، بنابراین داریم:

$$h=-۵t^{۲}+۲۰t+۸۰=۸۰\Rightarrow -۵t^{۲}+۲۰t=۰\Rightarrow -۵t(t-۴)=۰\Rightarrow t=۰\ ,\ t=۴\,s$$

بنابراین پس از ۴ ثانیه، توپ دوباره به ارتفاع ۸۰ متری از سطح زمین می‌رسد.

نیم‌نگاه

اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، ضرایب b یا c یا هر دوی آن‌ها برابر صفر باشند، معادله را **ناقص** می‌نامیم.

۱ در صورتی که فقط $c=۰$ باشد، خواهیم داشت:

یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ غیرصفر: $ax^{۲}+bx=۰\Rightarrow x(ax+b)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{b}{a}$

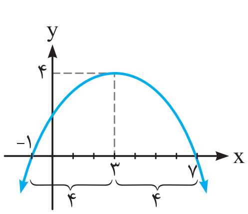
۲ اگر $b=۰$ و a و c مختلف‌العلامت باشند، خواهیم داشت:

دو ریشهٔ ساده و قرینه: $ax^{۲}+c=۰\Rightarrow x^{۲}=-\frac{c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

۳ اگر $b=c=۰$ باشد، خواهیم داشت:

ریشهٔ مضاعف صفر: $ax^{۲}=۰\Rightarrow x=۰$

۱۵۴ **۳** نقطهٔ $(۳,۴)$ رأس سهمی است، پس ضابطهٔ منحنی به صورت $y=a(x-۳)^{۲}+۴$ می‌باشد و چون نمودارش، پاره‌خطی به طول ۸ واحد روی محور xها جدا می‌کند، می‌توانیم شکل مقابل را برای آن درنظر بگیریم:



پس $x=-۱$ و $x=۷$ نقاط تقاطع منحنی با محور xها هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$۰=a(-۱-۳)^{۲}+۴\Rightarrow ۰=۱۶a+۴\Rightarrow ۱۶a=-۴\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{-۱}{۴}(x-۳)^{۲}+۴$$

$$\xrightarrow{x=۰}\ \text{محل تقاطع نمودار با محور عرض‌ها}: y=\frac{-۱}{۴}(۰-۳)^{۲}+۴=\frac{-۹}{۴}+۴=\frac{۷}{۴}$$

۱۵۵ **۲** قرار است نمودار منحنی بر محور xها مماس باشد، پس باید معادلهٔ $y=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد (یعنی $\Delta=۰$ شود)، بنابراین داریم:

$$y=x(۲x+m-۱)+۱=۲x^{۲}+(m-۱)x+۱=۰\Rightarrow\Delta=(m-۱)^{۲}-۴(۲)(۱)=۰\Rightarrow(m-۱)^{۲}=۸\Rightarrow m-۱=\pm۲\sqrt{۲}\Rightarrow m=۱\pm۲\sqrt{۲}$$

۱۵۶ **۱** **روش اول:** برای این‌که نمودار منحنی بر محور x ها مماس باشد باید معادلهٔ تلاقی آن با خط $y=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بنابراین داریم:

$$(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)=۰ \Rightarrow ۳mx-۳-x^۲+\frac{x}{m}=۰ \xRightarrow{\times m} ۳m^۲x-۳m-mx^۲+x=۰ \Rightarrow mx^۲-(۳m^۲+۱)x+۳m=۰$$

$$\xRightarrow{\Delta=۰} (۳m^۲+۱)^۲-۴(m)(۳m)=۰ \Rightarrow ۹m^۴-۶m^۲+۱=۰ \Rightarrow (۳m^۲-۱)^۲=۰ \Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه به‌ازای دو مقدار m، نمودار تابع بر محور x ها مماس است.

روش دوم: دو ریشهٔ معادله را تعیین کرده و آن‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳-\frac{x}{m}=۰ \Rightarrow \frac{x}{m}=۳ \Rightarrow x=۳m \\ mx-۱=۰ \Rightarrow mx=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{m} \end{cases} \Rightarrow ۳m=\frac{۱}{m} \Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۵۷ **۲** خط $y=۲x-۴$ بر منحنی $y=(m+۳)x^۲+mx$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد، بنابراین:

$$(m+۳)x^۲+mx=۲x-۴ \Rightarrow (m+۳)x^۲+(m-۲)x+۴=۰ \Rightarrow \Delta=(m-۲)^۲-۱۶(m+۳)=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۲۰m-۴۴=۰ \Rightarrow (m-۲۲)(m+۲)=۰ \Rightarrow m=۲۲, m=-۲$$

۱۵۸ **۳** برای این‌که عبارت داده‌شده به‌ازای هر مقدار x، منفی باشد، باید $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$، منفی باشد، بنابراین:

$$y=(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱ \Rightarrow \begin{cases} \Delta=(a-۱)^۲-۴(a-۱)<۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵)<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} a & & ۱ & & ۵ & \\ \hline & + & ۰ & \underset{\text{ج}}{-} & ۰ & + \end{array} \Rightarrow ۱<a<۵ \quad (۱) \\ x^۲ \text{ ضریب} = a-۱<۰ \Rightarrow a<۱ \quad (۲) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲)، هیچ مقدار قابل قبولی برای a به‌دست نمی‌آید.

