

حل المسائل ریاضیات گسته

دوازدهم ریاضی

کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

با تشکر از آقای افشین ملاسعیدی و
همکار انسان برای تهییه و تنظیم این
فایل

توجه : کانال گام به گام درسی در سایر
پیام رسان ها هیچ گونه فعالیتی ندارد

درس ۱

استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکار ناپذیر است. همه ما در زندگی روزمره و با در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف رسانی بسیر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن روشهای و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به سطح و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش بذیر است.

(ب) عدد $1 + 2^n$ به ازای همه اعداد طبیعی n ، عددی اول است.

حل: گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

$$10 + 11 + 12 = 33$$

$$25 + 26 + 27 = 78$$

$$31 + 32 + 33 = 96$$

در همه موارد حاصل جمع‌های بدست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای

$n=1, n=2, n=3, n=4$ و $n=5$ حاصل $1 + 2^n$ به ترتیب برای $1, 5, 17, 65$ و 257 است

که همگی اعداد اول هستند و ظاهرآ بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارانه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا

ارانه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر امثال ارانه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد

گزاره ب، اگر $n=5$ آن گاه:

$$2^5 + 1 = 32 + 1 = 33 \neq 417$$

که به وضوح نشان می دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می دهد که گزاره ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به کار می رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی توانید مثال نقضی از آن کنید، اما درستی گزاره با از آن مثال به دست نمی آید. مثلاً یک احتمال این است که توانید مثال نقضی از آن کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن از آن شده باشد. به هر حال در اینجا اینها دشوار نیست، کافی است سه عدد طبیعی را با $n+1$, $n+2$ و $n+3$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

که نشان می دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

ابن نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات های دشوار نیست. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالعی است که تاکنون آموخته اید. در کار در کلاس نمونه هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هر کس از گزاره های زیر را اثبات و یا با از آن مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد فرد را با $2m-1$ و $2n-1$ به فرض $n, m \in \mathbb{Z}$ نمایش دهیم. در این صورت: دو عدد زوج $\rightarrow 2m-1 + 2n-1 = 2n+2m-2 = 2(n+m-1) \in \mathbb{Z}$

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} &= \sqrt{9+12} = \sqrt{21} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{9} + \sqrt{12} = 3 + 2\sqrt{3} = 5 \end{aligned} \Rightarrow \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

اگر $x=9$ و $y=12$ باشد؛
با این گزاره صحیح نمی شود.

ب) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متولی $n+1, n+2, n+3$ بخش پذیر است.

گزاره صحیح است. اثبات: از $n+1, n+2, n+3$ سه عدد طبیعی متوالی را با $n+1, n+2, n+3$ به فرض $n \in \mathbb{N}$ می پرسیم. در این صورت حاصل ضرب $(n+1)(n+2)(n+3)$ خواهد بود و می تواند مرتبت باشد:

$$(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \times n!}{n! \times 3!} = \frac{(n+1)(n+2)}{n! \times 2!} \times n! = \binom{n+3}{3} \times 6$$

اگر $n+1, n+2, n+3$ بخش پذیر باشند \Rightarrow $(n+1)(n+2)(n+3)$ بخش پذیر است

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $n^2 - 1$ اول است.

گزاره صحیح است. اثبات: ثابت: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ بود و می تواند اول باشد.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

گزاره صحیح است. اثبات: ثابت: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ بود و طبق خانم نظریه اگلند، با این:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

ج) اگر برای هر سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ است.

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ و $C = \{4, 6\}$ باشد، آنگاه $B \neq C$ ولی $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

ج) اگر a حاصل ضرب دو عدد طبیعی متولی باشد، آنگاه $a = k(k+1)$ مرتع کامل است.

گزاره صحیح است. اثبات: ثابت: $k(k+1)$ به فرض $k = n(n+1)$ در تظریه موردنی باشد:

$$k(k+1) = n(n+1) + 1 = n^2 + n + 1 = (2n+1)$$

خواهد بود

با این مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم است. بدطور مثال عبارت $n^2 + 991$ را برای «های طبیعی در نظر گیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=1, n=2, n=3, \dots, n=1000$ به دست آورید، هیچ کدام محدود کامل نمی باشد. آنرا به نظر نمایم. می توان حکم کرد که ایرانی «های طبیعی عبارت $n^2 + 991$ هیچ کدام محدود کامل نیست. باسچ متفق است: سینیسکن راضی دان معاصر لهستانی، کوچکترین عدد طبیعی که با از آن $+1$ هم محدود کامل باشد را از آن کرد. این عدد ۲۹ را دارد و عدد $29^2 + 991 = 841 + 991 = 1832$ است.

- طرح سالیانه از سیالی های در سطح مطالعات کتاب باشد. طرح سالیانه بجهد که تابع به داشت محتوای سطح بالا دارای مورد توجه می باشد.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مستله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n , $n^3 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

(الف) "زوج" است، به عبارت دیگر $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) : در این حالت داریم :

$$n^3 - 5n + 7 = (2k)^3 - 5(2k) + 7 = 8k^3 - 10k + 7 + 1 = 2(4k^3 - 5k + 3) + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

(ب) "فرد" است، یعنی $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) : در این حالت هم داریم :

$$n^3 - 5n + 7 = (2k - 1)^3 - 5(2k - 1) + 7 = 8k^3 - 12k^2 + 6k + 1 - 10k + 5 + 7$$

$$= 8k^3 - 14k^2 + 13 = 2(4k^3 - 7k^2 + 6) + 1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n ، فرد بودن 2 و $n^3 - 5n + 7$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن r با q نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv p \vee q \Rightarrow r$ شهود اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم :

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر او را می‌سند است

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

(الف) اگر $a = 0$. در این حالت حکم برقرار است (چرا؟) زیرا گزاره $a = 0$ با $b = 0$ یک ترکیب فصلی است

و اگر $a \neq 0$ درست فرض شود، کل ترکیب درست خواهد بود.

(ب) اگر $a \neq 0$. در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفی ابطه $ab = 0$ در a^{-1} داریم :

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

خط در مالان طبقه قدر است / α را هر دو مرد باشد زیرا رجاء از آن زوج باشد طبقه زوج خواهد بود
بنابراین با فرض $n, m \in \mathbb{Z}$, $b=2m-1$, $a=2n-1$ داریم:

$$a^2 + b^2 = (2n-1)^2 + (2m-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 = 4n^2 - 4n + 4m^2 + 2 = 2(2n^2 - 2n + 2m^2 + 1)$$

حاصل عبارت زوج است

ب) $\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}\}_{n \in A}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ است و $S = \{1, 2, \dots, n\}$, اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

نکته: هر سه عضو را بررسی نمی‌کنیم (در تلفیق تمام حالات):

$$n=1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \rightarrow \text{زوج نیست}$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \rightarrow \text{زوج نیست}$$

$$n=3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \rightarrow \text{زوج است}$$

$$n=4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \rightarrow \text{زوج است}$$

$$n=5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225 \rightarrow \text{زوج نیست}$$

$$n=6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 441 \rightarrow \text{زوج است}$$

بنابراین مطابق بازی $n=3$, $n=4$, $n \in A$ است.

اثبات غیر مستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن با توجه متصاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است این روش استدلال استفاده کنیم. آنچه که با فردی نظری کاملاً متصاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه مورد نظرمان، موقعاً نظر مخالف خود را می‌بذریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که بذیرفتن نظر او به بنیست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاصل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاصل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض مادر تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال: حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $\frac{1}{rx} \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال: a_1, a_2, \dots, a_r و b_1, b_2, \dots, b_s هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_i - b_j)(a_k - b_l)$ عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1, a_2, a_3, a_4 و a_5 را به ترتیب، ۵، ۴، ۳ و ۲ در نظر می‌گیریم و b_1, b_2, b_3 را، ۱، ۲ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_s - b_s)(a_r - b_r)(a_t - b_t) = (\Delta - \Lambda)(\Lambda - 1)(1 - \Delta) = (-1)(1)(-1) = 1$$

اگر $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) = 0$ باشد (حریم) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n)$ باید عددی هم باید فرد باشد (حریم) از هر سه عامل، پس $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), \dots, (a_n - b_n)$ هم باید فرد باشند.

نامند. آئتا مجموع این سه عبارت صفر است! زیرا فقط حاصلضرب سه عدد فرد ، عددی فرد خواهد شد و در صورتی که حداقل یکی از آنها زوج باشد ، حاصلضرب زوج می شود.

در در گل

درستی گردههای زیر را با استفاده از روش پرهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد ممکن باشد تابع $\frac{1}{x}$ نیز ممکن است.

بر معا خلف پر کیم $\frac{1}{2}$ عوری بوا باش، از طرفی من داشم دارم هر عورت بیای ناصر، عورتی بواست پس
دارم $\frac{1}{2}$ بینه باین بیان بواست، بر بازی سوال تاقن دارد، پس $\frac{1}{2}$ دادرشت است

ب) اگر تابع f در a پیوسته و لیکن در $x = a$ نپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x = a$ نپیوسته است.

برهان خلف: $\neg \exists x (f+g = x \wedge x = a)$ برره است از طرف تجزیه دو عبارت پیوسته است
 $\neg \exists x (f+g = x \wedge x = a) \equiv \neg \exists x f+g = x \wedge \neg \exists x x = a$ بازن سوال تناقض دارد
 $f+g = a$ ناپذیر است.

ایشات‌های بازگشتی / تغذیه‌های هم‌اوز

اگر ارزش دو گزاره یکسان پاشند آنها را گزاره‌های هم ارز (هم ارزش) می‌نامند.
اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هم دو درست هستند و در تابع $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن گاه P و Q دو گزاره هم رز خواهد بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدایم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می توانیم درستی یادداشتی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به طور معمول درستی گزاره ای که معمولاً ساده‌تر است را بتعاب می‌کنم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به طور مثال اگر P, Q و R سه گزاره باشند و $R \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow P$ باشد، یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه باید و د. تعدادی، مبنایه مقاله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب سیار اساسی است.

مثال: ترکیب دو شرطی $(a, b \in \mathbb{R})$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^r = b^r$ درست نیست (ح۱)

$a' = b' \Rightarrow a = b$ و نمی توان به طور قطع ادعا کرد $a' = b'$ $\Rightarrow a = b \vee a = -b$ زیرا

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (\text{الف})$$

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (\text{ب})$$

درست، بطوری‌که از $-2 < 2$
نتیجه می‌شود $4 < 4$ و این
نامساوی سلطنت نیست

مثال: اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام بیکاری را تبیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ زیرا می‌توان طرفین یک نامساوی را در هر عدد مثبت (مانند a) ضرب یا بر آن تقسیم کرد. اثبات کدام یک ساده‌تر است؟ اثبات $a^2 + 1 \geq 2a$ ساده‌تر است.

$$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

آخرین گزاره یعنی $(a - 1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > 0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

همچنین

و درنهایت:

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی مثل: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات موردنیز طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی، در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زنگی روزمره هم ممکن است پس از جند مرحله به تبیجه برسیم.

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{گزاره همیشه درست.}$$

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

حل:

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم ارز است.

$$\begin{aligned} a^r + ab + b^r &\geq 0 \Leftrightarrow 2a^r + 2ab + 2b^r \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^r + b^r + 2ab + a^r + b^r \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^r + a^r + b^r \geq 0 \end{aligned}$$

البته ممکن است شما هم راه حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا z زوج بودن n و z زوج بودن n^r هم ارزند؟

$$n = 2k \Rightarrow n^r = (2k)^r = 2(rk^r)$$

نحوه اثبات:

اگر n زوج است و n^r هم زوج است:

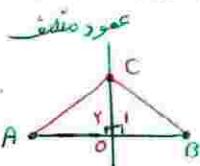
برهان عکس: اگر n زوج نباشد پس n عددی فرد خواهد بود بنابراین:

$$n = 2k - 1 \Rightarrow n^r = (2k - 1)^r = 2(rk^r - k^r) + 1$$

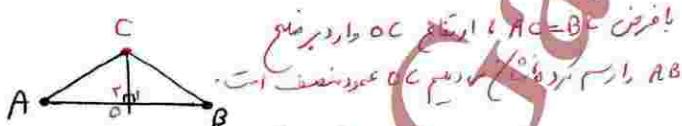
n زوج است \Leftrightarrow n^r زوج است

ب) آیا دو گزاره زیر هم ارزند؟

نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. ۱) فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.



$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \hat{\alpha}_2 \\ AO &= OB \\ OC &= OC \end{aligned} \quad \text{ض فرض) } \quad \triangle AOC \cong \triangle BOC \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \text{فاسد اعضا} \Rightarrow C \text{ از دو سر} \overline{AB} \text{ برابر است.}$$



$$\begin{aligned} AC &= BC \\ OC &= OC \\ \hat{\alpha}_1 &= \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta} \end{aligned} \quad \text{و ترکیب) } \quad \triangle AOC \cong \triangle BOC \Rightarrow AO = OB \Rightarrow \text{عمور منصف} \overline{AB} \text{ است.}$$

نحوه اثبات:

تمرین

۱) گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌معلاحت (مخالف صفر) باشند داریم:

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^r + y^r + z^r \geq xy + yz + zx$$

$$x^r + y^r + 1 \geq xy + x + y$$

۲) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^r < x$.

۳) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\beta - \alpha - 2\beta$ گنگ هستند.

$$x^r + y^r = (x+y)^r$$

۴) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

۵) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۶) گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین بین عدد طبیعی متولی همان عدد وسطی است.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

الف) اگر $x, y \neq 0$ دو عدد حقیقی هملاست (خالق صفر) باشند داریم:

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2xy \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$\iff (x-y)^2 \geq 0$ همیشه درست

(ب) برای هر سه عدد حقیقی $x, y, z \neq 0$ داریم:

$$(I) \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

ایجاب نیز تا لارا در ۲ ضرب می شود:

$$\iff 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\iff \underline{x^2} + \underline{y^2} + \underline{z^2} + \underline{y^2} + \underline{z^2} - \underline{2xy} - \underline{2yz} - \underline{2zx} \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$
 همیشه درست

$$(II) \quad x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

ایجاب نیز تا لارا در ۲ ضرب می شود:

$$\iff 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\iff \underline{x^2} + \underline{y^2} + \underline{y^2} + \underline{1} + \underline{1} - \underline{2xy} - \underline{2x} - \underline{2y} \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$
 همیشه درست

(۳) عدد حقیقی ماتنده x از این نظر به طوری که $x^2 \geq 0$. جواب: $x = 0, x = -1, x = 1$.

(۴) اگر α, β, γ دو عدد مثبت باشند ولی $\alpha + \beta > \alpha$ بتوانیم $\alpha + \beta > \alpha$ باشد، آنچه $\alpha + \beta > \alpha$ نشست.

(۵) $\alpha - \beta > 0$ باشد از طرف $\alpha + \beta > \alpha$ بتوانیم $\alpha + \beta > \alpha - \beta = 2\alpha$ بتوانیم بوده و در نتیجه $\alpha - \beta > 0$ بتوانیم $\alpha - \beta > 0$ باشد تا قفس دارد پس $\alpha - \beta > 0$ است.

(۶) $\alpha + \beta > 0$ باشد از طرف $\alpha + \beta > 0$ بتوانیم $\alpha + \beta > 0$ باشد تا قفس دارد پس $\alpha + \beta > 0$ است.

(۷) آنکه اعدادی می گویند ماتنده دل وجود دارند $x^2 = (x+y)^2$

$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

حالا از اعداد دل باشد صراحتاً مطابق باشد $y = 0, x = 0$ جواب است.

(۸) آنکه اعداد حقیقی و ناصلق a, b چنان وجود دارند:

خیر-اینست: برهان خلف بگیرم چنین اعدادی وجود داشته باشد، بازیست:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow{x^2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + \underline{b^2} + \underline{2ab} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \wedge a+b = 0 \Rightarrow \text{ناصلق}$$

GamBeGam-Darsi

الف) صریح و مکعب هر عدد فرد، عدی فرد است. - مجموع است زیرا:

$$(2n-1)^3 = 8n^3 - 8n + 1 = 2(4n^3 - 4n) + 1 \rightarrow \text{فرد است} \rightarrow 1$$

$$(2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \rightarrow \text{فرد است} \rightarrow -1$$

ب) می‌باشد پنج عدد طبیعی متولی همان عدد وسطی است. - مجموع است زیرا:

$$n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 : \text{پنج عدد طبیعی متولی}$$

$$\frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+10}{5} = n+2 \quad (\text{عادل})$$

درس ۲ بخش پذیری در اعداد صحیح^۱

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبت عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد. در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم $2|12$ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی مانده تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به صورت صفر تا صفر کار بی معنای است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $a|a$ و $a|1$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد بر خودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معامل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a ، عدد b را می‌شمارد یا عدد a ، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد -28 بر 4 بخش‌پذیر است (زیرا $-28 = 4 \times (-7)$ – یا باقی مانده تقسیم -28 بر عدد 4 صفر است) پس در حالت کلی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعه اعداد صحیح عاد کردن به صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a ، که مخالف صفر است^۲، شمارنده عدد b است – یا a ، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است – هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$.

۱- در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲- اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

با توجه به تعریف رابطه عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

$$7|63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9 \quad (\text{الف})$$

$$91 = 7 \times 13 \Leftrightarrow 7|91 \quad (\text{ب})$$

$$54 = -6 \times (-9) \Leftrightarrow 54 = -6|54 \quad (\text{پ})$$

$$5|-35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times (-7) \quad (\text{ت})$$

$$18 = 18 \times 1 \Leftrightarrow 18|0 \quad (\text{ث})$$

$$a|1 \Rightarrow a = +1 \text{ یا } a = -1 \quad (\text{ج})$$

$$26 = 2 \times 13 \Leftrightarrow 2|26 \quad (\text{د})$$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان دار با پایه های برابر، ابتدا نشان دهید که $3^m | 3^n$

سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$(3^9 = 3^5 \times 3^4 \stackrel{(3^4 = q)}{\Rightarrow} 3^5 | 3^9)$$

$$a^n = a^m \times a^{n-m} \Rightarrow a^m | a^n$$

ویژگی های رابطه عاد کردن

ویژگی ۱: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد؛ یعنی:

$$a|b \Rightarrow a|m b$$

$$3|6 \times 5, 3|6 \times 4, 3|6 \times (-7), \dots \quad (\text{مثال})$$

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه b^n را می شمارد و در حالت کلی $m b^n$ را می شمارد که $m \in \mathbb{N}$ است. یعنی:

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow a|b^r \\ a|b \Rightarrow a|b^n \end{cases} \quad (\text{الف})$$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با n فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-1}$ فرض شود.

سؤال: آیا از اینکه $a|bc$ می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می کند؟ **خیر نمی توان چنین نتیجه ای گرفت.**

به گزاره های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

$$3|6 \text{ و } 3|6 \times 9 \quad (\text{الف})$$

$$2|6 \text{ و } 2|6 \times 5 \quad (\text{ب})$$

$$6|4 \text{ و } 6|4 \times 3 \quad (\text{ج})$$

سؤال: آیا از اینکه $a|b$ می توان نتیجه گرفت که $ka|kb$ ؟ آیا از $ka|kb$ می توان نتیجه گرفت $a|b$ ؟ $(k \in \mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b = aq \quad (\text{در ضرب})$$

$$ka|kb \Rightarrow kb = k aq \quad (\text{در تقسیم})$$

$$kb = k aq \Rightarrow b = aq \Rightarrow a|b$$

ویرگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

ایثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$

$$c = bq_2 \stackrel{(v)}{\Rightarrow} c = aq_1 q_2 \xrightarrow{q_1 q_2 = q} c = aq \Rightarrow a|c$$

این خاصیت را «خاصیت تعدی» برای رابطه عاد کردن می‌نامیم.

سوال: با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، نشان دهید که:

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

تعددی $a|b$: طبق فرض اثبات $a|b \Rightarrow a|b^n$ و می‌دانیم $b|b^n$

ویرگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

ایثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = a \times q_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{cases} \Rightarrow b \pm c = a \underbrace{(q_1 \pm q_2)}_q \Rightarrow a|b \pm c$

سوال: آیا از اینکه $a|b + c$ همواره می‌توان تبیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$ ؟ خیر به طور مثال $3 \pm 5 = 8$ ولی $3 \mid 8$ و $5 \mid 8$

ویرگی ۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

ایثبات: چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $1 \geq |q|$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را

در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه: اگر $a|b$ و آنگاه $a = \pm b$.

ایثبات: در صورتی که یکی از اعداد صفر باشند، دیگری نیز صفر خواهد بود زیرا فقط صفر می‌تواند صفر را عاد کند. اما در حالتی که هر دو

عدد ناصلی باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱) اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

$$\begin{cases} a|7m+6 \Rightarrow a|(42m+36) \\ a|6m+5 \Rightarrow a|(42m+35) \end{cases} \Rightarrow a|(42m+36) - (42m+35)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$|a| \leq 1 \xrightarrow{|a| \in \mathbb{N}} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۱۲ اگر $a^n | b^n$ نشان دهد که a^n .

$$\text{اثبات: } a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

۱۳ اگر $a | b$ و $c | d$ نشان دهد که $.ac | bd$.

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c) \underbrace{(q_1 q_2)}_q$$

$$\Rightarrow b \times d = a \times c \times q \Rightarrow ac | bd$$

۱۴ اگر $a | mb \pm nc$ و $a | c$ نشان دهد که $a | mb \pm nc$ (از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow a | mb \\ a | c \Rightarrow a | nc \end{array} \right\} \xrightarrow{\pm} a | mb \pm nc$$

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر a عددی اول باشد و $a | p$ عددی طبیعی و p در این صورت $a = p$ یا $a = 1$.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.

$$a | 9k+7 \Rightarrow a | 7 \times (9k+7)$$

$$\Rightarrow a | 63k + 49$$

$$a | 7k+6$$

$$\Rightarrow a | 9 \times (7k+6) \Rightarrow a | 63k + 54$$

$$\Rightarrow a | (63k + 54) - (63k + 49)$$

$$\Rightarrow a | 5 \Rightarrow a = 5 \text{ یا } a = 1$$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی 1^0 عدد 1^0 را عاد می‌کند (چرا؟) و به طور کلی می‌توان نوشت: $\forall k, n \in \mathbb{N}, k \leq n! : \text{بنابراین عدد } 1^{00} + 1^{00} + \dots + 1^{00} \text{ و همین طور عدد } 2^{00} + 2^{00} + \dots + 2^{00} \text{ و ... و بالاخره عدد } 100^{00} + 100^{00} + \dots + 100^{00} \text{ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد } (1^{00} + 1^{00}) \text{ و } (100^{00} + 100^{00}) \text{ ... (} 100^{00} + 100^{00} \text{), تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متولی اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی سوالی بیاسیم که هیچ کدام اول نباشند.}$

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متولی بیایید که هیچ کدام اول نباشند؟ $16^{00} + 2, 16^{00} + 3, \dots, 16^{00} + 15$

(برای اینکه نشان دهیم عدد $1^{00} + 7$ بر ۷ بخش‌بذری است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد 1^{00} و ۷،

فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم: $7 | 100^{00} + 7 \Rightarrow 7 | 7 + 100^{00}$ و $7 | 7$)

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطه عاد کردن، مفاهیم ب م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک) و ک م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$ ، یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b = aq$ یا $b|a$.

تعریف: عدد طبیعی d را ب م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a,b)=d$.

الف $d|a, d|b$

$$\text{ب } \forall m > 0 : m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$$

شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر **با مساوی** است.

