۱) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۰

۲) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x\neq ۲\\ a & ;x=۲\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳) تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ;|x|>۱\\ ۲x & ;|x|\leq ۱\end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱$-$چگونه است؟

۱) در ۱$-$ ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته
۲) در ۱$-$ ناپیوسته - در ۱ پیوسته
۳) در ۱$-$ پیوسته - در ۱ پیوسته
۴) در ۱$-$ پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۴) تابع جزء صحیح $y=\left[-x^۲\right]$ در $x=۳$ چه وضعی دارد؟

۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
۳) از چپ و راست پیوسته
۴) از چپ و راست ناپیوسته

۵) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x}}+۲ & x>۰\\ ۳x-a & x\leq ۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد a کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۱

۶) دنباله‌ی $\left\{\dfrac{n^۲}{۲^n}\right\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱

۷) تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin ۳x & ; \quad ۰\le x<\frac{\pi}{۲} \\ b\cos ۲x & ; \quad \frac{\pi}{۲}<x\le ۲\pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{۲})=۲$ ، در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است.

مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) -۴

۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\ne ۱ \\ a & ;x=۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۹) حد کسر $\frac{x+\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$ وقتی $x\to ۱^+$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۱۰) در بازه‌ی $\left[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]-\{۱\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{۱-x}\le f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱}\left(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x)\right)=۰$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

۱۱) تابع $y=[x]-[\frac{x}{۴}]$ در $x=۸$ چه وضعی دارد؟

۱) فقط پیوستگی راست دارد. ۲) فقط پیوستگی چپ دارد. ۳) پیوسته است. ۴) پیوسته نیست.

۱۲) اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ حد چپ تابع در $x=۳$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۱۳) تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \sin x+۲\cos x & ۰<x<\frac{\pi}{۲} \\ -\cos ۲x & \frac{\pi}{۲}<x<\pi \end{cases}$ با تعریف $f(\frac{\pi}{۲})=۱$ از نظر پیوستگی در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ چگونه است؟

۱) از چپ ناپیوسته – از راست پیوسته
۲) از چپ پیوسته – از راست ناپیوسته
۳) از چپ ناپیوسته – از راست ناپیوسته
۴) از چپ پیوسته – از راست پیوسته

۱۴) در تابع جزء صحیح $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to ۶$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۵) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a\sin ۲x & ; \dfrac{\pi}{۴}\leq x<\dfrac{۳\pi}{۴} \\ \cos(x+\dfrac{\pi}{۴}) & ; \dfrac{۳\pi}{۴}\leq x\leq ۲\pi \end{cases}$ بر بازه‌ی $[\dfrac{\pi}{۴}, ۲\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

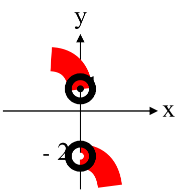
۱۷) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲} & ;x>۲ \\ ۲x+b & ;x\leq ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۸) حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{۳}{۲}[۲x]$ از حد راست آن در نقطه‌ی $x=-۲$ چقدر کمتر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۵}{۲}$ ۳) $\dfrac{۲۷}{۲}$ ۴) $\dfrac{۷}{۲}$

۱۹) اگر شکل مقابل نمودار تابع f باشد. آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{f(x)-۲}{۳[f(x)]+۱}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)



۱) $\dfrac{۱}{۱۰}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۸}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۱۰}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۲۰) پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+\dfrac{|۲x|}{x} & x\neq ۰ \\ a & x=۰ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a برقرار است؟

۱) $a=۲$ ۲) $a=-۲$ ۳) $a=۴$ ۴) هیچ مقدار a

۲۱) به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x} & ۰<x<a \\ x & x\geq a \end{cases}$ در $x=a$ حد دارد؟

۱) ± ۱ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) هیچ مقدار a

۲۲) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-۲x+b & x>۲ \\ ۲ax+۳b & x\leq ۲ \end{cases}$ در نقطه ی $x_۰=۲$ حد داشته باشد آنگاه کدام رابطه درست است؟

۱) $۲a-b=۲$ ۲) $۲a+۲=-b$ ۳) $۲a+b=-۲$ ۴) $۲a-۲=-b$

۲۳) حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} \dfrac{۲\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos ۳x}{\tan^۲ x}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۲۴) اگر تابع f در نقطه ی $x_۰=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳f(x)-۲}{f(x)+۸}$ برابر ۱ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۲۵) اگر $f(x)=\begin{cases} ax-۳ & x<۲ \\ x^۲+۳a & x\geq ۲ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۲$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $a=۹$ ۲) $a=۵$ ۳) هیچ مقدار ۴) $a=-۹$

۲۶) حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲x-۲\sqrt[۳]{x}}{۳x+۴\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{-۲}{۳}$

۲۷) در تابع $f(x)=\begin{cases} -۲ & x\in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ ۰ & x\in \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{-۱}{۳})^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۰ ۳) -۴ ۴) ۱

۲۸) قدر مطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع $\dfrac{x-۲}{|x-۲|}+\dfrac{|x^۲-۴|}{x^۲-۴}$ وقتی $x\to ۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) ۱

۲۹) در تابع جزءصحیح $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۵}]$ وقتی $x\to ۱۰$ مجموع حد راست و حد چپ کدام است؟

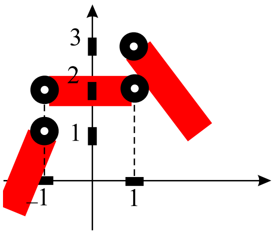
۱) -۱۲ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) -۲

۳۰) حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه ی $x=۳$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ∞

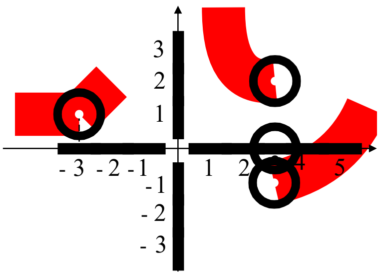
حد و پیوستگی

۳۱) با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

۳۲) شکل مقابل نمودارتابع f می باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) - f(۳)$ کدام گزینه است؟



۱) -۱
۲) ۱
۳) ۰
۴) ۲

۳۳) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۲ & \\ ۱ & x < ۱ \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to ۱^-$ کدام است؟

۱) $f(۰)$
۲) $f(۲)$
۳) $f(۱)$
۴) $f(۳)$

۳۴) مقدار $\lim \cot^۳ x$ کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) مبهم

۳۵) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} & \\ ax + ۳ & x \geq ۳ \end{cases}$ در نقطه ای به طول $x = ۳$ پیوسته باشد آنگاه a کدام است؟

۱) $a = ۱۲$
۲) $a = -۳$
۳) $a = ۴$
۴) $a = ۳$

۳۶) در تابع $f(x) = \begin{cases} \overline{|x^۲ - ۱|} & \\ k & x = ۱ \end{cases}$ اگر تابع در نقطه‌ی $x = ۱$ پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه k کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) -۲

۳۷) حد کسر $\frac{\sqrt[۳]{x} - x}{\sqrt[۳]{x} + x}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

۳۸) حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{۲\sin x + \sqrt{۲}}{۲\cos x - \sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۱

۳۹) اگر $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x^۲-a^۲}{x^۲+۲ax+a^۲} = -۱$ باشد a کدام است؟

۱) به ازای هیچ مقدار a برقرار نیست
۲) به ازای هرمقدار a برقرار است
۳) به ازای هر عدد حقیقی $a \neq ۰$ برقرار است
۴) فقط $a=-۱$

۴۰) حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \cot x$ کدام است؟

۱) ۰^+
۲) -۱
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

۴۱) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} \quad +[x] & \\ ax+[-x] & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ دارای حد است. مقدار a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۳
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۶

۴۲) مقدار $\lim\limits_{x\to n} \cos(\pi(x-[x]))$ کدام است؟ ($n\in\mathbb{Z}$ و [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰
۲) ۱
۳) -۱
۴) وجود ندارد.

۴۳) به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+ \quad x & \quad \frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & \frac{\pi}{۴}\leq x\leq ۲\pi \end{cases}$، روی بازه‌ی $[۰\ ,\ ۲\pi]$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) هیچ مقدار a

۴۴) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۳-x}{x^۲-|x|} & \\ ۲ & ;|x|=۱ \end{cases}$ در نقاط با طول‌های ۱- و ۱ چگونه است؟

۱) ناپیوسته- پیوسته
۲) پیوسته- ناپیوسته
۳) پیوسته- پیوسته
۴) ناپیوسته- ناپیوسته

۴۵) اگر داشته باشیم $\sqrt{x^۳+۸} \leq f(x) \leq ۴-x^۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) -۱
۴) ۱

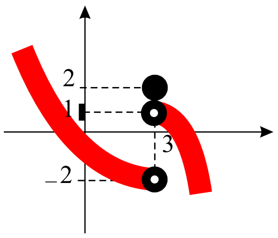
۴۶) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-۱}{x^۲-ax+a} & x\geq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) هیچ مقدار a
۴) هر مقدار a

۴۷) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+x-10}{} & \\ b & x=2\end{cases}$ در R پیوسته می‌باشد. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۴۸) شکل مقابل نمودار تابع f است حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)+f(3)$ کدام است؟



۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۲
۴) صفر

۴۹) در تابع $f(x)=\frac{|x^2-x-2|}{x^2-4}$ قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست آن در $x=2$ کدام است؟

۱) ۰٫۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱٫۵ ۴) ۲

۵۰) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} & \\ x^2+ax & ;x\geq 3\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=3$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۵۱) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x & x\geq \\ a+\cos x & ;\quad x<\frac{\pi}{3}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۲) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2ax+b & \\ 5 & \\ x^2+bx-a & x<2\end{cases}$ همواره پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۲

۵۳) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{}{x^2-4} & \\ k+[x] & x\geq 2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد، k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۵۴) حد راست $f(x)=\frac{}{2x+[x]}$ چه‌قدر از حد چپ آن در $x=0$ بیش‌تر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۵۵) اگر $f(x) = \begin{cases} \\ \left|x - \frac{۱}{a}\right| & ;x \geq -۲ \end{cases}$ ، در $x = -۲$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار $f(a)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۵۶) اگر $f(x) = x^۲[x]$ ، حاصل $\lim_{x \to ۱^+} \frac{}{x - ۱}$ کدام است؟([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰   ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۵۷) اگر $f(x + ۲) = \frac{\cos \pi x}{۱ + \sin \pi x}$، حاصل $\lim_{x \to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) $+\infty$

۵۸) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin \\ \quad ۲\ \pi x \\ ۳۶ & ; \quad x > ۶ \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۹) حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{\cos x - \cos ۲x}{x^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱   ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶۰) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} + ax - ۵ \\ ax - ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a = -۲$ ۴) فقط $a = ۲$

۶۱) اگر $f(x) = \begin{cases} ax - ۱ \\ x^۲ + ۲a & x \geq ۱ \end{cases}$ و $\lim_{x \to ۱^+} f(x) - \lim_{x \to ۱^-} f(x) = -۱$ ، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۲) در شکل مقابل $\lim_{x \to ۲^+} f(x) + \lim_{x \to ۲^-} f(x) + f(۲)$ چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۲
۳) -۳ ۴) -۲

۶۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + ۲ + \frac{|x|}{\ }$ را در نظر می‌گیریم. حد راست این تابع در $x = ۰$ چقدر از حد چپ آن در $x = ۰$ بیش تر است؟

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۴ حد تابع $f(x)$ ، در نقطه ی ۲ برابر L می باشد. اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳f(x)+x^۲-۲}{f(x)+۲} = -\frac{۱}{۵}$ ، آن گاه مقدار L برابر است با:

(۱) $-\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۴}{۳}$ (۳) $-\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۵ تابع $f(x) = \begin{cases} \ +x & \\ ax+b & x < ۲ \end{cases}$ وقتی $x \to ۲$ دارای حد است. در این صورت:

(۱) $b = ۶ - ۲a$ (۲) $b = ۶ + ۲a$ (۳) $a = b - ۶$ (۴) $a = b + ۶$

۶۶ اگر تابع f با ضابطه ی $f(x) = a[x] + ۲[۱ - x]$ در $x_۰ = ۲$ دارای حد باشد، مقدار عددی a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۷ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{[x^۲]-\ }{x+۱}$ چقدر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۶۸ حاصل $A = \lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})^+} [\frac{۲}{x}] - \lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})^-} [\frac{۴}{x}]$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) -۱۹ (۴) ۱۹

۶۹ در تابع $f(x) = [۲x] + [-x]$، وقتی $x \to \frac{۱}{۲}$، مجموع حد چپ و راست کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

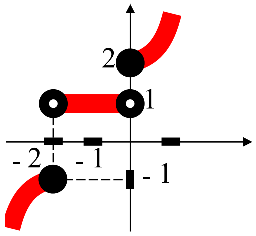
(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۷۰ اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{a[x^۲]-۳|۲x-۲|+۱}{۲b+|x+۲|} = \frac{\ }{۷}$ باشد، آن گاه $a^۲+b^۲$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

(۱) ۰ (۲) $\frac{۳۵}{۴۹}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{۲۶}{۳۶}$

۷۱ مقدار m چقدر باشد تا $f(x) = x - [۲x] - m^۲ \sin(\frac{\pi[x]}{۲})$ در نقطه‌ی $x = ۳$ دارای حد باشد؟

(۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲



۷۲ با توجه به شکل زیر حاصل $f(۱-x^۲) \underset{x\to(-۱)^-}{\text{-----}} - f(-۲-x^۲) \underset{x\to ۰^+}{\text{-----}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰

۳) ۱ ۴) -۲

۷۳ حد تابع $\dfrac{x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}-۱}$ وقتی $x \to ۱$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ ۴) $۱+\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

۷۴ حد چپ تابع $f(x)=[۲x-|x|]$ در $x=-۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۷۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۴) $\dfrac{۱}{۶}$

۷۶ حاصل حد $\dfrac{\log_۲^x - \log_x}{\log_۲^{(\frac{x}{۲})^۲}}$ وقتی $x \to ۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۷ اگر به ازای هر x، داشته باشیم $\cos x \le ۵-۲f(x) \le ۱-x^۲$ ، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۸ اگر $f(x)=\dfrac{}{x}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ باشند، آن‌گاه حد تابع $\dfrac{}{f}$ در $x=۰$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۷۹ اگر $f(x+\dfrac{\pi}{۴})=\dfrac{}{۱-\tan x}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

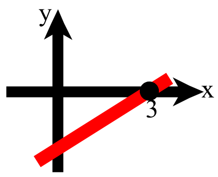
۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) -۱

حد و پیوستگی

۸۰) اگر تابع $f(x)$ $\begin{cases} \dfrac{-\quad +x+۶}{\quad} \\ -۲x+b \qquad x\geq ۳ \end{cases}$ در $x=۳$ پیوسته باشد، خط $x=۵$ نمودار تابع f را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) -۷ ۲) -۹ ۳) -۵ ۴) -۳

۸۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+b}{\quad} \\ -۵ \qquad ,x=a \end{cases}$، به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۴ ۲) -۵
۳) -۷ ۴) -۸

۸۲) اگر $f(x)=\begin{cases} x+۱ \\ x^۲+۲ \quad ,x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=۳-x$ باشند، حد تابع $(fog)(x)$ وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳) اگر به ازای هر x در بازه‌ی $[-۱,۱]$ داشته باشیم $۳\cos^۲ x\leq ۲f(x)-۴\leq ۳-x^۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{\quad}{\cos(\pi x)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\dfrac{۷}{۲}$ ۳) ۷ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۸۴) حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\quad}{x^۳+|x|-۲}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۵}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۸۵) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} [۲x]+a \qquad x<۲ \end{cases}$، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷ ۲) $\dfrac{۲}{۵}$ ۳) $\dfrac{۴}{۵}$ ۴) ۷

۸۶) اگر $f(x)=\dfrac{۳-\quad x}{۲\cos(\frac{\pi}{۶}+x)}$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $-۴\sqrt{۳}$

حد و پیوستگی

۸۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sin \frac{\pi x}{۶} \\ \frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{x^۲-۱} \quad , \quad x > ۱ \end{cases}$ در R پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۸۸ اگر $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۱ - \cos \pi x}{x^۲ + ax} = +\infty$ ، حاصل حد چپ این عبارت در $x = ۰$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ۳) $-\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$

۸۹ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \text{—} \\ ax+۱ \quad , \quad x \geq ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ پیوسته است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۹۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱۲^x - ۳^x + ۴^x - ۱}{۱۶^x - ۱}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۹۱ حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۶

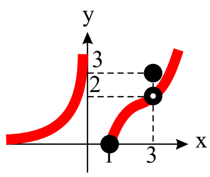
۹۲ در تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} +a & ; x < -۲ \\ ۳x+۴ & ; x > -۲ \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x = -۲$، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳٫۵ ۳) -۴ ۴) $-۴٫۵$

۹۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x+a \\ ۱ \quad ; \quad x \geq ۱ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+۱ \\ \frac{}{x+۱} \quad ; \quad x \geq ۱ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، تابع $f+g$ در $x = ۱$ پیوسته است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۹۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح نیست؟



۱) $\underset{x\to ۳}{\ldots} f(x) = ۳$ ۲) $\underset{x\to ۱}{\ldots} f(x)$ وجود ندارد.

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = +\infty$ ۴) $\underset{x\to -\infty}{\ldots} f(x) = ۰$

۹۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۳x}-\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}{(x-۱)^۳} & \\ \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}a & ;\quad x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) هیچ مقدار a ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۹۶ اگر $f(x+۱)=\dfrac{۱}{x^۲-۱}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) -۱ ۴) صفر

۹۷ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+m[x] & \\ ۱ & \\ x^۳-۳n & x<۲\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ پیوسته باشد، حاصل mn کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۹}{۲}$ ۴) -۴

۹۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع درچند نقطه حد دارد ولی ناپیوسته است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

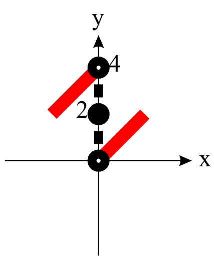
۹۹ تابع $f(x)=\begin{cases}ax+۲b & ;\quad x>۳\\ ax^۲+bx+۲ & ;\quad x<۳\end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۶$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) ۴

۱۰۰ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{}{\cos ۲x+۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) ۱

۱۰۱ اگر شکل زیر مربوط به تابع $g(x)$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{۴-g(x)}{\sqrt{g(x)}-۲}$ کدام است؟



۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۲}{\sqrt{۲}-۲}$ ۴) -۴

۱۰۲ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \\ \dfrac{x^2-4}{ax+2a} & x > -2 \end{cases}$ در $x=-2$ پیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) -2 ۳) هر مقدار حقیقی a ۴) هیچ مقدار a

۱۰۳ حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} \left(\dfrac{3}{|-2x^2-x+1|} - \dfrac{4}{4x^2-1}\right)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) $-\dfrac{1}{3}$ ۴) صفر

۱۰۴ اگر $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\quad}{-2x-3} & \\ ax+\dfrac{1}{a} & x \geq -1 \end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد، a چند مقدار حقیقی می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \\ ax+5x-a & x < 1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته است؟

۱) $\varnothing$ ۲) R ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{-2,2\}$

۱۰۶ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x(x+3)} & \\ 2a & x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{6}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{2}{3}$

۱۰۷ حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\quad}{\sin x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

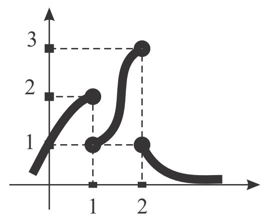
۱) -1 ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۱۰۸ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} & \dfrac{\pi}{2} \\ b\cos 2x & \dfrac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f(\dfrac{\pi}{2}) = 2$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است $a-b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) ۴ ۴) ۵

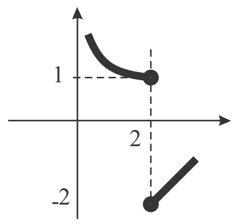
۱۰۹ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \left(\dfrac{۲}{x^۲ - ۱} - \dfrac{\quad}{x + ۱}\right)$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $-\dfrac{۳}{۲}$ (۳) ۱ (۴) $\dfrac{۳}{۲}$



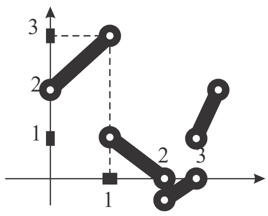
۱۱۰ باتوجه به نمودار f، حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^-} f\left(\dfrac{x}{۲}\right) + \lim\limits_{x\to ۱^-} fof(x)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵
(۳) ۲ (۴) ۳



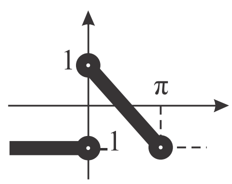
۱۱۱ با توجه به نمودار f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(-x^۲ + ۲x + ۱)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) -۲



۱۱۲ اگر $f(x)$ به شکل زیر باشد $\lim\limits_{x\to ۱^+} \left[f^{-۱}(x)\right]$ کدام است؟

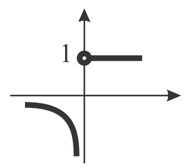
(۱) ۱ (۲) ۳
(۳) -۱ (۴) -۳

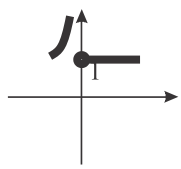


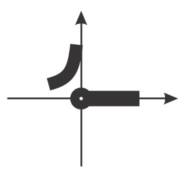
۱۱۳ با توجه به نمودار f مقدار $\lim\limits_{x\to \pi} f(\cos x + ۱)$ کدام گزینه است؟

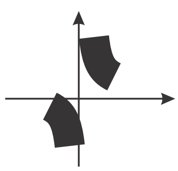
(۱) ۰ (۲) ۱
(۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

۱۱۴ نمودار تابع $f(x) = \dfrac{\quad}{x}$ در نزدیکی نقطهٔ صفر شبیه کدام شکل زیر می‌باشد؟

(۱) 

(۲) 

(۳) 

(۴) 

۱۱۵ اگر $f(x) = \dfrac{\quad}{x^۲ - ۳x + ۲}$ و $g(x) = ۳^x$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to ۱^+} g(f(x))$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) تعریف نشده

۱۱۶ حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\log_{\sqrt{۲}}}{۲^x - ۱}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۱۱۷ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^{+}} \frac{\quad}{\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۱۸ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to ۳^{+}} \left[۸\cos^{۲}\left(\ \ x\right)\right]$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۰

۱۱۹ اگر $f(x)=[x]+\left[x^{۲}\right]+\left[x^{۳} \qquad x^{۱۱}\right]$ آنگاه $\displaystyle\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)$ حاصل کدام است؟

(۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) صفر

۱۲۰ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to +۳^{-}} \frac{[-x]\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{\quad}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $+۳$ (۳) -۳ (۴) وجود ندارد

۱۲۱ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^{+}} \left[\cot^{۲}x\right]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) وجود ندارد

۱۲۲ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \frac{\quad}{\quad}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) $+۱$ (۴) وجود ندارد

۱۲۳ اگر $f(x)=\frac{[x] \quad \overline{x}+\overline{۱}}{\sin\left(\frac{\pi x}{۱۸}\right)}$ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to ۰} f\left(۳-۵x^{۴}\right)$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۱۲۴ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}^{-}} \left[\frac{۱۲}{\tan^{۲}x}\right]$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱

۱۲۵ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۶}^{+}} \left[-\frac{۱}{\sin^{۲}x}\right]$ را به‌دست آورید.

(۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۳ (۴) صفر

۱۲۶ حاصل $\displaystyle\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}} \left[-۴\cos^{۲}x\right]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲۷) با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\left[\dfrac{}{f(x)+۱}\right]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) وجود ندارد

۱۲۸) مجموع حد چپ و راست $f(x)=\left[۲\sqrt{۲}\sin ۲x\right]$ در $x=\dfrac{}{۸}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۲۹) حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\left[\dfrac{۱}{\cos x}\right]$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) -۲
۴) ۳

۱۳۰) حاصل $\lim\left[x^۲-۴x+۱\right]$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۴
۳) -۳
۴) ۰

۱۳۱) حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\left[\dfrac{۱}{\sin^۲ x}\right]$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۳۲) اگر $f(x)=\left[\dfrac{x}{۲}\right]-\left[\dfrac{۲}{x}\right]$ باشد حد راست تابع در $x=۲$ کدام گزینه است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۲

۱۳۳) حاصل $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{۱}{۴}\right)^+}\left[-\dfrac{۱}{x^۲}\right]$ کدام گزینه است؟

۱) -۱۶
۲) -۱۷
۳) -۱۵
۴) -۱۸

۱۳۴) حاصل $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۱}{۵}\right)^+}\left[-\dfrac{۳}{x}\right]$ کدام است؟

۱) ۱۵
۲) -۱۵
۳) ۱۶
۴) -۱۶

۱۳۵) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\left[\dfrac{}{x+۱}\right]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۳۶) حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{۲}{۴+۲^{\tan x}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$
۲) ۰
۳) $-\dfrac{۱}{۲}$
۴) وجود ندارد

۱۳۷ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{۵}{۱+\sin x}$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) ۵ (۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۳۸ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sin x$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۰ (۴) ۱

۱۳۹ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{}{\log_{۰/۵} x}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۱۴۰ اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{}{۳x^۲+ax+b} = +\infty$ باشد $a+b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) ۴

۱۴۱ اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{}{-۲x^۲+ax+b} = +\infty$ حاصل $۲a-b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱۶ (۳) $+۱۶$ (۴) ۲۴

۱۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x & \\ x & x \geq ۴ \end{cases}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۴^-} \left[\frac{۴f(x)+۸}{f^۲(x)}\right]$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

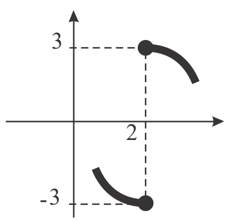
۱۴۳ اگر $f(x) = \begin{cases} & \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f\left(۱+x^۴\right) + \lim\limits_{x\to ۰} f\left(۱-x^۲\right)$ کدام گزینه است؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۴۴ با توجه به نمودار $f(x)$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(۲+x^۲) - \lim\limits_{x\to ۰} f(۲-x^۲)$ کدام گزینه است؟

(۱) ۳ (۲) -۳

(۳) ۶ (۴) -۶



۱۴۵ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲+۲}{\sqrt{x}} & \\ ۵ & x \in \mathbb{Z}' \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۴ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۶ اگر $f(x)=\begin{cases}3a^2+\sqrt{x} & \\ x+a^2+1 & x<4\end{cases}$، a را طوری تعیین نمائید که $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=5$ باشد.

۱) ± 1
۲) ± 2
۳) $\pm\sqrt{2}$
۴) $\pm 2\sqrt{2}$

۱۴۷ اگر $f(x)=\begin{cases}2 & \\ 5 & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ باشد توابع f و fof به ترتیب از چپ به راست در نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{2}$:

۱) حد دارد – حد دارد
۲) حد ندارد – حد دارد
۳) حد دارد – حد ندارد
۴) حد ندارد – حد ندارد

۱۴۸ تابع $f(x)=\begin{cases} & \\ x+5 & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۴۹ اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & \\ 0 & x=1\end{cases}$ و $g(x)=[x]$ آنگاه $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} fog(x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) حد ندارد

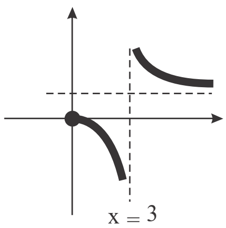
۱۵۰ اگر $f(x)=\begin{cases}x+2 & \\ 0 & x=1\end{cases}$ و $g(x)=x-\frac{1}{2}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} fog(x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) حد ندارد

۱۵۱ اگر $f(x)=\begin{cases}\overline{1}-\overline{x} & \\ -\sqrt{1+x} & x<0\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^7-x^5+x^3-x)$ کدام است؟

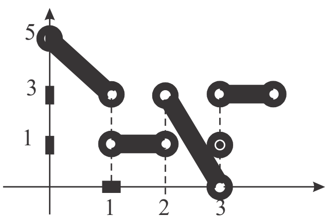
۱) 0
۲) 2
۳) 1
۴) -1

۱۵۲ با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ کدام است؟



۱) صفر
۲) $-\infty$
۳) $+\infty$
۴) -1

۱۵۳ با توجه به نمودار $\lim\limits_{x\to 3^+} f(f(x))$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۳
۳) ۰
۴) ۱

۱۵۴ اختلاف حد چپ از راست تابع $f(x)=\left[\frac{x}{3}\right]\left[\frac{x}{2}\right]$ در $x=4$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -1
۳) ۱
۴) ۳

۱۵۵ حاصل $\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{}{x-۲}\right)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵۶ حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{}{x^۳+|x|-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۵۷ حاصل $\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۵۸ حد عبارت $۱-\sin x$ وقتی $x \to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^+$، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۵۹ حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶۰ حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{\bar{۵}x+\bar{۶}-۴}{۶-۳x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴۸}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۶۱ حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۶۲ اگر $۲=\lim_{x\to ۱}\frac{-۳x+۲}{ax^۲+۲x+b}$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۶۳ هر گاه $۲=\lim_{x\to ۲}\frac{}{x-\sqrt{x+۲}}$ مقدار n کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۶۴ مقدار $\left(\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱}\right)$ $\lim\limits_{x\to ۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۶۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

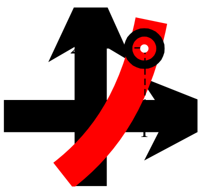
۱۶۶ تابع $\begin{cases}\frac{x^۲-۱}{x-۱} & \\ ۲ & x=۱ \\ \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۳-۱} & ۰<x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ چه وضعی دارد؟

۱) از چپ پیوسته است ۲) از راست پیوسته است. ۳) پیوسته است. ۴) ناپیوسته است.

۱۶۷ هرگاه تابع $f(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی اول و $۳=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x^۲+f(x)}{x^۲-۴}$ باشد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) -۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۶۸ نمودار مقابل قسمتی از تابع $f(x)=\frac{x^۳+۲x^۲}{x+c}$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(۲)$ کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۱۰
۳) ۴ ۴) ۶

۱۶۹ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cot^۲ x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

۱۷۰ حد کسر $\frac{((x+h)^۲+۱)^۲-(x^۲+۱)^۲}{h}$ اگر $h\to ۰$ کدام است؟

۱) $۲(x^۲+۱)$ ۲) $۴x(x^۲+۱)$ ۳) $x^۲+۱$ ۴) $(x^۲+۱)^۲$

۱۷۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x+\frac{۲}{x}-۳}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۷۲ حاصل $\lim\limits_{x\to -۳} \frac{\quad +۲x-۳}{x+\sqrt{x+۱۲}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۲) $\frac{۲۴}{۷}$ ۳) $\frac{}{۷}$ ۴) $-\frac{}{۷}$

۱۷۳ اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{a\quad +۳x-b}{۵x^۲+x-۶}=۲$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲}$ ۲) ۲۲ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۲۱}{۲}$

۱۷۴ اگر $f(۲x+۳)=\frac{۳x^۲+x-۲}{۱-x^۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) موجود نیست.

۱۷۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x^۳-۷x+۶}{۲x^۳-۳x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{-۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۷۶ حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳}}{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ وقتی $x\to -۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

۱۷۷ حد عبارت $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin^۳ x-\quad x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۷۸ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۱۷۹ اگر $\lim\limits_{x\to -۳}\frac{}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$ آنگاه a کدام است؟

۱) $a=۱$ ۲) $a=-۱$ ۳) $a=۵$ ۴) $a=-۵$

۱۸۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۸۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۹} \dfrac{۴-\sqrt{۲x-۲}}{۳-\sqrt{x}}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۳}{۲}$ (۲) $\dfrac{۲}{۳}$ (۳) $\dfrac{-۳}{۲}$ (۴) $\dfrac{-۲}{۳}$

۱۸۲ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} \dfrac{}{\sqrt{x+۲}}$ کدام است؟

(۱) ∞ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۰

۱۸۳ حاصل $\lim\limits_{x\to ۹} \dfrac{۳-\sqrt{x}}{\sqrt{x+۷}-۴}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{-۳}{۴}$ (۲) $\dfrac{۳}{۴}$ (۳) $\dfrac{۴}{۳}$ (۴) $\dfrac{-۴}{۳}$

۱۸۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۵x^۲-۴x-۱۲}{۹x^۲-۶x-۲۴}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۸}{۱۵}$ (۲) صفر (۳) $\dfrac{-۸}{۱۵}$ (۴) $\dfrac{۸}{۲۰}$

۱۸۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^۲-۴x}$ کدام است؟

(۱) $-\dfrac{}{۸}$ (۲) $\dfrac{۱}{۴}$ (۳) $-\dfrac{۱}{۴}$ (۴) $\dfrac{}{۸}$

۱۸۶ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \quad \tan x-۱$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{۲}$ (۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۳) $-\sqrt{۲}$ (۴) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸۷ حد عبارت $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۸

۱۸۸ حد کسر $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+۳}-۳}{x+x^۲-۲}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۱}{۴}$ (۲) ۴ (۳) $\dfrac{۹}{۴}$ (۴) $\dfrac{۴}{۹}$

۱۸۹ حد کسر $\dfrac{x+x^۲+\quad x-۳}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۷}{۶}$ (۲) $\dfrac{۲۱}{۲}$ (۳) ۹ (۴) ۳

حد و پیوستگی

۱۹۰ حد کسر $\dfrac{x^{۳}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ وقتی $x \to ۱$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۲}{۳}$ (۲) $\dfrac{۲۱}{۲}$ (۳) ۴ (۴) ۱۲

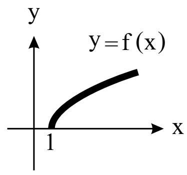
۱۹۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۲}{۳}$ (۲) $\dfrac{۳}{۴}$ (۳) $\dfrac{۴}{۳}$ (۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۱۹۲ حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ برابر کدام است؟

(۱) $\dfrac{۳}{۲}$ (۲) $\dfrac{۵}{۲}$ (۳) $\dfrac{-۳}{۲}$ (۴) $\dfrac{-۵}{۲}$

۱۹۳ شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ است. کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



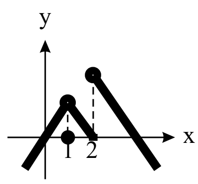
(۱) $\underset{x\to ۱}{\text{------}} f(x)=\circ$ (۲) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=f(۱)$

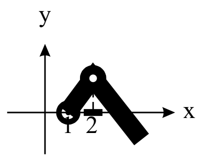
(۳) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=f(۱)$ (۴) $\lim\limits_{x\to \circ^{+}} f(x)=۱$

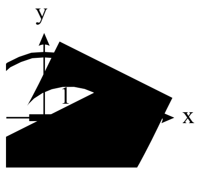
۱۹۴ اگر $g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)$ کدام است؟

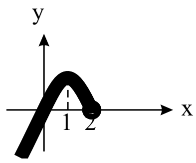
(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۹

۱۹۵ تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد؛ ولی در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد. کدام شکل می‌تواند نمودار این تابع باشد؟

(۱)


(۲)


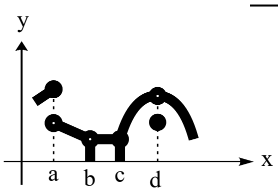
(۳)


(۴)


۱۹۶ کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع $f(x)=\dfrac{}{x}$ درست است؟

(۱) $\underset{x\to \circ}{\text{------}} f(x)=۱$ (۲) $\lim\limits_{x\to \circ^{+}} f(x)$ وجود ندارد. (۳) $\lim\limits_{x\to \circ^{-}} f(x)$ وجود ندارد. (۴) $\underset{x\to ۳}{\text{------}} f(x)=۱$

۱۹۷ نمودار تابع f به صورت زیر است. این تابع در چند نقطه از نقاط $\{a,b,c,d\}$ حد ندارد؟



(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۹۸ اگر $f(x) = $ ——— باشد، آنگاه چند مورد زیر نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = -۱$

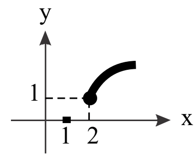
پ) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x) = ۱$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

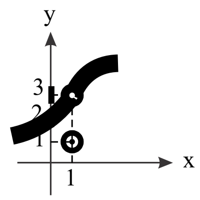
۱۹۹ در کدام گزینه تساوی داده شده با توجه به شکل نادرست است؟

(۱)



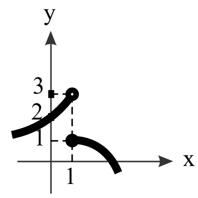
$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲)$

(۲)



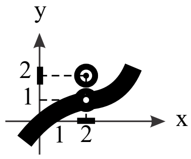
$\underset{x\to ۱}{\text{------}}\ f(x) = f(۱) + ۲$

(۳)



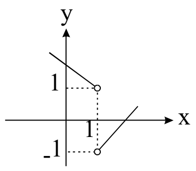
$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^-} f(۱) = ۲$

(۴)



$\underset{x\to ۲}{\text{------}}\ f(x) \neq f(۲)$

۲۰۰ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۰^+} f(۱-x)$ کدام است؟



(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۰۱ چه تعداد از توابع زیر در نقطهٔ $x = ۰$ حد ندارند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\quad}{x} & , \quad x \neq ۰ \\ ۰ & , \quad x = ۰ \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} ۱ & , \\ -۱ & , \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > ۰ \\ -\sqrt{-x} & , \quad x < ۰ \end{cases}$

ت) $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & , \quad x \geq ۰ \\ ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۲ اگر $f(x)=\begin{cases} x+۳ & , \quad x\geq ۰ \\ ۲x+۲ & , \quad x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۱ & , \quad x\geq ۰ \\ x & , \quad x<۰ \end{cases}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) f در $x=۰$ حد ندارد، g در $x=۰$ حد دارد و $f+g$ نیز در $x=۰$ حد ندارد.

(۲) f و g در $x=۰$ حد ندارد، اما $f+g$ در $x=۰$ حد دارد.

(۳) f و g در $x=۰$ حد ندارد، اما $f-g$ در $x=۰$ حد دارد.

(۴) f، g و $f+g$ در $x=۰$ حد ندارند.

۲۰۳ اگر تابع f در نقطهٔ $x=۵$ حد داشته باشد و بدانیم $\lim\limits_{x\to ۵}\frac{}{۲f(x)+۱}=۷$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۵}f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{۳}{۲}$ (۴) -۱

۲۰۴ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)$ در $x=۲$ حد دارد؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

$$f(x)=a\left[\frac{x}{۲}\right]+۲ax\left[-\frac{x}{۲}\right]-\left[x^۲\right]$$

(۱) $-\frac{۱}{۳}$ (۲) $-\frac{۵}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۰۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x^۲-۴}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) صفر (۳) $\frac{۱۳}{۴}$ (۴) حد ندارد.

۲۰۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۵x^۲-a} & , \quad x\geq ۱ \\ \frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲-۱} & , \quad -۲<x<۱ \\ b[x]+\frac{}{x+۲} & , \quad x\leq -۲ \end{cases}$ در $x=۱$ و $x=-۲$ حد داشته باشد، مقدار $۲a\times b$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱۹ (۲) -۱۹ (۳) -۲۰ (۴) ۲۰

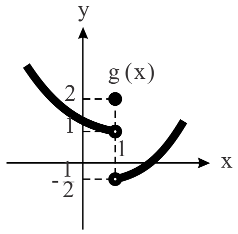
۲۰۷ در تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{}{\sin x-\cos x} & , \quad x\neq \frac{\pi}{۴} \\ k & , \quad x=\frac{\pi}{۴} \end{cases}$، به ازای کدام مقدار k تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است؟

(۱) $-\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۰۸ تابع $f(x)=\begin{cases} |x| & , \quad |x|\leq ۲ \\ \frac{۴}{x} & , \quad |x|>۲ \end{cases}$ با توجه به نمودارش در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲۲ (۴) ۳

۲۰۹ هرگاه $\lim\limits_{x\to 1^+}(2f(x)+1)=5$ باشد، با توجه به نمودار تابع g حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\overline{(f^3-2g)(\overline{x})}}{(f\cdot g)(x)+3}$ کدام است؟



۱) $0/5$ ۲) $1/5$ ۳) -2 ۴) 2

۲۱۰ تابع $f(x)=x[x]$ در بازهٔ $(-1,k)$ پیوسته است، حداکثر مقدار k کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\dfrac{-1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) 1

۲۱۱ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{[x]-\quad x}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) 1 ۲) 2 ۳) صفر ۴) -1

۲۱۲ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\overline{x^2}-6x+\overline{9}}{\quad} & ,x\neq 3\\ m & ,x=3\end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوستگی چپ داشته باشد، m کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲۱۳ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+\cos x}=a$، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\quad}{8a\sin^2 x-1}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

۲۱۴ تابع $f(t)=\begin{cases}6t+4 & \\ 2t+10 & 1\le t\le 10\end{cases}$، جرم یک کودک تا ۱۰ سالگی را برحسب کیلوگرم تعیین می‌کند. این تابع در کدام یک از بازه‌های زیر ناپیوسته است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(1,9)$ ۴) $[2,10]$

۲۱۵ کدام یک از توابع زیر در $x=2$ پیوستگی چپ دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

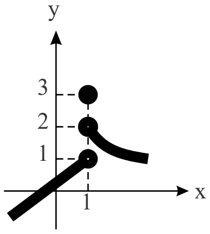
۱) $f(x)=[x]$ ۲) $g(x)=\sqrt{x-2}$ ۳) $h(x)=\sqrt{2-x}$ ۴) $k(x)=\dfrac{\quad}{x-2}$

۲۱۶ کدام گزینه درست نیست؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\lim\limits_{x\to 4^+}[x]=4$ ۲) $\lim\limits_{x\to 4^-}[x]=3$ ۳) $\lim\limits_{x\to 4^-}[-x]=-4$ ۴) $\lim\limits_{x\to 4^+}[-x]=-3$

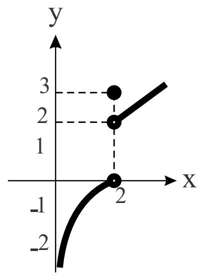
حد و پیوستگی

۲۱۷ نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(\frac{}{۲x-۷})$ کدام است؟



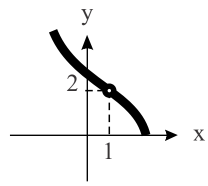
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) این حد وجود ندارد.

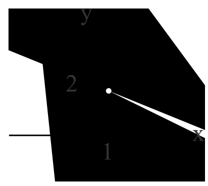
۲۱۸ برای تابع f که نمودار آن داده شده، حاصل $f(۲)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟

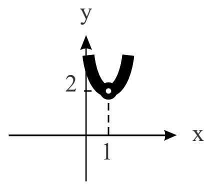


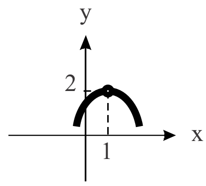
۱) ۳   ۲) ۴
۳) ۵   ۴) ۶

۲۱۹ اگر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ باشد و در اطراف $x=۱$ داشته باشیم $\frac{}{۱-x} < ۰$ کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع f در اطراف $x=۱$ باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲۰ با توجه به تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to (-۴)^+} f(x)=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to -۴} f(x)=۰$

پ) $f(-۴)=۰$ ت) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) صفر

۲۲۱ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۳ \quad -۱ & \\ ax-b & , \quad x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۴$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۶}{۳}$ ۲) -۴ ۳) ۱۱   ۴) $-\frac{۱۱}{۳}$

۲۲۲ اگر $f(x)=x^۴-۳x^۲+۲$ و $g(x)=x-۱$ باشد، به ترتیب از راست به چپ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}(f+g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{}{g})(x)$ کدام است؟

۱) صفر و حد ندارد.   ۲) ۱ و -۲ ۳) صفر و ۲   ۴) صفر و -۲

۲۲۳ به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{}{} \\ bx + a - ۱ \quad , \quad x > ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ دارای حد است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) صفر　　۲) -۱　　۳) ۲　　۴) بستگی به مقدار b دارد.

۲۲۴ اگر $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x^۲}{x} = ۳$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) -۲　　۳) ۳　　۴) -۳

۲۲۵ اگر $\lim\limits_{x \to t} f(x) = ۰$ و $\lim\limits_{x \to t} g(x) = ۴$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x \to t} \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)$ همواره کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴
۳) ۸　　۴) ممکن است وجود نداشته باشد.

۲۲۶ حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^+} \left[\frac{}{۱ + ۴x}\right]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) وجود ندارد.

۲۲۷ اگر تابع f در نقطهٔ $x = ۱$ حدی مخالف صفر داشته باشد، $f(۱)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{}{x^۲ - ۳x + a} \quad , \quad x > ۱ \\ \frac{}{|x - ۱|} \quad , \quad x < ۱ \end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۲۸ اگر $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x \to ۲} g(x) = -۱$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{}{g(x)}$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) -۳

۲۲۹ تابع $f(x) = \begin{cases} x + a \\ ۳x \quad x \leq ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۳۰ تابع $f(x) = [x]$ در نقطهٔ $x = \sqrt{a}$ حد ندارد. مقدار a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۱　　۲) ۱۵　　۳) ۹　　۴) ۱۳

۲۳۱ چه تعداد از توابع زیر در $x = ۱$ ناپیوسته‌اند؟

الف) $f(x) = (x - ۳)^۲$　　ب) $g(x) = \frac{}{x - ۱}$　　پ) $h(x) = \begin{cases} x + ۱ \\ ۲ \\ ۲ - x \quad x < ۱ \end{cases}$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۲۳۲ کدام تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته نیست؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $f(x)=[x]$ ۲) $f(x)=\sin x$

۳) $f(x)=2^x$ ۴) $f(x)=(x^2+1)(1-5x^3)$

۲۳۳ تابع $f(x)=\dfrac{}{x-4}$ در نقطهٔ $x=4$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -8 ۳) 8 ۴) 4

۲۳۴ اگر $f(x)$ یک تابع خطی باشد، $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ و $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=4$. حاصل $\lim\limits_{x\to 5}(2f(x)+1)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

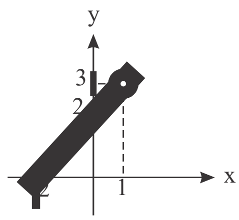
۲۳۵ اگر $f(x)=[x]+3m$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=7$. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ کدام است؟($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 3 ۴) $\frac{1}{3}$

۲۳۶ حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{}{[x]-1}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۲۳۷ شکل مقابل، نمودار تابع خطی $y=f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{}{x^2-4}$ کدام است؟



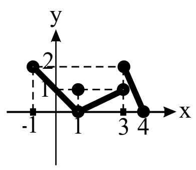
۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{2}$

۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) صفر

۲۳۸ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

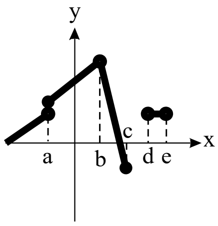
۲۳۹ با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\underset{x\to 4}{\text{-----}} f(x)=0$ ۲) $\underset{x\to 1}{\text{-----}} f(x)=1$

۳) $\underset{x\to 3}{\text{-----}} f(x)=2$ ۴) $\underset{x\to 0}{\text{-----}} f(x)=1$

۲۴۰ کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد تابع f که نمودار آن در شکل مقابل آورده شده است، درست است؟



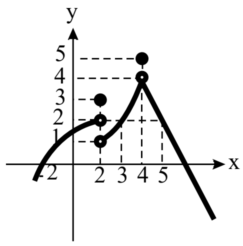
۱) تابع f در فقط حد راست دارد.