۱۵۹ **۳** نمودار تابع، بالای محور x ها است، پس دارای می‌نیمم می‌باشد، یعنی ضریب $x^۲$ در معادلهٔ آن، مثبت است. از طرفی بر محور x ها مماس می‌باشد، پس ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی $\Delta=۰$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x^۲ \text{ ضریب} = m-۲>۰ \Rightarrow m>۲ \\ \Delta=(-۳)^۲-۴(m-۲)(m+۲)=۰ \Rightarrow ۹=۴(m^۲-۴) \Rightarrow m^۲-۴=\frac{۹}{۴} \Rightarrow m^۲=۴+\frac{۹}{۴}=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m=\pm\frac{۵}{۲} \end{cases} \xRightarrow{\cap} m=\frac{۵}{۲}$$

۱۶۰ **۴** نمودار تابع f همواره بالای خط $y=-۱$ قرار دارد، بنابراین:

$$f(x)>-۱ \Rightarrow (m-۲)x^۲+۴mx+۱>-۱ \Rightarrow (m-۲)x^۲+۴mx+۲>۰ \quad (*)$$

$$\xRightarrow{\text{نامعادلهٔ } (*) \text{ همواره برقرار است.}} \begin{cases} a=m-۲>۰ \Rightarrow m>۲ \\ \Delta=(۴m)^۲-۴(m-۲)(۲)<۰ \Rightarrow ۱۶m^۲-۸m+۱۶<۰ \xRightarrow{\div ۸} ۲m^۲-m+۲<۰ \xRightarrow[a>۰]{\Delta<۰} \text{غیرممکن} \end{cases}$$

در نتیجه به‌ازای هیچ مقداری از m، نمودار تابع f، بالای خط $y=-۱$ قرار نمی‌گیرد.

۱۶۱ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

نیم‌نگاه

بررسی علامت ریشه‌ها

برای تعیین علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باید سراغ علامت Δ (یا Δ')، $\frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) و $-\frac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) برویم، به این صورت:

$$\Delta \text{ یا } \Delta'>۰ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی ساده و متمایز} \Rightarrow \begin{cases} P=\frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی هم‌علامت} \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی مثبت} \\ S=-\frac{b}{a}<۰ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی منفی} \end{cases} \\ P=\frac{c}{a}<۰ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه} \end{cases}$$

(حواستون باشه که اگه $c=۰$ باشه، دیگه لازم نیست Δ یا Δ' رو چک کنین، حتماً یکی از ریشه‌ها صفر و اون‌یکی $-\frac{b}{a}$ هستش، اینم بگیم که اگـه a و c هم‌علامت نبودن (یعنی $\frac{c}{a}<۰$) بازم Δ یا Δ' رو چک نکنین و سریع بگید که معادله، حتماً دو ریشهٔ مختلف‌العلامه داره.)

$$\Delta \text{ یا } \Delta'=۰ \Rightarrow \text{معادله دارای ریشهٔ حقیقی مضاعف } x=-\frac{b}{۲a} \text{ است.} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی مضاعف مثبت} \\ -\frac{b}{a}<۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی مضاعف منفی} \end{cases}$$

$$\Delta \text{ یا } \Delta'<۰ \Rightarrow \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.}$$

مثال معادلهٔ $-3x^2+x+k^2+1=0$ دارای:

۱) دو ریشهٔ مثبت است. ۲) دو ریشهٔ منفی است. ۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است. ۴) ریشه نیست.

پاسخ: $a=-3<0$ و $c=k^2+1>0$ ناهم‌علامت هستند، پس معادله حتماً دو ریشهٔ ناهم‌علامت دارد، در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

$$(x-1)(x-3)+2+k^2=0 \Rightarrow x^2-4x+5+k^2=0 \Rightarrow \Delta=16-4(5+k^2)=-4-4k^2<0$$

پس معادلهٔ موردنظر، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۶۲ | ۴ معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد، پس:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{n}{1}=n<0$$: حاصل‌ضرب ریشه‌ها

حالا برویم سراغ گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $x^2-mx-n=0 \Rightarrow \Delta=(-m)^2-4(1)(-n)=m^2+4n$ ممکن است منفی باشد.

گزینهٔ (۲): $x^2+mx+n^2=0 \Rightarrow \Delta=m^2-4(1)(n^2)=m^2-4n^2$ ممکن است منفی باشد.

گزینهٔ (۳): $-x^2-mx-(n+1)=0 \Rightarrow \Delta=(-m)^2-4(-1)(-(n+1))=m^2-4(n+1)$ ممکن است منفی باشد.

گزینهٔ (۴): $-nx^2+mx+n-1=0 \xrightarrow{n<0} \begin{cases} a=-n>0 \\ c=n-1<0 \end{cases} \Rightarrow$ ناهم‌علامت a و c $\Rightarrow$ حتماً $\Delta>0$ است.

در نتیجه گزینهٔ (۴) همواره ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۶۳ | ۳ منحنی $y=2x^2-4x+m-3$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند، پس معادلهٔ $y=0$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز و مثبت دارد، بنابراین لازم است که:

$$\Delta>0\,,\ -\frac{b}{a}>0\,,\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \begin{cases} 16-4(2)(m-3)>0 \Rightarrow 16-8(m-3)>0 \Rightarrow m<5 \\ 2>0 \\ \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3<m<5$$

۱۶۴ | ۱ بنا به گفته‌های مسأله، باید معادلهٔ $ax^2+(a+3)x-1=0$، دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد، پس:

$$\text{معادله دو ریشهٔ منفی دارد.} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}>0 \Rightarrow -\frac{1}{a}>0 \Rightarrow a<0 \quad (1) \\ -\frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0 \Rightarrow a+3<0 \Rightarrow a<-3 \quad (2) \\ \Delta>0 \Rightarrow (a+3)^2+4a>0 \Rightarrow a^2+10a+9>0 \Rightarrow a<-9 \text{ یا } a>-1 \quad (3) \end{cases}$$

از اشتراک موارد (۱) تا (۳) به‌دست می‌آید: $a<-9$

۱۶۵ | - مجموع ضرایب در معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌های معادله، $x=1$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{l|l} x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+ax+4 \\ \hline ax^2+(4-a)x-4 & \\ -ax^2+ax & \\ \hline 4x-4 & \\ -4x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+ax+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+ax+4=0 \quad (*) \end{cases}$$

معادلهٔ $(*)$ باید دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد، پس:

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow a^2-16>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-4 \text{ یا } a>4 \quad (1) \\ S>0 \Rightarrow -a>0 \Rightarrow a<0 \quad (2) \\ P>0 \Rightarrow 4>0 \quad \text{همواره برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} a<-4$$

اما توجه کنید، اگر $a=-5$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=1$ و ریشهٔ سادهٔ $x=4$ است. که طبق گفتهٔ مسأله، نباید این‌طور شود! به هرحال در گزینه‌ها، این موضوع رعایت نشده، زیرا جواب درست $a<-4$ و $a\neq-5$ است.