اگر داشته باشیم $1 = (a,b)$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

$$(3,4) = 1, (4,9) = 1, (7,11) = 1, (1,12) = 1$$

مثال :

$$(6,9) = 3, (8,16) = 8, (4,-6) = 2$$

تعریف: عدد طبیعی c را ک م دو عدد صحیح و ناصلف a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b] = c$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b] = c$

الف $a|c, b|c$

$$\text{ب } \forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

توضیح دهد که هر یک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که از مضرب مشترک دلخواهی چون m ، کوچک‌تر یا مساوی است.

$$[3,4] = 12, [6,4] = 12, [1,8] = 8, [-4,16] = 16$$

مثال :

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م و ک م ثابت کنید :

$$a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$$

: شرط اول $|a| | a \xrightarrow{a|b} |a| | b$

: شرط دوم $\forall m > 0 : m|a \wedge m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m| \leq |a| \xrightarrow{m > 0} m \leq |a|$

$$a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$$

: شرط اول $b | b \xrightarrow{a|b} a | b$

: شرط دوم $\forall m > 0 : a|m \wedge b|m \Rightarrow b|m \Rightarrow |b| \leq |m| \xrightarrow{m > 0} |b| \leq m$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهم که $|a| | a$

و... و نیز برای هر $m > 0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $|a| \leq m$ و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$, ثابت کنید، $1 \mid (p, a)$

$$(p, a) = d \Leftrightarrow d \mid p \text{ و } d \mid a \quad \text{با } d = p \text{ یا } d = 1$$

(و این با فرض $d \mid p \mid a$ تناقض دارد) اگر $d = p \Rightarrow (p, a) = 1$ یا $d = 1$ پس فقط

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلب کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد: $4 \mid 16$ ولی $4 \neq 1$ مثال

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b , باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد ($a \nmid b$). در این صورت قضیه تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در \mathbb{Z} را کامل کنیم.

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

مثال: اگر 25 را بر 7 تقسیم کنیم داریم: $q = 3$ و $r = 4$, و به عبارت دیگر $25 = 7 \times 3 + 4$. حال اگر -25 را بر 7 تقسیم کنیم و $q = -3$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-25 = 7 \times (-3) + 4$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-4) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مشتبی از مقسوم‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -25 &= 7 \times (-3) - 4 = 7 \times (-3) - 4 - 7 + 7 \\ &= 7 \times (-3) - 7 + 3 = 7 \underbrace{[(-3) - 1]}_q + 3 = 7q + 3 \Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

تذکر: همان‌طور که از دوره ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b , a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر 17 به ترتیب 5 و 3 باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر 17 را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} m &= 17q_1 + 5 && \text{طبق فرض} \\ n &= 17q_2 + 3 && \text{طبق فرض} \\ \Rightarrow (2m - 5n) &= 17(2q_1 - 5q_2) - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 17(2q_1 - 5q_2) - 5 - 17 + 17 \\
 &= 17(\underbrace{2q_1 - 5q_2 - 1}_{q_r}) + 17 - 5 \\
 \Rightarrow (2m - 5n) &= 17(\underbrace{q_r - 1}_q) + 12 \\
 = 17q + 12 &\Rightarrow r = 12
 \end{aligned}$$

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کم قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b ، و با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $b \leq r < 0$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش پذیر است، یعنی $r = 0$ ، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا ... یا باقی‌مانده تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، ... $a = 5k + 3$ یا $a = 5k + 2$ یا $a = 5k + 1$ یا $a = 5k$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱: اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k + 1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل: کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$m = 2k + r, \quad 0 \leq r < 2 \Rightarrow m = 2k \text{ یا } 2k + 1$$

مسئله ۲: ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت ۱ یا $p = 6k + 5$ یا $p = 6k + 1$ نوشته می‌شود.

حل: کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p = 6k \quad (1)$$

$$p = 6k + 1 \quad (2)$$

$$p = 6k + 2 \quad (3)$$

$$p = 6k + 3 \quad (4)$$

$$p = 6k + 4 \quad (5)$$

$$p = 6k + 5 \quad (6)$$

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودن آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم:

$$p = 3(2k + 1)$$

یا $3|p$ یا $p = 3k$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌مانند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً $25 = 6 \times 4 + 1$ ولی اول نست.)

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t + 1)$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است).

آزمایش

حل: فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$a = 4k \quad (1)$$

$$a = 4k + 1 \quad (2)$$

$$a = 4k + 2 \quad (3)$$

$$a = 4k + 3 \quad (4)$$

(چهار مجموعه $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k\}$ و $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 1\}$ و $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 2\}$ و $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 3\}$)
حالاتی (۱) و (۲) زوج بوده ولذا $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$ مجموعه \mathbb{Z} را افزایش می‌کنند.

اگر $a = 4k + 1 \Rightarrow a' = 16k' + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k' + k}) + 1 = 8k' + 1$

اگر $a = 4k + 3 \Rightarrow a' = 16k' + 24k + 9 = 16k' + 24k + 8 + 1$

$$\Rightarrow a' = 8(\underbrace{2k' + 3k + 1}) + 1 = 8t + 1$$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ و $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ اعداد صحیح و ناصفنده در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|b-a$ و $b|a-b$.

۳ اگر $a > 1$ و $a|5k+3$ و $a|9k+4$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $1|4k+1$ ، ثابت کنید: $25|16k^3 + 28k + 6$.

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $?a+c|b+d$ ؟

۶ ثابت کنید: (الف) هر دو عدد صحیح و متولی نسبت به هم اول اند. (ب) هر دو عدد صحیح و فرد متولی نسبت به هم اول اند.

(راهنمایی: فرض کنید $d|m+1$ و $d|m$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$).

۷ اگر $p \neq q$ و $p, q \in \mathbb{N}$ هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

۸ اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $m, n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a بر ۵۶ باید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(a+3)+(a+1)$ بر ۸ را باید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3 - n$.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و $n=3k+2$ در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3 - n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a+4$ یا $a+2$ یا a بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متولی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متولی همواره بر $3!$ بخش پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

(الف) $\left([m^2, m], m^5 \right)$

(ب) $(2m, 6m^3)$

(پ) $(3m+1, 3m+2)$

(ت) $\left[m^7, (m^2, m^3) \right]$

(ث) $\left[(72, 48), 120 \right]$

پاسخ نمره‌های صفحه ۱۶ کتاب

۱ فرض می‌کیم $ab = cd$ (اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی $a|cd$, $b|cd$, $c|ab$, $d|ab$, $ab|cd$ نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $b|-a$ و $a|b$.

$$\begin{aligned} a|b &\xrightarrow{\text{بر}} a|(-1) \times b \Rightarrow a|-b \\ -a|a, a|b &\xrightarrow{\text{بر}} -a|b \\ a|b &\Rightarrow (-1)a|(-1)b \Rightarrow -a|-b \end{aligned}$$

۳ اگر $a > 1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

$$\begin{aligned} a|9k+4 &\xrightarrow{\text{بر}} a|(8k+4) + a|k \Rightarrow a|k \\ a|5k+3 &\xrightarrow{\text{بر}} a|(4k+3) + a|k \Rightarrow a|k \end{aligned} \Rightarrow a|((8k+4) - (4k+3)) \Rightarrow a|4 \xrightarrow{a>1} a=4$$

۴ اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $14k+1$, $5|4k+1$, $5|4k+4$, ثابت کنید:

$$\begin{aligned} 14k+1 &\xrightarrow{\text{بر}} 25|14k^2 + 28k + 6 \\ &\xrightarrow{\text{بر}} 25|20k + 1 \end{aligned} \Rightarrow 25|14k^2 + 28k + 6$$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان ترتیج کرد که $(a+c)|(b+d)$

$$\bullet \quad 2+3 \nmid 4+3 \quad \text{و لی خیر! طور مثال}$$

۶ ثابت کنید: (الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند.

$$\text{برهان: } m \in \mathbb{Z}, (m, m+1) = d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \xrightarrow{\text{ترتیب}} d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>1} d=1$$

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.

$$\text{برهان: } k \in \mathbb{Z}, (2k+1, 2k+3) = d \Rightarrow d|2k+1 \wedge d|2k+3 \xrightarrow{\text{ترتیب}} d|(2k+3)-(2k+1)$$

$$\Rightarrow d|2 \xrightarrow{d \neq 2} d=1$$

۷ اگر $p \neq q$ و p, q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

برهان خلف: اگر $d \neq 1$ باشد $d|(p, q)$ باشد.

$$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d \neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q \quad \text{متناقض}$$

۸ اگر $m \leq n$, $a|b \Rightarrow a^m|b^n$: ثابت کنید: $a, b \in \mathbb{Z}$ و $m, n \in \mathbb{N}$

$$a|b \xrightarrow{m \leq n} a^m|b^m \xrightarrow{b^m = b \times b^{m-1}} a^m|b \times b^{m-1} \xrightarrow{a^m|b} a|b$$

۹ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد α و β باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر $\alpha\beta$ باید.

$$a = \alpha k + r \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \alpha k = \alpha \beta k + \epsilon \alpha$$

$$a = \beta k' + r \xrightarrow{\beta \wedge \alpha} \beta k' = \alpha \beta k' + \epsilon \beta \quad \xrightarrow{\text{جمع}} a = \alpha \beta k + \epsilon \alpha + \epsilon \beta$$

$$\xrightarrow{-\epsilon \beta = -\epsilon \alpha + \epsilon v} a = \alpha \beta k - \alpha \beta k' - \alpha \epsilon + \epsilon v$$

$$\xrightarrow{a = \underbrace{\alpha \beta (k - k' - 1)}_q + \epsilon v} \text{بنابراین } r = \epsilon v$$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+r$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(a+b)+r$ بر b را باید.

$$\text{برهان: } n \in \mathbb{Z}, a = rn + r \xrightarrow{b|r} b|rn+r \Rightarrow b|r \text{ عرض خود} \Rightarrow b=rm+1, m \in \mathbb{Z}$$

$$a+r+b+r = (rn+r)+(rm+1)+r = \underbrace{\epsilon n}_r + \underbrace{\epsilon m}_r + \underbrace{\epsilon}_r + \underbrace{r}_r + r$$

$$\xrightarrow{\epsilon n(n+1) + \epsilon m(m+1) + \epsilon = \underbrace{\alpha k}_{q} + \underbrace{\alpha k'}_{q} + \epsilon = \underbrace{\alpha(k+k')}_{q} + \epsilon} r = \alpha$$

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $n^3 - n$ بخش پذیر است.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

$$\begin{array}{l} \text{اگر } n = 3k \Rightarrow n^3 - n = 3k \underbrace{(3k-1)(3k+1)}_q \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \\ \text{اگر } n = 3k+1 \Rightarrow n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2) = 3k \underbrace{(3k+1)(3k+2)}_q \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \\ \text{اگر } n = 3k+2 \Rightarrow n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+2) = 3(k+1) \underbrace{(3k+2)(3k+1)}_q \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \end{array}$$

بنابراین در هر حالت $3 \mid n^3 - n$ دارد.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

$$\begin{array}{l} n \mid a \\ n \mid b \end{array} \Rightarrow n \mid a - bq \quad \frac{a - bq = r}{\text{بافرض } a = bq + r \text{ داریم:}} \quad n \mid r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a از سه حالت زیر یکی وجود دارد:

$$a = 3k \rightarrow 3 \mid a \quad \text{حالت اول}$$

$$a = 3k+1 \rightarrow a+2 = 3k+3 \Rightarrow a+2 = 3(k+1) \Rightarrow 3 \mid a+2 \quad \text{حالت دوم}$$

$$a = 3k+2 \rightarrow a+4 = 3k+6 \Rightarrow a+4 = 3(k+2) \Rightarrow 3 \mid a+4 \quad \text{حالت سوم}$$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متولی عددی فرد است.

با فرض $n \in \mathbb{Z}$ ، دو عدد صحیح متولی را به صورت n و $n+1$ در نظر می‌گیریم:

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n(n+1) + 1 = 3 \underbrace{(3k)}_q + 1 \Rightarrow \text{عدد فرد است.}$$

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متولی همواره بر $3!$ بخش پذیر است.

اعداد صحیح متولی را به صورت $n+1, n, n-1$ در نظر می‌گیریم، بنابراین $n^3 - n$ خواهد شد و تبلاً (ترین $!!$) توان داریم $n^3 - n = 3!n$ بود. بنابراین این حاصل ضرب سه عدد صحیح متولی است.

از طرفی حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متولی ا مضرب 2 است اپنچه حاصل ضرب سه عدد صحیح متولی، بر 2 بخش پذیر است.

بنابراین $n^3 - n$ بر 2 بخش پذیر است. در نتیجه $3!n^3 - n$ بخش پذیر است.

١٦ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^r, m], m^d)$

$$([\underbrace{m^r, m}_{m^r}, m^d] = (m^r, m^d) = m^r \quad , m \neq 0)$$

ب) $(2m, 6m^3)$

$$(2m, 6m^3) = 2|m| \quad , m \neq 0 \quad (\text{تجهیز داشته باشیم} / 2m | 6m^3)$$

ب) $(3m+1, 3m+r)$

$$(3m+1, 3m+r) = 1 \quad (\text{تجهیز داشته باشیم} / 3m+1, 3m+r \text{ دو عدد متوالین})$$

ت) $[m^v, (m^r, m^r)]$

$$[m^v, (\underbrace{m^r, m^r}_{m^r})] = [m^v, m^r] = 1|m^v| \quad , m \neq 0$$

ث) $[(12, 48), 120]$

$$[(\cancel{12}, \cancel{48}), 120] = [24, 120] = 120 \quad (\text{تجهیز داشته باشیم} / 24 | 120)$$

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی مانده‌ها را نماینده یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی مانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱ و ۲ باشد، داریم:

(مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد m ، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعه A_1 را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

بله مضرب ۴ است به طور مثال اگر ۸ و ۱۶ انتخاب شوند $16 - 8 = 8$ مضرب ۴ می‌باشد.

۲ از مجموعه A_1 دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟ بله مضرب ۴ است به طور مثال $13 - 5 = 8$ مضرب ۴ است.

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

$$a, b \in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = 4k_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1)$$

$$\Rightarrow a - b = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid a - b$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعه A_1 همگی بر عدد ۴، باقی مانده یکسان دارند؟ بله

در مورد مجموعه A_3 چه می‌توان گفت؟ تفاضل هر دو عدد دلخواه از A_3 مضرب ۴ است.

می‌دانیم مجموعه‌های A_0, A_1, A_2 و A_3 یک افزار برای مجموعه \mathbb{Z} هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b ، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4) اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) **بنا به تعریف افزار**، نباید اشتراک داشته باشند.

ولذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقي مانده تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد

یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی مانده باشند) همواره $a - b$ بر ۴ و اگر این طور نباشد $a - b$ بر ۴ نه است.

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m \mid a - b$ ، می‌گوییم « a هم نهشت با b است به معنی $a \equiv b \pmod{m}$ »؛ و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. تعریف رابطه هم نهشتی به پیمانه m ، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

مثال: $\begin{cases} 12 \equiv 2 \pmod{5}, & -11 \equiv 1 \pmod{5} \\ 1 \equiv -5 \pmod{3}, & 23 \equiv -7 \pmod{3} \\ -295 \equiv -5 \pmod{3} \end{cases}$

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دسته هم نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم. برای استفاده از رابطه هم نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطه عاد کردن، ویژگی‌های رابطه هم نهشتی به راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

سه خاصیت مهم در هم نهشتی:

۱- برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، $a \in \mathbb{Z}: a \equiv a \pmod{m}$ (هر عدد صحیح با خودش هم نهشت است).

۲- برای هر $m \in \mathbb{N}$ و اعداد صحیح a, b داریم $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

۳- برای هر $m \in \mathbb{N}$ و اعداد صحیح a, b, c داریم $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (خاصیت تعدی)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c \Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

مثال: با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $7 \equiv -1 \pmod{4}$ یا $(-1) + 7 \equiv 0 \pmod{4}$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم نهشتی اضافه کنیم فاصله این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعداد حاصل یعنی $12 = 7 + 5$ و $4 = 1 + 5$ نیز در A_4 قرار خواهد گرفت.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid c \times (a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، لزوماً نمی‌توان تبیجه گرفت که $ac \equiv bc \pmod{m}$ (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزند.

۲

۳

۲ × ۲ ≡ ۳ × ۲ و لی

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.)

مثال : $(5 \equiv 2 \Rightarrow 5^n \equiv 2^n)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a - b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c$$

$$\Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

تذکر : می‌دانیم $3^4 \equiv 1 \pmod{4}$ ولی $3^4 \not\equiv 2 \pmod{4}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که عکس ویژگی ۳ برقرار نیست.

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd & \textcircled{1} \\ a+c \equiv b+d & \textcircled{2} \\ a-c \equiv b-d & \textcircled{3} \end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv 1 \pmod{5}, 7 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 1 \times 2 \pmod{5} \text{ و } 15 \times 2 \equiv 1 \times 1 \pmod{5})$$

$$15 + 7 \equiv 1 + 2 \Rightarrow 22 \equiv 12 \pmod{5}$$

اثبات ۱ :

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m | a - b \xrightarrow{\times c} m | ac - bc \\ c \equiv d &\Rightarrow m | c - d \xrightarrow{\times b} m | bc - bd \\ \Rightarrow m | ac - bd &\Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m | a - b \\ c \equiv d &\Rightarrow m | c - d \end{aligned} \xrightarrow{\pm} m | (a - b) \pm (c - d) \Rightarrow m | (a \pm c) - (b \pm d) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$

اثبات ۲ و ۳ به عهده شما :

تذکر مهم : اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت

$$\begin{aligned} a &= mq + r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m} \\ (179 &= 11 \times 16 + 3 \Rightarrow 179 \equiv 3 \pmod{11}) \end{aligned}$$

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m | a - r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m}$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را بدست آوریم.

$$\text{مثال: } 296 \equiv ? \pmod{11} \rightarrow 296 \equiv 1 \pmod{11}$$

نتیجه ۲: اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$.

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 27^7 + 19$ بر 13 را برابر 13 باید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow \underbrace{(27)^7 \equiv 1^7 \equiv 1}_{\text{با توجه به }} \quad \text{و} \quad 19 = 13 \times 1 + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{19 \equiv 6}_{\text{با توجه به }} \xrightarrow{\text{با توجه به }} (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \xrightarrow{\text{با توجه به }} A \equiv 7 \Rightarrow r = 7$$

پس باقی‌مانده A بر 13 ، برابر با 7 می‌باشد.

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $(1000)^7 + 12 + 1$ بر 7 را برابر 7 باید.

$$1000 \equiv 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6 \pmod{7} \quad \text{و} \quad 6 \equiv -1 \Rightarrow 1000 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^7 \times 12 \equiv (-1) \times 12 \equiv -12 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^7 \times 12 + 1 \equiv -12 + 1 \equiv -11 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^7 \times 12 + 1 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow r = 5$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۵: می‌توان به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضری از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\stackrel{\text{طبق فرض}}{\Rightarrow} a \pm mt \equiv b \pm mk \\ mt \equiv mk &\stackrel{\text{می‌دانیم}}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

مثال: می‌دانیم $7 \equiv 2 \pmod{5}$ اگر به سمت چپ رابطه $15 = 5 \times 3$ و به سمت راست آن $25 = 5 \times 5$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت
 $7 + 15 \equiv 2 + 25 \pmod{5}$ یا $22 \equiv 27 \pmod{5}$ که این رابطه برقرار است.

ویزگی های بخواهیم

$$ac \stackrel{m}{\equiv} bc, (c, m) = d \Rightarrow a \stackrel{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویزگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه همنهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید بیمانه آن هم نهشتی را برابر م آن عدد و بیمانه تقسیم کنیم. (این ویزگی را بدون اثبات می پذیریم)

نتیجه مهم: اگر $ac \stackrel{m}{\equiv} bc$ و $(c, m) = d$ در این صورت $a \stackrel{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدة حذف در همنهشتی ها، برای هر عدد که نسبت به بیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال: واضح است که $3 \stackrel{3}{\equiv} 4 \times 6 = 4 \times 3$ و چون $1 \stackrel{3}{\equiv} 3$ پس $3 \stackrel{3}{\equiv} 3$.

فعالیت

همان طور که در دوره ابتدایی آموختید عدد نویسی در مبنای ۱۰ انجام می شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می شود (ده تا یکی می شود ده تا و ده تا ده تایی می شود صد تا و ده تا صد تایی می شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1 \times 10^0 + 3 \times 10^0 + 9 \times 10^0 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$1388109 = 1 \times 10^9 + 3 \times 10^8 + 8 \times 10^7 + 8 \times 10^6 + 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 9$$

$$12571122 = 1 \times 10^9 + 3 \times 10^8 + 5 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + 1 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 2$$

۲ باقی مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر عدد ۹ بیاید.

می دایم $1 \stackrel{9}{\equiv} 1$ و بنابر ویزگی های رابطه همنهشتی $1 \stackrel{9}{\equiv} 1$ بنابراین:

$$A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2$$

$$10^6 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1 \times 10^6 \stackrel{9}{\equiv} 1$$

$$10^5 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 3 \times 10^5 \stackrel{9}{\equiv} 3$$

$$10^4 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 5 \times 10^4 \stackrel{9}{\equiv} 5$$

$$10^3 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 8 \times 10^3 \stackrel{9}{\equiv} 8$$

$$10^2 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1 \times 10^2 \stackrel{9}{\equiv} 1$$

$$10^1 \stackrel{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1 \times 10^1 \stackrel{9}{\equiv} 1$$

$$2 \equiv 2$$

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

با جمع طرفین همنهشتی ها داریم:

اگر دقت کنید سمت راست هم نهشتی اخیر مجموع ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقي مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹».

عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0}$ را بسط دهید و در هم نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان 1^0 عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$\begin{aligned} A &= 1^0 \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots + 1^0 \times a_1 + 1^0 \times a_0 + 1^0 \times a_0 \\ &\stackrel{9}{\Rightarrow} A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \\ &\stackrel{9}{\Rightarrow} A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 + a_0 \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $1^0 \equiv 1$ ، $1^1 \equiv 1$ ، $1^2 \equiv 1$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$ ، $1^k \equiv 1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی مانده تقسیم عدد $A = 598348$ بر ۳ باید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $-1^0 \equiv 1$ ؛ بنابراین برای هر n زوج $1^0 \equiv 1$ و برای هر n فرد، $-1^0 \equiv -1$. حال اگر در هم نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A = 4985327$ به جای توان‌های زوج عدد 1^0 ، عدد ۱ و به جای توان‌های فرد عدد -1^0 ، عدد -1 قرار دهیم باقی مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ باید.

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 1^0 + 9 \times 1^0 + 8 \times 1^0 + \dots + 2 \times 1^0 + 7 \\ &\stackrel{11}{\Rightarrow} A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7 \\ &\stackrel{11}{\Rightarrow} A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots \end{aligned}$$

۳ می‌دانیم $1^0 \equiv 1$ و $1^2 \equiv 1$ و $1^5 \equiv 1$ در این صورت:

$$\forall k \in \mathbb{N}; 1^k \equiv \dots \quad 1^k \equiv \dots \quad 1^k \equiv \dots$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ به جای توان‌های عدد 1^0 (در هم نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و 1^0) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= 1^0 \times a_{n-1} + 1^0 \times a_{n-2} + \dots + 1^0 \times a_1 + 1^0 \times a_0 + a_0 \\ &\stackrel{2}{\Rightarrow} A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + \dots + a_1 + \dots + a_0 \\ &\stackrel{2}{\Rightarrow} A \equiv \dots \quad A \equiv \dots \quad A \equiv \dots \quad A \equiv a_0 \end{aligned}$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقی مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و 1^0 و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

۱ با توجه به اینکه $1^0 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم، $1^k \equiv 1$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$ ، مشابه فعالیت قبل، باقیمانده تقسیم عدد $A=598328$ را بر ۳ باید و سپس یک قاعده کلی برای باقیمانده تقسیم و بخش پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} 10^5 \equiv 1 \xrightarrow{\times 5} 5 \times 10^5 \equiv 5 \\ 10^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 9} 9 \times 10^4 \equiv 9 \\ 10^3 \equiv 1 \xrightarrow{\times 8} 8 \times 10^3 \equiv 8 \\ 10^2 \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \times 10^2 \equiv 3 \\ 10^1 \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \times 10^1 \equiv 4 \\ 10^0 \equiv 1 \xrightarrow{\times 8} 8 \end{array} \right\} \rightarrow A \equiv 5 + 9 + 8 + 3 + 4 + 8 \Rightarrow A \equiv 1 \Rightarrow r = 1$$

قاعده: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳.