۲) حد چپ و راست تابع f در $x=c$ موجود است ولی با هم برابر نیستند.

۳) تابع f در $x=b$ دارای حد است.

۴) تابع f در $x=d$ حد چپ دارد.

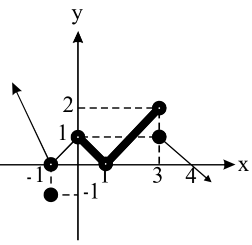
۲۴۱ شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x)$ است. حاصل عبارت $A=\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۴} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۶ ۴) ۵

۲۴۲ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع f در $x=a$ حد نداشته باشد، حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to(a-۲)} f(x)+f(a-۴)-$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۲ ۴) صفر

۲۴۳ حاصل $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{bx+a}$ به ازای چه مقادیری از c وجود دارد؟ $(b>۰)$

۱) به ازای هر مقدار حقیقی c ۲) به ازای تمام مقادیر مثبت c

۳) به ازای تمام مقادیری از c که $c>\frac{-a}{b}$ باشد. ۴) به ازای تمام مقادیری از c که $c<\frac{-a}{b}$ باشد.

۲۴۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۳}(x^۲-۳x+۲)}{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

۲۴۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x[x]-۶}{|۲x^۲-۲x-۱۲|}$ ، کدام است؟ ($[\,]$ ، نماد جزء صحیح است.)

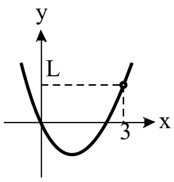
۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۴۶ اگر حاصل حدِ تعریف شده $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{ax^۲+۴x}{x^۲-۴}=b$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲+۵x-۳a}{x^۲+۴b}$ کدام است؟ $(b\neq ۰)$

۱) $-۰/۲۵$ ۲) $-۰/۳$ ۳) $۰/۷$ ۴) $-۰/۷$

حد و پیوستگی

۲۴۷ اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^{3}+n\quad+6x}{x-3}$ به‌صورت شکل زیر باشد، مقدار $n+L$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲− ۳) ۵− ۴) ۲

۲۴۸ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^{+}}\dfrac{|1+\cos x|}{\sin^{2}x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱−

۲۴۹ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^{+}}\dfrac{[x]\sqrt{1-\cos^{2}x}}{2\sin x\cos x}$ کدام است؟ ($[\,]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲−

۲۵۰ اگر $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos^{2}x}$ و $g(x)=\dfrac{|x^{2}+x-2|}{x^{2}-4}$ باشد، حاصل عبارت $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)+\lim\limits_{x\to(-2)^{+}}g(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲−

حد و پیوستگی

پاسخنامه تشریحی

۱ — ۴ ۳ ۲ **۱**

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ \Rightarrow (۲+a)[۲^+] - (۲+a)[۲^-] = ۳$$
$$\Rightarrow (۲+a)(۲) - (۲+a)(۱) = ۳ \Rightarrow ۴ + ۲a - ۲ - a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

۲ — ۴ **۳** ۲ ۱

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{x - \quad ۲x}{۲ - x} = - \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۲} \frac{۱ - \frac{\quad}{۲ \quad ۲x}}{-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲) = a = -\frac{۱}{۲}$ است

۳ — **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & -۱ \le x \le ۱ \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x = ۱ \;:\; \begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x-۱) = ۱ - ۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \qquad f(x) = ۲(۱) = ۲ \\ f(۱) = ۲(۱) = ۲ \end{cases} \Rightarrow$$

تابع در $x=۱$ ناپیوسته است.

$$x = -۱ \;:\; \begin{cases} \lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲ \\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (x-۱) = -۱ - ۱ = -۲ \\ f(-۱) = ۲(-۱) = -۲ \end{cases} \Rightarrow$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته است.

۴ — ۴ ۳ **۲** ۱

$$\lim_{x\to ۳^+} [-x^۲] = [-(۳^+)^۲] = [-(۹^+)] = [-۹/۰۱] = -۱۰$$
$$\lim_{x\to ۳^-} [-x^۲] = [-(۳^-)^۲] = [-(۹^-)] = [-۸/۹۹] = -۹$$
$$f(-۳) = [-۹] = -۹$$

تابع از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

۵ — ۴ ۳ **۲** ۱

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۰$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} f(\circ) = \lim\limits_{x\to\circ^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\circ^-}(۳x-a) = (۳\times\circ)-a=-a \\ \lim\limits_{x\to\circ^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\circ^+}\left(\frac{}{\sqrt{x}}+۲\right) = \lim\limits_{x\to\circ^+}(\sqrt{x}+۲)=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow -a=۲ \Rightarrow a=-۲$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ از آنجا که نرخ رشد ۲^n از نرخ رشد $n^۲$ بیش تر است لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲^n}=\circ$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

چون تابع داده شده در بازه‌ی $[\circ, ۲\pi]$ پیوسته است پس در هر نقطه‌ی بین $\circ$ و ۲π نیز باید پیوسته باشد، بنابراین کافی است شرط پیوستگی را (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=\frac{\pi}{۲}$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a = ۲ \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = b\cos\pi = -b = ۲ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ b=-۲ \right. \Rightarrow a-b=\circ$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x-۱} = \lim_{x\to۱^+}\frac{}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = \lim_{x\to۱^-}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x-۱} = \lim_{x\to۱^-}\frac{}{(x-۱)} = -۳$$

این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{x+\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = \lim_{x\to۱^+}\frac{x-۱+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{(x-۱)(x+۱)}} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱^+}\frac{x-۱+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱}} = \lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱}}$$

$$= \lim_{x\to۱^+}\frac{(\sqrt{x-۱})(\sqrt{x-۱}+۱)}{\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}} = \lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}+۱}{\sqrt{x+۱}} = \frac{\circ+۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to۱}\frac{}{۱-x} - g(x) = \circ \to \lim_{x\to۱}\frac{}{۱-x} = \lim_{x\to۱} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{}{1-x}=\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{}{-1}=\pi\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{}{1-x}=\lim_{x\to 1}g(x)=\pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to 1}f(x)=\pi$ می‌باشد.

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\lim_{x\to 8^+}f(x)=[8^+]-[\frac{8}{4}^+]=8-[2^+]=8-2=6$$

$$\lim_{x\to 8^-}f(x)=[8^-]-[\frac{8}{4}^-]=7-[2^-]=7-1=6$$

$$f(8)=[8]-[\frac{8}{4}]=8-[2]=8-2=6$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=8$ با هم برابر هستند پس تابع در $x=8$ پیوسته است.

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to 3^-}|x|+[x+\frac{\sqrt{3}}{2}]=3+[2/99+0/86]=3+[3/\cdots]=3+3=6$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=\frac{\pi}{2}$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(-\cos 2x)=1\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x+2\cos x)=1\\ f(\frac{\pi}{2})=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$
تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to 6^+}f(x)+\lim_{x\to 6^-}f(x)=\left[\frac{6^+}{2}\right]+\left[\frac{6^+}{3}\right]+\left[\frac{6^-}{2}\right]+\left[\frac{6^-}{3}\right]$$
$$=[3^+]+[2^+]+[3^-]+[2^-]=3+2+2+1=8$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم:
$$\boxed{\lim_{u\to 0}(1-\cos u)\sim\frac{u^2}{2}\quad,\quad\lim_{u\to 0}\sin u\sim u}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{}{x\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{x\times x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{2x^2}=\frac{4}{2}=2$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴** برای پیوستگی f در بازه‌ی $[\frac{\pi}{4},2\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{3\pi}{4}$ اعمال کنیم.

(تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} \cos\,(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱\\ \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} a\sin ۲x = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a\\ f(\frac{۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱\end{array}\right\} \Rightarrow -a=-۱ \Rightarrow a=۱$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = ۲$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۲^+} \frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to۲^+} \frac{۳x^۲-۶x}{۱} = ۱۲-۱۲=۰\\ \lim\limits_{x\to۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۲^-} (۲x+b) = ۴+b\\ f(۲)=۴+b\end{array}\right\} \Rightarrow ۰=۴+b \Rightarrow b=-۴$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-۲^+} \frac{۳}{۲}[۲x] = \frac{۳}{۲}[۲(-۲^+)] = \frac{۳}{۲}[-۴^+] = \frac{۳}{۲}(-۴) = -۶\\ \lim\limits_{x\to-۲^-} \frac{۳}{۲}[۲x] = \frac{۳}{۲}[۲(-۲^-)] = \frac{۳}{۲}[-۴^-] = \frac{۳}{۲}(-۵) = -۷{,}۵\end{array}\right. \Rightarrow -۶-(-۷{,}۵) = ۱{,}۵$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim\limits_{x\to۰^+} f(x) = -۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to۰^+} [f(x)] = [(-۲)^-] = -۳$$

دقت کنید وقتی $x \to ۰^+$ آنگاه y از مقادیر کوچکتر از -۲ به عدد -۲ نزدیک می‌شود.

$$\lim\limits_{x\to۰^+} \frac{}{۳[f(x)]+۱} = \frac{}{۳(-۳)+۱} = \frac{}{-۹+۱} = \frac{}{-۸} = \frac{۱}{۲}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۰$ بدست آوریم.

$$\lim\limits_{x\to۰^+} (۳x + \frac{\overbrace{|۲x|}^{+}}{x}) = \lim\limits_{x\to۰^+} (۳x+۲) = ۲$$

$$\lim\limits_{x\to۰^-} (۳x + \frac{\overbrace{|۲x|}^{-}}{x}) = \lim\limits_{x\to۰^-} (۳x-۲) = -۲$$

تابع در $x = ۰$ حد ندارد پس نمی‌تواند پیوسته باشد.

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = a\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \frac{۱}{a}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{۱}{a} = a \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm۱$$

با توجه به بازه ی داده شده در تابع، $a = -۱$ غیر قابل قبول است پس فقط $a = ۱$ قابل قبول است.

حد و پیوستگی

۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x^۳ - ۲x + b) = ۸ - ۴ + b = ۴ + b \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۲ax + ۳b) = ۴a + ۳b \end{array}\right\} \Rightarrow ۴ + b = ۴a + ۳b \Rightarrow ۴a + ۲b = ۴ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin(x + \frac{\pi}{۶})\cos ۳x}{\tan^۲ x} = \frac{۲\sin(\overbrace{\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}})\cos(\pi)}{\tan^۲ \frac{\pi}{۳}} = \frac{۲(۱)(-۱)}{۳} = -\frac{۲}{۳}$$

۲۴ **۱** ۲ ۳ ۴ فرض می کنیم در تابع $f(x)$ وقتی $x \to ۱$ حد تابع برابر a است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{}{f(x) + ۸} = \frac{}{a + ۸} = ۱ \Rightarrow ۲a = ۱۰ \to a = ۵$$

پس $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۵$ است.

۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع وقتی حد دارد که حد راست و حد چپ آن در آن نقطه، موجود و با هم برابر باشند.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim (x^۲ + ۳a) = ۴ + ۳a \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (ax - ۳) = ۲a - ۳ \end{array}\right. \Rightarrow ۴ + ۳a - ۲a + ۳ = -۲ \to a = -۹$$

۲۶ ۱ **۲** ۳ ۴ هر گاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲x - ۲\sqrt[۳]{x}}{۳x + ۴\sqrt[۳]{x}} = - \xrightarrow{\text{جمله‌ی کم‌توان}} \lim_{x\to ۰} \frac{-۲\sqrt[۳]{x}}{۴\sqrt[۳]{x}} = \frac{-۱}{۲}$$

۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴ وقتی $x \to a$ یعنی x در یک همسایگی از عدد a قرار دارد بنابراین همواره x غیر صحیح است و هیچ گاه سراغ ضابطه‌ی صحیح نمی‌رویم.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) + \lim_{x\to (\frac{-۱}{۳})^+} f(x) = -۲ + (-۲) = -۴$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{+}}{x^۲-۴}+\frac{}{\underbrace{|x-۲|}_{+}}\right)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{(x^۲-۴)}{x^۲-۴}+\frac{}{x-۲}\right)=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{-}}{x^۲-۴}+\frac{}{\underbrace{|x-۲|}_{-}}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-(x^۲-۴)}{x^۲-۴}+\frac{}{-(x-۲)}\right)=-۱-۱=-۲$$

بنابراین قدرمطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع برابر ۴ می‌باشد.

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱۰^+} f(x)=[\frac{۱۰^+}{۲}]+[\frac{۱۰^+}{۵}]=[۵^+]+[۲^+]=۵+۲=۷$$

$$\Rightarrow ۷+۵=۱۲$$

$$\lim_{x\to ۱۰^-} f(x)=[\frac{۱۰^-}{۲}]+[\frac{۱۰^-}{۵}]=[۵^-]+[۲^-]=۴+۱=۵$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\quad}{x-۳}=-۱$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳\ ,\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=۳-۱=۲$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=-۱\ ,\ \lim_{x\to -۳^-} f(x)=۱\ ,\ f(۳)=۰\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} f(x)+\lim_{x\to -۳^-} f(x)-f(۳)=-۱+۱+۰=۰$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(۰)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می شود.

حد و پیوستگی

۳۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to 0^-} \cot^3 x = (-\infty)^3 = -\infty$$

توجه کنید که 0^- در ناحیه‌ی چهارم است و در این ناحیه کتانژانت، منفی است.

۳۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 3$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (ax+3) = 3a+3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \qquad (x+3)[x] = 6(2) = 12 \\ f(3) = 3a+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+3 = 12 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴

کافی است حد چپ تابع را در $x = 1$ برابر مقدار تابع در $x = 1$ قرار دهیم.

$$\lim_{x\to 1^-} f_{(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{}{\underbrace{|\quad -1|}_{-}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{}{-(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$f(1) = k$$

پس $k = \frac{-1}{2}$ است.

۳۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم‌ارز آن جمله‌ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[3]{x} + x} = - \xrightarrow{\text{جمله‌ی کم توان}} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$$

۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x + \sqrt{2}}{2\cos x - \sqrt{2}} = - \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{}{-2\sin x} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{}{x+a} = - \quad a = -1$$

پس به ازای هر مقدار مخالف صفر a برقرار است. چون اگر $a = 0$ باشد جواب حد برابر یک می شود.

۴۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{}{\cot x} = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

$(\frac{\pi}{۲})^{+}$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(x^{۲}+[x])=۱+[۱^{+}]=۱+۱=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(ax+[-x])=a+[-(۱^{-})]=a+[-(۰/۹)]=a-۱\end{array}\right\}\Rightarrow a-۱=۲\Rightarrow a=۳$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x\to n^{+}\Rightarrow [x]=n$$
$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to n^{+}}\cos(\pi(x-[x]))=\lim\limits_{x\to n^{+}}\cos(\pi(x-n))=\cos(\pi(n-n))=\cos(۰)=۱$$
$$x\to n^{-}\Rightarrow [x]=n-۱$$
$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to n^{-}}\cos(\pi(x-[x]))=\lim\limits_{x\to n^{-}}\cos(\pi(x-n+۱))=\cos(\pi(n-n+۱))=\cos\pi=-۱$$

حد چپ و راست تابع در $x=n$ با هم برابر نیستند، پس تابع در $x=n$ حد ندارد.

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x=\frac{\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^{+}}\sqrt{۲}\cos ۳x=\sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴}=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^{-}}(a+\sin^{۲}x)=a+\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}=a+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}=a+\frac{۱}{۲}\\ f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴}=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا تابع را ساده شده تر می‌نویسیم

$$f(x)\begin{cases}\frac{x^{۳}-x}{x^{۲}-|x|} & x\neq \pm ۱\\ ۲ & ;\end{cases}$$

$$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-x}{x^{۲}-|x|}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x(x^{۲}-۱)}{x^{۲}-x}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{}{x(x-۱)}=۲$$

تابع در $x=۱$ پیوسته است. $\rightarrow f(۱)=۲$ و

$$\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^{۳}-x}{x^{۲}-|x|}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x(x^{۲}-۱)}{x^{۲}+x}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{}{x(x+۱)}=\lim\limits_{x\to -۱}(x-۱)=-۲$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست. $\rightarrow f(-۱)=۲$ و

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱}(۴-x^۲)=۳ \\ \lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x^۳+۸}=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ بدست آوریم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲-ax+a)=۱-a+a=۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-۱}{۲x-۲}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{}{۲(x-۱)}=۱ \\ f(۱)=۱-a+a=۱ \end{cases}$$

یعنی به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۲$ بدست آوریم.

$$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۵)}{(x-۲)}$$

$$=\lim x^۲+۲x+۵=۱۳\to b=۱۳$$

$$f(۲)=b$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim\limits_{x\to ۳^+} \quad =۱\ ,\quad \lim\limits_{x\to ۳^-} \quad =-۲\ ,\ f(۳)=۲$$

جمع این سه مقدار برابر یک می‌شود.

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

تابع داده شده به صورت $f(x)=\frac{}{x^۲-۴}$ است.

$$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\overbrace{|(x-۲)(x+۱)|}^{+}}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{}{۲+۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\overbrace{|(x-۲)(x+۱)|}^{-}}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{}{۲+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

پس قدر مطلق تفاضل این دو حد برابر $\frac{۶}{۴}$ یا ۱٫۵ است.

۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۳$ باید باهم برابر باشند

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to ۳^+}{\text{-----}}\ f(x)=\underset{x\to ۳^+}{\text{-----}}(x^۲+ax)=۹+۳a \\ \underset{x\to ۳^-}{\text{......}}\ f(x)=\underset{x\to ۳^-}{\text{......}}\ x[x]=۳\left[۳^-\right]=۳\times ۲=۶ \\ f(۳)=۹+۳a \end{array}\right\}\to ۹+۳a=۶\to ۳a=-۳\to a=-۱$$

۵۱ ۱ **۲** ۳ ۴ باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{۳}$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\sin^۲x=\sin^۲\frac{\pi}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{۳}{۴} \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^-}(a+\cos x)=a+\cos\frac{\pi}{۳}=a+\frac{۱}{۲} \\ f(\frac{\pi}{۳})=\sin^۲\frac{\pi}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{۳}{۴} \end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}\to a=\frac{۱}{۴}$$

۵۲ ۱ ۲ ۳ **۴** در $x=۲$، حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم باید برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to ۲^-}{\text{......}}\ f(x)=\underset{x\to ۲^-}{\text{......}}(x^۲+bx-a)=۴+۲b-a \\ \underset{x\to ۲^+}{\text{......}}\ f(x)=\underset{x\to ۲^+}{\text{......}}(۲ax+b)=۴a+b \\ f(۲)=۵ \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} \\ ۲b-a=۱\end{cases}\Rightarrow a=۱\ ,b=۱$$

پس $a+b=۲$ می باشد.

۵۳ **۱** ۲ ۳ ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۲$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to ۲^+}{\text{......}}\ f(x)=\underset{x\to ۲^+}{\text{......}}\qquad ۲^+]=k+۲ \\ \underset{x\to ۲^-}{\text{-----}}\ f(x)=\underset{x\to ۲^-}{\text{-----}}\frac{\overbrace{|x-۲|}^{-}}{x^۲-۴}=\underset{x\to ۲^-}{\text{-----}}\frac{}{(x+۲)(x-۲)}=-\frac{۱}{۴} \\ f(۲)=k+[۲]=k+۲ \end{array}\right\}\to k+۲=-\frac{۱}{۴}\to k=-\frac{۹}{۴}$$

۵۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\underset{x\to ۰^+}{\text{-----}}\ f(x)=\underset{x\to ۰^+}{\text{-----}}\frac{}{۲x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{-----}}\ f(x)=\underset{x\to ۰^-}{\text{-----}}\frac{}{۲x-۱}=\frac{}{۰-۱}=۰$$

بنابراین حد راست از حد چپ $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است.

۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴

با فرض پیوسته بودن $f(x)=\begin{cases}[-x] & , \quad x<-۲\\ |x-\frac{۱}{a}|, & x\geq -۲\end{cases}$ در $x=-۲$ داریم:

$$f(-۲)=\underset{x\to(-۲)^+}{......}f(x)=\underset{x\to(-۲)^+}{......}|x-\frac{۱}{a}|=\left|-۲-\frac{۱}{a}\right|\xlongequal{|f|=|-f|}|۲+\frac{۱}{a}|$$

$$\underset{x\to(-۲)^-}{......}f(x)=\underset{x\to(-۲)^-}{......}[-x]=\left[-(-۲)^-\right]=\left[۲^+\right]=۲$$

شرط پیوستگی: $f(-۲)=\underset{x\to(-۲)^+}{......}f(x)=\underset{x\to(-۲)^-}{......}f(x)\Rightarrow|۲+\frac{۱}{a}|=۲\Rightarrow ۲+\frac{۱}{a}=\pm ۲$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲+\frac{۱}{a}=۲\rightarrow\frac{۱}{a}=۰ \text{ :امکان ندارد}\\ ۲+\frac{۱}{a}=-۲\Rightarrow\frac{۱}{a}=-۴\Rightarrow\frac{-۱}{۴}=a\end{cases}$$

$$f(a)=f(-\frac{۱}{۴})=|-\frac{۱}{۴}+۴|=\frac{۱۵}{۴}$$

۵۶ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\underset{x\to۱^+}{......}\frac{\quad}{x-۱}=\underset{x\to۱^+}{......}\frac{x^۲[x]-۱}{x-۱}\underset{x\to۱^+}{......}\frac{-۱}{x-۱}=\underset{x\to۱^+}{......}\frac{\quad}{x-۱}=\underset{x\to۱^+}{......}(x+۱)=۲$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\underset{x\to۱^+}{......}\frac{\quad}{x-۱}=f'_+(۱)\xrightarrow{[۱^+]=۱}f(x)=x^۲\rightarrow f'(x)=۲x\rightarrow f'_+(۱)=۲$

۵۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\underset{x\to۳}{......}f(x)=\lim_{x\to۱}f(x+۲)$$

$$\underset{x\to۳}{......}f(x)=\lim_{x\to۱}\frac{\quad}{۱+\sin\pi x}=\frac{\quad}{۱+\sin\pi}=\frac{\quad}{۱+۰}=-۱$$

۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد.

یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x\to۶^+}{......}f(x)=\underset{x\to۶^+}{......}(a+{}^{۲}\frac{\pi x}{۳۶})=a+{}^{۲}\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴}\\ \underset{x\to۶^-}{......}f(x)=\underset{x\to۶^-}{......}\sin\frac{\quad}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{}{2x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}=\frac{-1+4(1)}{2}=\frac{3}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم: $\boxed{\lim_{u\to 0}\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-(1-\frac{4x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=2$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases}\text{حد راست}=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax-5)=4+2a-5=2a-1\\ \text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=2$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۶۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+2a\right)=1+2a\quad,\quad\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-1)=a-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)-\lim_{x\to 1^-}f(x)=-1\Rightarrow(1+2a)-(a-1)=-1\Rightarrow a=-1-2=-3$$

۶۲ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)+\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)+f(2)=1-2-1=-2\\ f(2)=-1\end{cases}$$

۶۳ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به این که $|x|=\begin{cases}\\ -x & x\le 0\end{cases}$ ، داریم:

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+2+\frac{}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+2+\frac{}{x})=3\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow A-B=2\\ B=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2+\frac{}{x})=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2-\frac{}{x})=1\end{cases}$$

۶۴ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به این که $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=L$ ، لذا داریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۳f(x)+x^{۲}-۲}{f(x)+۲} = \frac{۳L+۲^{۲}-۲}{L+۲} = \frac{}{L+۲} = -\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow L+۲ = -۵(۳L+۲) \Rightarrow L+۲ = -۱۵L-۱۰ \to ۱۶L = -۱۲ \to L = -\frac{۳}{۴}$$

۶۵ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع $f(x)$ زمانی در $x=۲$ حد دارد که داشته باشیم $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$ لذا داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (x^{۲}+x) = ۲^{۲}+۲ = ۶ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax+b) = ۲a+b \end{cases} \Rightarrow ۲a+b = ۶ \Rightarrow b = ۶-۲a$$

۶۶ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در $x=۲$ با یکدیگر برابر قرار بدهیم. لذا داریم:

$$x\to ۲^+ : x>۲ \Rightarrow \begin{cases} \\ -x<-۲ \Rightarrow ۱-x<-۱ \Rightarrow [۱-x] = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} a[x]+۲[۱-x] = ۲a+۲(-۲) = ۲a-۴$$

$$x\to ۲^- : x<۲ \Rightarrow \begin{cases} [x]=۱ \\ -x>-۲ \Rightarrow ۱-x>-۱ \Rightarrow [۱-x] = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} a[x]+۲[۱-x] = a(۱)+۲(-۱) = a-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) \Rightarrow ۲a-۴ = a-۲ \Rightarrow a=۲$$

۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x<-۱ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}>۱ \Rightarrow [x^{۲}]=۱ \Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^-} \dfrac{[x^{۲}]-}{x+۱} = \dfrac{۱-(-۲)^{۲}}{۰^-} = \dfrac{-۳}{۰^-} = +\infty \\ x+۱<۰ \end{cases}$$

۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} x\to (-\frac{۱}{۳})^+ : x>-\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{x}<-۳ \Rightarrow \frac{۲}{x}<-۶ \Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})^+} [\frac{۲}{x}] = [(-۶)^-] = -۷ \\ x\to (-\frac{۱}{۳})^- : x<-\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{x}>-۳ \Rightarrow \frac{۴}{x}>-۱۲ \Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})^-} [\frac{۴}{x}] = [(-۱۲)^+] = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow A = -۷-(-۱۲) = ۵$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x\to (\frac{۱}{۲})^+ : x>\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} -x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow [-x] = -۱ \\ ۲x>۱ \Rightarrow [۲x] = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+} f(x) = -۱+۱ = ۰$$

$$x \to (\frac{۱}{۲})^- : x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲} \Rightarrow [-x] = -۱ \\ ۲x < ۱ \Rightarrow [۲x] = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^-} f(x) = -۱ + ۰ = -۱$$

$$\lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^-} f(x) + \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^+} f(x) = -۱ + ۰ = -۱$$

۷۰ ④ ③ ② ① حد چپ و راست تابع را در $x = ۱$ برابر هم قرار می دهیم:

$$\underset{x \to ۱}{\text{------}} \frac{a[x^۲] - ۳|۲x - ۲| + ۱}{۲b + |x + ۲|} = \underset{x \to ۱}{\text{------}} \frac{a[x^۲] - ۶|x - ۱| + ۱}{۲b + ۳} = \frac{}{۷}$$

$$x \to ۱^+ : x > ۱ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ > ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۱ \\ |x - ۱| = x - ۱ \end{cases} \Rightarrow \underset{x \to ۱^+}{\text{------}} \frac{}{۲b + ۳} = \frac{}{۲b + ۳} = \frac{}{۷}$$

$$x \to ۱^- : x < ۱ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰ \\ |x - ۱| = -(x - ۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{x \to ۱^-}{\text{------}} \frac{}{۲b + ۳} = \frac{}{۲b + ۳} = \frac{}{۷} \Rightarrow ۲b + ۳ = ۷ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{}{۷} = \frac{}{۷} \Rightarrow a = ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۲^۲ + ۰^۲ = ۴$$

۷۱ ④ ③ ② ① کافی است حد چپ و راست تابع $f(x)$ در $x = ۳$ موجود و برابر باشند، لذا داریم:

$$x \to ۳^+ : x > ۳ \Rightarrow \begin{cases} \\ ۲x > ۶ \Rightarrow [۲x] = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{x \to ۳^+}{\text{------}} x - [۲x] - m^۲ \sin(\frac{\pi[x]}{۲}) = ۳ - ۶ - m^۲ \sin(\frac{۳\pi}{۲}) = -۳ + m^۲$$

$$x \to ۳^- : x < ۳ \Rightarrow \begin{cases} \\ ۲x < ۶ \Rightarrow [۲x] = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{x \to ۳^-}{\text{------}} x - [۲x] - m^۲ \sin(\frac{\pi[x]}{۲}) = ۳ - ۵ - m^۲ \sin(\frac{۲\pi}{۲}) = -۲$$

از روابط به دست آمده نتیجه می شود:

$$-۳ + m^۲ = -۲ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

۷۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$x \to 0^+ : x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow -2 - x^2 < -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(\underbrace{-2 - x^2}_{(-2)^-}) = -1$$

$$x \to (-1)^- : x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \lim_{x\to (-1)^-} f(\underbrace{1 - x^2}_{0^-}) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x\to(-1)^-} f(1 - x^2) = -1 - 1 = -2$$

۷۳ **۱** ۲ ۳ ۴

در صورت کسر از $\sqrt[3]{x^2}$ فاکتورگیری می کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2(1 - x)} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - x} - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - x} - 1)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - x} - 1} = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2} = 1$$

۷۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} [2x - |x|] \xrightarrow{x<0} \lim_{x\to(-1)^-} [2x + x] = \lim_{x\to(-1)^-} [3x] = [3(-1)^-] = [-3^-] = -4$$

۷۵ **۱** ۲ ۳ ۴

حد داده شده را به دو حد $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x} - 1)\cdot(\sqrt[3]{x} - 1)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 \times 3 = 6$$

۷۶ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2^x}$ پس:

$$\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x} = \frac{(\log_2^x)^2 - 1}{\log_2^x} = \frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{\log_2^x}$$

از طرفی:

$$\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\log_2 \frac{x}{2} = 2(\log_2^x - \log_2^2) = 2(\log_2^x - 1)$$

داریم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log_2^x - \log_x 2}{\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{2(\log_2^x - 1) \times \log_2^x}$$

حدو پیوستگی

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2^x+1}{2\log_2^x}=\frac{}{2\times 1}=1$$

۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to 0}(5-2f(x))=1\to 5-2\lim_{x\to 0}f(x)=1\to 2\lim_{x\to 0}f(x)=4\to\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{}{f}=\frac{\frac{1}{}}{\frac{}{x}}=\frac{1}{[x]}$$

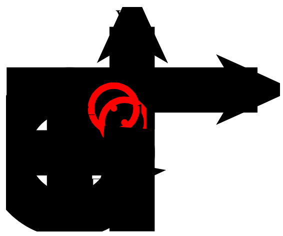
دامنه‌ی تعریف این تابع به صورت $R-[0,1)$ است یعنی حد راست تابع در $x=0$ تعریف نشده است پس تابع در $x=0$ حد ندارد.

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

دقت کنید که $x=(\frac{\pi}{4})^- \to x+\frac{\pi}{4}=(\frac{\pi}{2})^-$ است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}f(x+\frac{\pi}{4})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{}{1-\tan x}=\frac{}{1-1^-}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

دقت کنید : $\underbrace{\left[(\frac{\pi}{4})^-\right]}_{\text{بین صفر و یک}}=0\ ,\ \tan(\frac{\pi}{4})^-=1^-$



۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=3$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-2x+b)=-6+b\\ \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-x^2+x+6}{x-3}=\frac{0}{0}\to\lim\frac{}{(x-3)}=-5\\ f(3)=-6+b\end{array}\right\}\Rightarrow -6+b=-5\to b=1$$

وقتی گفته می‌شود خط $x=5$ نمودار تابع f را با چه عرضی قطع می‌کند یعنی $f(5)$ را خواسته است.

$$f(5)=-10+b=-10+1=-9$$

۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴ مقدار تابع در $x=3$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\frac{x^2-x+b}{x-a}$ به ازای $x=3$ صفر گردد.

$$x=3\to\frac{}{3-a}=0\to 6+b=0\to b=-6$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x=a$ نیز پیوسته باشد. از طرفی چون $f(a)=-5$ و $f(3)=0$ است پس $a\neq 3$ است.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-x-6}{x-a}=-\longrightarrow a^2-a-6=0\Rightarrow\begin{cases}a=-2 & \text{ق.ق}\\ a=3 & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

توجه کنید که چون مقدار کسر تابع به‌ازای $x=a$ صفر است ولی مقدار حد تابع برابر -5 است پس مقدار صورت تابع نیز صفر است.

پس $a+b=-8$ است.

۸۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا حد تابع $g(x)$ را وقتی $x \to ۲^-$ را بدست می‌آوریم و سپس حد تابع $f(x)$ را به ازای حد بدست آمده حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = ۳ - ۲^- = ۱^+$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(g(x)) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (۳x + ۱) = ۴$$

۸۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\left.\begin{array}{l} (۳ \quad x) = ۳ \\ \lim_{x\to ۰}(۳ - x^۲) = ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۰}(۲f(x) - ۴) = ۳ \to \lim_{x\to ۰} ۲f(x) = ۷ \to \lim_{x\to ۰} f(x) = \frac{۷}{۲} \to \lim_{x\to -۲} f(x+۲) = \frac{۷}{۲}$$

$$\lim_{x\to -۲} \frac{}{\cos \pi x} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\cos(-۲\pi)} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\cos ۲\pi} = \frac{۷}{۲}$$

۸۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴) در همسایگی $x = ۱$ داخل قدر مطلق، مثبت است یعنی $|x| = x$ است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{}{x^۳ + x - ۲} = -\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۱} \frac{}{۳x^۲ + ۱} = \frac{۱}{۴}$$

۸۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴) شرط اینکه تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (a[۳x] - ۱) = a[۶^+] - ۱ = ۶a - ۱ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} ([۲x] + a) = [۴^-] + a = ۳ + a \\ f(۲) = a[۶] - ۱ = ۶a - ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶a - ۱ = ۳ + a \Rightarrow ۵a = ۴ \Rightarrow a = \frac{۴}{۵}$$

۸۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{۳ - \quad x}{۲\cos(\frac{\pi}{۶} + x)} = -\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{-۲\tan x(۱ + \quad x)}{-۲\sin(\frac{\pi}{۶} + x)} = \frac{-۲ \quad ۳(۱+۳)}{-۲(۱)} = \frac{-۸ \quad ۳}{-۲} = ۴\sqrt{۳}$$

۸۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

کافی است پیوستگی تابع را در $x = ۱$ بررسی کنیم. برای این منظور باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = ۱$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \left(\frac{۱}{x - ۱} - \frac{۲}{x^۲ - ۱}\right) = \lim_{x\to ۱^+} \left(\frac{۱}{x - ۱} - \frac{۲}{(x+۱)(x-۱)}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \left(\frac{}{(x+۱)(x-۱)}\right) = \lim_{x\to ۱^+} \left(\frac{}{(x+۱)(x-۱)}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} a\sin\frac{\pi x}{۶} = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

$$f(۱) = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

بنابراین : $\frac{a}{۲}=\frac{۱}{۲}\to a=۱$

۸۸ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{u\to ۰}(۱-\cos u)\sim\frac{u^{۲}}{۲}}$

چون جواب حد، بی‌نهایت شده است پس مخرج کسر حتماً برابر صفر است.

$$x^{۲}+ax=۰\xrightarrow{x=۱}۱+a=۰\to a=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\cos\pi x}}{x^{۲}-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{\frac{\pi^{۲}x^{۲}}{۲}}}{x^{۲}-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{\pi\overbrace{|x|}^{-x}}{\sqrt{۲}}}{x^{۲}-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{-\pi x}{\sqrt{۲}}}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{}{\sqrt{۲}(x-۱)}=\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$$

۸۹ ۱ ۲ **۳** ۴ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax+۱)=۲a+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{}{[x]}=\frac{۲}{[۲^-]}=\frac{۲}{۱}=۲\\ f(۲)=۲a+۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۲a+۱=۲\to a=\frac{۱}{۲}$$

۹۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱۲^{x}-۳^{x}+۴^{x}-۱}{۱۶^{x}-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^{x}(۴^{x}-۱)+(۴^{x}-۱)}{(۴^{x}-۱)(۴^{x}+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^{x}+۱}{۴^{x}+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۹۱ ۱ ۲ **۳** ۴ اگر صورت و مخرج بصورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt[۴]{x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt[۴]{x}-۱)}=۲\times ۴=۸$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{}{\frac{}{۲\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^{۳}}}}=۲\times ۴=۸$$

۹۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)}\to ۴+a=\frac{۱}{-۶+۴}\to ۴+a=\frac{-۱}{۲}$$

$$\to 8+2a=-1 \to 2a=-9 \to a=-\frac{9}{2}=-4/5$$

۹۳ ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=1$ اعمال می‌کنیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} 2x+a+1 & \\ \frac{}{x+1}+1 & x\geq 1\end{cases}$$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{}{x+1}+1)=\frac{a}{2}+1$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a+1)=2+a+1=a+3$

مقدار تابع: $(f+g)(1)=\frac{a}{2}+1$

پس: $\frac{a}{2}+1=a+3 \to a+2=2a+6 \to a=-4$

۹۴ ۴ ۳ ۲ **۱** به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2 \to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

گزینهٔ دوم: حد چپ تابع در $x=1$ وجود ندارد پس تابع در این نقطه حد ندارد.

گزینه‌ی سوم: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

گزینه‌ی چهارم: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

بنابراین فقط گزینه‌ی اول، صحیح نیست.

۹۵ ۴ ۳ **۲** ۱ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{1+3x^2-x^3}}{(x-1)^3}=\frac{0}{0}$$

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{1+3x^2-x^3}}{(x-1)^3}\times\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3}}{\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-(1+3x^2-x^3)}{(x-1)^3(\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-1+3x}{(x-1)^3(\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)^3(\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{1+3x^2-x^3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

از طرفی مقدار تابع یعنی $f(1)$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

پس: $\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a \to 6a=3 \to a=\frac{1}{2}$

۹۶ ۴ ۳ **۲** ۱ روش اول:

باید $x+۱ \to ۰^+$ میل کند پس $x \to (-۱)^+$ میل می کند.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} f(x+۱) = \frac{۱}{((-۱)^+)^۲ - ۱} = \frac{۱}{۱^- - ۱} = \frac{}{۰^-} = -\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$x+۱ = t \to x = t-۱ \to f(t) = \frac{۱}{(t-۱)^۲ - ۱} = \frac{۱}{t^۲+۱-۲t-۱} = \frac{۱}{t^۲-۲t} \to f(x) = \frac{۱}{x^۲-۲x}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۲)} = \frac{۱}{۰^+(-۲)} = \frac{}{۰^-} = -\infty$$

۹۷ ۴ ۳ **۲** ۱ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (x^۲ + m[x]) = ۴ + m[۲^+] = ۴ + ۲m \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x^۳ - ۳n) = ۸ - ۳n \end{cases}$$

پس: $۸ - ۳n = ۱ \to ۳n = ۷ \to n = \frac{۷}{۳}\ ,\ \ ۴ + ۲m = ۱ \to ۲m = -۳ \to m = -\frac{۳}{۲}$

$$\to mn = (-\frac{۳}{۲})(\frac{۷}{۳}) = -\frac{۷}{۲}$$

۹۸ ۴ **۳** ۲ ۱ تابع در $x=۰$ و $x=c$ حد دارد ولی پیوسته نمی‌باشد در $x=a$ حد دارد و پیوسته است و در $x=b$ حد ندارد و ناپیوسته است. پس تابع در دونقطه حد دارد ولی ناپیوسته هستند.

۹۹ **۴** ۳ ۲ ۱

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۶ \to \lim_{x\to ۳^+} (ax+۲b) = ۶ \to ۳a+۲b = ۶ \\ &\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \to \lim_{x\to ۳^-} (ax^۲+bx+۲) = ۲ \to ۹a+۳b = ۰ \end{aligned}\right\} \to b = ۶\ ,\ a = -۲$$

پس $a+b=۴$ است.

۱۰۰ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{}{\cos ۲x + ۱} = \frac{\frac{\pi}{۲} - ۲}{۰^+} = \frac{}{۰^+} = -\infty$$

در مسائل حدی هر جا سینوس و کسینوس -۱ شدند منظور $(-۱)^+$ است، پس در مخرج داریم: $(-۱)^+ + ۱ = ۰^+$

۱۰۱ **۴** ۳ ۲ ۱

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{۴ - g(x)}{\sqrt{g(x)} - ۲} = \frac{۴-۴}{\sqrt{۴} - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}\times\frac{\sqrt{g(x)}+2}{\sqrt{g(x)}+2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(4-g(x))(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(g(x)-4)(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}=\lim_{x\to 0^-}-(\sqrt{g(x)}+2)=-(\sqrt{4}+2)=-4$$

۱۰۲ ۱ ۲ ۳ **۴** شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x^2-4}{ax+2a}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{}{a(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{}{a}=-4a$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}x[-x]=-2[-(-2^-)]=-2[2^+]=-2(2)=-4$$

مقدار تابع با حد چپ تابع برابر نمی‌باشد پس تابع در $x=-2$ ناپیوسته است.

۱۰۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|}-\frac{}{4x^2-1}\right)\overset{|f|=|-f|}{=\!=\!=}\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|2x^2+x-1|}-\frac{}{4x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|\underbrace{(2x-1)}_{+}(x+1)|}-\frac{}{4x^2-1}\right)=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{(2x-1)(x+1)}-\frac{4}{(2x+1)(2x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{1}{(2x+1)(x+1)}\right)=\frac{1}{(2)(\frac{3}{2})}=\frac{1}{3}$$

توجه کنید که عبارت $2x^2+x-1$ چون به ازای $x=-1$ برابر صفر است پس بر $x+1$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x & 2x-1 \\ \hline -x-1 & \\ x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$$

۱۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}ax+\frac{1}{a}=-a+\frac{1}{a}$$

$$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{\overbrace{|۱+x|}^{-}}{x^۲-۲x-۳} = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{}{(x-۳)(x+۱)} = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{}{x-۳} = \frac{}{-۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$f(-۱) = -a + \frac{۱}{a}$$

پس : $-a + \frac{۱}{a} = \frac{\cdot}{\cdot} \xrightarrow{\times ۴a} -۴a^۲ + ۴ = a \to ۴a^۲ + a - ۴ = ۰ \to \Delta = \quad - ۴ac = ۱ + ۶۴ = ۶۵ > ۰$

چون دلتا مثبت است بنابراین دو مقدار متمایز برای a موجود است.

۱۰۵ ۴ ۳ ۲ **۱** کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x = ۱$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^+} (-x^۲+۴) = -۱+۴ = ۳ \\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^-} (ax+۵x-a) = a+۵-a = ۵ \\ f(۱) = -۱+۴ = ۳ \end{cases}$$

تابع f در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-۲, ۲]$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۰۶ ۴ ۳ **۲** ۱ شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to۰} \left(\frac{۱}{x} - \frac{۳}{x(x+۳)}\right) = \lim\limits_{x\to۰} \left(\frac{}{x(x+۳)}\right) = \lim\limits_{x\to۰} \left(\frac{۱}{x+۳}\right) = \frac{۱}{۳}$$

$$f(۰) = ۲a$$

بنابراین $۲a = \frac{۱}{۳} \to a = \frac{۱}{۶}$ است.

۱۰۷ ۴ **۳** ۲ ۱ به خاطر وجود جزء صحیح باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim\limits_{x\to۰^+} \frac{}{\sin x} = \lim\limits_{x\to۰^+} \frac{(-۱)^{[۰^+]}}{۰^+} = \frac{(-۱)^۰}{۰^+} = \frac{}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim\limits_{x\to۰^-} \frac{}{\sin x} = \lim\limits_{x\to۰^-} \frac{(-۱)^{[۰^-]}}{۰^-} = \frac{(-۱)^{-۱}}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

پس $\lim\limits_{x\to۰} \frac{}{\sin x} = +\infty$ است.