۱۶۶ ۲

نیم‌نگاه

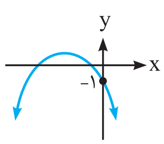
برای این‌که نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات بگذرد، باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، یعنی باید $\frac{c}{a}<0$ باشد.

تابع دارای ماکزیمم است، پس ضریب x^2 منفی است، یعنی $1-m<0$ و در نتیجه $m>1$. از طرفی نمودار تابع از چهار ناحیه می‌گذرد، پس $\frac{c}{a}<0$ است، بنابراین:

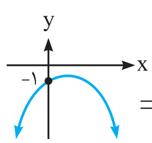
$$y=(1-m)x^2+x+m-2 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{m-2}{1-m}<0 \xRightarrow{1-m<0} m-2>0 \Rightarrow m>2$$

از اشتراک بین جواب‌های به‌دست آمده، خواهیم داشت: $m>2$

۱۶۷ ۲ برای این‌که نمودار تابع درجه دوم f از ناحیهٔ اول نگذرد، باید ضریب x^2، منفی باشد، زیرا اگر سهمی $\min$ داشته باشد، حتماً از نواحی اول و دوم می‌گذرد، پس $a-3<0$ و در نتیجه $a<3$ است. از طرفی نمودار تابع را می‌توان در یکی از حالت‌های زیر در نظر گرفت:



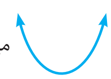
(حالت ۱)

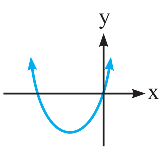


(حالت ۲)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت (۱)} \begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow a^2+4(a-3)>0 \Rightarrow a^2+4a-12>0 \xRightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-6 \ \text{یا}\ a>2 \\ S<0 \Rightarrow -\frac{a}{a-3}<0 \xRightarrow{a-3<0} -a>0 \Rightarrow a<0 \\ P\geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3}\geq 0 \xRightarrow{a-3<0} \text{همواره برقرار است.} \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} a<-6 \quad (1) \\ \text{حالت (۲)}: \Delta\leq 0 \Rightarrow a^2+4(a-3)\leq 0 \Rightarrow a^2+4a-12\leq 0 \xRightarrow{\text{تعیین علامت}} -6\leq a\leq 2 \quad (2) \end{cases}$$

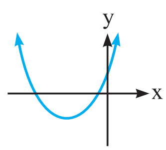
$$\xRightarrow{(1)\cup(2)} a\in(-\infty,-6)\cup[-6,2]=(-\infty,2]$$

۱۶۸ ۲ ضریب x^2 مثبت است، پس سهمی به فرم  می‌باشد و چون فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد، پس نمودارش به یکی از دو حالت زیر می‌باشد:



(یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ منفی)
(حالت ۱)

یا



(هر دو ریشه منفی)
(حالت ۲)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت (۱)} \begin{cases} \frac{c}{a}=0 \Rightarrow 2m=0 \Rightarrow m=0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow m-3<0 \Rightarrow m<3 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} m=0 \\ \text{حالت (۲)} \begin{cases} \frac{c}{a}>0 \Rightarrow 2m>0 \Rightarrow m>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow m-3<0 \Rightarrow m<3 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} 0<m<3 \end{cases} \xRightarrow{\text{اجتماع}} 0\leq m<3 \quad (1)$$

در ضمن باید $\Delta>0$ باشد تا فقط از ناحیهٔ چهارم نگذرد، پس:

$$\Delta=(m-3)^2-8m>0 \Rightarrow m^2-14m+9>0 \xRightarrow{\text{تعیین علامت}} m<7-\sqrt{40} \ \text{یا}\ m>7+\sqrt{40} \quad (2) \xRightarrow{(1)\cap(2)} 0\leq m<7-\sqrt{40}$$

و حالا طبق گزینه‌ها اگر $0\leq m<\frac{1}{4}$ باشد، نمودار تابع فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

۱۶۹ ۲ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

معادلات گویا

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا: کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، **عبارت‌های گویا** می‌نامند (مانند $\frac{1}{1+x}$ یا $3x$ یا $\frac{3x}{x+5}$ یا $\frac{x+1}{x-2}$) همان‌طور که گفتیم مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که **مخرج آن، صفر نباشد**، یعنی به ازای مقادیری که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، عبارت گویا تعریف نشده است.

※ معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشد، **معادله‌های گویا** می‌نامند. برای حل این معادله‌ها، می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از فرم کسری خارج شود. بچه‌های عزیزم حواستان باشد که جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق نمایند.