۲ می‌دانیم که $1^0 \equiv 1$: بنابراین برای هر n زوج، $1^0 \equiv 1$ و برای هر n فرد، $1^0 \equiv -1$. حال اگر در همنهشتی به پیمانه ۱۱ در بسط عدد $A=4985327$ به جای توانهای زوج عدد ۰، عدد ۱ و به جای توانهای فرد عدد ۱، عدد (-۱) قرار دهیم باقیمانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ باید.

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10^0 + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 4 \times 1 + 9 \times (-1) + 8 \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

۳ می‌دانیم $1^0 \equiv 1$ و $1^5 \equiv 0$ و $1^0 \equiv 1$ در این صورت: بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ به جای توانهای عدد ۱۰ (در همنهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= 1^{n-1} a_{n-1} + 1^{n-2} a_{n-2} + \dots + 1^1 a_1 + 1^0 a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + 0 \times a_{n-2} + \dots + 0 \times a_2 + 0 \times a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv a_0 \quad \text{و} \quad A \equiv a_0 \end{aligned}$$

نتیجه حاصل را برای باقیمانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش پذیری بر این اعداد را بیان کنید. باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ می‌باشد. بنابراین عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن عددی زوج باشد.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۵ می‌باشد. بنابراین عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۵ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن صفر یا پنج باشد.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰، همان رقم یکان آن عدد می‌باشد. بنابراین عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان صفر باشد.

یکی از کاربردهای همنهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به عنوان مثال: اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سوالاتی شبیه این سوال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت $19 = 12 + 7$ فروردین و $26 = 19 + 7$ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اول همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که، به جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟ با توجه به مطالعه مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز **جمعه** می‌رسیم.

حال اگر فاصله ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم ($28 - 9 = 19$) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $5 \equiv 7 \pmod{7}$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟
۱۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن،
فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $131 = 12 + 3 \times 30 + 12 = 131 \pmod{7}$

از طرفی $131 \equiv 5 \pmod{7}$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ۵ یکشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.
۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

می‌دانیم هفتم تیر پنجشنبه می‌باشد. بنابراین

$$d = (31 - 7) + 2 \times 31 + 4 \times 30 + 22 \equiv 3 + (-1) + 1 + 1 = 4 \pmod{7}$$

ش	ی	د	س	ج	پ	ج
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

دوشنبه است.

معادله همنهشتی

تعریف: یک رابطه همنهشتی همراه با مجھولی چون x^m به فرم $ax^m \equiv b \pmod{n}$ را یک معادله همنهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادله همنهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x \in \mathbb{Z}^m$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax^m \equiv b \pmod{n}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$.

۱۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به عنوان مثال، معادله $x \equiv 2^3$ را در نظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف همنهشتی استفاده کنیم،

$$x \equiv 2^3 \Rightarrow 3|x-2 \Rightarrow (x-2) = 3k \Rightarrow x = 3k+2$$

که اگر k را به ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x=2$ و $x=5$ و $x=8$ را بدست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$ جوابی برای معادله بدست می‌آید. در معادله فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال: جواب‌های عمومی معادله $4x \equiv 17^5$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 17^5, 17^5 & 4x &\equiv 2^5 \\ &\text{ویژگی } 5 & \Rightarrow 4x &\equiv 2 + (2 \times 5) \\ &\Rightarrow 4x &\equiv 12 & \Rightarrow 4x &\equiv 2^3 \times 3 \\ &\Rightarrow x &\equiv 3 & \Rightarrow x &\equiv 5k + 3 \end{aligned}$$

$$(5|x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow x=5k+3)$$

مثال: همه اعداد صحیحی را باید که سه برابر آنها منهای ۱۳ باشند.

حل: اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $13|3x-7$ یا $3x \equiv 13^7$

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 13^7 \Rightarrow 3x &\equiv 13^7 - 7 = 6 \\ &\text{ویژگی } 7 & \Rightarrow 3x &\equiv 2^7 \times 2 \Rightarrow x = 2^6 k + 2 \end{aligned}$$

قضیه: معادله همنهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) | b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ چون برای هر b ، همواره $1|b$ پس معادله $ax \equiv b^m$ همواره دارای جواب است.

مثال: معادله $11^6x \equiv 11^9$ دارای جواب نیست زیرا، $3 = 11^6 \cdot 9$ و $3|11^9$ دارای جواب است. چرا؟ چون $2|18 = 2(4, 6)$

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 18^6 \Rightarrow 2 \times 2x &\equiv 2 \times 9^6, (2, 9) = 2 \\ &\text{ویژگی } 6 & \Rightarrow 2x &\equiv 9 \\ &\Rightarrow 2x &\equiv 9 & \Rightarrow 2x &\equiv 9 \\ &\Rightarrow 2x &\equiv 9 + 3 = 12 & \Rightarrow 2x &\equiv 2^3 \times 6 \\ &\Rightarrow 2x &\equiv 6 \times 6 & \Rightarrow x &\equiv 3k + 6 \end{aligned}$$

این معادله را حل کنید:

حل معادلات سیاله و کاربردهای آن

فعالیت

- ۱) آیا می‌توانید یک کيسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید) از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم) یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است.

$$4 \times 4 + 1 \times 3 = 19$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$1 \times 4 + 3 \times 5 = 19$$

در واقع شما بدنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله $4x+3y=19$ هستید.

(x) تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

- ۲) اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟ باید جواب‌هایی چون $W = y$ و $x = y$ بیابیم که $4 \times x + 2 \times y = 19$ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعريف: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c \in \mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادله مذکور ($ax+by=c$) را یک معادله هم‌جهانه درجه اول یا خطی می‌نامیم.

تبديل یک معادله سیاله به معادله هم‌جهانه

معادله سیاله $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله هم‌جهانه (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$\begin{aligned} ax+by=c &\Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b|ax-c \Rightarrow b|ax-c \\ &\Rightarrow ax \equiv c \quad (b > 0) \quad \text{و} \quad ax \equiv c \quad (b < 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \\ &\Rightarrow by \equiv -a \quad \text{و} \quad by \equiv a \end{aligned}$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

تذکر: برای سهولت در حل معادله سیاله، بهتر است از بین دو عدد $|a|$ و $|b|$ ، هر کدام کوچکتر است به عنوان پیمانه انتخاب شود.

به عنوان نمونه در حل معادله سیاله $2x+3y=7$ ، می‌توان به دو صورت معادله هم‌جهانه نوشت: $2x \equiv 7 - 3y$ یا $3y \equiv 7 - 2x$ ولی بهتر است در حالتی که پیمانه کوچکتر است، یعنی $3y \equiv 7 - 2x$ نوشه شود.

تذکر: با توجه به قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a, b) | c$ »

با تبدیل معادله سیاله $4x + 5y = 9$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را باید.

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 9 \Rightarrow 4x \equiv 9 \\ &\Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 \Rightarrow 4x \equiv 4 \\ &\Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 5k + 1 \\ &\Rightarrow 4(5k+1) + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 5y = 5 \\ &\Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = -4k + 1 \end{aligned}$$

در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کردی به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.
کافی است جواب‌های عمومی معادله $19 = 4x + 3y$ را (بر حسب k) بیابیم و به ازای هر $x, y \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد
حالات را شمارش کنیم:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \\ &\Rightarrow 4x \equiv 1 \Rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \\ &\Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1 \\ &\Rightarrow 4(3k+1) + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 3y = 15 \Rightarrow 4k + y = 5 \\ &\Rightarrow y = -4k + 5 \\ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای $k = 2$ و بیشتر از آن $x < 0$ و به ازای $k = -1$ و کمتر از آن $x > 0$ که قابل قبول نمی‌باشند ولذا به دو صورت فوق
می‌توان این کیسه ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد?
حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با بعدها
جواب‌های نامنفی $0 \leq x, y \leq 18000$ که $2000x + 5000y = 18000$

$$2x + 5y = 18 \quad \text{(معادله ۱)}$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 18 \quad \text{و} \quad 18 \equiv 8 \quad \text{(که } 8 \text{ بزرگتر از } 5 \text{ است)}$$

$$\Rightarrow x \equiv 8 \times 4 \quad \text{(که } 4 \text{ بزرگتر از } 5 \text{ است)}$$

$$\Rightarrow x \equiv 8 \Rightarrow x = 5k + 3 \quad \text{(که } 3 \text{ بزرگتر از } 5 \text{ است)}$$

$$\Rightarrow 2(5k + 3) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 6 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 6 + 5y = 18 \Rightarrow y = -2k + 2$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases}$$

(فقط به ازای $k=0$ برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن $18 = 5x + 2y$ ترمان به اسکناس‌های 2000 و 5000 تومانی، وجود دارد.

مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سازی و قیمه وجود دارد. اگر 5 نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا می‌می‌کند)

حل: اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سازی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = k + 5$$

$$\Rightarrow k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $\{ -5, -4, -3, -2, -1, 0 \} \ni k$ و لذا به 6 طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.

مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک‌تر بزنند 5 امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزنند 3 امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از 15 تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ تراصحت کرده باشد و در پایان 42 امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابات‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 42 + 3 \Rightarrow 5x \equiv 3 \times 9$$

$$\Rightarrow x = 9k + 3$$

$$5(3k + 3) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow y = -5k - 1$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}$$

و $y=4$ یعنی تبرانداز ۶ تبر را به دایرة کوچک تر و ۴ تبر را به دایرة بزرگ تر زده است).

تمرين یافسخ

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم نهشتی به یمانه ۹ تعلق دارد؟

$$1398 \stackrel{9}{=} 1+3+9+8 \stackrel{9}{=} 3 \quad \text{برداشت هم نهشتی} \Rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9k + 3\}$$

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است

$$k \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 2 \pmod{3} \quad (\text{به عبارت دیگر، } k \in [0] \cup [1] \cup [2])$$

باقي مانده تقسیم هر عدد صحیح همچوون k بر عدد ۳، یعنی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می باشد به عبارت دیگر

$$k \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{و طبق تعریف هم نهشتی}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \xrightarrow{\text{تعریف}} n \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n} \quad \text{اگر } n \mid m \text{ و } a \equiv b \pmod{m} \text{ ثابت کنید}$$

$$\begin{array}{c} a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{\text{تعریف}} a \equiv b \pmod{d} \\ b \equiv c \pmod{n} \xrightarrow{\text{تعریف}} b \equiv c \pmod{d} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} d \mid a \equiv b \pmod{m} \\ d \mid b \equiv c \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d} \quad \text{در این صورت ثابت کنید } (m, n) = d \text{ و } b \equiv c \pmod{d} \text{ و } a \equiv b \pmod{d}$$

۴ ثابت کنید: اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن گاه $a \equiv b \pmod{m}$

روشن اول: بگیریم باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر m برابر باشند در نتیجه

$$\begin{array}{l} a = mq_1 + r \\ b = mq_2 + r \end{array} \Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2) \Rightarrow m \mid a-b \quad \text{و شد} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

۵ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس تمرین ۵: اگر $a \equiv b$ آنها باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی است.

اثبات: بگیریم باقی مانده تقسیم a بر m برابر r_1 و باقی مانده تقسیم b بر m برابر r_2 باشند، پس:

$$\begin{array}{l} a = mq_1 + r_1 \\ b = mq_2 + r_2 \end{array} \Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \quad (1)$$

$$\text{از طرفی: } a \equiv b \Rightarrow a - b = m q'' \quad (2)$$

$$\underline{(1), (2)} \quad m q'' = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = m(q'' - q_1 + q_2) \Rightarrow m \mid r_1 - r_2 \quad \left(\begin{array}{l} r_1, r_2 < m \\ 0 \leq r_1, r_2 < m \Rightarrow |r_1 - r_2| < m \end{array} \right) \Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

. $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$ هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ همواره ثابت کنید که برای هر

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) a^n = a^n \stackrel{ab}{\equiv} a^n$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) a^{n-1} b \stackrel{ab}{\equiv} 0$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) a^{n-r} b^r \stackrel{ab}{\equiv} 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) a b^{n-1} \stackrel{ab}{\equiv} 0$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) b^n = b^n \stackrel{ab}{\equiv} b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $1251 - 1151 - 2351$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

$$(23) \stackrel{a_1}{=} (11+12) \stackrel{11 \times 12}{=} 11^{a_1} + 12^{a_1} \quad \text{طبق نظریه قبل (نظریه لا مولن نوستے)} \\ \underline{-11^{a_1} - 12^{a_1}} \rightarrow 23^{a_1} - 11^{a_1} - 12^{a_1} \stackrel{122}{=} 0 \quad \text{عدد } 12^{a_1} - 11^{a_1} - 23^{a_1} \text{ بخش پذیر است} \rightarrow$$

$$A = (2^{11} + 7) \times 9$$

$$\begin{aligned}
 & r^{\infty} \equiv q \xrightarrow{\text{I. Col}} r^1 \equiv 81 \xrightarrow{\cancel{N \equiv 1}} r^1 \equiv 12 \xrightarrow{\times r} r^0 \equiv 23 \\
 & r^0 \equiv 1 \xrightarrow{\text{I. Col}} r^1 \equiv 1 \xrightarrow{+v} r^1 + v \equiv 1 \xrightarrow{\times 9} (r^1 + 1) \times 9 \equiv 12 \\
 & 12 \equiv r \Rightarrow A \equiv r \Rightarrow r = v
 \end{aligned}$$

۱۰ اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را بدست آورید.

طبق تصریح شده، دو عدد $a-3$ و $a-7$ به سیانه شد، با این پرورش نهادن از:

$$f(a) - v \stackrel{1.}{=} r(a - d) \Rightarrow f(a) - r(a) \stackrel{1.}{=} v - d \Rightarrow a \stackrel{1.}{=} r$$

$$\xrightarrow{x^q} ra \stackrel{1.}{=} 1 \wedge \xrightarrow{+r} ra + q \stackrel{1.}{=} r\varepsilon \xrightarrow{r\varepsilon \stackrel{1.}{=} \varepsilon} ra + q \stackrel{1.}{=} \varepsilon \Rightarrow \text{رقم طلب}$$

III باقیمانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 5000!$ را برابر با 10 به دست آورید (رقم يکان A را بایابد)

$$\begin{aligned} 1! &\equiv 1 \\ 2! &\equiv 2 \\ 3! &\equiv 6 \\ 4! &= 24 \equiv 4 \\ 5! &= 120 \equiv 0 \\ 6! &\equiv 0 \\ \vdots & \\ n! &\equiv 0 \end{aligned}$$

+ $\rightarrow A \equiv 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + \dots + 0 = 13 \xrightarrow{13 \equiv 3} A \equiv 3$
رقم يکان عدد A است.

IV جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

$$\Rightarrow vx \stackrel{\Delta}{=} 11 \Rightarrow vx \stackrel{\Delta}{=} 11 + 2 \times d = 21$$

$$\xrightarrow{v} x \stackrel{\Delta}{=} 3 \Rightarrow x = dk + 3, k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{vx + dy = 11} v(dk + 3) + dy = 11 \Rightarrow y = -vk - 2, k \in \mathbb{Z}$$

V به چند طریق می‌توان 29000 تومان را به اسکناس‌های 2000 و 5000 تومانی تبدیل کرد؟

تعداد اسکناس $\frac{29000}{2000}$ تومانی را 14 و تعداد اسکناس $\frac{29000}{5000}$ تومانی را 5 در نظر بگیریم با بررسی:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{2000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \stackrel{\Delta}{=} 29 \Rightarrow y \stackrel{\Delta}{=} 29 - 12 \times 2 = 1 \xrightarrow{5} y \stackrel{\Delta}{=} 1 \Rightarrow y = 2k + 1$$

$$2x + 5y = 29 \xrightarrow{5y = 2k + 1} 2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow x = -5k + 12$$

	k	0	1	2
$y = 2k + 1$: تعداد اسکناس‌های 5000 تومانی		1	3	5
$x = -5k + 12$: تعداد اسکناس‌های 2000 تومانی		12	7	2

به ۳ طریق می‌توان خود را در تعداد اسکناس‌های 5000 تومانی تبدیل کرد

VI معادله‌های هم‌نهاستی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 4223x \stackrel{\Delta}{=} 79 & \quad (\text{الف}) \quad 4223 = 4 \cdot 1055 + 3 \Rightarrow 4 \cdot 1055 \stackrel{\Delta}{=} 0 \\ & \Rightarrow 3 \stackrel{\Delta}{=} 4223x \stackrel{\Delta}{=} 0 \Rightarrow x \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad \text{صیغه} \end{aligned}$$

$$8x \stackrel{\Delta}{=} 20 \quad (\text{ب})$$

$$8x \stackrel{\Delta}{=} 20 - 16 = 4 \xrightarrow{8 \mid 4} x \stackrel{\Delta}{=} 1 \Rightarrow x = r k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$51x \stackrel{\Delta}{=} 11 \quad (\text{ج})$$

$$(11, 51) = 11, 3 \nmid 11 \Rightarrow \text{معارل جواب تنازد}$$

۱۵ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

$$\text{استناد} + \text{مکان} + \text{سی} + \text{آخر} + \text{آبان} + \text{مهر} = (n-1) + \varepsilon \times ۳۰ + V \equiv ۲$$

۱۶ اگر ۱ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

$$2 = ٢١ + ٤ \times ٣ + ١٢ = جملة + مفرد + آليات + أذر + جملة$$

در جدول برای روز جمعه عذر ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن را تغییر مینماییم، عذر صفر
ج ب ع ش ی > س بر روی طبقه لایسرداد است.

۱۳ مرداد خارشته شد و سپس میگردید

۱۷ همه اعداد صحیح جون a را باید که 5 برای آنها به علاوه 9 بر 11 بخشیده باشد.

$$da + q \equiv 0 \Rightarrow da \equiv -q \Rightarrow da \equiv -q + \varepsilon \times 11 = r_d \div 11 \Rightarrow a \equiv v \Rightarrow a = 11k + v, k \in \mathbb{Z}$$

۱۸ به حیند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلوگرمی را با وزنهای ۳ و ۵ کیلوگرمی وزن کرد؟

تعداد وزنهای سلیمانی اماکن متعدد موزه های کلیون را با نشانی دهنده بنا برآورد:

$$rx + dy = rr \Rightarrow dy \equiv rr \pmod{r} \Rightarrow dy \equiv rr - r = r \pmod{r} \Rightarrow y \equiv c \pmod{r} \Rightarrow y = rk + c$$

$$rx + \alpha j = rr \Rightarrow rx + \alpha(rk + \epsilon) = rr \Rightarrow x = -rk + 1$$

k	0	-1
$y = 3k + 4$	4	1
$x = -dk + 1$	1	9

ید در طرق می توان وزن کرد

۱۹ به حند طریق می‌توان ازین دو نوع گل یک دسته کا شامانی شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

تعداد گل های نمودار را α و تعداد گل های نمودار دوم را β می نامیم ، بنابراین :

$$x + y = 9 \Rightarrow x = -y + 9 \Rightarrow x = 9 - y \Rightarrow x = k + 9 - k \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow k + 9 + (-k) = 9 \Rightarrow 9 = 9$$

	k	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
١	$x = k + 9$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
٢	$y = -k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

سده طرق من تواریخ است دسته مملکت اسلامی و ساخته تکیه است.

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی، شرکت کرده است. او به سوالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز

کس کده است. این شخص به جه صورت های ته انته این امتیاز را بدست آورد؟ (یاسنی به هر سؤال این امتیاز کاملاً خارج از امتیازی ندارد)

تعداد سوالات ۷ استانی / استان کامل رتبه ۱۱۰ و تعداد سوالات ۹ استانی / استان کامل رتبه ۱۱۰ ناسخ

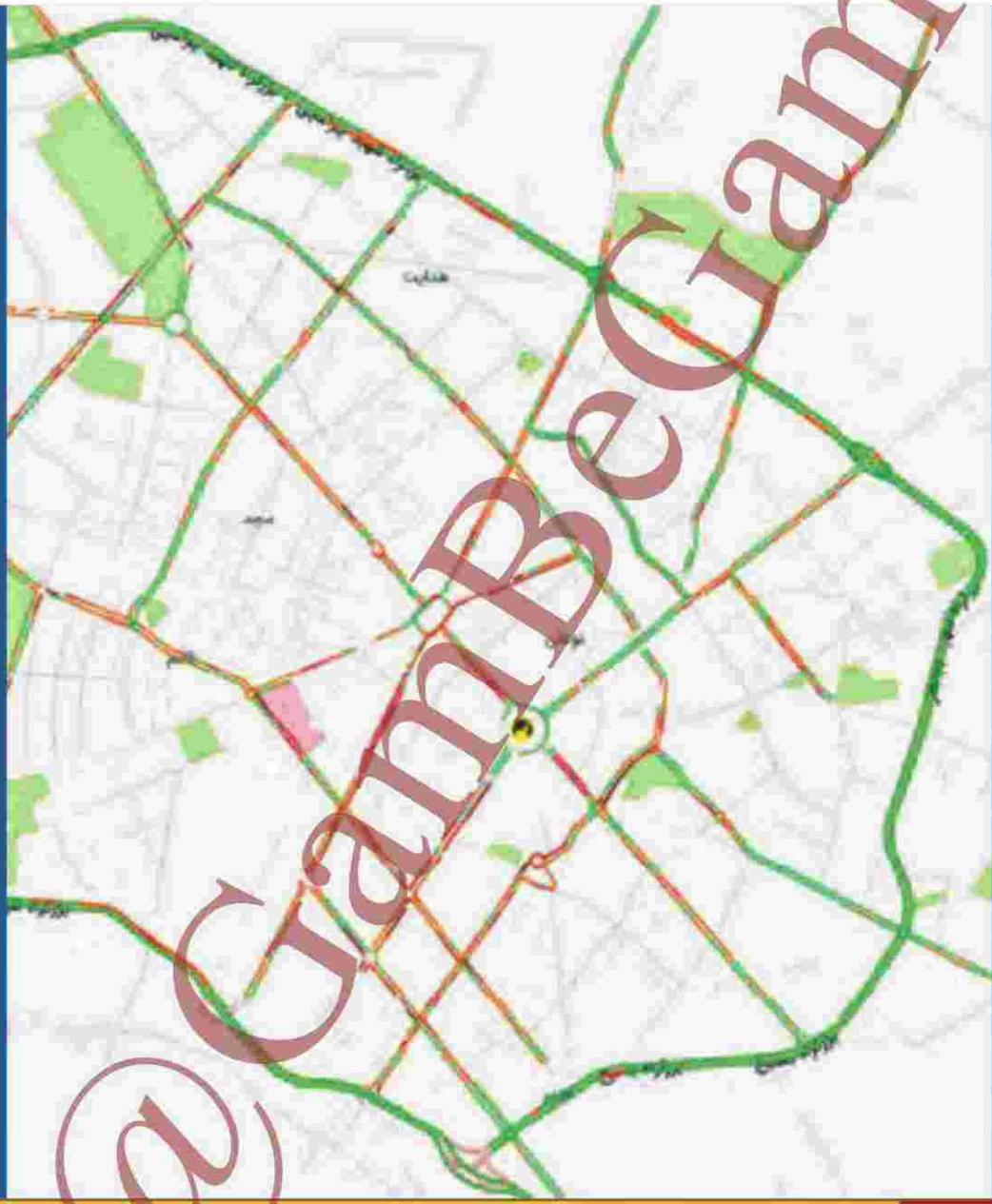
$$v_2 + 9y = v_3 \rightarrow 9y \equiv v_3 \pmod{v} \rightarrow 9y \equiv 3 \pmod{v} \rightarrow y \equiv 1 \pmod{v} \rightarrow y \equiv 1 - v = -8$$

می دھم، بنابرائے:

$$\frac{+v}{+v} \Rightarrow y = v - r \Rightarrow y = vk - r \quad \underline{vx + qy = vr} \quad vx + q(vk - r) = vr \Rightarrow x = -qk + r$$

فقط یہ صورت ممکن نہ اس تصور کے لئے کہ جو $\alpha = \epsilon$ اور $J = \omega$ کے لئے $k=1$ کا حل ممکن ہے۔

@Gambegam-Darsi



@

گراف و مدل سازی

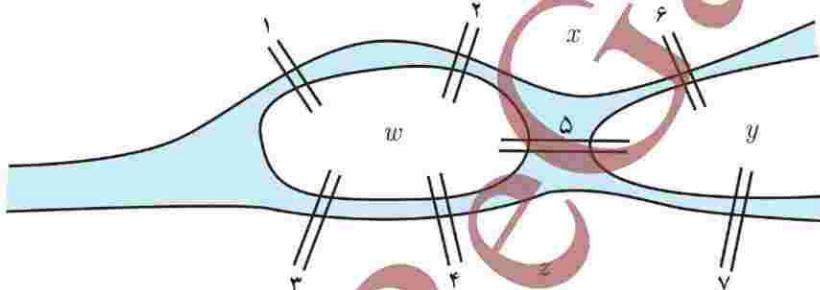


اینست

درس ۱ معرفی گراف

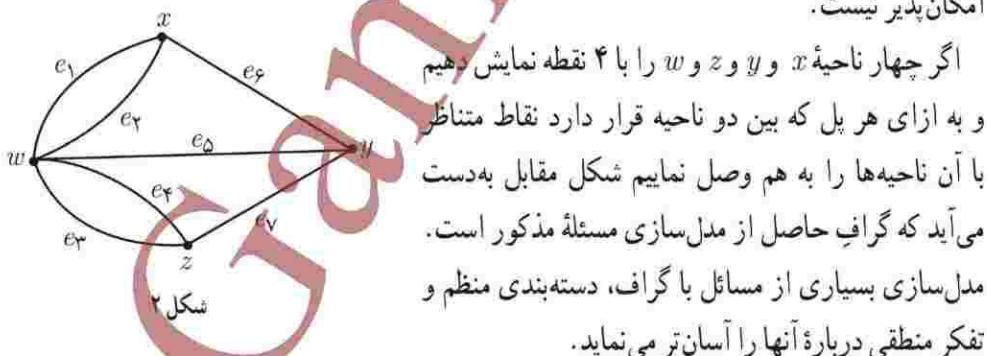
در اوایل قرن هجدهم، معماهی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر^۱ (۱۷۰۷ – ۱۷۸۳)، ریاضی‌دان بر جسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



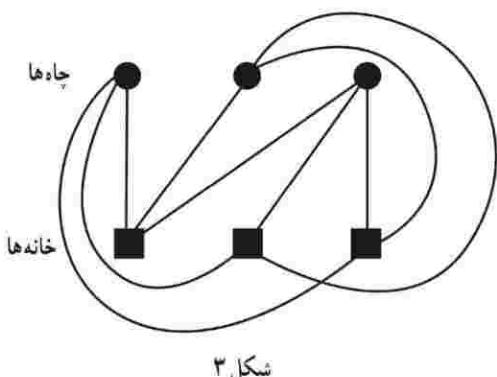
اگر چهار ناحیه x و y و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می‌آید که گراف حاصل از مدل‌سازی مسئله مذکور است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی درباره آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئله اویلر می‌دانند، اما بی‌تدید

^۱ Leonhard Euler

متکران و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به طور مثال در حدود ۱۰۰۰ سال پیش از آن شیخ بهلی، ریاضی‌دان ایرانی^۱ (۹۲۵-۱۰۰۰ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد:

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۲

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اول به تک تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لاقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند. حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال: ۵ تیم فوتبال a, b, c, d, e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دو به دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم:

تیم a تیم‌های b و e را برد و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برد است.