۱۰۸ **۴** ۳ ۲ ۱ کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{۲}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} b\cos ۲x = b\cos\pi = -b \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} (a+\sin ۳x) = a + \sin\frac{۳\pi}{۲} = a-۱ \\ f(\frac{\pi}{۲}) = ۲ \end{cases}$$

پس: $-b = ۲ \to b = -۲ \;,\; a-۱ = ۲ \to a = ۳ \to a-b = ۵$

۱۰۹ (۴) (۳) **(۲)** (۱) ضمناً برای محاسبه‌ی حد راست و رسیدن به مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{}{x+۱}\right)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{۲}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{}{x+۱}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{}{(x+۱)(x-۱)}\right)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{۲-x^۲+x}{x^۲-۱}\right)=\frac{}{}\to \lim \frac{\cancel{}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۳}{-۲}$$

۱۱۰ (۴) (۳) **(۲)** (۱) ابتدا بخش اول را تحلیل می‌نمائیم، با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} fof(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(\underbrace{\quad}_{۲^-})=\lim f(۲^-)=\lim(۳^-)=۳$$

حال به بخش دوم می‌رسیم.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(\underbrace{\tfrac{x}{۲}}_{۱^-})=\lim f\left(۱^-\right)=۲$$

پس نهایتا داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} fof(x)+\lim_{x\to ۲^-} f\left(\frac{x}{۲}\right)=۳+۲=۵$$

۱۱۱ (۴) (۳) **(۲)** (۱) ابتدا باید تحلیل کرد عبارت مقابل f به سمت چه عددی در حال حرکت است.

$$\lim_{x\to ۱} f\left(-x^۲+۲x+۱\right)=f\left(-(x-۱)^۲+۲\right)$$ اگر $x\to ۱\to (x-۱)\to \circ \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} |x-۱|\to \circ^+$

$$\xrightarrow{()^۲}(x-۱)^۲\to \circ^+\xrightarrow{\text{قرینه}}-(x-۱)^۲\to \circ^-\xrightarrow{+۲}۲-(x-۱)^۲\to ۲^-$$

حال می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to ۱} f(-x^۲+۲x+۱)=f\left(۲^-\right)=۱$$

۱۱۲ (۴) (۳) **(۲)** (۱) باید توجه داشت اگر $A\Big|_a$ روی تابع f باشد، $A'\Big|_b$ روی $f^{-۱}$ قرار دارد. با توجه به این نکته می‌توان با توجه به نمودار f ارتفاع ۱^+ در ۳^+ تولید می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱^+} f^{-۱}=?\qquad A'\Big|_{?}^{۱^+}\to \qquad A\Big|_{۱^+}^{?}\to f(x)\to ۱^+\to \lim_{x\to ۱^+}\left[f^{-۱}(x)\right]=\left[۳^+\right]=۳$$

۱۱۳ (۴) (۳) **(۲)** (۱) ابتدا باید بررسی کرد عبارت مقابل f به سمت چه عددی در حال حرکت است:

π  $\to \cos x\to -۱^+\xrightarrow{+۱}۱+\cos x\to \circ^+$

حال می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to\pi} f(\cos x+۱)=f\left(\circ^+\right)=۱$$

۱۱۴ (۴) (۳) (۲) **(۱)** می‌توان برای مشاهدهٔ گزینهٔ صحیح حد چپ و راست تابع f را در $x=\circ$ محاسبه نمود.

حد و پیوستگی

$$\underset{x\to ۰^+}{\cdots\cdots} f(x) = \underset{x\to ۰^+}{\cdots\cdots} \frac{\quad}{x} = \lim \frac{\quad}{x} = ۱$$

$$\underset{x\to ۰^-}{\cdots\cdots} f(x) = \underset{x\to ۰^-}{\cdots\cdots} \frac{\quad}{x} = \frac{\quad}{۰^-} = -\infty$$

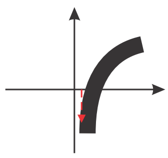
۱۱۵ ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا باید حد تابع $f(x)$ را بررسی نماییم.

$$\underset{x\to ۱^+}{\cdots\cdots} f(x) = \lim \frac{\quad}{(x-۱)(x-۲)} = \frac{۴}{۰^+ \times (-۱)} = \frac{\quad}{۰^-} = -\infty$$

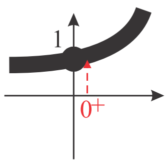
حالا می‌توان تابع $g(x)$ را محاسبه نمود با این فرض که $x \to -\infty$ حرکت نماید.

$$\underset{x\to -\infty}{\cdots\cdots} g(x) = \lim_{x\to -\infty} ۳^x = ۳^{-\infty} = \frac{\quad}{۳^{+\infty}} = \frac{۱}{+\infty} = ۰$$

۱۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌توان برای محاسبه مقدار توابع از نمودار استفاده کرد:



$\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$



$\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 1^+$

پس داریم:

$$\underset{x\to ۰^+}{\cdots\cdots} \frac{\quad}{۲^x - ۱} = \frac{\quad}{۱^+ - ۱} = \frac{-\infty}{۰^+} = -\infty$$

۱۱۷ ۴ ۳ ۲ **۱** تشریحی: ابتدا وضعیت کمان مخرج را تعیین می‌نماییم.

$$x \to \frac{۳\pi}{۴}^+ \xrightarrow{-\frac{\pi}{۴}} \left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \to \frac{\pi}{۲}^+$$

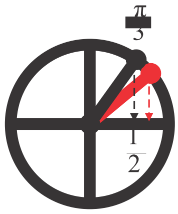
حال با استفاده از دایره مثلثاتی مقدار حدهای مثلثاتی را تعیین می‌نماییم.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} \frac{\quad}{\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)} = \frac{\sqrt{۲}}{۰^-} = -\infty$$

۱۱۸ ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا وضعیت کمان را تحلیل می‌نماییم.

$$x \to ۳^+ \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{۱}{x} \to \left(\frac{۱}{۳}\right)^- \xrightarrow{\times\pi} \frac{\pi}{x} \to \left(\frac{\pi}{۳}\right)^-$$

حال با دایره مثلثاتی و ضعیت و مقدار نسبت مثلثاتی را تعیین می‌نماییم.



$$\cos\left(\frac{}{x}\right) \to \left(\frac{۱}{۲}\right)^{+} \xrightarrow{\text{قدرمطلق}} \left|\cos\left(\frac{}{x}\right)\right| \to \left(\frac{۱}{۲}\right)^{+}$$

$$\xrightarrow{(\ )^{۲}} \ \left(\frac{}{x}\right) \to \left(\frac{۱}{۴}\right)^{+} \xrightarrow{\times ۸} ۸ \ \left(\frac{}{x}\right) \to ۲^{+}$$

$$\underset{x\to ۳^{+}}{} \left[\cos^{۲}\left(\frac{}{x}\right)\right] = ۲$$

۱۱۹ ۴ ۳ **۲** ۱ برای حل سوال باید توان زوج و فرد را جدا بررسی نمود.

$$x \to ۰^{-} \xrightarrow{(\ )^{۲n}} x^{۲n} \to ۰^{+} \Rightarrow \left[x^{۲n}\right] = ۰$$

$$x \to ۰^{-} \xrightarrow{(\ )^{۲n+۱}} x^{۲n+۱} \to ۰^{-} \Rightarrow \left[x^{۲n+۱}\right] = -۱$$

پس داریم:

$$\underset{x\to ۰^{-}}{} f(x) = \lim\,[x] + \left[x^{۲}\right] + \cdots + \left[x^{۱۰}\right] + \left[x^{۱۱}\right] = -۱ + ۰ + -۱ + ۰ + \cdots + -۱ = -۶$$

۱۲۰ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا اندکی عبارت را ساده‌سازی می‌نماییم.

$$\underset{x\to +۳^{-}}{} \frac{[-x] \quad \overline{(x-۳)}^{۲}}{x-۳} = \underset{x\to ۳^{-}}{} \frac{}{x-۳}$$

عبارت درون قدرمطلق منفی است و $-x \to -۳^{+}$ حرکت می‌نماید. پس داریم:

$$\lim \frac{-(x-۳)\times\left[-۳^{+}\right]}{(x-۳)} = -۱ \times (-۳) = +۳$$

۱۲۱ ۴ ۳ **۲** ۱ برای حل می‌توان از دایره مثلثاتی مقدار نسبت مثلثاتی را تعیین نمود.

$$\cot x \to -۱^{-} \xrightarrow{\text{قدرمطلق}} |\cot x| \to +۱^{+} \xrightarrow{(\ )^{۲}} \cot^{۲} \qquad ۱^{+} \xrightarrow{[\ ]} \left[\cot^{۲} x\right] = ۱$$

۱۲۲ ۴ **۳** ۲ ۱ برای تحلیل بهتر است از دایره مثلثاتی استفاده می‌نماییم.

با توجه به دایره داریم:

$$\begin{matrix} \sin x \to ۱^{-} \xrightarrow{\text{قرینه}} & ۱^{+} \\ \cos x \to ۰^{-} & \end{matrix}$$

حال این مقادیر را جایگذاری می‌نماییم.

$$\frac{[۱^-]+[\circ^-]}{[-۱^+]}=\frac{}{-۱}=+۱$$

۱۲۳ ④ **③** ② ① ابتدا باید مشخص کنیم عبارت $۳-۵x^۴$ به سمت چه عددی در حال حرکت است:

$$\lim_{x\to \circ^\pm}\left(۳-۵x^۴\right)=۳^-$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

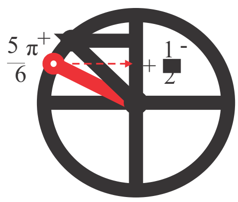
$$\lim_{x\to\circ} f(۳-۵x^۴)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]\quad \overline{x+۱}}{\sin(\frac{\pi x}{۱۸})}=\frac{[۳^-]\times ۴}{\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)}=\frac{۲\times ۲}{\frac{۱}{۲}}=۸$$

۱۲۴ ④ ③ **②** ① ابتدا با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی مقدار نسبت مثلثاتی را محاسبه نماییم:

$$\tan x\to\sqrt{۳}^-\xRightarrow{\text{قدرمطلق}}|\tan x|\Rightarrow\sqrt{۳}^-\xRightarrow{(\,)^۲}\tan^۲ x\to ۳^-$$

$$\xRightarrow{\text{وارون}}\frac{۱}{\tan^۲ x}\to\left(\frac{۱}{۳}\right)^+\xRightarrow{\times ۱۲}\frac{۱۲}{\tan^۲ x}\to ۴^+\xRightarrow{[\,]}۴$$

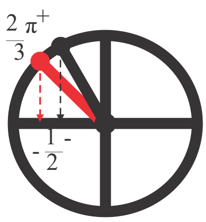
۱۲۵ ④ ③ **②** ① ابتدا با استفاده از دایره مثلثاتی مقدار سینوس را تعیین می‌نماییم.



$$\sin x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^-\xRightarrow{||}|\sin x|\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^-\xRightarrow{(\,)^۲}\sin^۲ x\to\left(\frac{۱}{۴}\right)^-$$

$$\xRightarrow{\text{وارون}}\frac{۱}{\sin^۲ x}\to ۴^+\xRightarrow{\text{قرینه}}-\frac{۱}{\sin^۲ x}\to -۴^-\Rightarrow\left[-\frac{۱}{\sin^۲ x}\right]=-۵$$

۱۲۶ **④** ③ ② ① ابتدا با استفاده از دایره مقدار نسبت مثلثاتی مطرح شده را تعیین می‌نماییم.



$$\cos x\to\left(-\frac{۱}{۲}\right)^-\xRightarrow{\text{قدرمطلق}}|\cos x|\to\left(+\frac{۱}{۲}\right)^+\xRightarrow{(\,)^۲}\cos^۲ x\to\left(+\frac{۱}{۴}\right)^+$$

$$\xRightarrow{\times(-۴)}-۴\cos^۲ x\to -۱^-\xRightarrow{[\,]}\left[-۴\cos^۲ x\right]=-۲$$

۱۲۷ ④ **③** ② ① ابتدا باید کسر مطرح شده را ساده نماییم.

$$\frac{}{f(x)+۱}=\frac{}{f(x)+۱}-\frac{۳}{f(x)+۱}=۲-\frac{۳}{f(x)+۱}$$

حال عبارت را به این فرم بازنویسی می‌نماییم:

$$\lim_{x\to ۱}\left[۲-\frac{۳}{f(x)+۱}\right]=\lim_{x\to ۱^+}۲+\left[-\frac{۳}{f(x)+۱}\right]$$

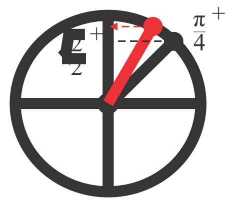
با توجه به نمودار داریم:

حد و پیوستگی

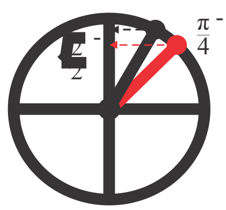
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) \to ۲^+ \Rightarrow \lim ۲ + \left[-\frac{۳}{۲^+ + ۱}\right] = ۲ + \left[-\frac{}{۳^+}\right] = ۲ + \left[-\left(۱^-\right)\right]$$

$$= ۲ + \left[-۱^+\right] = ۲ - ۱ = ۱$$

۱۲۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) اگر $x \to \frac{\pi}{۸}$ برود .. حال روی دایره مثلثاتی سینوس $\frac{\pi}{۴}$ را بررسی می‌نماییم.



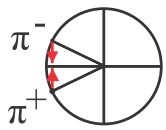
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۸}^+} \left[۲\sqrt{۲}\sin ۲x\right] = \left[۲\sqrt{۲} \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^+\right] = \left[۲^+\right] = ۲$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۸}^-} \left[۲\sqrt{۲}\sin ۲x\right] = \left[۲\sqrt{۲} \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^-\right] = \left[۲^-\right] = ۱$$

لذا مجموع حد چپ و راست برابر ۳ می‌باشد.

۱۲۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴) با توجه به سوال با هم حد چپ و راست را بررسی نماییم. استفاده از دایرهٔ مثلثاتی به تحلیل سوال کمک می‌نماید:

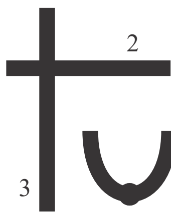


$$\to \lim_{x\to\pi} \cos x \to -۱^+$$

$$\lim_{x\to\pi} \left[\frac{۱}{\cos x}\right] = \left[\frac{۱}{(-۱)^+}\right] = \left[-۱^-\right] = -۲$$

۱۳۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴) برای حل مسئله بهتر است عبارت را مرجع کامل نماییم.

$$\lim \left[x^۲ - ۴x + ۴ - ۴ + ۱\right] = \lim_{x\to ۲} \left[(x-۲)^۲ - ۳\right]$$

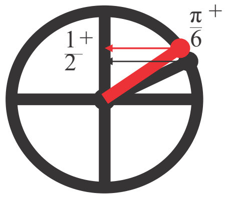


با توجه به نمودار ارتفاع تابع در اطراف $x = ۲$ برابر ۳^+ می‌باشد و حد چپ و راست برابرند.

$$\lim_{x\to ۲} \left[(x-۲)^۲ - ۳\right] = \left[-۳^+\right] = -۳$$

۱۳۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴) ابتدا با استفاده از روی دایره مثلثاتی $\sin\left(\frac{\pi}{۶}^+\right)$ را معین می‌نماییم.

حد و پیوستگی



با توجه به دایره می‌توان گفت:

$$\sin(x) \to \frac{1}{2}^{+} \xrightarrow{\text{قدرمطلق}} |\sin x| \to \left(\frac{1}{2}^{+}\right) \xrightarrow{(\ )^2} \sin^2 x \to \frac{1}{4}^{+}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} \frac{1}{\sin^2 x} \to 4^{-} \Rightarrow \left[\frac{1}{\sin^2 x}\right] = 3$$

۱۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\underset{x\to 2^{+}}{\text{------}} \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{2}{x}\right] = \lim \left[\frac{2^{+}}{2}\right] - \left[\frac{}{2^{+}}\right]$$

صورت کسر با مقدار کسر ارتباط مستقیم و مخرج کسر ارتباط معکوس دارد، لذا می‌توان نوشت:

$$\lim \left(\left[1^{+}\right] - \left[1^{-}\right]\right) = 1 - 0 = 1$$

۱۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴ برای محاسبه مراحل زیر را طی می‌نماییم.

$$x \to \left(-\frac{1}{4}\right)^{+} \Rightarrow |x| \to \left(\frac{1}{4}\right)^{-} \Rightarrow x^2 \to \frac{1}{16}^{-} \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{1}{x^2} \to 16^{+} \xrightarrow{\text{قرینه}} -\frac{1}{x^2} \to -16^{-}$$

$$\xrightarrow{[\ ]} \left[-\frac{1}{x^2}\right] = -17$$

۱۳۴ ۱ **۲** ۳ ۴ برای محاسبه مراحل زیر را طی نماییم.

$$x \to \left(\frac{1}{5}\right)^{+} \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{1}{x} \to 5^{-} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{x} \to 15^{-} \xrightarrow{\text{قرینه}} -\frac{3}{x} \to -15^{+} \Rightarrow \left[-\frac{3}{x}\right] = -15$$

۱۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا باید عبارت به فرم جدیدی بازنویسی کرد تا مقدار کسر قابل محاسبه باشد.

$$\frac{}{x+1} = \frac{}{x+1} = \frac{}{x+1} + \frac{6}{x+1} = 2 + \frac{6}{x+1}$$

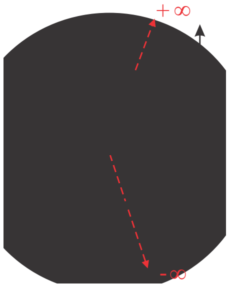
حال این عبارت را به جای کسر اولیه جایگذاری می‌نماییم:

$$\underset{x\to 2^{+}}{\text{------}} \left[2 + \frac{6}{x+1}\right] = \underset{x\to 2^{+}}{\text{------}} 2 + \left[\frac{6}{x+1}\right] = 2 + \left[\frac{6}{2^{+}+1}\right]$$

$$= 2 + \left[\frac{}{3^{+}}\right] = 2 + \left[2^{-}\right] = 2 + 1 = 3$$

۱۳۶ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به اینکه در متن سوال به حد چپ و راست اشاره نشده است، باید هر دو حالت مورد بررسی قرار گیرد.

برای تعیین مقدار نسبت مثلثاتی از دایره استفاده می‌کنیم.

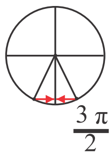


$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{}{۴+۲^{\tan x}}=\frac{}{۴+۲^{-\infty}}=\frac{۲}{۴+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{+\infty}}=\frac{}{۴+۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{}{۴+۲^{\tan x}}=\frac{}{۴+۲^{+\infty}}=\frac{}{۴+\infty}=\frac{۲}{\infty}=۰$$

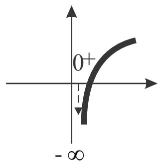
حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد.

۱۳۷ ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا با استفاده از دایره مثلثاتی مقدار نسبت مثلثاتی را تعیین می‌نماییم.

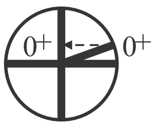


$$\rightarrow \sin x \rightarrow -۱^+ \rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{}{۱+\sin x}=\frac{}{۱+(-۱^+)}=\frac{}{۰^+}=+\infty$$

۱۳۸ ۴ ۳ ۲ **۱** برای تعیین وضعیت توابع موجود از نمودار و دایره مثلثاتی استفاده می‌نماییم:



$\log ۰^+=-\infty$



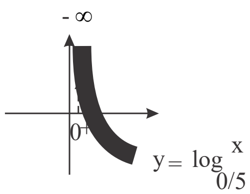
$\sin x \rightarrow ۰^+$

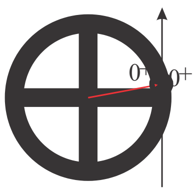
حال با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{}{\sin x}=\frac{-\infty}{۰^+}=-\infty$$

صورت کسر با مقدار کسر ارتباط مستقیم و مخرج کسر با مقدار کسر ارتباط وارون دارد.

۱۳۹ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا با استفاده از نمودار توابع مربوطه وضعیت هر دو تابع را تعیین می‌نماییم:





با توجه به دو نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{}{\log_{۰/۵}x}=\frac{۰^+}{+\infty}=۰$$

۱۴۰ ۴ ۳ ۲ **۱** با جایگذاری اولیه مشاهده می‌شود که صورت کسر به سمت عدد $+۷$ میل می‌نماید، پس مخرج باید به سمت ۰^+ میل کند تا حاصل $+\infty$ را تولید نماید. برای تولید ۰^+ در تمام حالت‌ها مخرج به ازای $x=۲$ باید دارای ریشه مضاعف باشد، یعنی باید به شکل $(x-۲)^۲$ ظاهر شود. با توجه به ضریب $x^۲$ در عبارت $۳x^۲+ax+b$ پس مخرج به شکل $۳(x-۲)^۲$ ظاهر می‌شود.

$$۳x^۲+ax+b=۳(x-۲)^۲\rightarrow ۳x^۲+\underline{\quad}+\underline{\quad}=۳x^۲-\underline{\qquad}+\underline{۱۲}$$

پس:

۱۴۱ **۴** ۳ ۲ ۱ با جایگذاری مقدماتی مشخص می‌شود که صورت کسر عددی است منفی، پس مخرج باید در هر دو حالت $\left(x\rightarrow ۲^{\pm}\right)$ به سمت ۰^- میل نماید تا حاصل نهائی $+\infty$ شود. بدین منظور مخرج به ازای $x=۲$ باید دارای ریشه

مضاعف $(x-۲)^۲$ باشد. با توجه به وجود $-۲x^۲$ در عبارت مخرج می‌توان نوشت:

$$-۲x^۲+ax+b=-۲(x-۲)^۲ \to -۲x^۲+\underline{\quad}+\underline{\quad}=-۲x^۲+\underline{\quad}-\underline{\quad}$$

پس $b=-۸, a=+۸$ پس داریم:

$$۲a-b-۲\times ۸-(-۸)=-۲۴$$

۱۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باید کسر مورد نیاز را به طور دقیق تحلیل نماییم. با توجه تابع $f(x)$ داریم:

$$\underset{x\to ۴^-}{\cdots}\left[\frac{}{f^۲(x)}\right]=\underset{x\to ۴^-}{\cdots}\left[\frac{}{f^۲(x)}+\frac{}{f^۲(x)}\right]=\underset{x\to ۴^-}{\cdots}\left[\frac{۴}{f(x)}+\frac{}{f^۲(x)}\right]$$

$$=\underset{x\to ۴^-}{\cdots}\left[\frac{۴}{\sqrt{x}}+\frac{}{x}\right]=\left[\frac{}{۲^-}+\frac{}{۴^-}\right]=\left[۲^++۲^+\right]=\left[۴^+\right]=۴$$

۱۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باید مشخص کنیم، ورودی تابع f به سمت چه عددی در حال حرکت است:

$$\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۱+x^۴\right)=f(۱^+)=۳(۱)=۳$$

$$x^۴\to$$

$$۱+x^۴\to ۱^+$$

$$\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۱-x^۲\right)=f(۱^-)=۱-۱=۰$$

$$x^۲\to$$

$$-x^۲\to$$

$$\left(۱-x^۲\right)\to ۱^-$$

پس عبارت نهایی برابر است با :

$$\underset{x\to ۰}{\cdots}(۱-x^۲)+\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۱+x^۴\right)=۰+۳=۳$$

۱۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باید مشخص نمائیم، عبارت ورودی f به سمت چه عددی در حال حرکت است:

$$x^۲\to$$

$$۲+x^۲\to$$

$$\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۲+x^۲\right)=f(۲^+)=۳$$

$$x^۲\to$$

$$-x^۲\to$$

$$۲-x^۲\to$$

$$\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۲-x^۲\right)=f(۲^-)=-۳$$

پس عبارت نهایی برابر است با:

$$\underset{x\to ۰}{\cdots} f\left(۲-x^۲\right)-f(۲+x^۲)=-۳-۳=-۶$$

۱۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴ باید توجه داشت $x\to ۴$، متغیر ما هیچگاه به ۴ مطلق نمی‌رسد، بلکه در همسایگی عدد ۴ قرار دارد و عددی غیرصحیح است پس داریم:

$$f(x)=۵$$

$$\underbrace{\quad}_{\mathbb{Z}'}$$

۱۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا حد چپ و راست را جداگانه محاسبه نمائیم.

$$\underset{x\to ۴^+}{\text{......}} f(x)=\underset{x\to ۴^+}{\text{......}}\left(۳a^۲+\sqrt{x}\right)=۳a^۲+۲$$
$$\underset{x\to ۴^-}{\text{......}} f(x)=\underset{x\to ۴^-}{\text{......}}\left(x+a^۲+۱\right)=a^۲+۵$$

پس طبق متن سوال داریم:

$$\underset{x\to ۴^+}{\text{......}} f(x)-\underset{x\to ۴^-}{\text{......}} f(x)=\left(۳a^۲+۲\right)-\left(a^۲+۵\right)=۵\Rightarrow ۲a^۲-۳=۵$$
$$\to ۲a^۲=۸\to a^۲=۴\to a=\pm ۲$$

۱۴۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴) توضیح شماره ۱ حد: توابع به فرم $f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & \\ f_۲(x) & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ تابع دریکله یا شبه دریکله در هیچ نقطه‌ای حد و پیوستگی ندارد، به جز نقطه یا نقاطی که $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ با هم برخورد می‌نمایند، پس داریم:

$f_۱(x)=f_۲(x)\to x=\alpha$ نقطه دارای حد و پیوستگی

با توجه به توضیح فوق، چون ضابطه ها هیچ برخوردی ندارند پس تابع در $x=\dfrac{۱}{۲}$ فاقد حد است. حال باید fof را تشکیل دهیم.

$$fof(x)=f(f(x))\begin{cases}\xrightarrow{x\in\mathbb{Q}} & \\ \xrightarrow{x\in\mathbb{Q}'} & f(۵)=۲\end{cases}$$

پس تابع fof تابع ثابت است و می‌توان گفت:

$$\underset{x\to \frac{۱}{۲}}{\text{......}} fof(x)=۲$$

۱۴۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) توضیح شماره ۱ حد: توابع به فرم $f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & \\ f_۲(x) & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ تابع دریکله یا شبه دریکله در هیچ نقطه‌ای حد و پیوستگی ندارد به جز نقطه یا نقاطی که و با هم برخورد می‌نمایند، پس داریم:

$f_۱(x)=f_۲(x)\to x=\alpha$ نقطه دارای حد و پیوستگی

با توجه به توضیحات باید نقاط برخورد دو ضابطه را محاسبه نماییم لذا باید معادله زیر را حل نمائیم:

$x^۲=x+۵\to x^۲-x-۵=۰\to\Delta=۲۱>۰\to$ دو ریشه

پس تابع f در دو نقطه حد دارد.