مثال **تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: $x=2$ و $x=-2$ ریشه‌های مخرج‌اند، پس با شرط $x\neq -2,2$ می‌توان طرفین تساوی را در $(x-2)(x+2)$ ضرب کرد. به این صورت:

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{(x+2)(x-2)}\xrightarrow{\times(x+2)(x-2)}(x-2)^2+x(x+2)=8\Rightarrow x^2-4x+4+x^2+2x=8\Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$

$$\xrightarrow{\div 2}x^2-x-2=0\xrightarrow{a+c=b}x=-1\ ,\ x=-\frac{c}{a}=2$$

اما $x=2$ ریشهٔ مخرج کسر است، پس قابل قبول نیست. بنابراین معادله فقط یک جواب دارد ($x=-1$)، پس گزینهٔ (۲) درست است.

$$2x+\frac{3}{x}=-1\xrightarrow{\times x}2x^2+3=-x\Rightarrow 2x^2+x+3=0\Rightarrow \Delta=(1)^2-4(2)(3)=-23<0\Rightarrow$$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۷۰ ۲ $x=0$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج‌اند، پس با شرط $x\neq 0,2$ داریم:

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x-2)}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-2}\xrightarrow{\times x(x-2)}x^2-2x+2-(1+x)(x-2)=x(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2-(x-2+x^2-2x)=x^2-x\Rightarrow 4-x=x^2-x\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=-2,x=2$$

اما $x=2$ را قبول نمی‌کنیم، چون ریشهٔ مخرج کسر است، بنابراین تنها جواب معادله $x=-2$ می‌باشد، یعنی معادله فقط یک جواب حقیقی دارد.

۱۷۱ ۱ $x=2$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}\xrightarrow{x=2}\frac{2}{a-2}+\frac{a-2}{2}=\frac{a}{2}\xrightarrow{\times 2(a-2)}4+(a-2)^2=a(a-2)\Rightarrow 4+\cancel{a^2}-4a+4=\cancel{a^2}-2a\Rightarrow 8=2a\Rightarrow a=4$$

۱۷۲ ۱ $x=5$ یک جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\frac{k-1}{2(5)-4}+\frac{1}{(5)^2-4}=\frac{5-k}{(5)^2-5-6}\Rightarrow\frac{k-1}{6}+\frac{1}{21}=\frac{5-k}{14}$$

$$\xrightarrow{\times 42}7(k-1)+2=3(5-k)\Rightarrow 7k-7+2=15-3k\Rightarrow 10k=20\Rightarrow k=2$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{x-2}{x^2-x-6}\Rightarrow\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{(x-3)(x+2)}$$

$x=3$، $x=2$ و $x=-2$ ریشه‌های مخرج‌اند، پس با شرط $x\neq -2,2,3$ داریم:

$$\xrightarrow{\times 2(x-2)(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3)+2(x-3)=2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow x^2-x-6+2x-6=2(x^2-4x+4)\Rightarrow x^2-9x+20=0\Rightarrow(x-4)(x-5)=0\Rightarrow x=4,x=5$$

(هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول هستند.)

۱۷۳ ۴ می‌توان نوشت:
$$\frac{2x-2}{x+1}=1-\frac{m}{x}\xrightarrow{\times x(x+1)}(2x-2)(x)=x(x+1)-m(x+1)\Rightarrow 2x^2-2x=x^2+x-mx-m$$

$$\Rightarrow x^2-3x+mx+m=0\Rightarrow x^2+(m-3)x+m=0\quad(*)$$

قرار است معادلهٔ $(*)$ جواب حقیقی نداشته باشد، پس باید:

$$\Delta<0\Rightarrow(m-3)^2-4m<0\Rightarrow m^2-10m+9<0\Rightarrow(m-9)(m-1)<0\Rightarrow$$

m		۱		۹	
$m^2-10m+9$	+	∘	−	∘	+

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جواب: $1<m<9$

۱۷۴ ۲ فرض کنیم $t=\frac{x^2+3}{6x+2}$، در این صورت می‌توانیم معادلهٔ داده شده را به فرم زیر بنویسیم:

$$t+2=-\frac{1}{t}\xrightarrow{\times t}t^2+2t=-1\Rightarrow t^2+2t+1=0\Rightarrow(t+1)^2=0\Rightarrow t+1=0\Rightarrow t=-1\neq 0\Rightarrow$$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow\frac{x^2+3}{6x+2}=-1\Rightarrow x^2+3=-6x-2\Rightarrow x^2+6x+5=0\xrightarrow{a+c=b}x=-1,x=-\frac{c}{a}=-5$$

بنابراین معادله دو جواب منفی دارد.

۱۷۵ ۲ منظور سؤال این است که معادلهٔ $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m(x-3)}{2x+1}$ دو ریشهٔ سادهٔ حقیقی داشته باشد، پس می‌توان نوشت:

$$m(x-3)^2=(2x+1)^2\Rightarrow m(x^2-6x+9)=4x^2+4x+1\Rightarrow(m-4)x^2-(6m+4)x+(9m-1)=0$$

در معادلهٔ درجه دوم به‌دست آمده باید ضریب x^2، مخالف صفر و $\Delta > 0$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} m-4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4 \\ \Delta = (6m+4)^2 - 4(m-4)(9m-1) > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m \in (0,+\infty) - \{4\}$$

از بین گزینه‌ها، تنها عدد گزینهٔ (۲) در این بازه قرار دارد.

۱۷۶ ۴

$$(3-\frac{6}{x-2})(1+\frac{2}{x-4}) = 19-x^2 \Rightarrow (\frac{3x-12}{x-2})(\frac{x-2}{x-4}) = 19-x^2 \Rightarrow \frac{3(x-4)(x-2)}{(x-2)(x-4)} = 19-x^2 \xrightarrow{x\neq 2,4} 3 = 19-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{غیرقابل‌قبول} \\ x = -4 & \text{قابل‌قبول} \end{cases} \Rightarrow$$ معادله، یک جواب دارد.