تیم c از تیم‌های a و e برد است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برد است.

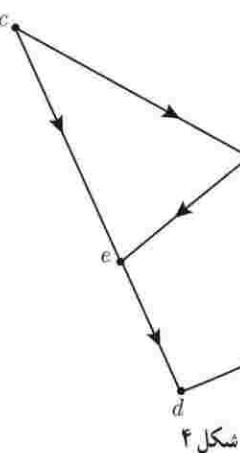
برای نمایش تمام اطلاعات بالا به صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سوال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

- مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

c, d ، c, b ، e, b ، d, a بازی نکرده‌اند.

- اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟ **c, a**



شکل ۴

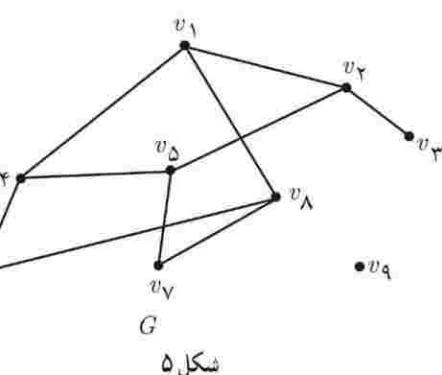
۱- دکtor مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، بکی از پیشگامان نظریه گراف در ایران است. بسیاری از بیوگرافی‌گران در این زمینه او را بدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله: سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

سوال: کدام تیم فقط بُرد و کدام تیم فقط باخت داشته است؟

پاسخ: تیم C فقط بُرد و تیم D فقط باخت داشته است.

همان‌طور که دیدیم یک گراف مشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط رأس و به هر یک از پاره‌خط‌ها یال می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سری یال بالا رأسی قرار داشته باشد. همان‌طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوه نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.



شکل ۵

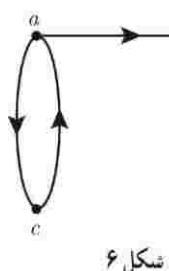
گراف G را با ۹ رأس و ۱۲ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم. با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌های آن را با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعه یال‌ها و رئوس آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_9\} \quad \text{مجموعه رأس‌های گراف } G$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_1v_4, v_1v_8, v_2v_8, v_3v_9, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_6v_8, v_7v_8, v_8v_9\} \quad \text{مجموعه یال‌های گراف } G$$

بهوضوح، با داشتن شکل گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $|V(G)|$ (تعداد اعضای مجموعه $V(G)$) که آن را با n نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متضاظر را به هم وصل نمایید.

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتbal ملاحظه کردید کاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم. به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعه رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این‌گونه نمایش می‌دهیم.

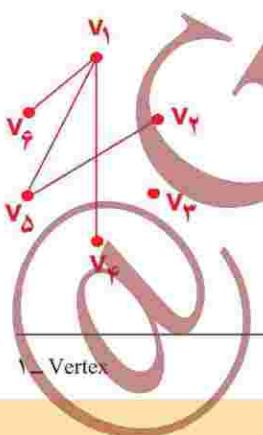


شکل ۶

کار در کلاس

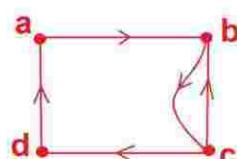
- دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

(الف) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$
 $E(G) = \{v_1v_4, v_2v_5, v_6v_1, v_5v_1\}$



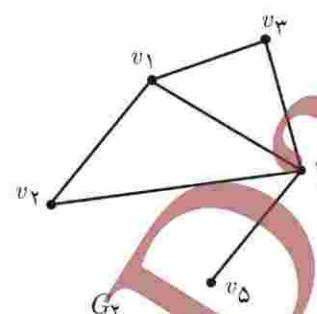
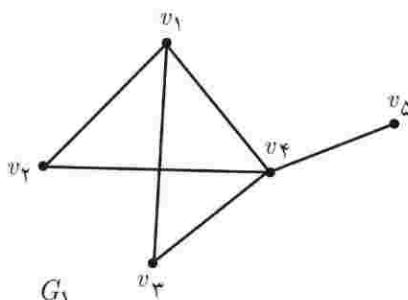
۱—Vertex

(ب) $V(G) = \{a, b, c, d\}$
 $E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a)\}$



۲—Edge

توجه: برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتند مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل های زیر، شان دهید ہر دو یک گراف را نمایش می دهند.



شکل ۷

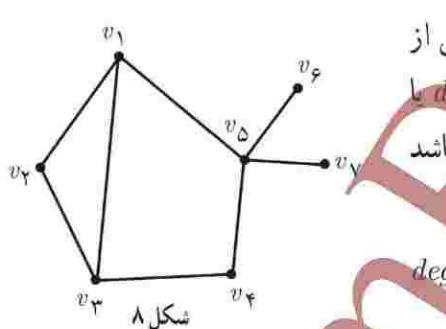
$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$$

$$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5v_5\}$$

■ مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رأس های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبه آن گراف می گوییم و با $p(G)$ نمایش می دهیم و تعداد یال های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازه گراف G می گوییم و با $q(G)$ نمایش می دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می کنیم. به طور مثال گراف های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبه ۵ و اندازه ۶ هستند. بنابراین $p=5$ و $q=6$.



■ درجه یک رأس: درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال هایی از گراف G که به رأس v متصل اند و آن را با $\deg_G(v)$ یا به طور ساده تر با $\deg(v)$ نمایش می دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می نامیم. به طور مثال در شکل مقابل داریم:

$$\deg(v_3) = 3, \quad \deg(v_5) = 4$$

■ گراف K -منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k -منتظم می نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسی ۳-منتظم است.



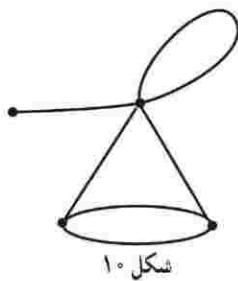
■ رأس تنها: به رأسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می گوییم.

■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می نامیم. بنابراین منظور از گراف تهی n رأسی، گرافی شامل n رأس تنها و بدون یال است.

درجه سایر رئوس گراف شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج اند.

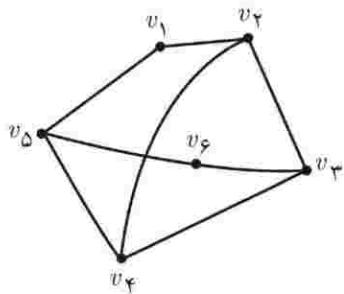
$$d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 1, d(v_4) = 1 \Rightarrow \text{رئوس درجه فرد}$$

$$d(v_5) = 2, d(v_6) = 2, d(v_7) = 4 \Rightarrow \text{رئوس درجه زوج}$$



شکل ۸

یعنی دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال طوفه^۱ گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۰

■ **دو رأس مجاور (همسایه):** دو رأس v و w را دو رأس همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند. یعنی $uv \in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_4 با رئوس v_1 و v_3 و v_6 همسایه است.

توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ **مجموعه همسایه‌های یک رأس:** فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته رأس v » را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

به طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:

$$N_G(a) = \{b\}$$

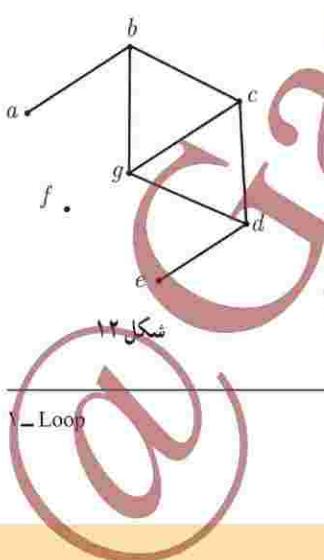
$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

$$N_G[a] = \{a, b\}$$

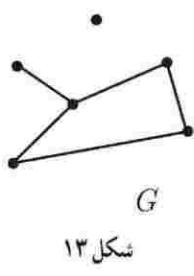
$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G[f] = \{f\}$$



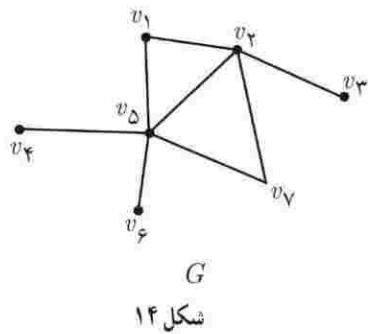
شکل ۱۲

■ **دو یال مجاور:** دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

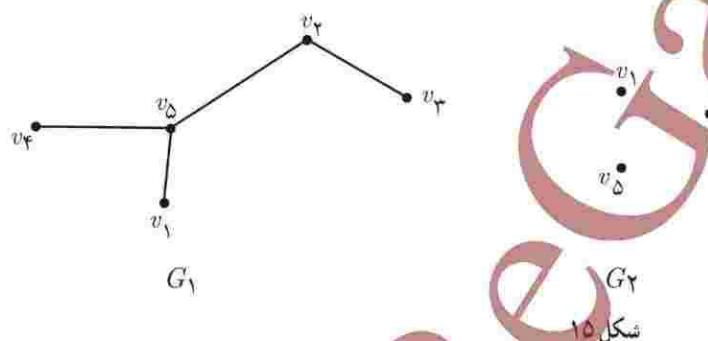


■ بزرگترین و کوچکترین درجه یک گراف: بزرگترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و له ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم:

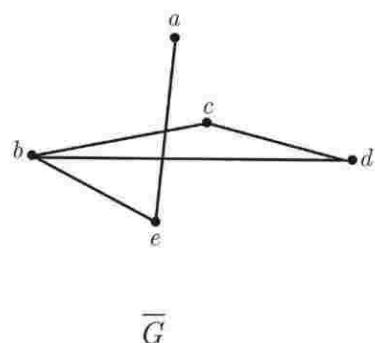
$$\Delta(G) = 3 \quad , \quad \delta(G) = 0$$



■ زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G گرفته است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G ، و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.



■ مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا \bar{G} نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و $d_G(v)$ به ترتیب درجه رأس v در گراف های G و \bar{G} باشند، مقدار $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)$ را به دست آورید.

این مجموع برابر است با تعداد یال هایی که امکان رسم آنها از یک رأس در گراف ساده وجود دارد. از طرفی در یک گراف ساده n راسی حداقل

$$n - 1 \text{ یال از یک رأس آن می گذرد بنابراین: } d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$$

مسئله ۲ : یک گراف n راسی حداقل چند یال می تواند داشته باشد؟

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ برابر است با تعداد پاره خطهایی که با وجود } n \text{ نقطه غیر واقع بر خط راست می توان رسم کرد یعنی:}$$

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n راسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ را به دست آورید.

این مجموع برابر است با حداقل تعداد یال های ممکن در یک گراف ساده n راسی، که بنا به مسئله قبل $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود.

■ **گراف کامل :** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می نامیم. گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می دهیم. می توان گفت K_n یک گراف n راسی و $n-1$ -منتظم است.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p راسی چند یال دارد؟ بنا به مسئله ۲ در بالای صفحه، تعداد یال ها برابر است با:

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p راسی باشد، چه رابطه ای بین تعداد یال های گراف های G ، \bar{G} و K_p وجود دارد؟

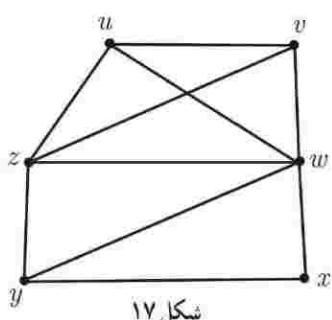
مسئله ۳ : مکمل گراف کامل چند نوع گرافی است؟ **گراف تنه**

■ **مسیر :** اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u - v$ مسیر) در G دنباله ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می شود به طوری که هر دو رأس متولی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس v ، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

یک $u - v$ مسیر به طول ۲ است.

یک $u - v$ مسیر به طول ۴ است.



شکل ۱۷



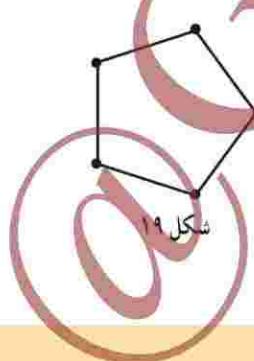
شکل ۱۸

■ **گرافی را که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می دهیم. به طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.**

■ **دور :** دنباله $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۷ $xwvuzyx, ywuzy, uwuwu$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

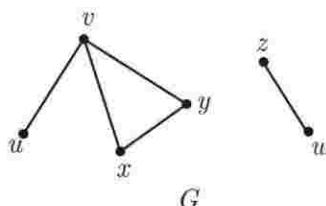
■ **گرافی را که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می دهیم. به طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.**

مسئله: در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ باید.

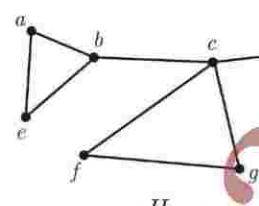


شکل ۱۹

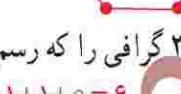
همبندی و ناهمبندی یک گراف : گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. به طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.



شکل ۲۰



فعالیت



- ۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

- ۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

$$G_1: 2+2+2=6$$

$$G_2: 3+1+1+1+0=6$$

$$G_3: 2+2+2+2+2+2=12$$

- ۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

$$G_1: 3 \text{ تعداد یال‌های گراف } G_1 \text{ و } G_2: 6 \text{ تعداد یال‌های گراف } G_2 \text{ و } G_3: 6 \text{ تعداد یال‌های گراف } G_3$$

- ۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

$$(تعداد یال‌های گراف) \times 2 = \text{مجموع درجات رئوس گراف}$$

- ۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

- ۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأس v_1, v_2, \dots, v_n و m یال e_1, e_2, \dots, e_m در نظر بگیرید.

- ۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

- ۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ صفر تعداد یال‌های گراف حاصل چند است؟ صفر

و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ ظاهراً با هم برابرند!!!

- ۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.
مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یال‌ها ۱ می‌باشد.

- ۵ تمام یال‌های e_2, e_3, \dots, e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیه G برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید. مجموع درجات ۶ و تعداد یال‌ها ۳ است.

مجموع درجات $2m$ و تعداد یال‌ها m است.

- ۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ حرا؟

خبر، زیرا با اضافه کردن هر یال، ۲ واحد به مجموع درجات افزوده می‌شود و با توجه به این که مجموع درجات در انتدا صفر بوده، غیر ممکن است که عددی فرد شود.

- ۷ برای تساوی $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

در شمارش درجه‌ها، هر یال دارای دو راس است، بنابراین در مجموع آنها هر یال دو بار حساب شده است، پس مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست.

با توجه به آنچه در این فعالیت به دست آوردیم، می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = V$ مجموعه رئوس آن باشد، آنگاه: $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$

نتیجه: تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.

ابات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در

$$\text{اين صورت داريم} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج است.

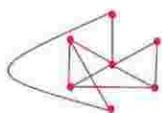
از طرفی درجه هر راس $v \in B$ عددی زوج است و مجموع چند عدد زوج، عددی زوج است لذا $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج می باشد.

بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می دهد که $|A| = n$ عددی زوج است. (چرا؟)

درجه هر راس $v \in A$ قرد می باشد، لذا باید تعداد آنها زوج باشد تا مجموع درجات عددی زوج شود.

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانشآموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها با هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:



الف) گراف ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانشآموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانشآموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رئوس گراف حاصل برابر با ۳ باشد.

اگر درجه تمام رئوس گراف حاصل ۳ باشد آنگاه مجموع درجات رئوس $= 21 = 3 \times 7$ خواهد شد که عددی فرد است و با قضیه تناقض دارد زیرا باید مجموع درجات رئوس عددی زوج باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

اگر تمام نفرات جمع فرد نفری، دارای فرد تعداد رئوس درجه فرد، فردا است که با نتیجه گرفته شده از قضیه (بالای صفحه) تناقض دارد. لذا چنین موردی امکان پذیر نیست.

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $4 \geq |G| \geq 4$. می خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگتر با مساوی ۴ است.

۱) رأس دلخواه v_1 را در G در نظر می گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_4 باشد.

زیرا اگر به راس دیگری متصل نباشد درجه آن صفر خواهد بود، در حالی که طبق فرض مسئله کمترین درجه ۴ در نظر گرفته شده است.

۲) حتماً v_4 به رأسی به جز رأس v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_6 باشد.

زیرا اگر چنین نباشد، درجه آن ۱ خواهد بود که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۳) حتماً v_6 به رأسی از مجموعه $\{v_1, v_4\}$ وصل است (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_2 باشد.

زیرا در غیر این صورت، درجه آن حداقل ۲ خواهد بود و با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۴) حتماً v_2 به رأسی از مجموعه $\{v_1, v_4, v_6\}$ وصل است (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_5 باشد.

زیرا اگر چنین نباشد، درجه آن حداقل ۳ شده که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۵) مسیر $v_1 - v_4 - v_6 - v_2 - v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

در هر یک از حالت های زیر تعداد یال های گراف G را به دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی K -منتظم است. طبق قضیه:

$$2q = n \times k \Rightarrow q = \frac{1}{2} nk$$

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. ($G = K_n$)

درجه هر راس $1 - n$ خواهد بود، درنتیجه گراف $(n - 1)$ -منتظم است. لذا طبق قسمت قبل: $(n - 1)$

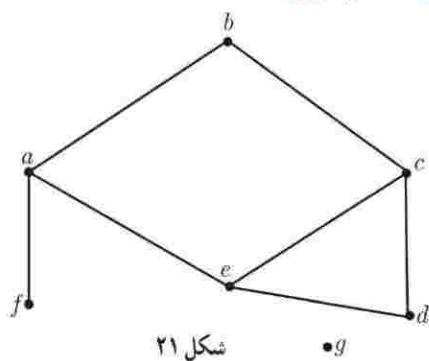
- ۱) گراف G با مجموعه رأس های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ و مجموعه يال های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.
- (الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. $p = 6$ ، $q = 7$
- (ب) درجه رأس های G را مشخص نماید.
- (پ) کدام رأس های گراف G با رأس f مجاورند؟ c, e

(ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2+3+2+2+3+2=14$

- ۲) گراف H با مجموعه رأس های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ و مجموعه يال های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

(الف) $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$ ، $p = 7$ ، $q = 6$

(ت) $4 \times 3 = 12$ \Rightarrow (پ) رأس f در این گراف تعریف نشده است.



شکل ۲۱

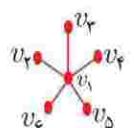
- ۳) گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.
الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

(ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نماید.

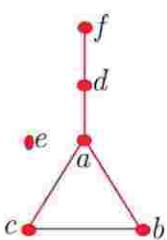
(پ) مجموعه همسایه های رأس های f و g را بنویسید.

$$N_G(f) = \{a\} \text{ و } N_G(g) = \emptyset \text{ و } N_G(e) = \{a, c, d\}$$

- ت) اگر x آنگاه x کدام رأس است؟ x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد، با توجه به شکل $x = b$ است.



- ۴) گراف G با مجموعه رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_i)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه های $N_G(v_i)$ برای $1 \leq i \leq 6$ تک عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.



در گراف G با مجموعه رأس های $\{a, b, c, d, e, f\}$ داریم :

$N_G(a) = \{b, c, d\}$	$N_G(b) = \{a, c\}$	$N_G(c) = \{a, b\}$
$N_G(d) = \{a, f\}$	$N_G(e) = \{\}$	$N_G(f) = \{d\}$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید. $q = 5$

- ۵) گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.

تعداد يال های گراف G = تعداد يال های ممکن در گراف ۵ راسی (K_5) = $5 \times 4 = 20$

$$\Rightarrow \text{تعداد يال های گراف } \bar{G} = \frac{20 \times 4}{2} - 6 = 4 \times 2 = 8$$

مجموع درجات گراف \bar{G} = 8

درجہ هر راس در گراف کامل ۴ است

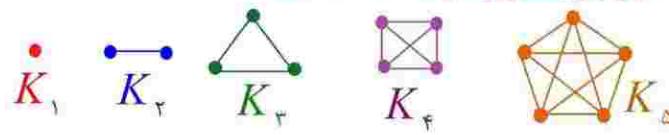
$$\begin{cases} \deg_{\bar{G}}(a) = 2 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 4 - 2 = 2 \\ \deg_{\bar{G}}(c) = 3 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف (G) و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

$$\text{در گراف کامل } p \text{ راسی تعداد یال‌ها برابر است با } \frac{p(p-1)}{2} \text{ در نتیجه: } \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$$

از طرفی گراف کامل K_4 یک گراف ۸-منتظم است. بنابراین درجه تمام رؤس یکسان بوده و $\Delta = \delta = 8$ است.

۷ گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.