۱۴۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\underset{x\to \frac{۳}{۲}}{\text{......}} fog(x)=\underset{x\to \frac{۳}{۲}}{\text{......}} f\left(g(x)\right)=\underset{x\to \frac{۳}{۲}}{\text{......}} f\left([x]\right)$$

$f($مطلق ۱$)=۰$

۱۵۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\lim fog(x)=\lim_{x\to \frac{۳}{۲}} f\left(g(x)\right)=\underset{x\to \frac{۳}{۲}}{\text{......}} f(x-\frac{۱}{۲})$$
$=\lim f($حدی ۱$)=\lim\limits_{x\to ۱}(x+۲)=۳$

۱۵۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴) باید توجه داشت در چند جمله‌ای‌ها زمانی‌که $x\to ۰$، درجهٔ کمتر یا جمله کم توان را نگه می‌داریم، پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^7 - x^5 + x^3 - x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x) = f(0^+)$$

با توجه به تشکیل 0^+ از رابطه زیر استفاده می‌نماییم:

$$f\left(0^+\right) = \sqrt{1-0} = 1$$

۱۵۲ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به نمودار می‌توان گفت: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.

پس داریم:

$$\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = \left[0^-\right] = -1$$

۱۵۳ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا باید عبارت درونی را بررسی نمائیم.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 \text{ مطلق} \rightarrow f\left(f(x)\right) = \underset{\text{مطلق}}{\underset{\downarrow}{f(3)}} = 1$$

۱۵۴ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا حد چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌نماییم:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim \left[\frac{x}{2}\right]\left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{4^+}{2}\right]\left[\underbrace{\frac{4^+}{3}}_{1/3}\right] = \left[2^+\right](1) = 2\times 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim \left[\frac{x}{2}\right]\left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{4^-}{2}\right]\left[\underbrace{\frac{4^-}{3}}_{1/3}\right] = \left[2^-\right](1) = 1\times 1 = 1$$

پس اختلاف حد چپ و راست برابر است با:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) - \lim_{x\to 4^+} f(x) = 1 - 2 = -1$$

۱۵۵ **۱** ۲ ۳ ۴ برای رسیدن به مبهم شناخته شده $\div$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to 2} \frac{6}{x^2-2x} - \frac{\quad}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\quad}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{- \quad -x+6}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\cancel{(x-2)}\,(x+3)}{\cancel{(x-2)}\,x} = -\frac{5}{2}$$

۱۵۶ ۱ **۲** ۳ ۴ در همسایگی $x=1$ داخل قدر مطلق، مثبت است یعنی $|x| = x$ برای استخراج عامل صفرشونده مخرج می‌توان آن را بر عامل صفرشونده $(x-1)$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 + 4 & \\ \hline & x^2 - x - 2 \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\quad}{x^3+|x|-2} = \lim \frac{\quad}{x^3+x-2} = \lim \frac{\cancel{\quad}}{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x+2)} = \frac{1}{4}$$

۱۵۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}\times\frac{(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۸-x-۶}{\underbrace{\sqrt{(x-۲)^۲}}_{|x-۲|}(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(۲-x)}}{\underbrace{(x-۲)}_{-\cancel{(۲-x)}}(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۱۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می توان برای رفع ابهام از روابط مثلثاتی استفاده نمود. بدین منظور مخرج کسر را در مزدوج ضرب کنید:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{}{۱-\sin x}\times\frac{}{۱+\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{}{۱-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}=\frac{\cancel{\cos}\ x(۱+\sin x)}{\cancel{\cos}^۲\ x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{}{\cos x}=\frac{}{۰^-}=-\infty$$

۱۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\lim\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\times\frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}}$$

$$\lim\frac{(۱-x)+(۲+\sqrt{۵-x})}{\underbrace{(۴-۵+x)}_{(x-۱)}(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}\ (۲+\sqrt{۵-x})}{\cancel{(x-۱)}\ (۱+\sqrt{x})}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

۱۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{۵x+۶}-۴}{۶-۳x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim\frac{\sqrt{۵x+۶}-۴}{۶-۳x}\times\frac{\sqrt{۵x+۶}+۴}{\sqrt{۵x+۶}+۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{\overbrace{۵x+۶-۱۶}^{۵x-۱۰}}{-۳(x-۲)(\sqrt{۵x+۶}+۴)}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۵\cancel{(x-۲)}}{-۳\cancel{(x-۲)}\,(\sqrt{۵x+۶}+۴)} = -\frac{۵}{۱۴}$$

۱۶۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^{۲}-۳x+۲} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت کسر را باید گویا و مخرج را تجزیه نمائیم

$$\lim \frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^{۲}-۳x+۲} \times \frac{(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}{(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}$$

$$\lim \frac{\overbrace{(۵x-۲-۸)}^{۵x-۱۰}}{(x-۲۰(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}$$

$$\lim \frac{۵(\cancel{x-۲})}{(\cancel{x-۲})(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)} = \frac{۵}{۱۲}$$

۱۶۲ ۱ ۲ ۳ **۴** قدم اول جایگذاری عدد می‌باشد باتوجه به این که صورت کسر عدد صفر شده و جواب حد عدد غیر صفر می‌باشد، مخرج کسر باید به ازای $x=۱$ برابر صفر شود:

$$ax^{۲}+۲x+b \overset{x=۱}{=\!=} ۰$$

در مرحله‌ی بعد مخرج را با استفاده از تقسیم تجزیه می‌نمائیم:

$$\begin{array}{l|l} ax^{۲}+۲x+b & \\ \cline{2-2} & ax+a+۲ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۲)(\cancel{x-۱})}{(ax+a+۲)(\cancel{x-۱})} = \frac{}{۲a+۲} = ۲ \to ۴a+۴=-۱ \to a=-\frac{۵}{۴}$$

$$b=-۲-a=-۲+\frac{۵}{۴}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{۲}$$

۱۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴ باتوجه به اینکه مخرج کسر صفر شده و حاصل حد عدد شده صورت هم الزاماً به ازای $x=۲$ باید برابر صفر باشد:

$$mx+n \overset{x=۲}{=\!=} ۰ \to ۲m+n=۰ \to n=-۲m$$

در مرحله‌ی بعد علاوه بر جایگذاری n کسر را گویا می‌نمائیم

$$\lim_{x\to ۲} \frac{}{x-\sqrt{x+۲}} \times \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}} = \lim \frac{m(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^{۲}-x-۲}$$

$$\lim \frac{m(\cancel{x-۲})(x+\sqrt{x+۲})}{(\cancel{x-۲})(x+۱)} = \frac{۴m}{۳} \Rightarrow \frac{۴m}{۳} = ۲ \to m = \frac{۳}{۲}$$

$$nn = -۲m \xrightarrow{m=\frac{۳}{۲}} n = -۳$$

۱۶۴ ① **②** ③ ④ باید توجه داشت که در قدم اول با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبرو نیستیم. با انجام تغییراتی می‌توان به مبهم مورد نظر رسید:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱} \times \frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\sqrt{۲x-۱}+۱} = \lim \frac{۱}{x-۱} - \frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\underbrace{(۲x-۱-۱)}_{۲(x-۱)}}$$

$$\lim \frac{۲-\sqrt{۲x-۱}-۱}{۲(x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{۲x-۱}}{۲(x-۱)} = \frac{0}{0}$$ مخرج مشترک

حالا می‌توان با گویا کردن صورت مشکل را برطرف نمود

$$\lim \frac{۱-\sqrt{۲x-۱}}{۲(x-۱)} \times \frac{۱+\sqrt{۲x-۱}}{۱+\sqrt{۲x-۱}} = \lim \frac{\overbrace{۱-۲x+۱}^{-۲\cancel{(x-۱)}}}{۲\cancel{(x-۱)}\,(۱+\sqrt{۲x-۱})} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۶۵ ① ② ③ **④**

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام کافیست صورت و مخرج را گویا نمائیم.

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲} \times \frac{\sqrt{۲x+۱}+۳}{\sqrt{۲x+۱}+۳} \times \frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\overbrace{(۲x+۱-۹)}^{(۲x-۸)}(\sqrt{x}+۲)}{(x-۴)(\sqrt{۲x+۱}+۳)} = \lim_{x\to ۴} \frac{۲\cancel{(x-۴)}\,(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}\,(\sqrt{۲x+۱}+۳)} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

۱۶۶ ① **②** ③ ④ کافیست حد چپ، حد راست و مقدار تابع را در $x=۱$ محاسبه نمائیم

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{\cancel{x-۱}} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۳-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim \frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\,(x^۲+x+۱)(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۶}$$

$$f(۱) = ۲$$

به دلیل برابری فقط حد راست با مقدار تابع، فقط پیوستگی راست داریم.

۱۶۷ ④ ③ ② ① چون مخرج کسر به ازای $x = ۲$ برابر صفر است و حاصل حد عدد متناهی است پس کسر باید $\frac{\circ}{\circ}$ باشد و تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = ax + b$ است

$$f(x) = ax + b \to \lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۲ + ax + b}{x^۲ - ۴}$$

نتیجه:

$$۲x^۲ + ax + b \overset{x=۲}{=\!=} ۸ + ۲a + b = \circ \to ۲a + b = -۸$$

حالا برای رفع ابهام صورت کسر را بر عامل صفرشونده $(x - ۲)$ تقسیم می‌کنیم

$$۲x^۲ + ax + b \Big| \frac{x - ۲}{۲x + ۴ + a}$$

$$\lim \frac{}{(x - ۲)(x + ۲)} = \frac{۸ + a}{۴} = ۳ \to a + ۸ = ۱۲ \to a = ۴ \to b = -۱۶$$

$$f(x) = ۴x - ۱۶ \to f(-۱) = -۲\circ$$

۱۶۸ ④ ③ ② ① $x = ۱$ در ادامه‌ی تابع قرار ندارد پس $x = ۱$ ریشه‌ی مخرج تابع محسوب می‌شود.

$$f(x) = \frac{x^۳ + ۲x^۲ + ax + b}{x + c} \to x + c \overset{x=۱}{=\!=} \circ$$

$$۱ + c = \circ \to c = -۱$$

باتوجه به نمودار حد تابع در $x = ۱$ برابر ۲ می‌باشد یعنی:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ + ۲x^۲ + ax + b}{x - ۱} = ۲$$

باتوجه به اینکه به ازای $x = ۱$ مخرج کسر برابر صفر می‌باشد و جواب حد عدد ۲ شده حتماً $x = ۱$ ریشه‌ی صورت می‌باشد. یعنی:

$$x^۳ + ۲x^۲ + ax + b \overset{x=۱}{=\!=} \circ \to ۳ + a + b = \circ$$

در مرحله‌ی بعد صورت کسر را بر عامل صفرشونده $(x - ۱)$ تقسیم می‌نمائیم

$$\begin{array}{r|l} x^۳ + ۲x^۲ + ax + b & \\ \hline \circ & x^۲ + ۳x + ۳ + a \end{array}$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\lim \frac{(x - ۱)(x^۲ + ۳x + ۳ + a)}{} = x + a = ۲ \to a = -۵$$

$$۳ + a + b = \circ \xrightarrow{a=-۵} b = ۲ \to (a, b, c) = (-۵, ۲, -۱)$$

$$f(x) = \frac{x^۳ + ۲ \quad - ۵x + ۲}{x - ۱} \to f(۲) = \frac{}{۲ - ۱} = ۸$$

۱۶۹ ④ ③ ② ① نمی توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف نمود:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱ - \sin x)(\sin^۲ x)}{\cos^۲ x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱ - \sin x)(\sin^۲ x)}{(۱ - \sin^۲ x)}$$

$$\lim \frac{(\cancel{۱-}\sin x)(\sin^۲ x)}{(\cancel{۱-}\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۷۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\left((x+h)^۲+۱\right)^۲-(x^۲+۱)^۲}{h}$$

می‌توان صورت کسر را با اتحاد مزدوج تجزیه نمود:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\left((x+h)^۲+۱+x^۲+۱\right)\left((x+h)^۲\cancel{+۱}-x^۲\cancel{-۱}\right)}{h}$$

$$\lim\frac{\left((x+h)^۲+۱+x^۲+۱\right)(\cancel{x^۲}+۲xh+h^۲-\cancel{x^۲})}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\left((x+h)^۲+۱+x^۲+۱\right)(۲x+h)\cancel{h}}{\cancel{h}}=۴x(x^۲+۱)$$

۱۷۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x+\frac{۲}{x}-۳}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{\frac{x^۲-۳x+۲}{x}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{\frac{x^۲-۳x+۲}{x}}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x(\cancel{x-۲})(x+۱)}{(\cancel{x-۲})(x-۱)(x+\sqrt{x+۲})}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۱۷۲ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to -۳}\frac{+۲x-۳}{x+\sqrt{x+۱۲}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۳}\frac{+۲x-۳}{x+\sqrt{x+۱۲}}\times\frac{x-\sqrt{x+۱۲}}{x-\sqrt{x+۱۲}}=\lim_{x\to -۳}\frac{(x+۳)(x-۱)(x-\sqrt{x+۱۲})}{x^۲-x-۱۲}$$

$$\lim_{x\to -۳}\frac{\cancel{(x+۳)}(x-۱)(x-\sqrt{x+۱۲})}{\cancel{(x+۳)}(x-۴)}=\frac{}{-۷}=-\frac{۲۴}{۷}$$

۱۷۳ ۱ **۲** ۳ ۴ چون $x=۱$ ریشه‌ی مخرج بوده و حاصل حد عدد شده است، پس $x=۱$ ریشه‌ی صرت نیز می‌باشد پس معادله‌ی ۱ و سه به صورت زیر می‌باشد:

$$ax^۲+۳x-b\overset{x=۱}{=\!=\!=}۰\to a+۳-b=۰\to b=a+۳$$

حال باید صورت را بر عامل $(x-۱)$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+3x-b & ax+a+3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(ax+a+3)}{\cancel{(x-1)}\,(5x+6)}=\frac{2a+3}{11}=22a+3=22\to a=\frac{19}{2}$$

$$b=a+3\xrightarrow{a=\frac{19}{2}}b=\frac{25}{2}$$

پس می‌توان گفت: $a+b=22$

۱۷۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{(3x+3)\to 1}f(2x+3)$$

حال برای اینکه $(2x+3)\to 1$ حل نماید باید $x\to -1$ نماید یعنی:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\,(3x-2)}{\cancel{(1+x)}\,(1-x)}=-\frac{5}{2}$$

۱۷۵ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-7x+6}{2x^3-3x^2+1}=\frac{0}{0}$$

کافیست صورت و مخرج را تجزیه نمائیم. برای تجزیه می‌توان صورت و مخرج را بر $(x-1)$ تقسیم نمائیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x+6 & x^2+x-6 \\ \hline 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{l|l} 2x^3-3x^2+1 & 2x^2-x-1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x-6)}{\cancel{(x-1)}\,(2x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-6}{(x-1)(2x+1)}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

۱۷۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim\frac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}=\frac{0}{0}$$

کافی است صورت و مخرج را گویا کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}\times\frac{x^2+\sqrt{2x^2-x^3}}{x^2+\sqrt{2x^2-x^3}}\times\frac{3+\sqrt{1-4x}}{3+\sqrt{1-4x}}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^4-2x^2+x^3)(3+\sqrt{1-4x})}{(9-1+4x)(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2(x^2+x-2)(3+\sqrt{1-4x})}{(4x+8)(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}$$

$$\lim\frac{x^2\,\cancel{(x+2)}\,(x-1)(3+\sqrt{1-4x})}{4\,\cancel{(x+2)}\,(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}=\frac{}{4\times 8}=-\frac{9}{4}$$

۱۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴ کافیست صورت کسر تجزیه شود تا عامل صفرشونده استخراج شود.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin^۳ x - \quad x}{\sin x-\cos x}=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{(\cancel{\sin x}-\cos x\ )(\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x)}{(\cancel{\sin x}-\cos x\ )}=\frac{۳}{۲}$$

۱۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف کرد

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{}{۱+\tan x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\frac{}{\sin x}}{۱+\frac{}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{}{\frac{}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{}{(\sin x+\cos x)\sin x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\cot x=-۱$$

۱۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود:

$$\lim_{x\to-۳}\frac{}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}\times\frac{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}=\lim\frac{a\,\cancel{(x+۳)}\ (۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{\underbrace{\qquad}_{-۵\cancel{(x+۳)}}}$$

$$=\frac{}{-۵}=۲\to ۲a=-۱۰\to a=-۵$$

۱۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim\frac{x}{x}=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{x}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x}}=+\infty$$

۱۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to۹}\frac{۴-\quad ۲x-۲}{۳-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}$$

باید صورت و مخرج را گویا نمائیم تا عامل صفرشونده $(x-۹)$ را استخراج نمائیم:

$$\lim_{x\to۹}\frac{۴-\quad ۲x-۲}{۳-\sqrt{x}}\times\frac{۴+\sqrt{۲x-۲}}{۴+\sqrt{۲x-۲}}\times\frac{۳+\sqrt{x}}{۳+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to۹}\frac{\overbrace{(۱۶-۲x+۲)}^{(-۲x+۱۸)}(۳+\sqrt{x})}{(۹-x)(۴+\sqrt{۲x-۲})}=\lim_{x\to۹}\frac{۲\,\cancel{(۹-x)}\ (۳+\sqrt{x})}{\cancel{(۹-x)}\ (۴+\sqrt{۲x-۲})}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۱۸۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to(-۲)^+} \frac{}{\sqrt{x+۲}} = \frac{۰}{۰}$$

کافی است مخرج را گویا نمائیم.

$$\lim \frac{}{\sqrt{x+۲}} \times \frac{\overline{x}+\overline{۲}}{\sqrt{x+۲}} = \lim \frac{\cancel{(x+۲)}\quad \overline{x}+\overline{۲}}{\cancel{(x+۲)}} = ۰$$

۱۸۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to۹} \frac{۳-\sqrt{x}}{\sqrt{x+۷}-۴} = \frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده $(x-۹)$ باید صورت و مخرج گویا شود.

$$\lim_{x\to۹} \frac{۳-\sqrt{x}}{\sqrt{x+۷}-۴} \times \frac{۳+\sqrt{x}}{۳+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+۷}+۴}{\sqrt{x+۷}+۴}$$

$$\lim_{x\to۹} \frac{(۹-x)(\sqrt{x+۷}+۴)}{\underbrace{(x+۷-۱۶)}_{(x-۹)}(۳+\sqrt{x})} = \lim_{x\to۹} \frac{-\cancel{(x-۹)}\ (\sqrt{x+۷}+۴)}{\cancel{(x-۹)}\ (۳+\sqrt{x})} = \frac{-۸}{۶} = -\frac{۴}{۳}$$

۱۸۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to۲} \frac{۵x^۲-۴x-۱۲}{۹x^۲-۶x-۲۴} = \frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده باید صورت و مخرج را تجزیه نمود. برای تجزیه بر عامل تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} ۵\quad -۴x-۱۲ & x-۲ \\ \underline{۵x^۲-۱۰x} & ۵x+۶ \\ \underline{-\ ۶x-۱۲} & \\ ۰ & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} ۹\quad -۶x-۲۴ & x-۲ \\ \underline{۹x^۲-۱۸x} & ۹x+۱۲ \\ \underline{-\ ۱۲x-۲۴} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to۲} \frac{\cancel{(x-۲)}\ (۵x+۶)}{\cancel{(x-۲)}\ (۹x+۱۲)} = \frac{۱۶}{۳۰} = \frac{۸}{۱۵}$$

۱۸۵ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to۴} \frac{۱-\ \overline{x}-\overline{۳}}{x^۲-۴x} = \frac{۰}{۰}$$

صورت کسر را گویا و مخرج را تجزیه می‌نمائیم تا عامل صفرشونده استخراج شود

$$\lim \frac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^۲-۴x} \times \frac{۱+\sqrt{x-۳}}{۱+\sqrt{x-۳}} = \lim_{x\to۴} \frac{۱-x+۳}{x(x-۴)(۱+\sqrt{x-۳})}$$

حد و پیوستگی

$$\lim_{x\to 4}\frac{-\cancel{(x-4)}}{x\cancel{(x-4)}\,(1+\sqrt{x-3})} = -\frac{\ }{8}$$

۱۸۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ }{\tan x - 1} = \frac{0}{0}$$

می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را شناسائی کرد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\ }{\cos x}-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ }{\frac{\ }{\cos x}}$$

$$\lim\frac{\cancel{(\sin x-\cos x)}\,\cos x}{\cancel{(\sin x-\cos x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۸۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim\frac{x+\sqrt{2x+3}}{2-\sqrt{3-x}} = \frac{0}{0}$$