۱۷۷ ۴ اگر طول و عرض مستطیل طلایی به ترتیب برابر x و y باشد، آن‌گاه $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$، بنابراین اگر $x = 2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{2+y}{2} = \frac{2}{y} \Rightarrow 2y + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(-4) = 4+16 = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5} > 0 & \text{قابل قبول} \\ y = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5} < 0 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۱۷۸ ۳ عدد $\frac{1+\sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{a}}{2} + 0/5$، برابر عدد طلایی است، پس $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$ و در نتیجه $a = 5$ است، بنابراین معادلهٔ گویای $\frac{1}{x-2} - a = \frac{1}{x}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5 \xrightarrow{\times x(x-2)} x-2+x = 5x(x-2) \Rightarrow 2x-2 = 5x^2-10x \Rightarrow 5x^2-12x+2 = 0 \quad (*)$$

در معادلهٔ $(*)$، داریم $\Delta = (-12)^2 - 4(5)(2) = 144-40 > 0$، پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است که هیچ‌کدام از آن‌ها مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند (*شاید بپرسین از کجا فهمیدیم؟ از اون‌جایی که ریشه‌های مفرج‌ها، $x = 0$ و $x = 2$ هستش و هیچ‌کدوم از این دو تا توی معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کنن*)، پس هر دو جواب معادلهٔ $(*)$ قابل قبول هستند و اگر آن‌ها را α و β بنامیم، آن‌گاه:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-12)}{5} = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۷۹ ۳ فرض کنیم تعداد آزمون‌ها از آزمون نهم به بعد برابر x باشد، در این صورت مجموع امتیازات علی برابر $15x$ است، بنابراین میانگین امتیاز تمام آزمون‌های علی برابر می‌شود با:

$$\frac{15x+68}{8+x} = 14 \xrightarrow{\times(8+x)} 15x+68 = 112+14x \Rightarrow x = 44$$

در نتیجه علی از آزمون نهم به بعد، در ۴۴ آزمون متوالی، نمرهٔ ۱۵ گرفته است.

۱۸۰ ۳ با توجه به حرف‌های زده شده، ابتدا مشخص می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

وزن رنگ خالص (برحسب کیلوگرم) $(11 \times \frac{40}{100}) + (4 \times \frac{70}{100}) = 4/4 + 2/8 = 7/2$

همان‌طور که دیدید در ۱۵ کیلوگرم رنگ (با غلظت‌های گفته شده)، به اندازهٔ ۷/۲ کیلوگرم، رنگ خالص وجود دارد، حالا اگر میزان تبخیر (برحسب کیلوگرم) را x بنامیم، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow 50x = 30 \Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0/6 \text{ کیلوگرم}$$

۱۸۱ ۴ محمد به تنهایی ویرایش را در ۱۸۰ دقیقه انجام می‌دهد. از طرفی محمد و علی با هم‌دیگر این کار را در ۱۰۰ دقیقه انجام می‌دهند، پس اگر فرض کنیم علی به تنهایی ویرایش را در x دقیقه انجام دهد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{میزان انجام ویرایش در هر دقیقه توسط محمد} = \frac{1}{180} \\ \text{میزان انجام ویرایش در هر دقیقه توسط علی} = \frac{1}{x} \\ \text{میزان انجام ویرایش در هر دقیقه توسط محمد و علی} = \frac{1}{100} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{180} + \frac{1}{x} = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{100} - \frac{1}{180} = \frac{9-5}{900} = \frac{4}{900} \Rightarrow x = \frac{900}{4} = 225 \text{ دقیقه}$$

یعنی علی به تنهایی در $\frac{225}{60} = 3/75$ ساعت، ویرایش را انجام می‌دهد.

۱۸۲ **۱** فرض کنیم ماشین چمن‌زنی اولی به تنهایی در x ساعت و ماشین دومی به تنهایی در $4x$ ساعت، چمن زمین را کوتاه می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \text{میزان چمن‌زنی در هر ساعت توسط ماشین اول} \\ \dfrac{1}{4x} = \text{میزان چمن‌زنی در هر ساعت توسط ماشین دوم} \\ \dfrac{1}{8} = \text{میزان چمن‌زنی در هر ساعت توسط هر دو ماشین با هم} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{4x}=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{4+1}{4x}=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{4x}=\frac{1}{8} \Rightarrow 4x=40 \Rightarrow x=10$$

در نتیجه ماشین اولی به تنهایی در ۱۰ ساعت و ماشین دومی به تنهایی در ۴۰ ساعت این کار را انجام می‌دهند. *(یعنی ماشین کندتر، ۴۰ ساعت کارش طول می‌کشه.)*

۱۸۳ **۴** فرض کنیم آرش کار را در x روز انجام دهد، در این صورت بابک آن کار را در $x+15$ روز انجام می‌دهد. از طرفی اگر این دو نفر کار را با هم انجام دهند، در ۱۸ روز تمام می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \text{میزان کار انجام شده در هر روز توسط آرش} \\ \dfrac{1}{x+15} = \text{میزان انجام کار در هر روز توسط بابک} \\ \dfrac{1}{18} = \text{میزان انجام کار در هر روز توسط آرش و بابک} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18} \xrightarrow{\times 18x(x+15)} 18(x+15)+18x=x(x+15)$$

$$\Rightarrow 18x+270+18x=x^2+15x \Rightarrow x^2-21x-270=0 \Rightarrow (x-30)(x+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=30>0 \ \text{قابل قبول} \\ x=-9<0 \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین آرش به تنهایی می‌تواند کار را در ۳۰ روز و بابک به تنهایی می‌تواند کار را در $x+15=45$ روز تمام کند.

۱۸۴ **۲** فرض کنیم قیمت هر خودکار قبل از تخفیف، x تومان باشد، در این صورت طبق گفته‌های مسأله خواهیم داشت:

$$\frac{7800}{x-40}-\frac{7800}{x}=4 \xrightarrow{\times x(x-40)} 7800x-7800(x-40)=4x(x-40) \Rightarrow 7800x-7800x+312000=4x^2-160x$$

$$\xrightarrow{\div 4} x^2-40x=78000 \xrightarrow{+400} x^2-40x+400=78400 \Rightarrow (x-20)^2=(280)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-20=280 \Rightarrow x=300>0 \ \text{قابل قبول} \\ x-20=-280 \Rightarrow x=-260<0 \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین قیمت هر خودکار قبل از تخفیف برابر ۳۰۰ تومان است.