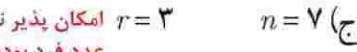
۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r -منتظم از مرتبه n رسم کنید.



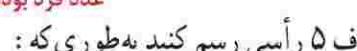
$3 \times 5 = 15$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $= 15$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.



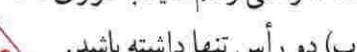
$3 \times 7 = 21$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $= 21$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.



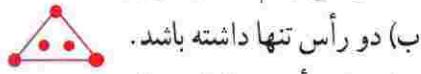
$3 \times 8 = 24$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $= 24$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.



$3 \times 9 = 27$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $= 27$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.



۹ برای هر یک از حالات‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری که:

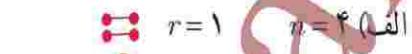


ب) دو رأس تنها داشته باشد.

ت) چهار رأس تنها داشته باشد. امکان پذیر نیست، زیرا اگر بخواهیم چهار رأس

تنها باشند، رأس پنجم نمی‌تواند به هیچ‌کدام از آنها متصل شود پس راس

پنجم نیز تنها خواهد ماند.



الف) یک رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برحی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند.

نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

اگر هفت نفر را به عنوان ۷ راس یک گراف درنظر بگیریم و در صورتی که دو نفر با هم دست دهند، بین دو راس منسوب به آنها یال رسم کنیم، در نتیجه ۶

راس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر راس هفتم درجه ۵ باشد، یعنی گراف دارای یک راس درجه فرد است که با نتیجه‌ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد

رئوس درجه فرد، زوج تا باشد. پس نفر هفتم نمی‌تواند با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌توانند وجود داشته باشد؟ ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت دار در نظر می‌گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت دار از علی به سمت سامان رسم می‌کنیم. و بر عکس اگر نام سامان در

فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت دار از سامان به علی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب الى آخر پیش می‌رویم.

حداکثر تعداد یال‌ها در گراف جهت دار ۵ راسی $= 20 = 5 \times 4 = 5 \times (p-1)$ می‌باشد.

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می‌باشد.

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر با هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در

فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌توانند وجود داشته باشد؟

این قسمت همچون قسمت الف بوده، با این تفاوت که گراف جهت دار نیست، پس حداکثر تعداد یال‌ها $= \frac{5 \times 4}{2} = 10$ می‌باشد.

بنابراین تعداد کل حالات 2^10 است.

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری که: الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می‌کنیم و از $\frac{1}{9}$ به $\frac{1}{5}$ یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۶ و ۵ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طولهای ۷ و ۸ باید یال دیگری رسم کنیم. به طور مثال راس $\frac{1}{4}$ را انتخاب می‌کنیم که فقط می‌توان آن رابه راس $\frac{1}{1}$ رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می‌شود که خواسته مستلزم نیست.

اگر مطابق شکل (بال آیی رنگ) $\frac{1}{7}$ را به $\frac{1}{8}$ وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می‌شود ($\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$) ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی‌شود!

همچنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس $\frac{1}{7}$ انتخاب راس شود، دور به طول ۱۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی‌شود ا

به همین ترتیب با انتخاب رئوس دیگر موجه می‌شویم که این کار با رسم دو قطر امکان پذیر نیست.

اما در صورتی که سه قطر رسم کنیم، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵ و ۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸، باز هم قابل قبول نبوده.

زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مستلزم نیست. بنابراین چنین گرافی وجود ندارد.

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $K \leq \delta(G) \leq 8$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست است. اثبات:

راس دلخواه v_1 را در گراف G در نظر می‌گیریم، حتماً v_1 به راس دیگری (مثل v_2) متصل است، زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد.

همچنین v_2 به راسی به جزء V_1 متصل می‌باشد (مثل v_3) زیرا در غیر این صورت $\delta = 1$ خواهد شد.

حتماً v_3 به راسی به غیر از v_1 و v_2 (مثل v_4) وصل است، زیرا در غیر این صورت، حداقل مقدار δ ، دو خواهد بود.

این روند ادامه دارد تا به راس جدید v_k برسیم که با استدلال مشابه قبل باشیستی به راس جدیدی مانند v_{k+1} وصل باشد.

بنابراین مسیر $v_1 v_2 v_3 \dots v_k v_{k+1}$ یک مسیر به طول k در گراف G است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است. نادرست است. مثال های نقض برای رد آن مطرح می‌کنیم:

مثال نقض اول: در گراف یک رأسی روبرو $K = \delta = 0$ مسیری به طول $1 = 1 + 0$ وجود ندارد.

مثال نقض دوم: در گراف دو رأسی روبرو $K = \delta = 1$ مسیری به طول $2 = 1 + 1$ وجود ندارد.

توجه: هر گراف کامل می‌تواند یک مثال نقض برای آن محاسبه شود.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K -منتظم بکشید که:

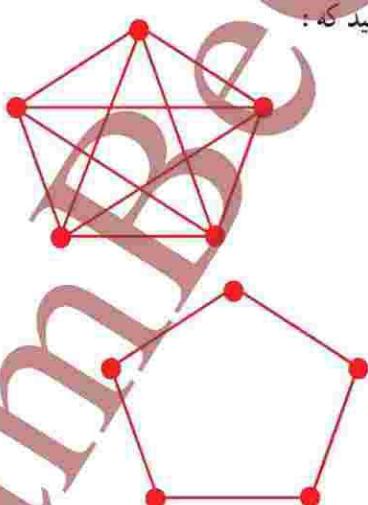


الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K -منتظم بکشید که:

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

درس ۲ مدل‌سازی با گراف

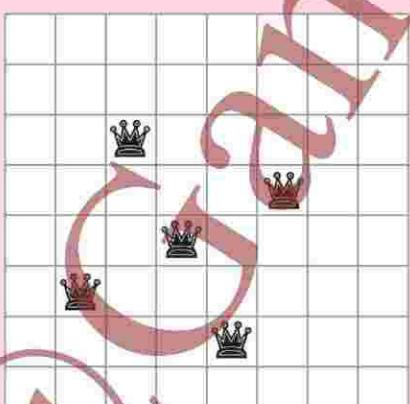
برخی از مسائل روزمره زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئله ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئله اصلی را نیز حل کرد. به طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «احاطه‌گری» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

تاریخچه

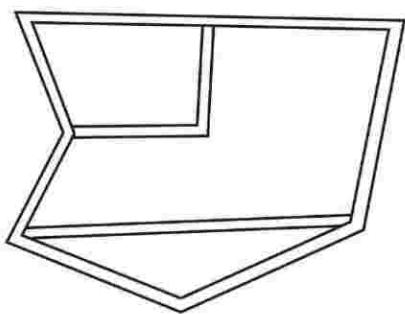
در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «باقن حداقل تعداد مهره وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحه شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانه صفحه شطرنج که در آن وزیر هرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.

تفکر درباره پرسش‌هایی از این دست باعث به وجود آمدن مفهومی در شاخه گراف در ریاضیات با نام احاطه‌گری شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئله بعد دقت کنید.

.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.



شکل مقابل نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:



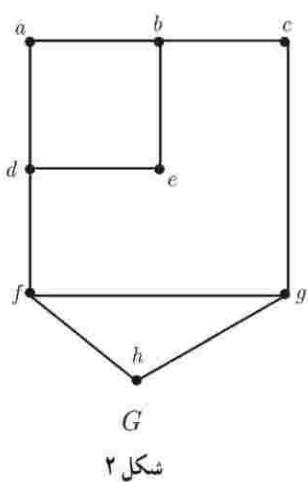
شکل ۱

۱) برای راحتی شهر وندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداقل با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲) به جهت صرف‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.

حال فرض کنید منطقه مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.
الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

۳) تقاطع‌ها همان رئوس گراف و خیابان‌ها یا لالهای گراف هستند.
ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. به طور مثال مجموعه شامل همه رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟



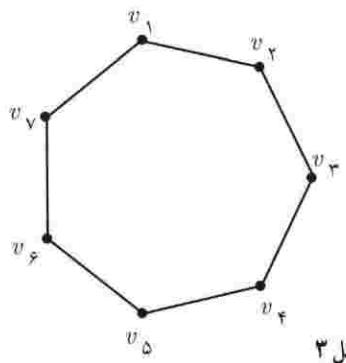
شکل ۲

تعريف: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد.

معمولًاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعه احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمیم آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئله بالا صدق خواهد کرد.

تعريف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمیم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمیم از گراف G ، یک ۷-مجموعه می‌گوییم.



شکل ۳

مثال: برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعه $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1, v_4, v_7\}$ و $\{v_1, v_2, v_5\}$ دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو-مجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

مثال: فرض کنید $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	0	50	80	40	60	90	50	70	100	60	50
b	50	0	55	30	60	70	60	60	90	80	80
c	80	55	0	40	60	20	50	80	100	90	90
d	40	30	40	0	30	50	70	80	100	70	70
e	60	60	60	30	0	50	10	50	60	50	50
f	90	70	20	50	50	0	70	40	100	90	80
g	50	60	50	30	10	40	0	50	70	60	60
h	70	60	55	30	50	40	50	0	60	60	50
i	100	90	100	80	60	100	70	60	0	50	100
j	60	80	90	70	50	90	60	50	0	0	50
k	50	80	90	70	50	80	60	50	100	50	0

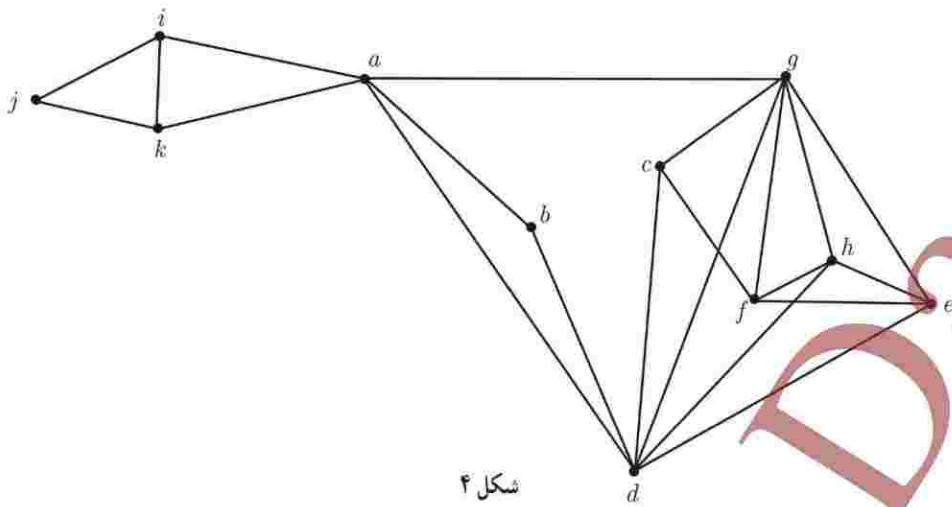
شاپرته است در سطر اول
نام شهرها با حروف کوچک
نوشته شوند،
لذا این تغییر اعمال شده است.

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به طوری که همه شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل: برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دورآس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصله مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

به دلیل وجود خاصیت احاطه‌گری، هر شهر از پوشش امواج رادیویی برخوردار می‌گردد. همچنین به جهت مینیمم بودن احاطه‌گری، کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی و به دنبال آن کمترین میزان هزینه صورت خواهد گرفت.

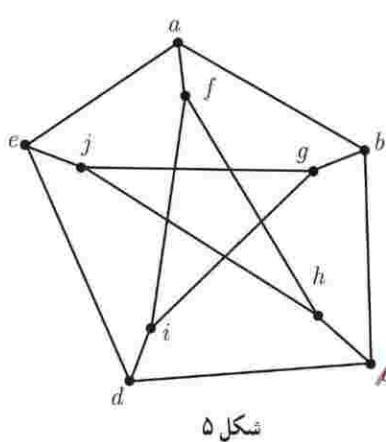
با توجه به آنچه گفته شد گراف زیر، گراف حاصل از مدل سازی برای این مسئله است.



حال کافی است یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رؤوس این مجموعه احاطه‌گر مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



الف) احاطه‌گر هست $A = \{a, b, c, d, e\}$

ب) احاطه‌گر هست $B = \{f, g, h, i, j\}$

پ) احاطه‌گر نیست $C = \{a, b, j, h, g\}$

ت) احاطه‌گر هست $D = \{a, i, h\}$

ث) احاطه‌گر هست $E = \{f, g, h, e, d\}$

ج) احاطه‌گر هست $F = \{f, g, h, e\}$

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس با رأس‌های وجود دارد که با حذف آنها مجموعه باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟ قسمت ث، اگر از مجموعه i رأس d را حذف کنیم، مجموعه جدید همان مجموعه i بوده که احاطه‌گر است.

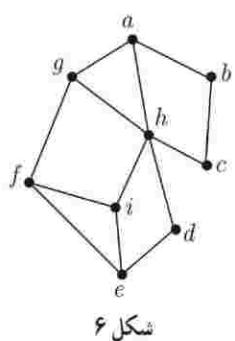
تعريف: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

$$\{c, j, f\}$$

۴ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. $A = \{a, b, c, d, e\}$

آیا می‌توان هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید) بله، اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} = A$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد، عضوی مانند v را در نظر می‌گیریم، اگر با حذف آن، هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی ماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم. با توجه به غیرمینیمال بودن مجموعه، قطعاً حداقل یک عضو یافته می‌شود که با حذف آن، هنوز مجموعه احاطه‌گر خواهد ماند.

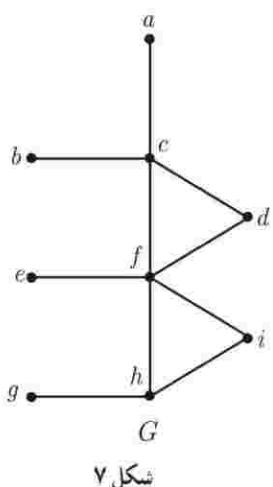


مثال: در گراف شکل ۶ یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلًا رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a, c و e از آن، مجموعه $\{b, d, f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گر است. اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس

در گراف شکل ۷:



- ۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد.
- ۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد.
- ۳ یک مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.
- ۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دور از ۳ رأس b, e و g را احاطه کند؟ خیر
- ۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند حدتاست؟ $\gamma(G)$ چند است؟

$$\gamma(G) = 3$$

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح^۱ یک عدد آشنا هستیم و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۱ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟ ۳ تاکسی

۱- گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، که آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $[a]$ نمایش می‌دهند و به آن که a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ **۴ تاکسی**

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ **۴ تاکسی**

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی های مورد نیاز بدست می آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح

نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟ تعداد کارمندان را بر عدد ۴ تقسیم می کنیم، اگر عدد صحیحی بدست آمد همان عدد

تعداد تاکسی ها است. در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعد از آن، نشان دهنده تعداد تاکسی ها می باشد.

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به کار

برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می کنیم و آن را سقف x می خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3/5 \rceil = 1$$

$$\lceil -3 \rceil = -2$$

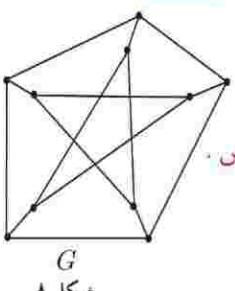
$$\lceil -3/5 \rceil = -1$$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ **اعداد صحیح**

فعالیت

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می کند.

۲ در گراف مقابل Δ چند است؟ **۳**



شکل ۸

۳ هر رأس حداقل چند رأس را احاطه می کند؟ هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می کند یعنی **۴** رأس.

و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟ **این تعداد همان $1 + \Delta$ است.**

۴ آیا ۲ رأس می توانند همه رئوس گراف G را احاطه کنند؟ خیر

۵ حداقل $\frac{1}{4} \cdot 10$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟ یک رأس ان حداقل ۴ رأس را احاطه می کند. حال اگر رأس دیگری را چنان انتخاب کنیم که رئوس احاطه شده قبلی مجاور آن نباشند، آنگاه این رأس نیز ۴ رأس دیگر را احاطه می کند. لذا از بین ۱۰ رأس احاطه شده اند. که باید برای احاطه ی دو رأس باقی مانده از رأس جدیدی استفاده کنیم، پس حداقل ۳ رأس برای احاطه ی همه ی رأس ها نیاز داریم. از طرفی $\frac{1}{4} \cdot 10 = 3$ می باشد.

۶ $\gamma(G) = 3$ چند است؟ **۳**

۷ در یک گراف دلخواه با ماتریس درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداقل چند رأس را احاطه می کند؟ **۱**

۸ تعداد کمتر از $\frac{n}{\Delta+1}$ رأس نمی توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

یک رأس دلخواه حداقل $1 + \Delta$ رأس را احاطه می کند. حال برای تعیین حداقل تعداد رئوسی که تمام n رأس گراف را احاطه کنند، باید حساب کرد برای

جابجایی n مسافر به چند تاکسی با ظرفیت حداقل $1 + \Delta$ نفر احتیاج داریم. برای این کار نسبت $\frac{n}{\Delta+1}$ را حساب می کنیم، اگر عدد صحیح شد که جواب می باشد.

در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعدی آن جواب است تا اینکه تمام رئوس احاطه شده باشند. و این همان $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

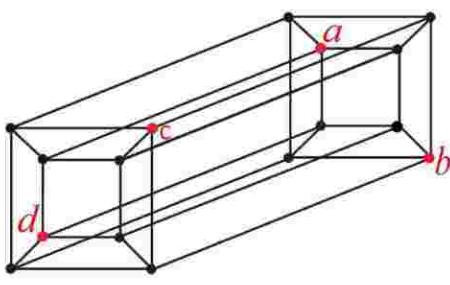
اگر G یک گراف n رأسی با مراکزیم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه گر در آن باشد، آنگاه

واز انجاشد (G) نیز اندازه یک مجموعه احاطه گر است همواره داریم $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ (اصطلاحاً گفته می‌شود

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای (G) ؛ یعنی (G) نمی‌تواند از آن کمتر شود.

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای مشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترا نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترا (راس‌ها) انتخاب کنیم.



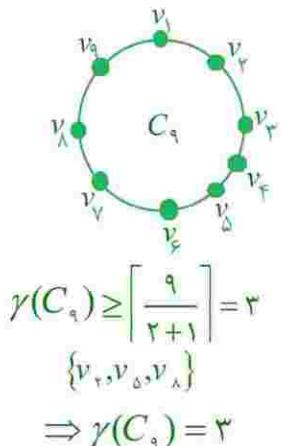
شکل ۹

به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترا به تمام کامپیوتراهای این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟ مجموعه احاطه گر می‌باشد

۲ با توجه به رابطه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟

آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ $\{a, b, c, d\}$

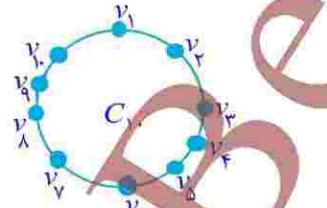
۳ گراف‌های C_9 و P_{11} را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص نمایید



$$\gamma(C_9) \geq \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$$

$$\{v_1, v_5, v_8\}$$

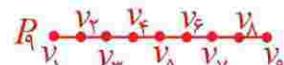
$$\Rightarrow \gamma(C_9) = 3$$



$$\gamma(C_{11}) \geq \left\lceil \frac{11}{2+1} \right\rceil = 4$$

$$\{v_1, v_5, v_7, v_9\}$$

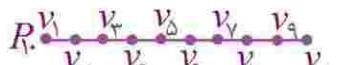
$$\Rightarrow \gamma(C_{11}) = 4$$



$$\gamma(P_9) \geq \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$$

$$\{v_1, v_5, v_8\}$$

$$\Rightarrow \gamma(P_9) = 3$$



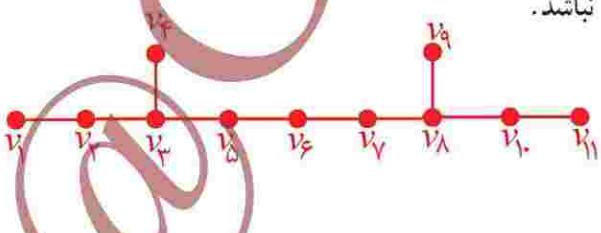
$$\gamma(P_{11}) \geq \left\lceil \frac{11}{2+1} \right\rceil = 4$$

$$\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$$

$$\Rightarrow \gamma(P_{11}) = 4$$

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. در گراف P_9 عدد احاطه گری 2 باشد.

گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



$$\text{مجموعه احاطه گر مینیمم} = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$$

$$\Rightarrow \gamma(G) = 5 \neq \left\lceil \frac{11}{2+1} \right\rceil$$

مثال: عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل: به سادگی می‌توان دید که مجموعه دو عضوی $\{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.

اما اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنها یک رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجه ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد ولذا $\gamma(G) \geq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.

روش دیگر برای حل: نوع دیگری از استدلال به این صورت است که با توجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G) = 3$ داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ و با توجه به مجموعه احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) = 2$.

کار در کلاس

۱۱ تمام ۷- مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

$$\{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{c, e\}, \{e, d\}$$

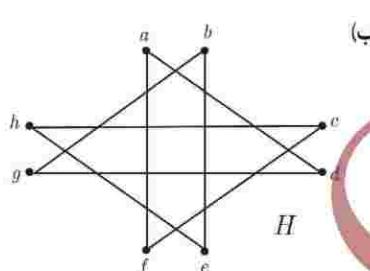
۱۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.

$$\gamma(H) \geq \left\lceil \frac{8}{2+1} \right\rceil = 3$$

از طرفی $\{a, b, c\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است، بنابراین:

$$\gamma(H) = 3$$



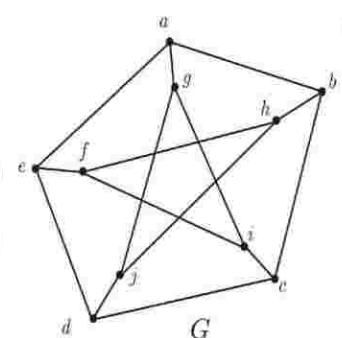
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$$

از طرفی $\{a, c, h\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است، بنابراین:

$$\gamma(G) = 3$$

(الف)



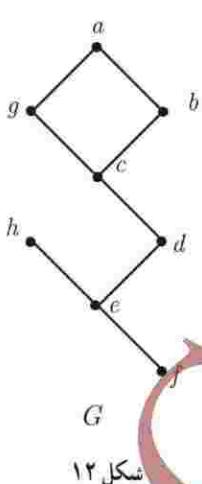
فعالیت

۱۳ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $2 = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil$ رأس برای

احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

ب) برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, e, f, g, h حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند. (چرا؟) زیرا $2 = \left\lceil \frac{5}{2+1} \right\rceil = 2$



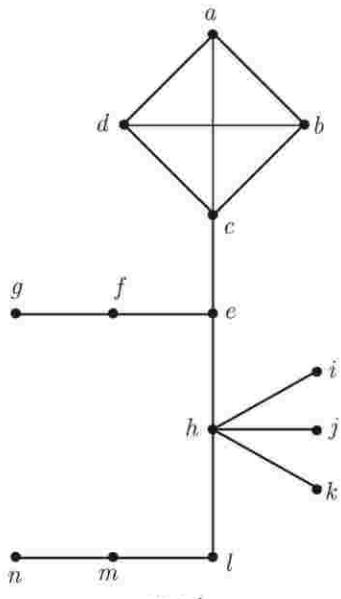
شکل ۱۲

ث) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$.

ث) از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، $\gamma(G) \leq 3$. پس $\gamma(G) = 3$.



۲) می خواهیم عدد احاطه گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 3$ را بررسی می کنیم که عدد $\gamma(G) \geq 3$ می دهد. بسیار بزرگتر است.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رئوس e, f, g باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رئوس h, i, j, k باید انتخاب شود. چرا؟

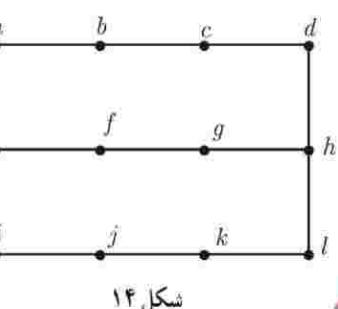
ث) حداقل یکی از رئوس l, m, n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \leq 4$ و با توجه به اینکه $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه گر است لذا $\gamma(G) \geq 4$ بنابراین $\gamma(G) = 4$.