باتوجه به صورت و مخرج هر دو باید گویا شوند.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{2x+3}}{2-\sqrt{3-x}}\times\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}\times\frac{2+\sqrt{3-x}}{2+\sqrt{3-x}}$$

$$\lim\frac{(x^2-2x-3)(2+\sqrt{3-x})}{(4-3+x)(x-\sqrt{2x+3})} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\,(x-3)(2+\sqrt{3-x})}{\cancel{(x+1)}\,(x-\sqrt{3x+3})} = \frac{\ }{-2} = 8$$

۱۸۸ **۱** ۲ ۳ ۴ باتوجه به صورت سؤال باید کسر را به دو مبهم $\frac{0}{0}$ تفکیک کرد و هر بخش را جداگانه محاسبه نمود.

$$\lim\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x+x^2-2} = \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}}_{I} + \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}}_{II}$$

$$(I)\ \lim\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim\frac{\overbrace{(x+3)-4}^{\cancel{(x-1)}}}{\cancel{(x-1)}\,(x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{12}$$

$$(II)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{6}$$

جواب نهائی مجموع بخش I و II می‌باشد

$$I+II = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

۱۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x+x^{۲}+\quad x-۳}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

ابتدا باید کسر را مرتب کرد و به دو بخش تفکیک کرد که با روش‌های شناخته شده قابل رفع ابهام باشد.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+x-۲+\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\underbrace{\frac{x^{۲}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}}_{I}+\underbrace{\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}}_{II}$$

$$(I)\ \lim\frac{x^{۲}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{(x-۱)(x+۲)}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\lim\frac{\cancel{(x-۱)}\ (x+۲)\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۹$$

$$(II)\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}\ (\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}\ (\sqrt{x}+۱)}=\frac{۳}{۲}$$

جواب نهائی مجموع بخش I و II می‌باشد یعنی:

$$۹+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

۱۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

صورت کسر را باید تجزیه و مخرج را با استفاده از مکمل گویا کرد:

$$x^{۳}+x-۲\,|\ x-۱$$

$$\underline{x^{۳}-x^{۲}}\quad x^{۳}+x+۲$$

$$\underline{-\ ۲x-۲}$$

$$۰$$

$$\lim\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۲)}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}$$

$$=\lim\frac{\cancel{(x-۱)}\ (x^{۲}+x+۲)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۴\times۳=۱۲$$

۱۹۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim\frac{۳-\quad\overline{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(۹-(۲x+۱))\overbrace{(۲+\sqrt{x})}^{(۴)}}{(۴-x)\underbrace{(۳+\sqrt{۲x+۱})}_{۶}} = \lim \frac{}{(۴-x)(۶)} = \lim \frac{}{(۴-x)(۶)} = \frac{۴}{۳}$$

۱۹۲ ۴ ۳ ۲ **۱** باید کسر را در مزدوج صورت $\lim_{x\to -۲} \frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=?$ ضرب نمائیم. باید توجه داشت که می‌توان در مخرج کسر عامل صفرشونده وجود دارد:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲-(۲x+۸)}{(x+۲)\underbrace{(x-\sqrt{۲x+۸})}_{-۴}} = \lim \frac{-۲x-۸}{(x+۲)(-۴)} = \lim \frac{\cancel{(x+۲)}\,(x-۴)}{\cancel{(x+۲)}\,(-۴)} = \frac{۳}{۲}$$

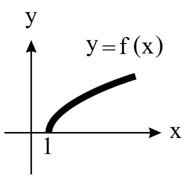
۱۹۳ ۴ **۳** ۲ ۱ نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,x_۰)$ تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد چپ $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x از سمت چپ به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند.

نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(x_۰,b)$ تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد راست $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x از سمت راست به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند.

نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند (a,b) شامل $x_۰$ (به‌جز احتمالاً در خود $x_۰$) تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x (از سمت چپ و راست) به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند؛ به عبارت دیگر $\lim_{x\to x_۰} f(x)=\ell$، اگر و تنها اگر: $\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\ell$.

با توجه به شکل مقابل می‌توان فهمید $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد، همچنین $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$ موجود نیست؛ ولی داریم:

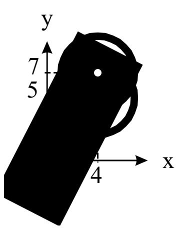
$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰$$



۱۹۴ ۴ ۳ **۲** ۱ نکته: $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$، اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$.

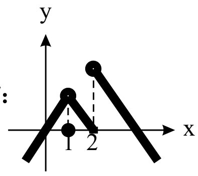
در شکل مقابل نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$ را رسم کرده‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، داریم:

$$\lim_{x\to ۴} g(x)=۷$$

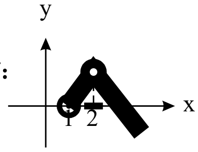


۱۹۵ ۴ ۳ ۲ ۱ نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند (a,b) شامل $x_\circ$ (به‌جز احتمالاً در خود $x_\circ$) تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در $x = x_\circ$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = \ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به شرطی که مقادیر x (از سمت چپ و راست) به اندازهٔ کافی به $x_\circ$ نزدیک شوند؛ به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = \ell$، اگر و تنها اگر: $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x) = \ell$.

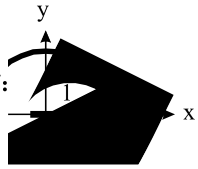
با توجه به نکتهٔ بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: 

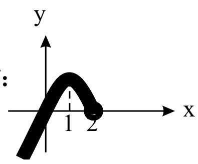
در $x = ۱$ حد دارد؛ ولی در $x = ۲$ حد ندارد. ×

گزینهٔ ۲: 

در $x = ۱$ حد ندارد؛ ولی در $x = ۲$ حد دارد. ✓

گزینهٔ ۳: 

در $x = ۱$ و $x = ۲$ حد دارد. ×

گزینهٔ ۴: 

در $x = ۱$ و $x = ۲$ حد دارد. ×

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

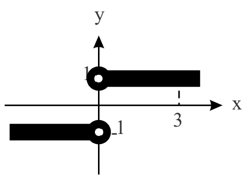
۱۹۶ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: $|x| = \begin{cases} \\ -x & x < \circ \end{cases}$

ابتدا با توجه به نکتهٔ بالا، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{}{x} = \begin{cases} ۱ & \\ -۱ & x < \circ \end{cases}$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به‌شکل مقابل است و داریم:



$\underset{x\to\circ^-}{\text{------}} f(x) = -۱$, $\underset{x\to\circ^+}{\text{------}} f(x) = ۱$, $\underset{x\to ۳}{\text{------}} f(x) = ۱$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۹۷ ۴ ۳ ۲ ۱ حد راست و چپ تابع در نقطه به طول $x = a$ با هم متفاوت‌اند؛ پس تابع در این نقطه حد ندارد. در نقطه به طول $x = b$ تابع تعریف نشده است، ولی حد راست و چپ با هم برابرند؛ پس تابع در این نقطه حد دارد. در نقطه به طول $x = c$ هم تابع حد دارد. در نقطه به طول $x = d$ مقدار تابع و حد تابع با هم برابر نیست ولی چون حد راست و چپ با هم برابرند، پس تابع در این نقطه حد دارد.

۱۹۸ ۴ ۳ ۲ ۱ با توجه به وجود قدرمطلق باید دو حالت حد را بررسی نماییم.

$$\underset{x\to ۲^+}{\text{-----}}\ \frac{}{x-۲}=\lim \frac{}{}=-۱$$

$$\underset{x\to -۲^-}{\text{-----}}\ \frac{}{(x+۲)}=\lim \frac{}{-(x+۲)}=+۱$$

با توجه به عدم برابری حد چپ و راست، تابع در $x=-۲$ حد ندارد.

$$\underset{x\to -۳}{\text{-----}}\ \frac{}{-x-۲}=\lim \frac{}{-(x+۲)}=+۱$$

با توجه به محاسبات بالا موارد (پ) و (ت) صحیح می‌باشد.

۱۹۹ ① ② ③ ④ در گزینهٔ «۳» با توجه به شکل داریم:

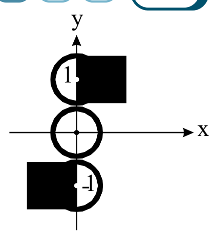
$$\begin{cases}\underset{x\to ۱^+}{\text{-----}}\ f(x)=۱\\ \underset{x\to ۱^-}{\text{-----}}\ f(x)=۳\end{cases}\Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{\text{-----}}\ f(x)-\underset{x\to ۱^-}{\text{-----}}\ f(x)=۱-۳=-۲$$

۲۰۰ ① ② ③ ④ ابتدا باید وضعیت عبارت $(۱-x)$ را مشخص نماییم.

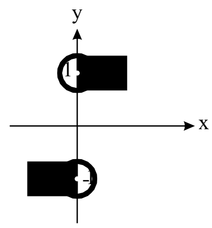
$$\underset{x\to ۱^+}{\text{-----}}\ f(x)+\underset{x\to ۰^+}{\text{-----}}\ f(۱-x)=-۱+(۱)=۰$$

۲۰۱ ① ② ③ ④ نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

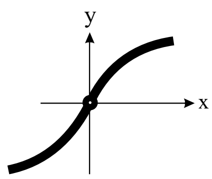
الف) $f(x)=\begin{cases}— & , \quad x\neq ۰\\ ۰ & , \quad x=۰\end{cases}$



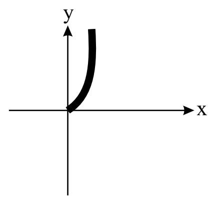
ب) $f(x)=\begin{cases}۱ & ,\\ -۱ & , \quad x<۰\end{cases}$



پ) $f(x)=\begin{cases}x & , \quad x>۰\\ -\sqrt{-x} & , \quad x<۰\end{cases}$



ت) $f(x)=\begin{cases}۲ & , \quad x\geq ۰\\ ۰ & , \quad x<۰\end{cases}$



از روی نمودارهای رسم شده مشخص است که توابع موارد (الف) و (ب) در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارند.

۲۰۲ ① ② ③ ④

$$\begin{cases}\underset{x\to ۰^+}{\text{-----}}\ f(x)=۳\\ \underset{x\to ۰^-}{\text{-----}}\ f(x)=۲\end{cases}\Rightarrow \underset{x\to ۰}{\text{-----}}\ f(x)$$ وجود ندارد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} g(x) = ۰\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x)$$ وجود ندارد:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} ۲x+۲ & , \\ ۳x+۲ & , \quad x<۰\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f+g)(x) = ۲$$

$$(f-g)(x) = \begin{cases} ۴ & , \quad x\geq ۰ \\ x+۲ & , \quad x<۰\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f-g)(x) =$$ حد ندارد

۲۰۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)** برای راحتی محاسبات فرض می‌نماییم $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = t$ باشد. حال با استفاده از قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۵}\frac{}{۲f(x)+۱} = \frac{\lim\limits_{x\to ۵} ۴f(x)-۳}{\lim\limits_{x\to ۵} ۲f(x)+۱}$$

$$= \frac{۴\lim\limits_{x\to ۵} f(x)-۳}{۲\lim\limits_{x\to ۵} f(x)+۱} = \frac{}{۲t+۱} = ۷ \to ۱۴t+۷ = ۴t-۳ \to ۱۰t = -۱۰ \to t = -۱$$

پس داریم: $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = -۱$

۲۰۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴) شرط وجود حد این است که، حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند. لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه نماییم.

$$\lim_{x\to ۲^+} a\left[\frac{x}{۲}\right] + ۲ax\left[-\frac{x}{۲}\right] - \left[x^۲\right] = \lim_{x\to ۲^+} a\left[\frac{۲^+}{۲}\right] + ۲ax\left[-\frac{۲^+}{۲}\right] - \left[(۲^+)^۲\right] =$$

$$\lim_{x\to ۲^+} a\left[۱^+\right] + ۲ax\left[-(۱^+)\right] - \left[۴^+\right] = \lim_{x\to ۲^+} a(۱) + a(۴)(-۲) - ۴ = a - ۸a - ۴ = -۷a - ۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} a\left[\frac{x}{۲}\right] + ۲ax\left[-\frac{x}{۲}\right] - \left[x^۲\right] = \lim_{x\to ۲^-} \left(a\left[\frac{۲^-}{۲}\right] + ۲ax\left[-\frac{۲^-}{۲}\right] - \left[(۲^-)^۲\right]\right)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} a\left[۱^-\right] + ۲ax\left[-(۱^-)\right] - \left[۴^-\right] = \lim_{x\to ۲^-} \left(a(۰) + ۲ax(-۱) - (۳)\right) = ۰ - ۴a - ۳ = -۴a - ۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) \to -۷a - ۴ = -۴a - ۳ \to a = -\frac{۱}{۳}$$

۲۰۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴) قدم اول جایگذاری است که مبهم $\frac{۰}{۰}$ تولید می‌شود. حالا برای استخراج عامل صفر شوند. می‌توان از تجزیه و گویا کردن استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x^۲-۴} = \frac{۰}{۰}$$

$$\begin{array}{l|l} \quad +x-۱۰ & \\ \hline -(x^۳-۲x^۲) & x^۲+۲x+۵ \\ \hline ۲ \quad +x-۱۰ & \\ -(۲x^۲-۴x) & \\ \hline -(۵x-۱۰) & \\ \hline \quad ۰ & \end{array} \quad \to \lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۵)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \frac{۱۳}{۴}$$

۲۰۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴) شرط وجود حد در یک نقطه، برابری حد چپ و راست در آن نقطه می‌باشد. ابتدا وجود حد در $x=۱$ را بررسی

مس‌نماییم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \sqrt{۵x^۲ - a} = \sqrt{۵ - a}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را تجزیه می‌نماییم.

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{}{(x+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

حال حد چپ و راست باید با هم برابر باشد.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) \to \sqrt{۵-a} = - \xrightarrow{(\ )^۲} ۵ - a = \frac{۱}{۴} \to a = ۵ - ۱ \to a = \frac{۱۹}{۴}$$

حال به بررسی وجود حد در $x = ۲$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} b[x] + \frac{}{x+۲} = -۳b - ۱$$

حال باید حد چپ و راست با هم برابر باشد:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = -۳b - ۱ = ۵ \to -۳b = ۶ \to b = -۲$$

و مقدار نهایی برابر است با:

$$۲a \times b = ۲ \times (\frac{۱۹}{۴})(-۲) = -۱۹$$

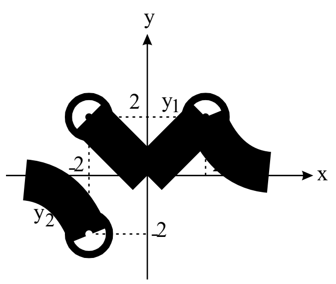
۲۰۷ ④ ③ ② ① شرط پیوستگی تابع در یک نقطه برابری حد چپ، حد راست مقدار تابع می‌باشد. لذا ابتدا باید $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)$ را محاسبه نماییم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{}{\sin x} - ۱}{\sin x - \cos x} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{}{\sin x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{}{\sin x(\sin x - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{}{\sin x}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -\frac{۲}{\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲} \to f(\frac{\pi}{۴}) = k = -\sqrt{۲}$$

۲۰۸ ④ ③ ② ① با رسم نمودار تابع $y_۱ = |x|$ در بازهٔ $[-۲, ۲]$ و $y_۲ = \frac{۴}{x}$ در $(-\infty, -۲) \cup (۲, +\infty)$ می‌توانیم تعداد نقاط ناپیوستگی آن را تعیین کنیم.



$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad -۲ \le x \le ۲ \\ \frac{۴}{x} & , \quad x < -۲ \ ,\ x > ۲ \end{cases}$$

با توجه به نمودار f، این تابع فقط در یک نقطه یعنی $x = -۲$ ناپیوستگی دارد.

۲۰۹ ④ ③ ② ① ابتدا باید با استفاده از قضایای حد، حد تابع f را محاسبه نماییم:

$$\lim_{x\to ۱^+} ۲f(x)+۱=۵ \to \lim_{x\to ۱^+} ۲f(x)=۴ \to \lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

با توجه به نمودار، حد تابع g برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱^+} g(x) = -\frac{۱}{۲}$$

اما محاسبهٔ مقدار عبارت خواسته شده:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{(f^۳-۲g)(x)}}{(f\times g)(x)+۳} = \frac{\sqrt{(\lim_{x\to ۱^+} f(x))^۳-۲(\lim_{x\to ۱^+} g(x))}}{\lim_{x\to ۱^+} f(x)\times \lim_{x\to ۱^+} g(x)+۳}$$

$$=\frac{\sqrt{(۲)^۳-۲(-\frac{۱}{۲})}}{۲(-\frac{۱}{۲})+۳}=\frac{\sqrt{۸+۱}}{-۱+۳}=۱/۵$$

۲۱۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا نقاط ناپیوستگی تابع $[x]$ را مشخص می‌نماییم.

این تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

$(-۱,k)$ در بازهٔ $[x]$ نقاط ناپیوستگی $=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

با توجه به وجود عامل صفر شونده در $x=۰$ کنار تابع ناپیوستهٔ $[x]$ مشکل عدم پیوستگی تابع $f(x)$ در $x=۰$ حل خواهد شد. پس می‌توان گفت این تابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ پیوسته است و $k=۱$ می‌باشد.

۲۱۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴) باید توجه داشت که در محاسبهٔ حدود هرگاه به جزء صحیح برخورد نماییم، باید عدد معادل آن را شناسایی و جایگذاری نماییم.

$$\pi=۳/۱۴ \to \frac{\pi}{۲}=۱/۵۷ \to [x]=[\frac{\pi}{۲}]=[۱/۵۷]=۱$$

اما می‌توان $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ را هم به فرم ساده‌تری تبدیل نمود:

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{[x]-\sin^۲ x}{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}+x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x)=۲$$

۲۱۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) شرط پیوستگی چپ برابری، حد چپ و مقدار تابع می‌باشد پس کافیست ابتدا حد چپ را محاسبه نماییم

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{\sqrt{(x-۳)^۲}}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{\quad}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{\quad}{۳-x}=+۱$$

از طرفی $f(۳)=m$ می‌باشد. پس باید مقدار $m=۱$ باشد تا پیوستگی چپ برقرار باشد.

۲۱۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا باید حد عبارت اول را محاسبه نماییم، تا مقدار a را مشخص کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱+\cos^۲ x}=a \to a=\frac{۱}{۲}$$

حال پارامتر a را جایگذاری می‌نماییم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4\times\frac{1}{2}\sin x-1}{8\times\frac{1}{2}\sin^2 x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{}{4\sin^2 x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{}{(2\sin x-1)(2\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{}{2\sin x+1}=\frac{1}{2}$$

۲۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴ **نکته:** تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است هرگاه همهٔ شرایط زیر برقرار باشند:

۱) تابع $f(x)$ در تمام نقاط بازهٔ (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع $f(x)$ در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

۳) تابع $f(x)$ در پیوستگی راست داشته باشد.

نکته: توابع چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

ابتدا توجه کنید که هر کدام از ضابطه‌های این تابع، چندجمله‌ای هستند، پس به‌تنهایی پیوسته‌اند. بنابراین فقط باید پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $t=1$ بررسی کنیم:

$$f(1)=2(1)+10=12\quad,\quad \lim_{t\to1^+} f(t)=12\quad,\quad \lim_{t\to1^-} f(t)=10$$

پس تابع $f(t)$ در $t=1$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(t)$ در بازهٔ $[0,10]$ فقط یک نقطهٔ ناپیوستگی $(t=1)$ دارد.

با توجه به گزینه‌ها، تابع در بازه‌های گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ پیوسته است. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۱۵ ۱ ۲ **۳** ۴ **نکته:** تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=c$ از چپ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$$

با استفاده از نکتهٔ بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\begin{cases}[x]=1\\ f(2)=2\end{cases}\Rightarrow$ $f(x)$ در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد.

گزینهٔ ۲: $g(x)$ در سمت چپ $x=2$ تعریف نشده است، پس در این نقطه حد چپ و در نتیجه پیوستگی چپ ندارد.

گزینهٔ ۳ : $\begin{cases}\lim_{x\to2^-}\overline{2-x}=0\\ h(2)=0\end{cases}\Rightarrow$ $h(x)$ در $x=2$ پیوستگی چپ دارد.

گزینهٔ ۴ : $k(x)$ در $x=2$ تعریف نشده است، پس در این نقطه پیوستگی چپ ندارد.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۲۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴** **نکته:** اگر k و $k+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند و $k\le x<k+1$، آنگاه:

$$[x]=k$$

هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\lim_{x\to4^+}[x]\xlongequal{4<x<5}4$ ✓

گزینهٔ ۲ : $\lim_{x\to4^-}[x]\xlongequal{3<x<4}3$ ✓

گزینهٔ ۳ : $\lim_{x\to4^-}[-x]\underset{-4<-x<-3}{=\!=\!=}-4$ ✓

گزینهٔ ۴ : $\lim_{x\to4^+}[-x]\underset{-5<-x<-4}{=\!=\!=}-5$ ×

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۲۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باید بررسی نماییم عبارت مقابل تابع f به سمت چه عددی میل می‌نماید:

$$x \to ۴^+ : x > ۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲x > ۸ \to ۲x - ۷ > ۱ \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{}{۲x-۷} < ۱$$

حال یک تغییر متغیر انجام می‌دهیم:

$$\frac{}{۲x-۷} = t \to \left\{ \frac{۱}{۲x-۷} = t \to ۱^- \right.$$

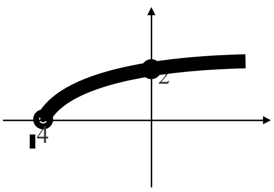
$$\lim_{x\to ۴^+} f\left(\frac{}{۲x-۷}\right) = \lim_{t\to ۱^-} f(x) = ۱$$

۲۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به نمودار داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) = ۳ \\ \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۰ \end{array}\right\} f(۲) + \lim_{x\to ۲^+} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ + ۲ + ۰ = ۵$$

۲۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر از سمت راست به $x = ۱$ نزدیک شویم در این صورت $x - ۱ > ۰$ پس در نامساوی داده شده مخرج $۱ - x < ۰$ در نتیجه باشد $f(x) - ۲ > ۰$ باشد در نتیجه اگر $x \to ۱^+$ آنگاه $f(x) \to ۲^+$ همچنین اگر از سمت چپ به $x = ۱$ نزدیک شویم در این صورت $x - ۱ < ۰$ پس $۱ - x > ۰$ در نتیجه در نامساوی $\frac{}{۱-x} < ۰$ باید $f(x) - ۲ < ۰$ باشد، یعنی $x \to ۱^-$ آنگاه $f(x) \to ۲^-$. بنابراین گزینهٔ «۲» می‌تواند درست باشد.

۲۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌توان برای یافتن تعداد گزاره‌های صحیح می‌توان نمودار تابع را رسم نمود.



با توجه به نمودار تابع در $x = -۴$ حد چپ ندارد پس $\lim_{x\to -۴} f(x) = ۰$ صحیح نمی‌باشد. ولی سایر موارد صحیح است.