۱۸۵ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

معادلات رادیکالی

معادله‌ای را که دارای عبارت‌های جبری رادیکالی است، **معادلهٔ رادیکالی** می‌نامند. ابتدا جملات را طوری به طرفین تساوی جابه‌جا کنید که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. حال برای حل این‌گونه معادلات به فرجهٔ رادیکال‌ها توجه کنید. اگر فرجهٔ آن‌ها ۲ باشد، طرفین معادله را به توان ۲ برسانید تا رادیکال‌ها از بین بروند، در صورت لزوم، مجدداً به توان برسانید تا معادله از شکل رادیکالی خارج شود. حال جواب‌هایی که به‌دست می‌آیند باید امتحان شوند (ممکن است بعضی از جواب‌های به‌دست آمده، قابل قبول نباشند) و اگر فرجهٔ رادیکال‌ها ۳ باشد، طرفین معادله را به توان ۳ برسانید.

❋ همواره حواستان به دامنهٔ رادیکال‌ها باشد.

مثال **معادلهٔ $x^2\sqrt{x-2}-9\sqrt{x-2}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ:

$$x^2\sqrt{x-2}-9\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}(x^2-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

حواستان باشد که $x=-3$ قابل قبول نیست، زیرا عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را منفی می‌کند، در نتیجه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است ($x=3$ و $x=2$)، پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ (۱)}: (x^2-1)\sqrt{x+2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \ \text{قابل‌قبول} \\ \sqrt{x+2}=0 \Rightarrow x=-2 \ \text{قابل‌قبول} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۳ ریشه دارد.}$$

$$\text{گزینهٔ (۲)}: x\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{غیرقابل‌قبول} \\ \sqrt{x-3}=0 \Rightarrow x=3 \ \text{قابل‌قبول} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۱ ریشه دارد.}$$

($x=0$ عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را منفی می‌کند، پس قابل قبول نیست.)

$(x-۴)\sqrt{x+۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \ \text{قابل‌قبول} \\ \sqrt{x+۲}=۰ \Rightarrow x=-۲ \ \text{قابل‌قبول} \end{cases} \Rightarrow$ معادله ۲ ریشه دارد. :گزینهٔ (۳)

$(x+۲)\sqrt{x+۱}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \ \text{غیرقابل‌قبول} \\ \sqrt{x+۱}=۰ \Rightarrow x=-۱ \ \text{قابل‌قبول} \end{cases} \Rightarrow$ معادله ۱ ریشه دارد. :گزینهٔ (۴)

($x=-۲$ عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را منفی می‌کند، پس قابل قبول نیست.)

۱۸۶ ۴ $x=۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶} \Rightarrow ۴+a=۲ \Rightarrow a=-۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x-۲=\sqrt{۵x-x^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-۴x+۴=۵x-x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۹x+۴=۰ \Rightarrow x=\frac{۹\pm\sqrt{۸۱-۳۲}}{۴}=\frac{۹\pm۷}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حواستان باشد که $x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله صدق نمی‌کند (فقط $x=۴$ را می‌پذیریم).

۱۸۷ ۳ مجبوریم هر دو معادلهٔ رادیکالی داده شده را حل کنیم و جواب هر یک از آن‌ها را به دست آوریم.

$$\sqrt{۷+x}-۱=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۷+x)+(۱)-۲\sqrt{۷+x}=x \Rightarrow ۸+\cancel{x}-۲\sqrt{۷+x}=\cancel{x} \Rightarrow ۸=۲\sqrt{x+۷}$$

$$\Rightarrow ۴=\sqrt{x+۷} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶=x+۷ \Rightarrow x=۹$$

با توجه به این‌که $x=۹$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند، پس آن را می‌پذیریم. حال برویم سراغ معادلهٔ دوم:

$$\frac{۱}{\sqrt{x-۴}}-\frac{۳}{\sqrt{x}}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x-۴}}=\frac{۳}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱}{x-۴}=\frac{۹}{x} \Rightarrow ۹x-۳۶=x \Rightarrow ۸x=۳۶ \Rightarrow x=\frac{۳۶}{۸}=۴/۵$$

پس جواب معادلهٔ اولی، ۲ برابر جواب معادلهٔ دومی است.

۱۸۸ ۲ به خاطر وجود $\sqrt{۱-x}$،باید $۱-x\geq۰$ و در نتیجه $x\leq۱$، پس $x^۳\leq۱$ است، بنابراین $x^۳-۱\leq۰$. از طرفی معادله را به صورت $x^۳-۱=\sqrt{۱-x}$ می‌نویسیم. بچه‌های گلم، همان‌طور که می‌بینید سمت چپ معادله، کوچک‌تر یا مساوی صفر و سمت راست آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. پس تساوی تنها زمانی برقرار می‌شود که هر دو طرف آن برابر صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} x^۳-۱=۰ \Rightarrow x^۳=۱ \Rightarrow x=۱ \\ \sqrt{۱-x}=۰ \Rightarrow ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} x=۱$$

بنابراین $x=۱$ تنها جواب معادله است.

۱۸۹ ۱ از آن‌جا که $x+۴<x+۵$ است، پس $\sqrt{x+۴}<\sqrt{x+۵}$ است و در نتیجه $\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۵}<۰$ است. همان‌طور که می‌بینید طرف چپ تساوی $\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۵}=۱$ همواره منفی است و نمی‌تواند با عدد مثبت یک برابر باشد، پس معادله جواب ندارد.