مثال : عدد احاطه گری گراف شکل ۱۴ را به دست آورید و یک مجموعه احاطه گر مینیمیم برای آن ارائه کنید.

حل : برای احاطه کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعه احاطه گر باشند و بهتر آن است که رأس b انتخاب شود. (چرا؟) زیرا با این انتخاب ، رأس c نیز احاطه می شود ، که برای مینیمیم کردن احاطه گری مفید است .

به همین صورت رئوس j و f را نیز می توان در مجموعه احاطه گر در نظر گرفت.



شکل ۱۴

حال مجموعه $\{b, f, j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس a, h, d, l, i را احاطه می کند و برای احاطه این سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه احاطه گر است.

از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی توان رئوس این گراف را احاطه کرد. (زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی کند (چرا؟) زیرا حداقل درجه رئوس ۳ است.

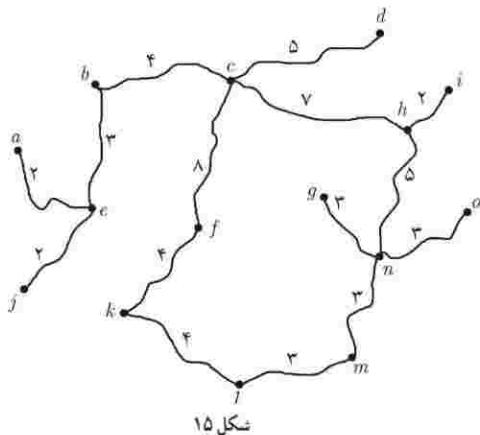
باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجه ۳ داشته باشیم و چنین رأس هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.



۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. حداقل سه ایستگاه باید نصب شود، که می‌توان آن ایستگاه‌ها را به صورت $\{g, a, k\}$ یا $\{f, d, j\}$ یا $\{g, b, i\}$ یا $\{d, c, i\}$ یا ... انتخاب کرد.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟ حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث نمود. این دو ایستگاه می‌توانند $\{f, k\}$ یا $\{i, g\}$ یا ... باشد.



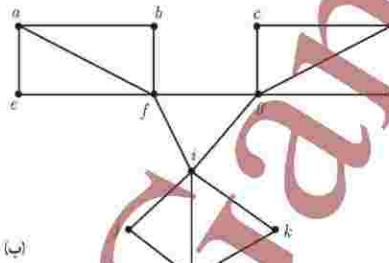
۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاهای در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاهای احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می‌کنیم، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می‌کنیم که فاصله‌ی بین آن دو بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد.

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{15}{8+1} \right\rceil = 2$$

یک مجموعه‌ی احاطه‌گری می‌تواند $\{c, m\}$ باشد. بنابراین کافیست دو بیمارستان در روستاهای c, m احداث کرد.

۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.

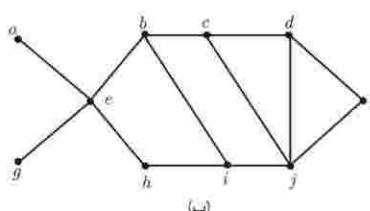


$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{5+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{f, d, l\}$ یک

مجموعه‌ی احاطه‌گری برای

آن است. پس $\gamma(G) = 2$



$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{e, j\}$ یک

مجموعه‌ی احاطه‌گری برای

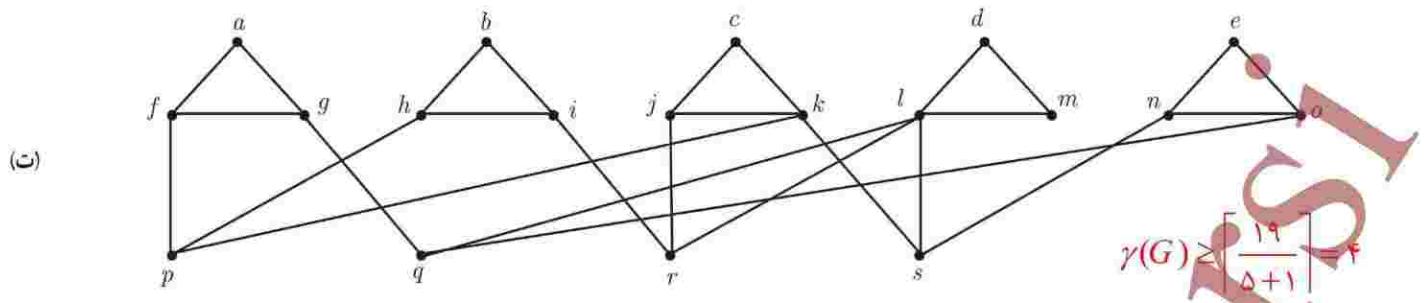
آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{a, g\}$ یک

مجموعه‌ی احاطه‌گری برای

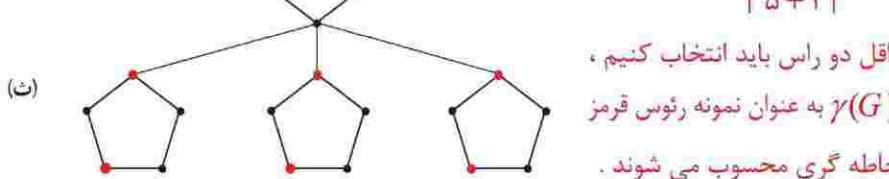
آن است. پس $\gamma(G) = 2$



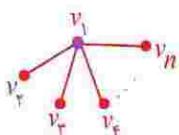
از طرفی از هر مثلث حداقل یک راس باید انتخاب کنیم، به عنوان نمونه مجموعه $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه احاطه گری آن است. بنابراین: $\gamma(G) = 5$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{20}{5+1} \right\rceil = 4$$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو راس باید انتخاب کنیم، لذا $\gamma(G) = 4 \times 2 = 8$ یعنی: $\gamma(G)$ به عنوان نمونه رئوس قرمز رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه گری محاسبه شوند.



۲ اگر برای گراف G داشته باشیم $\Delta(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان بی‌برد؟ $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌های را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)



حداقل یک راس با ماکریزم درجه (راس فل) وجود دارد.

با فرض اینکه گراف دارای n راس باشد، حداقل باید $n - 1$ یال داشته باشد که می‌توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد:

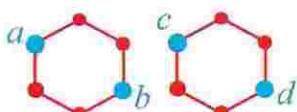
$$\text{حداکثر میزان تعداد یال } \frac{n(n-1)}{2} \text{ می‌باشد (حالی که گراف کامل باشد). در هر صورت } \Delta(G) = n - 1 \text{ است.}$$

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ می‌باشد.}$$

با توجه به اینکه در هر دو، حداکثر درجه رئوس ۲ می‌باشد داریم:

۳ اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$

در گراف k -منتظم n رأسی، $\Delta = \delta = k$ می‌باشد، بنابراین:

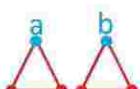


۴ یک گراف 2 -منتظم 12 رأسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = 4$$

یک مجموعه احاطه گری آن با اندازه 4 می‌باشد.

۵ (الف) یک گراف 6 رأسی که 7 -مجموعه احاطه گری آن $\{a\}$ است.



۶ (ب) یک گراف 6 رأسی که 7 -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید. در گراف مقابل مجموعه احاطه گری $\{a, b\}$ است.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $n \leq k$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه گری آن k باشد، ارائه دهد. کافیست گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه رئوس آن بخش را احاطه می‌کند در نظر بگیریم.

۷ (الف) یک گراف 6 رأسی با عدد احاطه گری 2 رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه 2 داشته باشد.

مجموعه احاطه گری آن $\{a, b\}$ است.



۸ (ب) یک گراف 6 رأسی با عدد احاطه گری 2 رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه 2 داشته باشد.

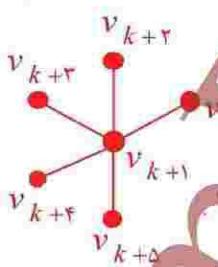
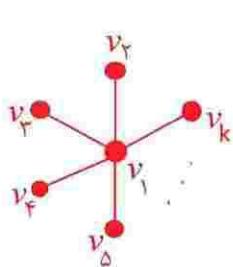
گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه گری به اندازه 2 می‌باشد. که عبارتند از:

$$\{e, b\} \text{ و } \{f, c\} \text{ و } \{a, d\}$$

Gam-Darsi

۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهد که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.



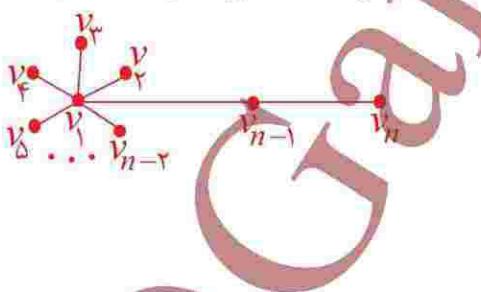
کافیست مطابق شکل روبرو، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری

که یک بخش آن شامل k راس و بخش دیگر آن شامل $n - k$ راس باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد. که دو مجموعه ای

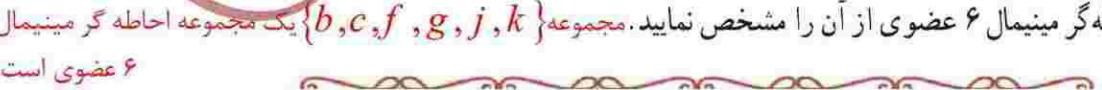
احاطه‌گری آن $\{v_1, v_{n-1}\}$ و $\{v_1, v_n\}$ می‌باشند.



۱۱ گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک ۲-مجموعه از آن را مشخص نماید. مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک ۴-مجموعه است

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نماید. مجموعه $\{b, c, f, g, j, k\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی است.



Darsi



دیجیتال

ترکیبات (شمارش)

۳

درس ۱ مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل^۱ r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب^۲ r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم. در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «ب» و «ز» و ارقام ۴، ۳، ۲ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

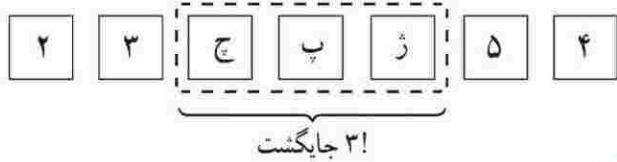
الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به $7!$ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با 4 رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت $5!$ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت سه حرف داده شده هم در عین

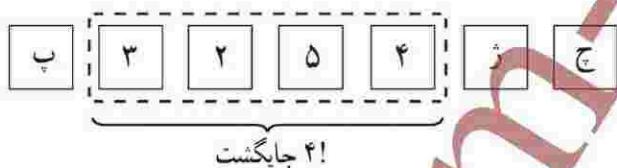
$$1 - (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$2 - \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

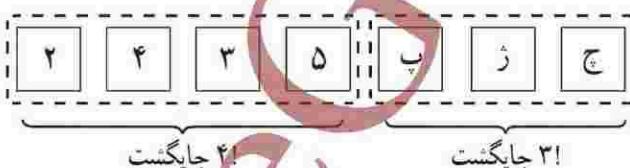
حال که کنار هم هستند $3!$ جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر است با $3! \times 4!$



پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا 4 رقم داده شده را یک شیء فرض می کنیم که با 3 حرف مفروض روی هم 4 شیء بوده و $4!$ جایگشت داشته و در هر جایگشت 4 رقم داده شده هم $4!$ در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از $4! \times 3!$



ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می کنیم که روی هم دوشیء شده و 3 حروف در کنار هم و $4!$ نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای مورد نظر عبارت است از $4! \times 3! \times 2!$



ما برای حل این مثال از دسته بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی دهیم تا شما خودتان راه حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال: 5 دانشآموز پایه دوازدهم و 4 دانشآموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

الف) همواره دانشآموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانشآموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانشآموزان پایه یازدهم نیز 5 نفر باشند، به چند طریق می توان آنها را به صورت یک درمیان قرار داد؟

$2! \times 4! \times 5!$ (الف)

$4! \times 5!$ (ب)

$$5 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \rightarrow 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 5! \times 4!$$

$(5! \times 4!) \times 2$ (پ)

روش اول:

روش دوم:

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a , b و c برابر با $3! = 6$ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و b برابر با ۳ است (baa, aba, aab) درواقع چون جایه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کل جایگشت‌هارا بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جایه‌جا شوند یعنی $2!$ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $\frac{3!}{2!}$ است.

چون دو حرف a به $2!$ طریق می‌توانند با هم جایه‌جا شوند و این تعداد جایه‌جایی به صورت ضربی در $3!$ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم $3!$ بر $2!$ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام $2, 1, 1$ و 1 چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟
اگر 4 رقم متمایز بودند جواب این سؤال $4!$ بود ولی چون در این 4 و به صورت ضربی، $2!$ حالت ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز 4 رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $\frac{4!}{3!}$ است.

$$\begin{array}{r} 1112, 1121, 1211, 2111 \\ \hline 4 \text{ رمز ممکن} \end{array}$$

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها n شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبه تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و پس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم، یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

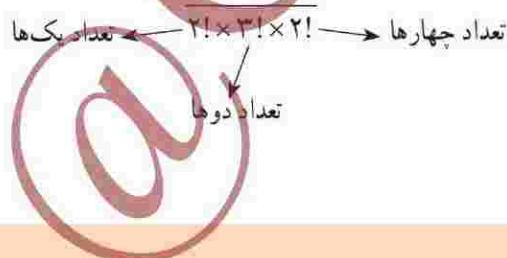
با همین استدلال می‌توان قضیه زیر را، که به آن قضیه جایگشت با تکرار می‌کوییم، ایان کرد :

قضیه جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال : با ارقام $5, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1$ و 1 چند عدد 9 رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیه جایگشت با تکرار



مثال: ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟
 کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از $9!$ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جایه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جایه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه نفره و چهار نفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به ترتیب $2!$ ، $3!$ و $4!$ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$. این مثال به روشنی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جایه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست):

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 4!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times 1 = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای
اتاق سه نفره انتخاب دو نفر برای
اتاق دو نفره

فعالیت

شخصی وارد یک گل فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

- ۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی		
	میخک	رُز	مریم
۱	*	*	*
۲	**	*	
۳	...	***	...
۴	*	**	...
۵	...		***
۶	*	...	**
۷	...	*	**
۸
۹	...	**	*
۱۰	...	**	*

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ ایا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جایه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ خیر

جایه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ خیر

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = \text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی = n

۱ تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n + (k - 1)$ تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\frac{[n + (k - 1)]!}{n! \times (k - 1)!} = \text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \binom{n + (k - 1)}{k - 1}$$

جایه‌جایی خط‌های عمودی با هم دسته
گل جدیدی تولید نمی‌کند.

کل جدیدی تولید نمی‌کند.

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل:

$$k = 4 \rightarrow \text{فعالیت قبل} = \text{أنواع گل} \\ n = 8 \rightarrow \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} \\ \Rightarrow \binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: ابتدا ۱ شاخه (به اجرای) از هر نوع گل بر می‌داریم. $5 - 4 = 1$ شاخه گل باقی‌مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم:

$$k = 4 \rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \\ n = 9 - 4 = 5 \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌های دلخواه} \\ \Rightarrow \binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{8}{3}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم: اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهنده یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و بر عکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به دست آورید.

تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
۱	۰	۶	$1+0+6=7$
۱	۱	۵	$1+1+5=7$
۴	۲	۱	$4+2+1=7$
۰	۷	۰	$0+7+0=7$
۱	۴	۲	$1+4+2=7$
۰	۳	۴	$0+3+4=7$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{2} = 36$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k :

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

کار در کلاس

۱) معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) = 7 - 1 - 1 - 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی جدید (همان تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل) پاسخ سوال می‌باشد، که

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

۲) نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. (راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و ...) دقتاً متابه سوال قبل عمل می‌کنیم:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - 1 - 1 - \dots - 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k$$

$$\text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله جدید} = \text{تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله} \binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

۳) معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط انکه $x_1 > 1$ و $x_2 > 3$ باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2 \\ x_2 > 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \Rightarrow x_2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{معادله جدید} \Rightarrow y_1 + 2 + x_3 + y_2 + 4 + x_4 + x_5 = 14 \\ \Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_4 + x_5 = 8 \end{array} \right.$$

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4}$$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله اخیر، پاسخ می‌باشد، یعنی:

۱- طرح سؤال‌هایی برای معادلات مسئله که شرط‌هایی برای x_i ‌ها به صورت $a \leq x_i \leq b$ در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

۱ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($1 \leq i \leq 5$)

از شرط فاردا داده شده $x_i \geq 1$ نتیجه می‌شود، پاسخ مسئله، همان تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله می‌باشد، که طبق

$$\text{سوال ۲، برای است با: } \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

۲ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

$$x_5 > 2 \Rightarrow \underbrace{x_5 - 2}_{y_5} > 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ x_3 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \text{معادله جدید: } &x_1 + x_2 + 4 + x_4 + y_5 + y_6 + x_6 = 12 \\ &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 6 \end{aligned}$$

$$\binom{6-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5 \quad \text{حال با توجه به رابطه بدست آمده در سوال ۲، تعداد جواب‌ها برابر است با:}$$

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰-۱۲، ۸-۱۰ و ۴-۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس‌های را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

۴-۲	۱۰-۱۲	۸-۱۰	جلسات کلاس‌ها
Abbasی	کریمی	احمدی	A
کریمی	احمدی	عباسی	B
احمدی	عباسی	کریمی	C

فعالیت

- ۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به‌دست آورید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

- ۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.
 (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
 (b) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.
 (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نداشته است.
 (d) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.
 (e) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است.
 (f) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها نکرده است.
 (g) هر یک از اعداد در تمام جلسه‌ها تدریس نداشته است.

تعريف: یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین^۱» می‌نامیم. (به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم).

۱- اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال: دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

کار در کلاس

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴

- ۱) دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.
 ۲) با استدلال کلاسی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون، هر کدام از اعداد ۱ تا ۵ فقط یک بار نوشته شده اند.

- ۳) شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند.

۱	۲	۳	$n-1$	n
n	۱	۲	۳	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
:	:	:	:	:	:	:	:
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	n	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n ، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی $1, 2, 3, \dots, n$ یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

2	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
4	3	2	1

4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1
1	4	2	3

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۴، ۲، ۳ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

1	2	2
2	3	1
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	5	4	2
5	4	2	1	3
2	1	3	5	4
3	5	4	2	1
4	2	1	3	5

4	5	1	3	2
1	3	2	4	5
2	4	5	1	3
5	1	3	2	4
3	2	4	5	1

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشد.

بدطور مثال برای دو مربع A و B به صورت زیر داریم :

$A =$	$B =$	\Rightarrow	

یک محک برای تشخیص مقعاد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای مقعاد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربعها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین مقعاد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کیم به طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اول) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتین A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیاییم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتین B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B مقعاد نیستند.

$A =$	$B =$

مثال : در هر مورد مقعاد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید .

(ب)	

(الف)	

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(ب)

حل: الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامندند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۲۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

۲		
۲		

۲		
۲		

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟ یک مربع وجود دارد که به صورت رو بروست :

۱	۲	
۲	۱	
۹	۲	۱

تلفیق

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

۲ آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

خیر، زیرا فقط دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد (شکل روبرو)، که تلفیق آنها دارای عضو تکراری است.

۱	۲	۳
۲	۱	۲
۳	۱	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 رو به رو متعامندند؟

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بله، زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد.

۴ آیا دو مریع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟ بله زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد.

۲	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

تلفیق

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

۵ آیا دو مریع لاتین $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است که اگر $6 \leq n \neq 1$ و 2 ، دو مریع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد و برای $6 \leq n \neq 1$ دو مریع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مریع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

بله متعامدند زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری نداریم.

$1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 3$
 $4 \rightarrow 1$

۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲

تلفیق

۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

خواندگی

اویلر^۱ در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی $n = 4k + 2$ به صورت 2 دو مریع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی های زیاد بر روی وجود دو مریع لاتین متعامد از مرتبه 6 و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مشتبه تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری^۲ ثابت کرد که ادعای اویلر برای $6 \leq n \neq 1$ درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای $n = 10$ و اعداد بزرگتر کسی جواب را نمی دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی دان آمریکایی به نام پارکر^۴ و دو ریاضی دان هندی به نام های بوس^۵ و شریخاند^۶ ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت $n = 2$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد $6 \leq n \neq 1$ حداقل دو مریع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد.

۱- اثبات این مطلب در این کتاب مذکور نیست.

۲-Euler

۴-Parker

۶-Shrikhande

۳-Tarry

۵-Bose

می خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_1 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتین حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱‌ها، ۲ و به جای تمام ۲‌ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم). نشان دهید A و B_1 متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_1 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند). دو درایه یکسان در A را در نظر می‌گیریم، اگر درایه‌های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند، آنگاه این درایه‌ها در B_1 نیز یکسان خواهند بود، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد. پس A و B_1 متعامدند.

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_2 نیز متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در A در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید). دو درایه یکسان در A را در نظر می‌گیریم، اگر درایه‌های نظیر آنها در B_2 یکسان باشند، آنگاه این درایه‌ها در B_2 نیز یکسان خواهند بود، که با متعامد بودن A و B_2 تناقض دارد. پس A و B_2 متعامدند.

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سهشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کار ۵ کارگر با ۵ ماشین ریستندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریستندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده باشد. برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین 5×5 استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان دهنده یک کارگر و هر **سطر** نشان دهنده یک روز هفت و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریستندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریستندگی شماره ۲ کار می‌کند.

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان دهنده یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان دهنده یک روز هفت و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سهشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۳	۲	۵	۴

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شماره ۴ با الیاف شماره ۳ کار می‌کند.

ب) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به طور مثال کارگر شماره ۴ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۲ و الیاف شماره ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقیقی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شماره ماشین رسندگی و اعداد سمت راست شماره الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

- در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟
چون مربع نوشته شده، مربع لاتین است و هر عدد نشان دهنده یک ماشین می‌باشد.
- در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک بار کار می‌کند.
چون مربع مربوطه، مربع لاتین است و هر عدد نماینگر یک نوع الیاف است.
- در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های رسندگی دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است؟ چون A و B متعامدند.

۴ اگر سه برادر تقریباً همسن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخوانند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

ابتدا برای استفاده سه برادر از ۳ گت در سه روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی می‌کنیم که هر کدام در هر روز یک گت بپوشد. لذا مربع لاتین روپرورا چنان رسم کرده که هر سطر نشان دهنده یکی از سه روز هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران باشد و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ۳ در آن مربع، نمایانگر یکی از گت‌ها باشد.