۲۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (۳x^۲ - ۱) = ۳ \times ۲^۲ - ۱ = ۱۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax - b) = ۲a - b$$

$$\xrightarrow{f \text{ در } x=۲ \text{ حد دارد}} ۲a - b = ۱۱ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x) = ۴ \Rightarrow \lim_{x\to -۱} (ax - b) = ۴ \Rightarrow -a - b = ۴ \Rightarrow a + b = -۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} ۲a - b = ۱۱ \\ a + b = -۴ \end{cases} \Rightarrow ۳a = ۷ \Rightarrow a = \frac{۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{a+b=-۴} \frac{۷}{۳} + b = -۴ \Rightarrow b = \frac{-۱۹}{۳} \Rightarrow a - b \Rightarrow \frac{۷}{۳} - \left(-\frac{۱۹}{۳}\right) = \frac{۲۶}{۳}$$

حد و پیوستگی

۲۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\underset{x\to 1}{\ldots} f(x) = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\underset{x\to 1}{\ldots} g(x) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim (f+g)(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 0 + 0 = 0$$

$$\underset{x\to 1}{\ldots} (\frac{}{g})(x) = \underset{x\to 1}{\ldots} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x-1} = \underset{x\to 1}{\ldots} \frac{(x^2-1)(x^2-2)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \underset{x\to 1}{\ldots} \frac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)(x^2-2)}{\cancel{x-1}} = \underset{x\to 1}{\ldots} (x+1)(x^2-2) = 2 \times (-1) = -2$$

۲۲۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\underset{x\to 0^-}{\ldots} f(x) = \underset{x\to 0^+}{\ldots} f(x)$$

$$\underset{x\to 0^-}{\ldots} f(x) = \underset{x\to 0^-}{\ldots} \frac{}{x-1} = \frac{}{0-1} = 1$$

$$\underset{x\to 0^+}{\ldots} f(x) = \underset{x\to 0^+}{\ldots} bx + a - 1 = a - 1$$

$$\xrightarrow{f \text{ در } x=0 \text{ حد دارد}} a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

۲۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴ وقتی $x \to 0$ مخرج کسر صفر می‌شود ولی حاصل حد عدد ۳ شده است پس حد صورت کسر هم باید در این نقطه صفر شود تا حد صورت و مخرج عامل مشترک x داشته باشد تا حاصل حد پس از ساده کردن کسر برابر ۳ شود:

$$\lim\ x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow 0 + 0 + b \Rightarrow b = 0$$

پس حد به صورت زیر در می‌آید:

$$\underset{x\to 0}{\ldots} \frac{x^2+ax}{x} = 3 \Rightarrow \underset{x\to 0}{\ldots} \frac{}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \underset{x\to 0}{\ldots} x + a = 3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 3 + 0 = 3$$

۲۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم اگر $\underset{x\to a}{\ldots} f(x) = I$ و $I > 0$، آن‌گاه طبق قضایای حد $\underset{x\to a}{\ldots}\sqrt{f(x)} = \sqrt{I}$. پس در مورد $\underset{x\to t}{\ldots}\sqrt{f(x)}$ نمی‌توانیم با قطعیت نظر دهیم. ممکن است صفر باشد یا اینکه وجود نداشته باشد. برای مثال $f(x) = x$ را در نظر بگیرید. داریم: $\underset{x\to 0}{\ldots} x = 0$، در حالی که $\underset{x\to 0}{\ldots}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

۲۲۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$x > 2 \Rightarrow 1 + 4x > 9 \Rightarrow \frac{}{1+4x} < \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{}{1+4x} < 4 \Rightarrow \underset{x\to 2^+}{\ldots} [\frac{}{1+4x}] = [4^-] = 3$$

۲۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴ چون $f(x)$ در نقطهٔ $x = 1$ حدی مخالف صفر دارد، باید حد چپ و راست مخالف صفر باشد و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{}{x^۲ - ۳x + a} = \frac{}{۱ - ۳ + a} = \frac{۰}{-۲ + a = ۰} \Rightarrow a = ۲$$

حد مخرج باید در $x = ۱$ صفر شود. چون اگر مخرج صفر نشود با توجه به اینکه حد صورت صفر است، حاصل حد راست صفر می‌شود که خلاف فرض مسئله است.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{}{x^۲ - ۳x + ۲} \\ = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\cancel{x - ۱}}{\cancel{(x-۱)}\,(x-۲)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x-۲} = -۱ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{}{|x-۱|} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\cancel{}}{-\cancel{(x-۱)}} = -b \end{array}\right\} \Rightarrow -b = -۱ \Rightarrow b = ۱$$

۲۲۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

نکته: $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

نکته: $\lim_{x\to a} \frac{}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad (\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to ۲} (f(x) - ۱)}{\lim_{x\to ۲} g(x)} = \frac{}{-۱} = -۲$$

۲۲۹ **۴** ۳ ۲ ۱ نکته: تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است. هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x+a) = ۲ + a \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} ۳x = ۶ \\ f(۲) = ۶ \end{array}\right. \Rightarrow ۲ + a = ۶ \Rightarrow a = ۴$$

۲۳۰ ۴ **۳** ۲ ۱ نکته: تابع فقط در نقاط به طول صحیح حد ندارد.

با توجه به نکتهٔ بالا، برای این‌که تابع $f(x) = [x]$ در نقطهٔ $x = \sqrt{a}$ حد نداشته باشد باید $\sqrt{a}$ عددی صحیح باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۲۳۱ ۴ ۳ **۲** ۱ نکته: تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است، هر گاه: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

با استفاده از نکتهٔ بالا، هر یک از موارد داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

الف) $f(x) = (x-۳)^۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = \lim f(x-۳)^۲ = f(۱) = ۴$

پس $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته است.

ب) $g(x) = \frac{}{x-۱} = \begin{cases} ۱ & \\ -۱ & x < ۱ \end{cases}$

$g(x)$ در $x = ۱$ تعریف‌شده است، پس در این نقطه ناپیوسته است.

پ) $h(x) = \begin{cases} x+1 & \\ ۲ & \\ ۲-x & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} h(x) = ۱+۱ = ۲ \\ \quad\quad h(x) = ۲-۱ = ۱ \\ h(۱) = ۲ \end{cases}$

$h(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است.

بنابراین موارد «ب» و «پ» ناپیوسته‌اند. پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۳۲ ۴ ۳ ۲ **۱** هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: تابع $f(x) = [x]$ فقط در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۲: تابع $f(x) = \sin x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۳: تابع $f(x) = ۲^x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۴: تابع $f(x) = (x^۲+۱)(۱-۵x^۳)$ تابعی چندجمله‌ای و در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۲۳۳ ۴ ۳ ۲ **۱**

نکته: $|u| = \begin{cases} u & \\ -u & u<۰ \end{cases}$

نکته: تابع $f(x)$ در $x=a$ حد دارد. هرگاه: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

ابتدا با کمک بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x+a & \\ -(x+a) & x<۴ \end{cases}$$

اکنون باید حد چپ و حد راست در $x=۴$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۴^+} f(x) = \lim_{x\to ۴^+} (x+a) = ۴+a \\ \lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴^-} (-x-a) = -۴-a \end{cases}$$

۲۳۴ ۴ **۳** ۲ ۱

نکته: $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

نکته: اگر $f(x) = k$ یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x) = k$

نکته: ضابطهٔ هر تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax+b$ است.

ضابطهٔ تابع خطی $f(x)$ به‌صورت $f(x) = ax+b$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۳} f(x) = ۴ \Rightarrow \quad (ax+b) = ۴ \Rightarrow ۳a+b = ۴ \\ \lim_{x\to -۳} f(x) = ۴ \Rightarrow \lim_{x\to -۳} (ax+b) = ۴ \Rightarrow -۳a+b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ b = ۴ \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = ۴$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۵} (۲f(x)+۱) = ۲(۴)+۱ = ۹$$

۲۳۵ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۲^+} ([x]+۳m) = ۲+۳m \quad , \quad \lim_{x\to ۵^-} ([x]+۳m) = ۴+۳m$$

اکنون با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$(۴+۳m)+(۲+۳m)=۷ \Rightarrow ۶+۶m=۷ \Rightarrow m=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین:

$$\underset{x\to ۰^+}{\ldots\ldots}([x]+۳m) \overset{m=\frac{۱}{۶}}{=} ۰+۳(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

۲۳۶ ۴ ۳ ۲ **۱** نکته: برای محاسبهٔ $\underset{x\to a}{} \frac{}{g(x)}$ در صورتی که حد صورت و مخرج برابر صفر باشد ابتدا عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف می کنیم. سپس حاصل حد را به دست می‌آوریم.

ابتدا مقادیر هر یک از حدها را به دست می‌آوریم:

$$\underset{x\to ۰}{\ldots\ldots}\frac{x}{۲x^۲-x}=\underset{x\to ۰}{\ldots\ldots}\frac{}{x(۲x-۱)}=\underset{x\to ۰}{\ldots\ldots}\frac{}{۲x-۱}=\frac{}{۰-۱}=-۱$$

$$\underset{x\to ۳^+}{\ldots\ldots}\frac{}{[x]-۱}=\frac{}{۳-۱}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۳۷ ۴ **۳** ۲ ۱ معادلهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=x+۲$ (با شرط $x\neq ۱$) است. با جای‌گذاری ضابطهٔ f در عبارت داده‌شده داریم:

$$\underset{x\to -۲}{\ldots\ldots}\frac{}{x^۲-۴}=\underset{x\to -۲}{\ldots\ldots}\frac{}{x^۲-۴}=\underset{x\to -۲}{\ldots\ldots}\frac{}{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}$$

$$=\underset{x\to -۲}{\ldots\ldots}\frac{}{x-۲}=\frac{۳}{-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

۲۳۸ ۴ ۳ **۲** ۱ نکته: برای محاسبهٔ $\underset{x\to a}{\ldots\ldots}\frac{}{g(x)}$، در صورتی که حد صورت و مخرج برابر صفر باشد ابتدا عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم. سپس حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

نکته: $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

نکته: $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$

با استفاده از نکات بالا، عبارت‌های صورت و مخرج را ساده‌تر می‌کنیم و بعد از حذف عامل صفرکننده از صورت و مخرج، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\underset{x\to \frac{\pi}{۲}}{\ldots\ldots}\frac{۱-\sin^۳ x}{۱-\sin^۲ x}=\underset{x\to \frac{\pi}{۲}}{\ldots\ldots}\frac{\cancel{(۱-\sin x)}\,(۱+\sin x+\sin^۲ x)}{\cancel{(۱-\sin x)}\,(۱+\sin x)}=\underset{x\to \frac{\pi}{۲}}{\ldots\ldots}\frac{۱+\sin x+\qquad x}{۱+\sin x}=\frac{۳}{۲}$$

۲۳۹ **۴** ۳ ۲ ۱ تابع برای $x>۴$ تعریف نشده است پس گزینهٔ یک نادرست است.

$\underset{x\to ۱}{\ldots\ldots} f(x)=۰$ پس گزینهٔ دو نادرست است.

$\underset{x\to ۳^+}{\ldots\ldots} f(x)=۲$ و $\underset{x\to ۳^-}{\ldots\ldots} f(x)=۱$ پس $\underset{x\to ۳}{\ldots\ldots} f(x)$ وجود ندارد بنابراین گزینهٔ سه نادرست است.

$\underset{x\to ۰}{\ldots\ldots} f(x)=۱$ پس گزینهٔ چهار درست است.

۲۴۰ ① ② ③ ④ تابع f در $x=a$ هم حدراست و هم حد چپ دارد پس گزینهٔ ۱ نادرست است.

تابع f در $x=c$ فقط۲حد چپ دارد پس گزینهٔ نادرست است.

تابع f در $x=b$ دارای حد چپ و راست برابر است و حد دارد پس گزینهٔ ۳ درست است.

تابع f در $x=d$ فقط حد راست دارد پس گزینهٔ ۴ نادرست است.

۲۴۱ ① ② ③ ④

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۱ \quad ، \quad \lim_{x\to ۴} f(x)=۴ \quad ، \quad \lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=۰ \Rightarrow A=۱+۴+۰=۵$$

۲۴۲ ① ② ③ ④ با توجه به شکل حد چپ و راست تابع f در $x=۳$ برابر نیستند، پس تابع f در $x=۳$ حد ندارد و .

$$\Rightarrow -f(a-۴)+\lim_{x\to (a-۲)} f(x)=-f(۳-۴)+\lim_{x\to(۳-۲)} f(x)=-f(-۱)+\lim_{x\to ۱} f(x)=-(-۱)+۰=۱$$

۲۴۳ ① ② ③ ④ حد تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج هنگامی وجود دارد که عبارت زیر رادیکال مثبت باشد یعنی:

$$bx+a>۰ \to bx>-a \xrightarrow{b>۰} x>-\frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}}$$

۲۴۴ ① ② ③ ④

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}(x^۲-۳x+۲)}{x^۲-۱}=\frac{\sqrt{۴}(۰)}{۰}=\frac{۰}{۰}= \text{مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام} \to \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}\,\cancel{(x-۱)}\,(x-۲)}{\cancel{(x-۱)}\,(x+۱)}=\frac{\sqrt{۴}(-۱)}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

۲۴۵ ① ② ③ ④

$$\lim_{x\to ۳^-} [x]=[۳^-]=۲ \to \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲x-۶}{|۲x^۲-۲x-۱۲|}=\frac{۰}{۰}$$

$$\to \lim_{x\to ۳^-} \frac{}{۲|x^۲-x-۶|}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{}{\underbrace{|x-۳|}_{-}\underbrace{|x+۲|}_{+}}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{}{-(x-۳)(x+۲)}=-\frac{۱}{۵}$$

۲۴۶ ① ② ③ ④

چون $x=۲$ مخرج کسر را صفر می‌کند پس صورت کسر هم به ازای $x=۲$ باید صفر شود تا حد به‌دست آید. یعنی داریم:

$$a(۲\quad+۴(۲)=۰ \to ۴a+۸=۰ \to a=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-۲x^۲+۴x}{x^۲-۴} \quad \lim_{x\to ۲} \frac{}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{-۴}{۴}=-۱ \to b=-۱$$

$$\text{پس:} \lim_{x\to(-۲)} \frac{x^۲+۵x-۳a}{x^۲+۴b}=\lim_{x\to(-۲)} \frac{x^۲+۵x+۶}{x^۲-۴}=\lim_{x\to(-۲)} \frac{}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{-۴}=-۰/۲۵$$

۲۴۷ ① ② ③ ④ با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x\to ۳} = L \Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{x^۳+nx^۲+۶x}{x-۳}=L$$

چون مخرج کسر به ازای $x=۳$ صفر است برای آنکه حد، عدد حقیقی L باشد، باید صورت کسر هم به ازای $x=۳$ صفر شود پس داریم:

$$۳^۳ + n(۳)^۲ + ۶(۳) = ۰ \to ۲۷ + ۹n + ۱۸ = ۰ \to ۹n = -۴۵ \to \boxed{n=-۵}$$

$$\underset{x\to ۳}{......} f(x) = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۳ - ۵\quad + ۶x}{x-۳} = \underset{x\to ۳}{......} \frac{}{\cancel{(x-۳)}} = ۳ \to \boxed{L=۳}$$

$$\to n + L = -۵ + ۳ = -۲$$

۲۴۸ ۴ ۳ ۲ ۱

چون $-۱ \le \cos x \le ۱$ است پس $۱+\cos x$ همواره مثبت است.

$$\underset{x\to\pi^+}{......} \frac{|\overbrace{۱+\cos x}^{+}|}{\sin^۲ x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{}{۱-\cos^۲ x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)} = \frac{}{۱-(-۱)} = \frac{۱}{۲}$$

۲۴۹ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\underset{x\to\pi^+}{......} \frac{[x]\ \overline{\ ۱-\cos^۲ x\ }}{۲\sin x\cos x} = \underset{x\to\pi^+}{......} \frac{[۳٫۱۴^+]\ \overline{\ ۱-\cos^۲ x\ }}{۲\sin x\cos x} = \underset{x\to\pi^+}{......} \frac{۳\ \ \overline{\sin^۲ x}}{۲\sin x\cos x}$$

$$= \underset{x\to\pi^+}{......} \frac{}{۲\sin x\cos x} = \underset{x\to\pi^+}{......} \frac{۳(\cancel{\quad})}{۲\cancel{\sin x}\ \cos x} = \frac{}{۲(-۱)} = \frac{۳}{۲}$$

$(x\to\pi^+ \Rightarrow$ در ربع سوّم $x \Rightarrow \sin x < ۰ \Rightarrow |\sin x| = -\sin x)$

۲۵۰ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\underset{x\to\frac{\pi}{۲}}{......} f(x) = \underset{x\to\frac{\pi}{۲}}{......} \frac{۱-\sin x}{\cos^۲ x} = \underset{x\to\frac{\pi}{۲}}{......} \frac{}{۱-\sin^۲ x} = \underset{x\to\frac{\pi}{۲}}{......} \frac{\cancel{\quad}}{\cancel{(۱-\sin x)}\ (۱+\sin x)} = \underset{x\to\frac{\pi}{۲}}{......} \frac{}{۱+\sin x} = \frac{۱}{۲}$$

$$\underset{x\to(-۲)^+}{......} \frac{|x^۲+x-۲|}{x^۲-۴} = \underset{x\to(-۲)^+}{......} \frac{}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$= \underset{x\to(-۲)^+}{......} \frac{\cancel{\quad}}{(x-۲)\cancel{(x+۲)}} = \frac{}{-۴} = -\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۱}{۲} + (-\frac{۳}{۴}) = \frac{۲-۳}{۴} = -\frac{۱}{۴}$$

حد و پیوستگی

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۳۶	۱	۷۱	۲	۱۰۶	۲
۲	۳	۳۷	۴	۷۲	۴	۱۰۷	۳
۳	۴	۳۸	۴	۷۳	۱	۱۰۸	۴
۴	۲	۳۹	۳	۷۴	۴	۱۰۹	۲
۵	۲	۴۰	۳	۷۵	۱	۱۱۰	۲
۶	۲	۴۱	۲	۷۶	۱	۱۱۱	۲
۷	۲	۴۲	۴	۷۷	۳	۱۱۲	۲
۸	۴	۴۳	۱	۷۸	۴	۱۱۳	۲
۹	۴	۴۴	۱	۷۹	۲	۱۱۴	۱
۱۰	۴	۴۵	۲	۸۰	۲	۱۱۵	۱
۱۱	۳	۴۶	۴	۸۱	۴	۱۱۶	۳
۱۲	۲	۴۷	۲	۸۲	۴	۱۱۷	۱
۱۳	۴	۴۸	۲	۸۳	۲	۱۱۸	۱
۱۴	۴	۴۹	۳	۸۴	۲	۱۱۹	۲
۱۵	۴	۵۰	۳	۸۵	۳	۱۲۰	۲
۱۶	۴	۵۱	۲	۸۶	۳	۱۲۱	۲
۱۷	۱	۵۲	۴	۸۷	۱	۱۲۲	۳
۱۸	۱	۵۳	۱	۸۸	۴	۱۲۳	۳
۱۹	۴	۵۴	۳	۸۹	۳	۱۲۴	۲
۲۰	۴	۵۵	۱	۹۰	۱	۱۲۵	۲
۲۱	۲	۵۶	۴	۹۱	۳	۱۲۶	۴
۲۲	۴	۵۷	۲	۹۲	۴	۱۲۷	۳
۲۳	۲	۵۸	۲	۹۳	۱	۱۲۸	۳
۲۴	۱	۵۹	۴	۹۴	۱	۱۲۹	۳
۲۵	۴	۶۰	۱	۹۵	۲	۱۳۰	۳
۲۶	۲	۶۱	۲	۹۶	۲	۱۳۱	۲
۲۷	۳	۶۲	۴	۹۷	۲	۱۳۲	۳
۲۸	۲	۶۳	۴	۹۸	۳	۱۳۳	۲
۲۹	۳	۶۴	۳	۹۹	۴	۱۳۴	۲
۳۰	۲	۶۵	۱	۱۰۰	۲	۱۳۵	۲
۳۱	۲	۶۶	۲	۱۰۱	۴	۱۳۶	۴
۳۲	۳	۶۷	۳	۱۰۲	۴	۱۳۷	۱
۳۳	۱	۶۸	۲	۱۰۳	۲	۱۳۸	۱
۳۴	۲	۶۹	۲	۱۰۴	۳	۱۳۹	۲
۳۵	۴	۷۰	۳	۱۰۵	۱	۱۴۰	۱

۱۴۱	۴	۱۶۹	۳	۱۹۷	۴	۲۲۵	۴
۱۴۲	۲	۱۷۰	۲	۱۹۸	۳	۲۲۶	۲
۱۴۳	۲	۱۷۱	۴	۱۹۹	۳	۲۲۷	۳
۱۴۴	۴	۱۷۲	۱	۲۰۰	۱	۲۲۸	۱
۱۴۵	۴	۱۷۳	۲	۲۰۱	۲	۲۲۹	۴
۱۴۶	۲	۱۷۴	۳	۲۰۲	۲	۲۳۰	۳
۱۴۷	۲	۱۷۵	۱	۲۰۳	۴	۲۳۱	۲
۱۴۸	۳	۱۷۶	۴	۲۰۴	۱	۲۳۲	۱
۱۴۹	۱	۱۷۷	۲	۲۰۵	۳	۲۳۳	۱
۱۵۰	۲	۱۷۸	۱	۲۰۶	۲	۲۳۴	۳
۱۵۱	۳	۱۷۹	۴	۲۰۷	۱	۲۳۵	۲
۱۵۲	۴	۱۸۰	۴	۲۰۸	۲	۲۳۶	۱
۱۵۳	۴	۱۸۱	۱	۲۰۹	۲	۲۳۷	۳
۱۵۴	۲	۱۸۲	۴	۲۱۰	۴	۲۳۸	۲
۱۵۵	۱	۱۸۳	۴	۲۱۱	۲	۲۳۹	۴
۱۵۶	۲	۱۸۴	۱	۲۱۲	۱	۲۴۰	۳
۱۵۷	۲	۱۸۵	۱	۲۱۳	۴	۲۴۱	۴
۱۵۸	۴	۱۸۶	۲	۲۱۴	۲	۲۴۲	۱
۱۵۹	۲	۱۸۷	۴	۲۱۵	۳	۲۴۳	۳
۱۶۰	۱	۱۸۸	۱	۲۱۶	۴	۲۴۴	۲
۱۶۱	۲	۱۸۹	۲	۲۱۷	۱	۲۴۵	۳
۱۶۲	۴	۱۹۰	۴	۲۱۸	۳	۲۴۶	۱
۱۶۳	۳	۱۹۱	۳	۲۱۹	۲	۲۴۷	۲
۱۶۴	۲	۱۹۲	۱	۲۲۰	۲	۲۴۸	۲
۱۶۵	۴	۱۹۳	۳	۲۲۱	۱	۲۴۹	۱
۱۶۶	۲	۱۹۴	۲	۲۲۲	۴	۲۵۰	۲
۱۶۷	۱	۱۹۵	۲	۲۲۳	۳		
۱۶۸	۱	۱۹۶	۴	۲۲۴	۳		