۱۹۰ ۱ به خاطر وجود $\sqrt{۹-x^۲}$، داریم $۹-x^۲\geq۰$، پس:

$$x^۲\leq۹ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq۳ \Rightarrow -۳\leq x\leq۳$$

حال از روی $-۳\leq x\leq۳$ نتیجه می‌گیریم:

$$-۶\leq۲x\leq۶ \xrightarrow{-۷} -۱۳\leq۲x-۷\leq-۱$$

در نتیجه عبارت $۲۰۰(۲x-۷)$ همواره منفی و عبارت $\sqrt{۹-x^۲}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس به ازای هیچ x حقیقی تساوی $۲۰۰(۲x-۷)=\sqrt{۹-x^۲}$ برقرار نمی‌شود.

۱۹۱ ۲ $x=۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{۲}{kx}+\frac{kx}{۳x-۴}=-۲$ است، پس در معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$\frac{۲k}{۲}+\frac{۲}{۲k}=-۲ \Rightarrow k+\frac{۱}{k}=-۲ \xrightarrow{\times k} k^۲+۲k+۱=۰ \Rightarrow (k+۱)^۲=۰ \Rightarrow k=-۱$$

با جایگذاری $k=-۱$ در معادلهٔ $\sqrt{x+۱+k}+\sqrt{x+k}=۱$، داریم:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-۱}=۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+(x-۱)+۲\sqrt{x^۲-x}=۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x^۲-x}=۲-۲x \xrightarrow{\div۲} \sqrt{x^۲-x}=۱-x$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-x=۱+x^۲-۲x \Rightarrow x=۱ \ \text{قابل‌قبول}$$

۱۹۲ ۱ α جواب معادلهٔ $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$ است، بنابراین در معادله صدق می‌کند و داریم:

$$\sqrt{۱۵+\sqrt{۲\alpha+۸۰}}=۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۵+\sqrt{۲\alpha+۸۰}=۲۵ \Rightarrow \sqrt{۲\alpha+۸۰}=۱۰ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲\alpha+۸۰=۱۰۰ \Rightarrow ۲\alpha=۲۰ \Rightarrow \alpha=۱۰$$

هم‌چنین β جواب معادلهٔ $x=\sqrt{۲-x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\beta=\sqrt{۲-\beta} \quad ; \quad \underbrace{\beta\le ۲\ ,\ \beta\ge ۰}_{۰\le\beta\le۲} \Rightarrow \beta^۲=۲-\beta \Rightarrow \beta^۲+\beta-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}\beta=۱\\ \beta=-۲ \ \text{غیرقابل‌قبول}\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش $\alpha=۱۰$ و $\beta=۱$ باشند، عبارت است از:

$$x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \Rightarrow x^۲-۱۱x+۱۰=۰$$

۱۹۳ ۴ این معادله، اصلاً جواب ندارد، زیرا دامنهٔ آن، تهی است.

$$\begin{cases}x+۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۲\\ x-۴\ge ۰\Rightarrow x\ge ۴ \\ ۳-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۳\end{cases} \xRightarrow{\cap} \varnothing$$

۱۹۴ ۴ معادله، جواب ندارد، زیرا دامنهٔ آن، تهی است.

$$۳x-۲+\sqrt{۴x-۳}=۰ \Rightarrow \sqrt{۴x-۳}=۲-۳x$$

$$\Rightarrow \text{دامنه}: \begin{cases}۴x-۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge \frac{۳}{۴}\\ ۲-۳x\ge ۰ \Rightarrow x\le\frac{۲}{۳}\end{cases} \xRightarrow{\cap} \varnothing$$

۱۹۵ ۱ مجموع دو عبارت نامنفی، مساوی صفر شده است، پس باید تک‌تک آن‌ها، هم زمان مساوی صفر باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{x^۳-x}=۰ \Rightarrow x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=۰,\pm۱\\ \sqrt{x+۲}=۰ \Rightarrow x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲\end{cases} \xRightarrow{\cap} \varnothing$$

در نتیجه هیچ x ای در معادلهٔ داده شده، صدق نمی‌کند.

نیم‌نگاه

* مجموع چند عبارت نامنفی وقتی صفر است که همگی با هم صفر شوند، یعنی ریشهٔ مشترک قابل قبول است.

۱۹۶ ۱ بچه‌های خوبم هیچ‌کدام از معادلات رادیکالی داده شده، ریشهٔ حقیقی ندارند. ببینید:

الف) $۲\sqrt{x}+۳=۰ \Rightarrow ۲\sqrt{x}=-۳ \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}=\underbrace{-\frac{۳}{۲}}_{\text{منفی}} \Rightarrow$ غیرقابل قبول $\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

ب) $\underbrace{\sqrt{۳x-۱}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}+\underbrace{\sqrt{۴-x}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}=۰ \Rightarrow \begin{cases}۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\\ ۴-x=۰\Rightarrow x=۴\end{cases} \xRightarrow{\cap}\varnothing \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

پ) $\underbrace{\sqrt{۴x-۱}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}+\overbrace{\sqrt{۱-x}}^{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}+\underbrace{۲}_{\text{بزرگ‌تر از صفر}}=۰ \Rightarrow$ غیرقابل قبول $\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

۱۹۷ ۴ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$x^۲-۴\ge ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۴ \Rightarrow x\le -۲ \ \text{یا}\ x\ge ۲$$

از طرفی داریم:

$$(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۴}+x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۴}+(x-۲)(x-۱)=۰$$