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

به همین ترتیب یک مربع لاتین دیگر که هر سطر نشان دهنده یکی از روزهای هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران است و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ۳ در آن مربع، نمایانگر یکی از پیراهن‌ها باشد، رسم می‌کنیم. به طوری که با مربع قبلي متعامد باشد. (شکل روپرور)

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۱	۱۲
دوشنبه	۳۲	۱۳	۲۱

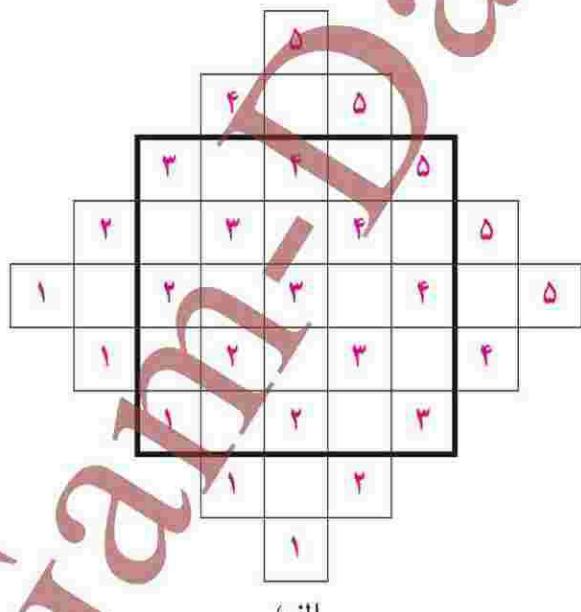
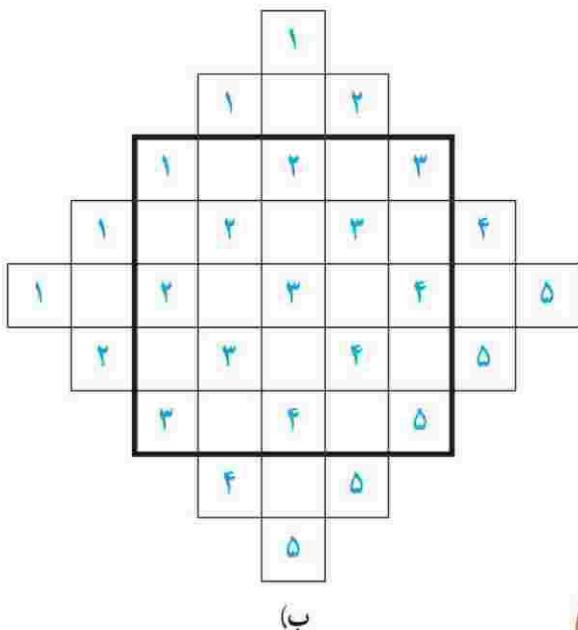
تلفیق دو مربع (شکل روپرور) که متعامد می‌باشد، برنامه مورد نظر را در اختیار ما قرار می‌دهد.

به طور مثال در روز شنبه برادر اول باید گت ۱ و پیراهن ۱ را بپوشد و در روز یکشنبه گت ۲ و پیراهن ۳ را بپوشد و ...

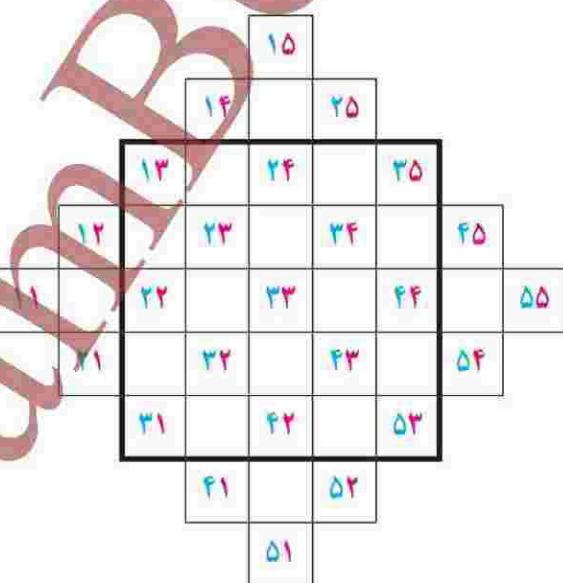
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین 5×5 متعامد به دست آورید.

اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



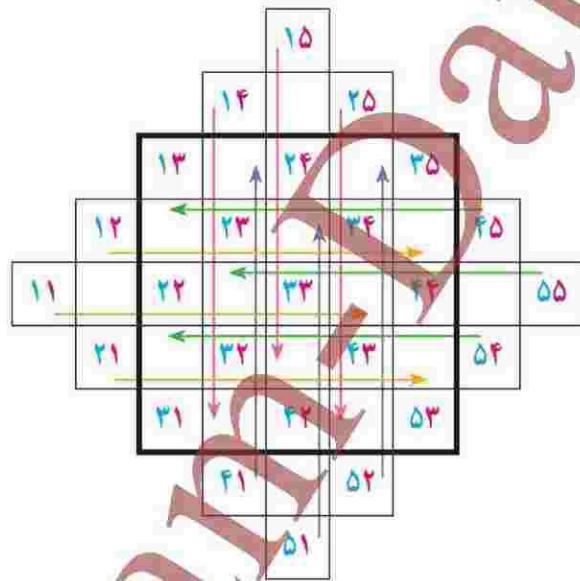
۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به دست می‌آید که در آن عدد دورقمری تکراری وجود ندارد.



۱- از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه غیرفرد جندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگ 5×5 وسط، در شکل مرحله ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.

۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳



الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

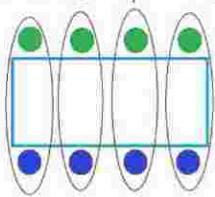
۴ حال دو مربع 5×5 بکشید و در یکی از آنها اعداد سمت چپ در مرحله قبل و در دیگری اعداد سمت راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۱	۳	۴
۵	۳	۴	۲	
۳	۱	۴	۲	۵

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n بدست اورید.

- ۱ می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر رو به روی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



مسئله را به این صورت بیان می کنیم که :

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی رو به روی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت برادر را روی آنها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به $4!$ حالت امکان پذیر است.

از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند 2 حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود 4 صندلی طبق اصل شمارش باید 4^4 در 2^4 ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $2^4 \times 4!$ است.

- ۲ اگر داشته باشیم $\{1, 2, 3, 4\} = A$ و $\{5, 6, 7, 8, 9\} = B$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

تعداد حالات انتخاب 2 رقم از 4 رقم مجموعه A برابر است با :

تعداد حالات انتخاب 3 رقم از 5 رقم مجموعه B برابر است با :

از طرفی تعداد حالات چینش 5 رقم به صورت یک کد 5 رقمی برابر $5!$ می باشد. لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله $5! \times 4!$ است.

- ۳ کتاب فیزیک متفاوت و 5 کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ چندین کتاب بدون هیچ محدودیت به $9!$ طریق امکان پذیر است.

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند:

- ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پک کتاب که به همراه 5 کتاب ریاضی، 6 شیء محسوب می شود و تعداد جایگشت آنها $6!$ خواهد بود.

از طرفی 4 کتاب فیزیک به تعداد $4!$ طریق با هم امکان جابجایی دارند، لذا طبق اصل ضرب، جواب مسئله $4! \times 6!$ است.

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند:

باید کتاب‌ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند: $RFRF RFRFR$

لذا برای ریاضی‌ها $5!$ و برای فیزیک‌ها $4!$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل $4! \times 5!$ روش امکان پذیر است.

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

کتاب‌های خاص را به عنوان یک پک 3 تایی که به $3!$ طریق کنار هم قرار می گیرند در نظر می گیریم.

از طرفی یک پک به همراه 6 کتاب باقی مانده به $7!$ طریق می توان کنار هم چید.

در نتیجه بنا به اصل ضرب به $7! \times 3!$ روش امکان پذیر است.

- ۵ برای کنار هم قرار گرفتن 4 دانش آموز پایه دوازدهم و 6 دانش آموز پایه بازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $7! \times 4!$ باشد.

4 دانش آموز پایه دوازدهم و 6 دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که

همواره دانش آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند؟

- ۶ با ارقام $5, 6, 7, 8, 9$ و 7 چه تعداد کد 6 رقمی می توان نوشت؟

- ۷ می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجنباس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل 9 حرف

$d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} \quad \text{۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟}$$

۸ ب) چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛ x_i را به عنوان گل نوع i معرفی می‌کنیم در نتیجه جواب مسئله، همان تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله

$$\binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} \quad \text{است.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} \quad \text{ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛} \\ \text{تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله قسمت قبل جواب مسئله می‌باشد یعنی:}$$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم:

یعنی در معادله $11 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_2 - 2}_{y_2} \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2 \quad \left. \begin{array}{l} x_5 > 3 \Rightarrow x_5 \geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \\ \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

یعنی در معادله $11 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$x_4 \geq 5 \Rightarrow \underbrace{x_4 - 5}_{y_4} \geq 0 \Rightarrow x_4 = y_4 + 5 \xrightarrow{x_2=0} x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 5 + x_5 = 11 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{2}$$

مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ $x_i \geq 0, 2 \leq i \leq 5$

$$\xrightarrow{2 \leq i \leq 5} x_i > 0 \Rightarrow x_i \geq 1 \Rightarrow \underbrace{x_i - 1}_{y_i} \geq 0 \Rightarrow x_i = y_i + 1 \Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10 \\ \Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$ $x_i > 2, x_5 \geq 4$

$$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 3}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_5 = 12 \\ \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

طبق شرط مسئله، باید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت(طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با :

$$(ت) x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

بنابراین اینست که با توجه به ضریب ۲ برای آن ۳ حالت می‌توان در نظر گرفت:

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36 : \text{حالت اول}$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 : \text{حالت دوم}$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 : \text{حالت سوم}$$

$$36 + 15 + 3 = 54$$

$$(ث) x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

با توجه به شرایط معادله، چهار حالت برای x_2 وجود دارد:

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 : \text{حالت اول}$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6 : \text{حالت دوم}$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 : \text{حالت سوم}$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1 : \text{حالت چهارم}$$

بنابراین تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله برابر است با: $10 + 6 + 3 + 1 = 20$

۲۰ به چند طریق می‌توان ۵ توب یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_i \geq 0} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

به ۲۱ طریق می‌توان ۵ توب یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد.

۲۱ به چند طریق می‌توان ۸ توب یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توب داشته باشد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \xrightarrow{x_i \geq 1} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

به ۳۵ طریق می‌توان ۸ توب یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که هر نفر حداقل یک توب تعلق گیرد.

۲۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر امکان ندارد متعامد باشند زیرا اگر مثلاً در جایگشت، $a \rightarrow 1$ باشد، انگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول، عدد a در مربع دوم ظاهر می‌شود که در مربع تلقیق زوج ۱۰ تکراری خواهد بود.

برای درک بهتر به مربع روبرو همراه با جایگشت آن دقت کنید:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1 $\rightarrow a$?	?
?	?	a
?	a	?

	1	2
1	2	3
2	3	1

۲۳ مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید.

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 و A_2 متعامدند؟

$A_1 =$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>3</td><td>1</td><td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>3</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>3</td> </tr> </tbody> </table>	3	1	2	2	3	1	1	2	3	تلقیق	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>33</td><td>11</td><td>22</td> </tr> <tr> <td>12</td><td>23</td><td>31</td> </tr> <tr> <td>21</td><td>32</td><td>13</td> </tr> </tbody> </table>	33	11	22	12	23	31	21	32	13	متعامدند.
3	1	2																				
2	3	1																				
1	2	3																				
33	11	22																				
12	23	31																				
21	32	13																				

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A_1 و A_2 متعامدند؟

$A_2 =$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>2</td><td>3</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>3</td><td>(1)</td><td>2</td> </tr> <tr> <td>(1)</td><td>2</td><td>3</td> </tr> </tbody> </table>	2	3	1	3	(1)	2	(1)	2	3	$A =$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>3</td><td>1</td><td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td><td>(2)</td><td>3</td> </tr> <tr> <td>(1)</td><td>3</td><td>1</td> </tr> </tbody> </table>	3	1	2	1	(2)	3	(1)	3	1	متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روی رو، برای دو عدد یکسان ۱، دو عدد یکسان ۲ تغییر شده است.
2	3	1																				
3	(1)	2																				
(1)	2	3																				
3	1	2																				
1	(2)	3																				
(1)	3	1																				

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سوالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟
خیر، به طور قطع نمی‌توان گفت، ممکن است متعامد باشند یا نباشند.

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟
خیر، در بعضی مواقع ممکن است.

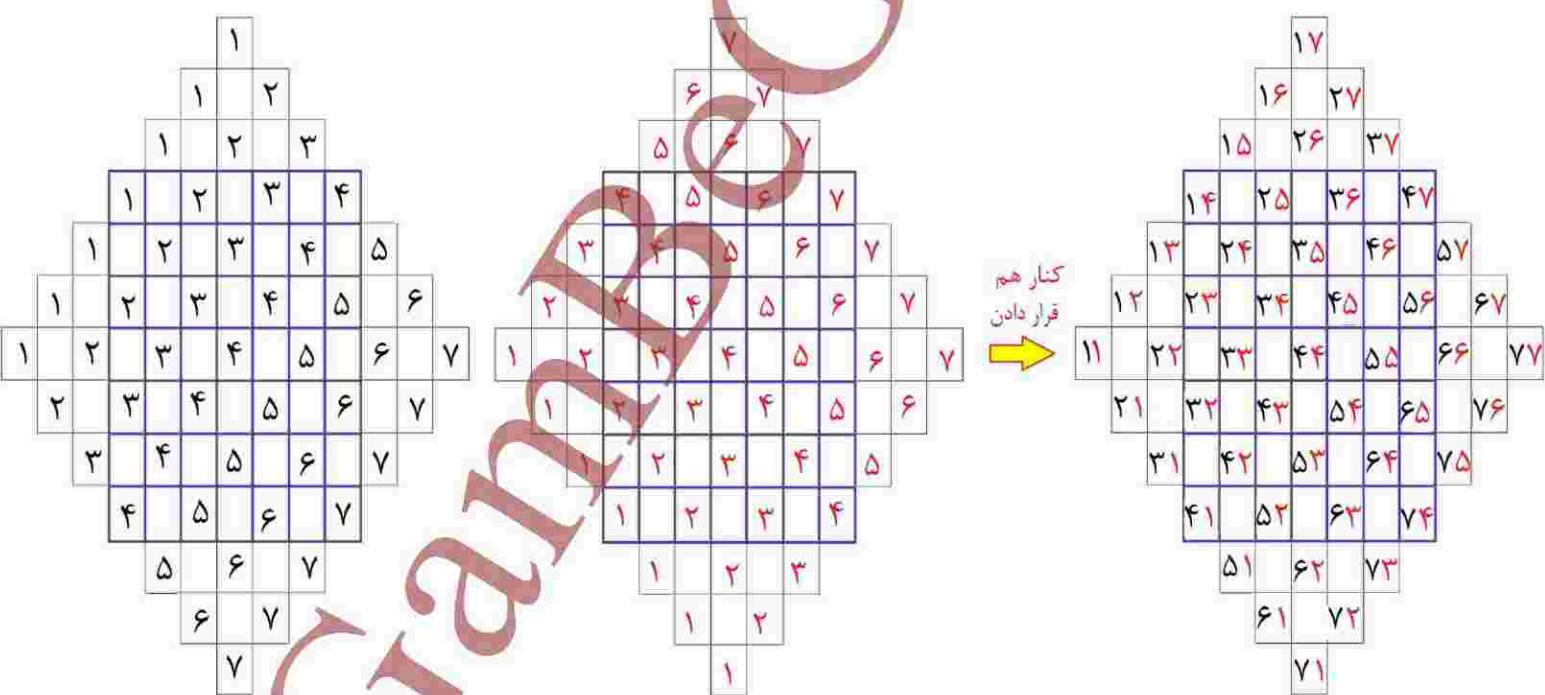
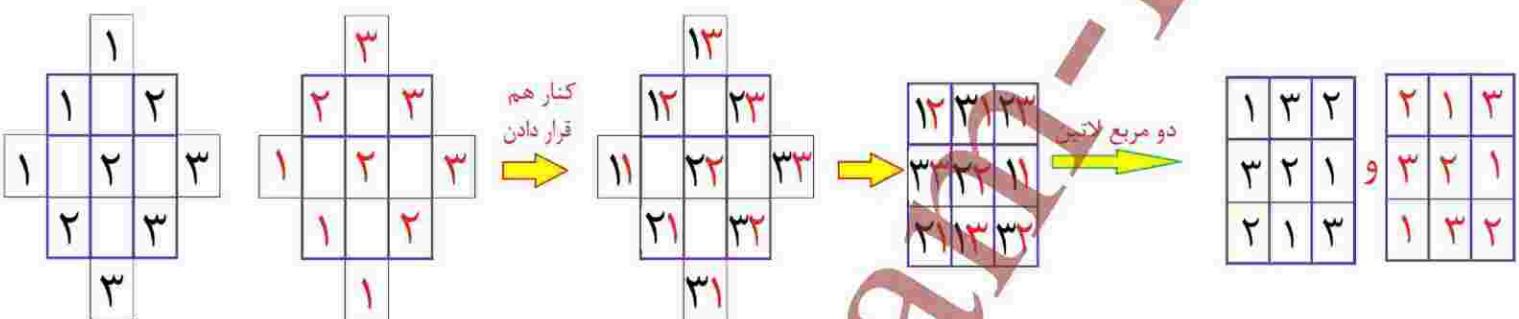
۱۴ قرار است شش مدرس T_1, T_2, \dots, T_6 در شش جلسه متوالی در شش کلاس C_1, C_2, \dots, C_6 به گونه‌ای تدریس کند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نماید.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسه اول	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسه دوم	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسه سوم	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسه چهارم	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسه پنجم	T_2	T_4	T_5	T_6	T_1	T_3
جلسه ششم	T_3	T_1	T_4	T_5	T_6	T_2

یک مربع لاتین 6×6 که هر سطر آن یکی از جلسات و هر ستون آن یکی از کلاس‌ها را مشخص می‌کند.

به عنوان نمونه معلم T_1 جلسه اول را در کلاس C_1 است.
و معلم T_6 جلسه چهارم را در کلاس C_3 است.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.



سایر مسیرها

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱

دو مریع لاتین

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

دو مریع لاتین

۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴
۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷
۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳
۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶
۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲
۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵
۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱

۱۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- (الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛
 - (ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛
 - (پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛
 - (ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.
- برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

کافیست دو مریع لاتین 7×7 بنویسیم، به طوری که سطر های آنها، روز های هفته و ستون های آنها راننده ها نام گذاری شوند.

((برای سهولت در نوشتن، راننده ها را a, b, c, d, e, f, g نام گذاری می کنیم))

اگر آن دو مریع را A و B بنامیم، اعداد درون مریع های A شماره ماشین و اعداد درون مریع های B شماره مسیر را مشخص می کنند.

لذا مریع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های آنها، جواب مسئله است.

برای این منظور از مریع های بدست آمده در سوال ۱۵ استفاده می کنیم:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجمشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجمشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

تلخیق

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
شنبه	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴
یکشنبه	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷
دوشنبه	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳
سه شنبه	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶
چهارشنبه	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲
پنجمشنبه	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵
جمعه	۴۱۱۵۵۲۲۶۶۳۳۷۷۴	۱۴۵۱۲۵۶۲۳۶۷۲۴۷	۵۷۲۴۶۱۳۵۷۲۴۸۱۳	۲۳۶۷۲۴۷۱۴۵۱۲۵۶	۶۶۳۳۷۷۴۴۱۱۵۵۲۲	۳۲۷۶۴۳۱۷۵۴۲۱۶۵	۷۵۴۲۱۶۵۳۲۷۶۴۳۱

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۴ خواهد بود.

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبه تعداد اعضای $(A \cup B)$ یعنی $|A \cup B|$ اچون اعضای $(A \cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A \cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

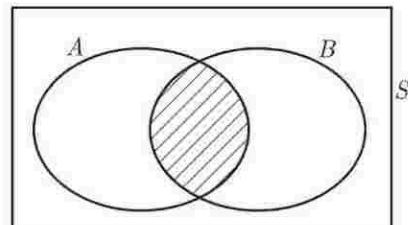
این تساوی به اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را اصل شمول می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعه مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

این تساوی نتیجه اصل شمول است.

نتیجه مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند، برابر است با :



شکل ۱

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشته ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجه اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به دست می‌آوریم.

اگر مجموعه افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می کنند به ترتیب F و V بنامیم در این صورت خواهیم داشت :

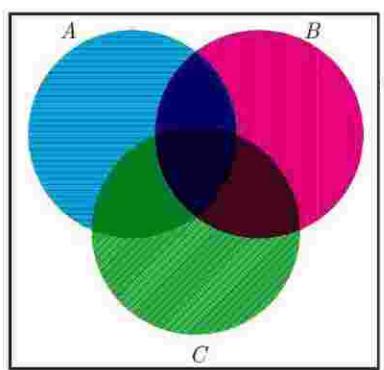
$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| \Rightarrow |F \cup V| = 15 + 14 - 9 = 20.$$

$$\Rightarrow |F \cup V| = |S| - |F \cup V| = 25 - 20 = 5$$

اصل شمول را می توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسأله را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A , B و C زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



شکل ۲

(توضیح دهد چرا اشتراک های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

چون در جمع تکی ها، اشتراک های دوتایی مکرر شمرده شده اند، باید اضافی آن حذف شود. لذا اشتراک های دوتایی را کم می کنیم.

از طرفی طی کم کردن آن اشتراک ها، اشتراک سه تایی که قبلاً ۳ بار حساب شده، ۳ بار هم کم می شود، پس ماته یکبار افواهه گردد.

با استفاده از تعریف متمم، نتیجه اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می شود :

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

(تعداد اعضای از S که در هیچ یک از مجموعه های A و B و C قرار ندارند)

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشد، بر ۴ بخش پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش پذیر نباشد).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می باشند؟ زیرا بر هیچکدام از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نیست.

۲ آیا عدد ۶۰ جزو اعداد موردنظر است؟ خیر، زیرا بر هر سه عدد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر است.

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند A و اعداد بخش پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش پذیر بر ۵ را C بنامیم، \overline{A} ، \overline{B} و \overline{C} را تعریف کنید.

\overline{A} = مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند. \overline{B} = مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند. \overline{C} = مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند.

آیا مجموعه $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می شود؟ بله

۴ آیا تساوی $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A \cup B \cup C})$ برقرار است؟ بله، زیرا :

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C \quad \overline{A \cup B \cup C} = (\overline{A \cup B}) \cap \overline{C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [] جزو صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3} \right] = 133$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش پذیر است $\left[\frac{k}{3} \right]$).

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid 4 \mid n\} \rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid 5 \mid n\} \rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$$

$(A \cap B)$ یعنی مجموعه اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «کم» آن دو عدد یعنی بر $[a, b]$ بخش پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A \cap B| = \left[\frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = 33$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{400}{[3, 5]} \right] = \left[\frac{400}{15} \right] = 26$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{400}{[4, 5]} \right] = \left[\frac{400}{20} \right] = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{60} \right] = 6 \quad ([3, 4, 5] = [[3, 4], 5] = [12, 5] = 60)$$

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= 400 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) \\ &= 400 - (133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6) = 160 \end{aligned}$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 25$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵، ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
(توجه داشته باشید که $30 = 5 \cdot 6$ ، $12 = 4 \cdot 6$ ، $6 = 2 \cdot 3$)

مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۴ را با A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ را با B و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ را با C نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{350}{4} \right] = 87 \quad |B| = \left[\frac{350}{5} \right] = 70 \quad |C| = \left[\frac{350}{6} \right] = 58 \quad |A \cap B| = \left[\frac{350}{20} \right] = 17$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{350}{30} \right] = 11 \quad |C \cap A| = \left[\frac{350}{12} \right] = 29 \quad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{60} \right] = 5$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 350 - (87 + 70 + 58 - 17 - 11 - 29 + 5) = 187$$

مثال: اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداقل چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد).