اگر $x\le -۲$ باشد، هر دو عبارت مثبت می‌شوند و در نتیجه مجموعشان نمی‌تواند صفر شود. حالا اگر $x\ge ۲$ باشد، هر دو عبارت، نامنفی می‌شوند، پس زمانی مجموع آن‌ها برابر صفر می‌شود که هر دوی آن عبارات برابر صفر باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۴}=۰ \Rightarrow \begin{cases}x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm۱ \xRightarrow{x\ge۲} \text{غیرقابل قبول}\\ x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm۲ \xRightarrow{x\ge۲} x=۲\end{cases}\\ (x-۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۲ \ \text{یا}\ x=۱ \xRightarrow{x\ge۲} x=۲\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده فقط یک ریشه دارد. $(x=۲)$

۱۹۸ **۴** می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادلهٔ $(x-۲)\sqrt{x^۲-۹}-(x-۳)\sqrt{x^۲-۴}=۰$ را تعیین کنیم، بنابراین با فرض $x>۳$ داریم:

$$\sqrt{x-۲}\sqrt{x-۲}\sqrt{x-۳}\sqrt{x+۳}-\sqrt{x-۳}\sqrt{x-۳}\sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۲}\sqrt{x-۳}\left(\sqrt{(x-۲)(x+۳)}-\sqrt{(x+۲)(x-۳)}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-۲}=۰\Rightarrow x=۲\\ \sqrt{x-۳}=۰\Rightarrow x=۳\\ \sqrt{x^۲+x-۶}-\sqrt{x^۲-x-۶}=۰\Rightarrow \sqrt{x^۲+x-۶}=\sqrt{x^۲-x-۶}\xRightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+x-۶=x^۲-x-۶\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

حواستان باشد که $x=۲$ و $x=۰$ قابل قبول نیستند (چون در دامنه قرار ندارند، منظورمان این است که عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را منفی می‌کنند)، پس فقط $x=۳$ را به عنوان جواب معادله می‌پذیریم.

۱۹۹ **۴** فرض کنیم $\sqrt{\frac{۳x+۱}{x-۴}}=t$ باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$t+\frac{۱}{t}=۲\Rightarrow t=۱\Rightarrow \sqrt{\frac{۳x+۱}{x-۴}}=۱\xRightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۳x+۱}{x-۴}=۱\Rightarrow ۳x+۱=x-۴\Rightarrow ۲x=-۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده یک جواب قابل قبول دارد.

۲۰۰ **۳** فرض کنیم $\sqrt[۴]{۳x^۲+۶}=t\geq ۰$ باشد، در این صورت داریم:

$$t+t^۲=۱۲\Rightarrow t^۲+t-۱۲=۰\Rightarrow (t+۴)(t-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}t=-۴<۰ & \text{غیرقابل قبول}\\ t=۳>۰ & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

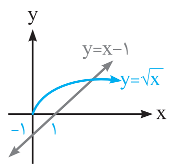
$$\Rightarrow \sqrt[۴]{۳x^۲+۶}=۳\xRightarrow{\text{توان ۴}} ۳x^۲+۶=۸۱\Rightarrow ۳x^۲=۷۵\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=\pm ۵$$

بنابراین معادله دارای دو جواب قابل قبول است.

۲۰۱ **۲** فرض کنیم $x-\sqrt{x}=A$ باشد، در این صورت داریم:

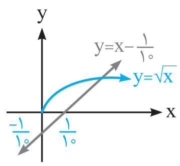
$$(x-\sqrt{x})^۲-\frac{۱۱}{۱۰}(x-\sqrt{x})+\frac{۱}{۱۰}=۰\Rightarrow A^۲-\frac{۱۱}{۱۰}A+\frac{۱}{۱۰}=۰\xRightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} A=۱, A=\frac{۱}{۱۰}$$

$x-\sqrt{x}=۱\Rightarrow x-۱=\sqrt{x}$



$\Rightarrow$ نمودارهای $y=x-۱$ و $y=\sqrt{x}$ در یک نقطه تلاقی دارند، پس معادله، یک ریشه دارد.

$x-\sqrt{x}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow x-\frac{۱}{۱۰}=\sqrt{x}$



$\Rightarrow$ معادله، یک ریشه دارد.

۲۰۲ **۲** فرض کنیم $\sqrt{x^۲+۴x+۵}=t$ باشد، در این صورت داریم:

$$x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}\Rightarrow (x^۲+۴x+۵)-۲=\sqrt{x^۲+۴x+۵}\Rightarrow t^۲-۲=t\Rightarrow t^۲-t-۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}t=۲ & \text{قابل قبول}\\ t=-۱ & \text{غیرقابل قبول است، زیرا حاصل رادیکال، نباید منفی باشد.}\end{cases}$$

$$\xRightarrow{t=۲}\sqrt{x^۲+۴x+۵}=۲\xRightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+۴x+۵=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{c}{a}=۱$$

۲۰۳ **۱** فرض کنیم $\sqrt{x^۲+x+۱}=t$ باشد، در این صورت داریم:

$$(x^۲+x+۱)-۳\sqrt{x^۲+x+۱}+۲=۰ \qquad \text{دامنه}: x^۲+x+۱\geq ۰\xRightarrow{\Delta<۰, a>۰} D=\mathbb{R}$$

$$t^۲-۳t+۲=۰\xRightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰}\begin{cases}t=۱\Rightarrow \sqrt{x^۲+x+۱}=۱\xRightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+x+۱=۱\Rightarrow x^۲+x=۰\Rightarrow x(x+۱)=۰\Rightarrow x=۰, x=-۱\\ t=\frac{c}{a}=۲\Rightarrow \sqrt{x^۲+x+۱}=۲\xRightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+x+۱=۴\Rightarrow x^۲+x-۳=۰ \quad (*)\end{cases}$$

در معادلهٔ $(*)$ چون a و c ناهم‌علامت هستند، پس معادله، دو ریشهٔ ناهم‌علامت (که ۰ و ۱− نیستن) دارد و چون دامنهٔ معادله، $\mathbb{R}$ است، هر دوی آن‌ها قابل قبول‌اند، در نتیجه معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است.