حل: یک رمز ۴ رقمی را به صورت $abcd$ نمایش می‌دهیم که در آن a, b, c, d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبه تعداد چنین ارقامی به صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d = \forall \} \rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$B = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq \forall \} \rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$(A \cap B) = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq \forall, \forall \} \rightarrow |A \cap B| = \lambda \times \lambda \times \lambda \times \lambda$$

واضح است که منظور از \bar{A} مجموعه اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به کار رفته است و منظور از \bar{B}

اعداد ۴ رقیمی است که در آنها عدد ۸ به کار رفته است. البته $(\bar{A} \cap \bar{B})$ یعنی مجموعه اعداد ۴ رقیمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\ \text{رقم اول} & \text{رقم دوم} & \text{رقم سوم} & \text{رقم چهارم} & & & \end{array} \rightarrow \text{تعداد کل ۴ رقیمی ها} = |S| = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\bar{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$$

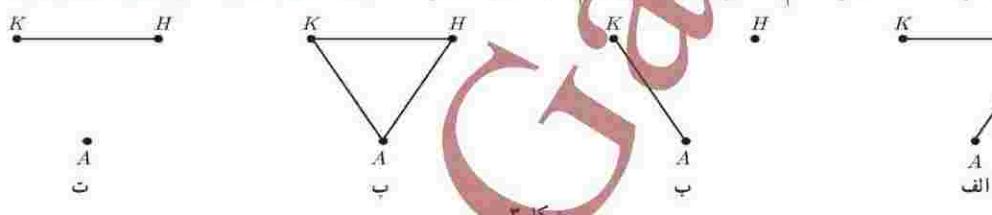
$$= 974 \times 5 = 4870 = \text{زمان لازم بر حسب ثانیه}$$

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خوره، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاهای A ، K و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K ، A و H می‌توان تعریف کرد به طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ **گراف‌های ب و ت را نباید شمرد زیرا یک راس تنها می‌ماند.**

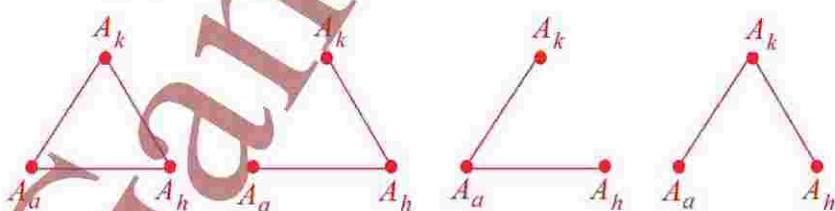


۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با: **۸** (بنی هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها یماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بباید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

$$|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2 \quad |A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1 \quad |A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$$

$$\Rightarrow |\bar{A}_k \cap \bar{A}_a \cap \bar{A}_h| = |\bar{A}_k \cup \bar{A}_a \cup \bar{A}_h| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = 8 - (2+2+2-1-1-1+1) = 4$$



۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

یکی از روستاهای را کنار گذاشته و فقط بین دو روستای دیگر می‌تواند یک جاده باشد یا نباشد. لذا ۲ حالت داریم. **(الف)** $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$

یک راس مانده و فقط یک حالت داریم و آن گراف تهی است. **(ب)** $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$

تمام رئوس بدون یال هستند (بین روستاهای جاده نیست) که گراف تهی بوده و فقط یک حالت محاسبه شود. **(پ)** $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می‌توان به طرق $f(a_i)$ را تعریف کرد (یا $f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا ... یا $f(a_i)=b_n$) ولذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=3$ و $|B|=5$ ، در این صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f = B^A$. (روی تمام اعضای B رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشانه گفته می‌شود.)

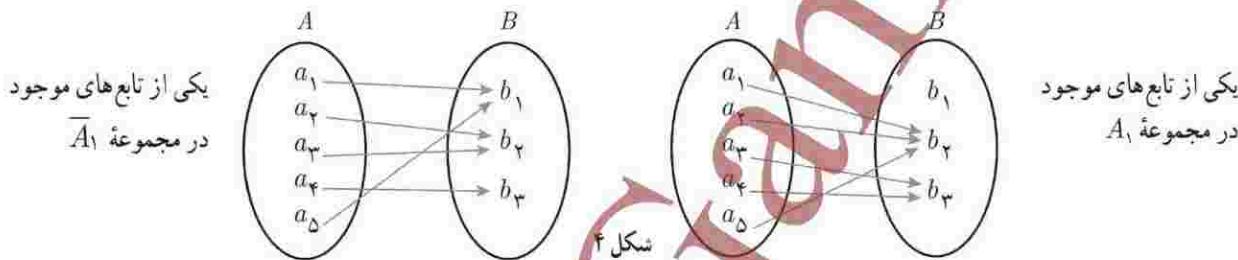
۱ اگر فرض کنیم $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و تعريف کنیم،

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1 : 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2 : 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3 : 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_i می‌آورند.



۲ مجموعه $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = (\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

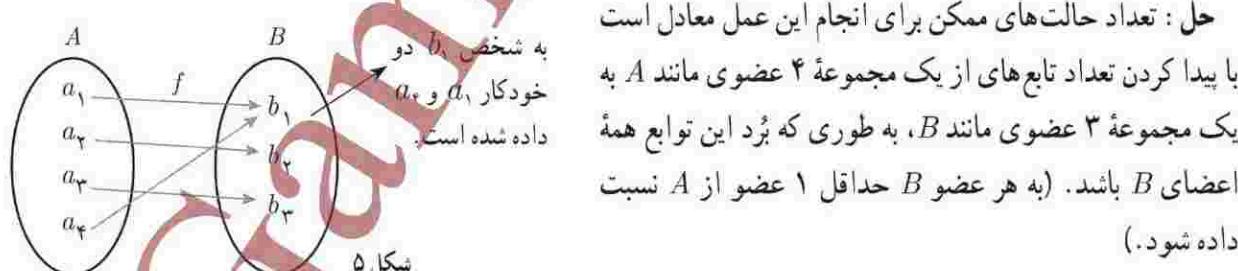
$$|S| = 3^5 = 243, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرده به شرط آنکه هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟



$$A_i = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

ایجاد

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر : تعداد تابع هایی چون $A \rightarrow B$: f با فرض $3^m = m$ و $|A|=3$ و $|B|=3$ به طوری که $R_f = B$ ، از رابطه $(3 \times 2^m - 3)$ به دست می آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدھیم. این عمل به چند طریق امکان بذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با $8^4 = 4096$.

فعالیت

می خواهیم تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم.

۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟ ۶ راه وجود دارد. زیرا (a_1) f می تواند b_1 یا b_2 یا b_3 یا b_4 یا b_5 یا b_6 را انتخاب شود.

۲ با توجه به اینکه f باید یک به یک باشد و تعریف یک به یکی در توابع، پس از تعریف (a_1) , برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟ ۵ راه وجود دارد زیرا با انتخاب یکی از b_1 یا b_2 یا b_3 یا b_4 یا b_5 انتخاب $f(a_2)$ می ماند.

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک به یک از A به B می توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می توان (a_1) را تعریف کرد $\rightarrow b_1$ یا b_2 یا b_3 یا b_4 یا b_5 یا b_6

به ۵ طریق می توان (a_2) را تعریف کرد $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1)$ یک به یک است

به ۴ طریق می توان (a_3) را تعریف کرد. $f(a_3) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow$ یک به یک است

این نماد همان $P(6, 4)$ می باشد

.....

$\frac{6!}{2!} = (6)_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 =$ تعداد کل تابع های یک به یک \Rightarrow طبق اصل ضرب

در حالت کلی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد تابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با تعداد انتخاب های m شیء از میان k شیء یا $.(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$

مثال : به چند طریق می توان ۴ خودکار متغراوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم)

حل : تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شكل ۶

تعداد ناین های یک به یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی یعنی، $1680 = \frac{8!}{4!}$.

اصل لانه کبوتری^۱

اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداقل ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است).

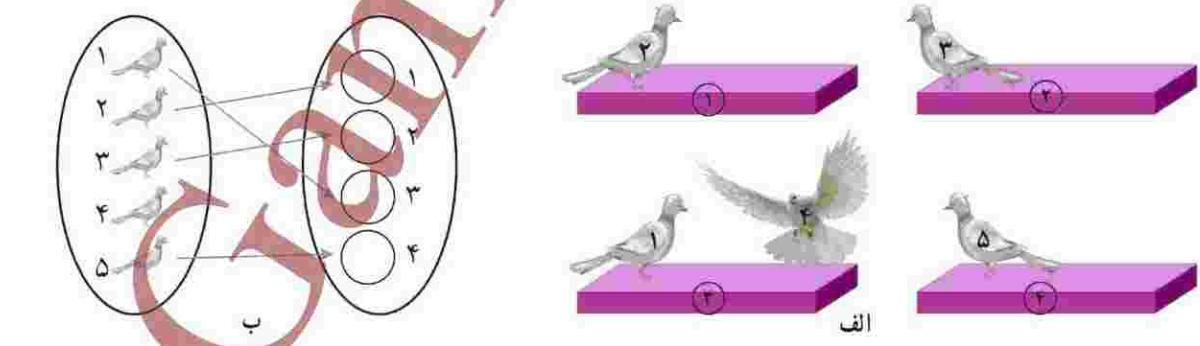


شکل ۷

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعیین آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $n < m$ و همه کوتاه‌ترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

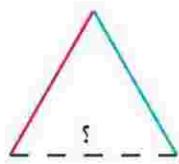


شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجر نیز نامیده‌اند.

۱۵

مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همنگ خواهد شد.



حل : اگر ضلع های مثلث را کبوترها و دورنگ آبی و قرمز را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد بافت می شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.

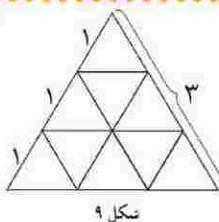
حل : می دانیم باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه $\{R = \{0, 1, 2, 3\}\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهد گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی مانده های تقسیم شان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی مانده بوده و بنابر تعریف هم نهشتی باید $b \equiv a \pmod{4}$ و حکم به دست می آید.

تمرین : در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت

می شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش بذیر است. (به پیمانه n هم نهشت است).

باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعضای مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\} = R$ است، حال اگر $n+1$ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر n را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهد گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این $n+1$ عدد باقی مانده های تقسیم شان بر n با هم برابر است. اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، آن دو در تقسیم بر n هم باقی مانده بوده و در نتیجه تفاضل آنها بر n بخش بذیر است. به عبارت دیگر $a \equiv b \pmod{n}$.

کار در کلاس



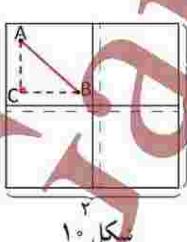
شكل ۹

۱) یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بنشی کرده ایم. نشان دهید اگر 10° نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

مطلوب شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم . حال 10° نقطه را کبوتر و هر

مثلث کوچک را یک لانه فرض می کنیم (۹ لانه داریم)، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهد گرفت.

از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث کوچک ۱ واحد می باشد ، فاصله بین دو نقطه ای درون یک مثلث از ۱ واحد کمتر است .



شكل ۱۰

۲) با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

سوال : ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است . ثابت کنید ، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود دارد به طوری که فاصله ای آنها از یکدیگر کمتر از $\sqrt{2}$ است .

پاسخ : مطابق شکل رو برو مربع را به چهار مربع یکسان (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می کنیم .

حال ۵ نقطه را کبوتر و مربعات کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می گیریم . طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه واقع می شوند ، یعنی حداقل دونقطه مثل A و B یافت می شوند که در یک مربع کوچک قرار می گیرند .

حال با توجه به شکل ، طبق قضیه فیثاغورث می توان نوشت :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \xrightarrow{AC < 1, BC < 1} AB^2 < 1^2 + 1^2 \Rightarrow AB^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

۱۵

۱ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولیدشان یکی است.

هر سال دارای ۴ فصل است که آنها را به عنوان ۴ لانه و هر یک از افراد خانواده را به عنوان یک کبوتر در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌خواهیم حداقل ۵ کبوتر را در ۴ لانه جای دهیم، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر یافت می‌شوند که در یک لانه جای گیرند، یعنی حداقل دو نفر از افراد خانواده وجود دارند که در یک فصل از سال متولد شده‌اند.

۲ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $P-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $P-2$ تغییر می‌کند)

با توجه به راهنمایی داده شده مسئله را حل می‌کنیم:

حالت اول (اگر گراف فاقد راس تنها باشد): هر کدام از رئوس گراف را یک کبوتر و هر کدام از درجات ۱ تا $P-1$ را یک لانه فرض می‌کنیم. بنابراین P کبوتر و $P-1$ لانه کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه جای گیرند، یعنی حداقل دو تا از رئوس دارای درجه یکسان می‌باشند.

حالت دوم (اگر گراف دارای یک راس تنها باشد): درجه آن راس تنها صفر می‌باشد، که با کنار گذاشتن آن، $P-1$ راس داریم و آنها را به عنوان کبوتر در نظر می‌گیریم.

از طرفی هر کدام از این رئوس می‌تواند درجات ۱ تا $P-2$ داشته باشد. که اگر به عنوان لانه در نظر گرفته شوند، طبق اصل لانه کبوتری با وجود ۱ کبوتر و $P-2$ لانه، حداقل دو کبوتر یافت می‌شوند که در یک لانه جای گیرند. یعنی حداقل دو راس وجود دارد که دارای درجه یکسانند.

آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

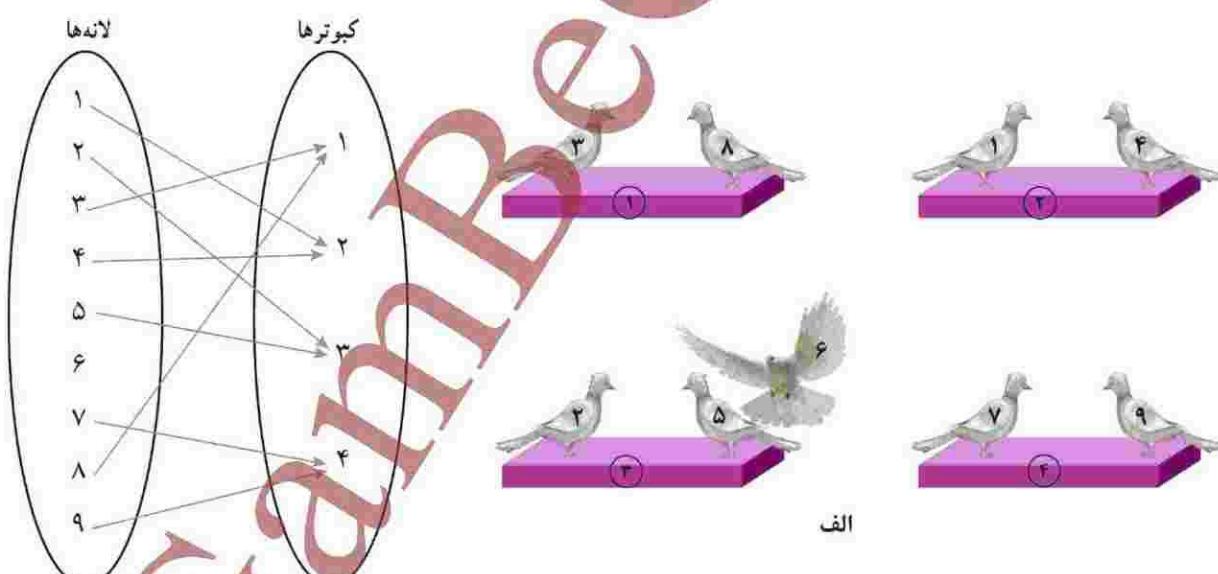
خیر، زیرا هر چه راس تنها داشته باشیم، آنها را کنار گذاشته و از تعداد رئوس و عدد اعدادی که می‌توانند درجه‌ی آنها محسوب شوند، به یک میزان کاسته می‌شود و همواره تعداد رئوس بیشتر از تعداد درجات است.

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ($k+1$) کبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر
n	$3 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر
\vdots	\vdots	\vdots
n	$k n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $k+1$ کبوتر

همان طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به ازای $4 = 2 \times 2 + 1$ تعداد کبوترها $= 2$ و $9 = 2 \times 4 + 1 = 5$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی مانده مجدد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همه کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود مارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: در یک اردوی دانشآموزی حداقل چند دانشآموز وجود داشته باشد تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد رکسانی دارند؟

حل: در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است، پس تعداد کبوترها با آن تعداد دانشآموزان حداقل می‌باشد $kn+1=6 \times 12 + 1 = 73$.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانشآموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟ هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است، لذا طبق اصل ضرب $12 \times 7 = 84$.

$$\begin{aligned} n &= 84 \\ k+1 &= 10 \Rightarrow k = 9 \end{aligned} \quad \text{حداقل تعداد دانشآموزان} \Rightarrow kn+1 = 84 \times 9 + 1 = 757$$

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر بر چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

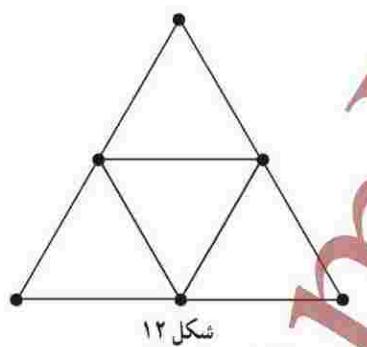
$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=53 \Rightarrow n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلی‌هایی مثل اشتراکی و اشراقی موردنظر است.

تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می‌باشد، پس برای حرف اول ۲۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم، که طبق اصل ضرب $32 \times 31 = 992$:

$$\begin{aligned} n &= 992 \\ k+1 &= 3 \Rightarrow k = 2 \end{aligned} \quad \text{حداقل تعداد افراد حاضر در سالن همایش} \Rightarrow kn+1 = 2 \times 992 + 1 = 1985$$

مثال: حداقل چند نقطه از داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.



حل: کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال: نشان دهید در هر کلاس با n دانشآموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانشآموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس باهم برابر است.

حل: قبلًا ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانشآموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانشآموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

طبق آنچه راهنمایی شده، گرافی را تعریف می‌کنیم که رأس‌های آن دانشآموزان و رابطه‌ی دوستی بین هر دو دانشآموز، یالی بین رأس‌های متناظرشان باشد. بنابراین درجه‌ی هر رأس تعیین کننده تعداد دوستان شخص متناظر با آن رأس است. از طرفی در هر گراف ساده حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد، یعنی حداقل دو دانشآموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها باهم برابر است.

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{90}{2} \right] = 45 \quad |B| = \left[\frac{90}{3} \right] = 30 \quad |A \cap B| = \left[\frac{90}{6} \right] = 15$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{200}{4} \right] = 50 \quad |A \cap B| = \left[\frac{200}{28} \right] = 7 \Rightarrow |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می‌کنند؟

$$|F| = 15, |V| = 11, |B| = 9, |F \cap V| = 5, |V \cap B| = 6, |F \cap B| = 3, |F \cup V \cup B| = 34 - 10 = 24$$

$$|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |V \cap B| - |B \cap F| + |F \cap V \cap B| \Rightarrow 24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = 3$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

$$|V - B| = |V| - |V \cap B| = 11 - 6 = 5$$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

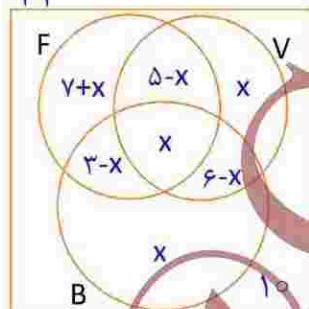
$$= |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10 \quad \text{فقط فوتبال}$$

$$= |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = 11 - 5 - 6 + 3 = 3 \quad \text{فقط والیبال} \quad \rightarrow 16$$

$$= |B| - |B \cap F| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = 9 - 3 - 6 + 3 = 3 \quad \text{فقط بسکتبال}$$

روش ساده تر: پیشنهاد می‌شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود:

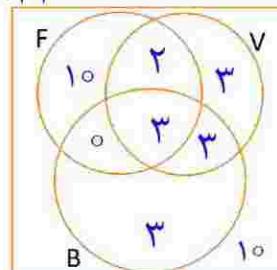
۳۴



$$7 + x + 5 - x + x + 3 - x + x + 6 - x + x + 10 = 34 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین می‌توان نمودار ون را به شکل زیر باز نویسی کرد:

۳۴



۳ (الف)

۱۰ (ب)

$3+2=5$ (پ)

$10+3+3=16$ (ت)

۵ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، **۶** تابع طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداقل چقدر زمان نیاز داریم؟

می خواهیم با را رقم ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ رمز های ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند.

بدون قرنیز ^{۹۵} شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $|S| = 9^5$ رمز می‌توان ساخت. به عبارت دیگر:

مجموعه‌ی رمز‌های فاقد رقم ۳ را با A و مجموعه‌ی رمز‌های فاقد رقم ۷ را با B نمایش

$$|A|=|B|=|C|=\lambda^{\Delta} \quad , \quad |A \cap B|=|B \cap C|=|C \cap A|=\gamma^{\Delta} \quad , \quad |A \cap B \cap C|=\mu^{\Delta}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \rightarrow |A \cup B \cup C| = r \times \lambda^{\Delta} - r \times \gamma^{\Delta} + \varepsilon^{\Delta}$$

$$\Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 9^\circ - (3 \times 8^\circ - 3 \times 7^\circ + 2^\circ) = 33^\circ.$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رسمی ۶ تلیه طول بکشد، حداقل $20340 \times 6 = 33900$ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است.

۵ چه تعداد تابع چون $B \rightarrow A$: می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

تعداد توابع مورد نظر برابر است با ${}^m n$ که هیچگدام از آنها یک به یک نیست، زیرا تعداد اعضای دامنهٔ A بیشتر از تعداد اعضای هم دامنهٔ B است.

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداقل یک کتاب بدیهیم؟

روش اول: $\frac{8!}{3!}$ کتاب ۱ کتاب ۲ کتاب ۳ کتاب ۴ کتاب ۵ کتاب ۶ کتاب ۷ کتاب ۸

روش دوم: تعداد حالت های ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای n عضوی به یک مجموعه ای l عضوی :

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد این حالت‌ها برابر است با تعداد توابع پوشای از یک مجموعه \mathcal{X} به مجموعه \mathcal{Y} عضوی.

با فرض $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ و $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ تعداد توان پوشای X به Y را محاسبه می کنیم:

$$Y = S \Rightarrow |S| = 3^6$$

$$A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ می باشد (بُرْد فاقد عضوی است).}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ می باشد} \quad (\text{برد فاقد عضو } y \text{ است}).$$

$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ مجموعه‌ی تمام توابعی که برد آنها $\{y \in \mathbb{R}^m \mid y \text{ باشد}\}$ بُرد فاقد عضو y است.

$$\Rightarrow |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| \equiv \dots \therefore |A \cap B \cap C| = \circ$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \rightarrow |A| + |B| + |C| = r^s \times r^s - r^s \times + \circ$$

$$\Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |A \cup B \cup C| = |S| - |A| - |B| - |C| = r^{\sigma} - (r \times r^{\sigma} - r \times 1 + 0) = r^{\sigma}.$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه در نظر بگیریم، می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (آخر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سالهای کبیسه که ۳۶۶ روز می‌باشد) جای دهیم.

لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند اگر در یک روز سال متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دیبرستان حداقل ۵۰۵ دانشآموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظور از یکسان بودن روز هفته و ماه تولد آن است که ایام طبق اعضا مجتمعه‌ی زیر در نظر گرفته شده‌اند:

{(سندوچمه) و ... و (اردبیشت و شنبه) و (فروزهای و جمعه) و (فروزهای و پنجشنبه) و (فروزهای و چهارشنبه) و (سه شنبه) و (فروزهای و دوشنبه) و (فروزهای و یکشنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و درنتیجه $7 \times 12 = 84$ لانه داریم.

حال در صورتی که هر دانشآموز را به عنوان یک کبوتر، در نظر بگیریم، ۵۰۵ کبوتر داریم. بنابراین:

$$505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7 \Rightarrow \text{حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.}$$

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (برای سهولت در حل مسئله، سال را خیر کبیسه در نظر می‌گیریم).

$$\left. \begin{array}{l} k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19 \\ k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19 \end{array} \right\} \xrightarrow{n \cdot k + 1} \text{حداقل } 365 \times 19 + 1 = 6936 \text{ نفر تماشای مسابقه کشتی هستند.}$$

$n = 365$: تعداد لانه‌ها همان تعداد ایام سال است.

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

می‌دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، برابر ۰ یا ۱ می‌باشد.

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوترها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی ۰ و ۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند.

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود. که هر صورت مجموعشان عددی زوج است.

۱۲ مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 84\} = A$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۲ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعداد مجموعه‌ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افزای می‌کنیم:

$$\{1, 84\} \text{ و } \{3, 82\} \text{ و } \{2, 83\} \text{ و } \{42, 43\}$$

قفس‌ها را به عنوان لانه‌ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می‌گیریم، به طوری که می‌خواهیم از این لانه‌ها ۴۲ کبوتر به عنوان یک زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم.

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیرمجموعه وجود ندارند که مجموع آنها ۸۵ است.

۱۲ مجموعه اعداد $\{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با 90 باشد.

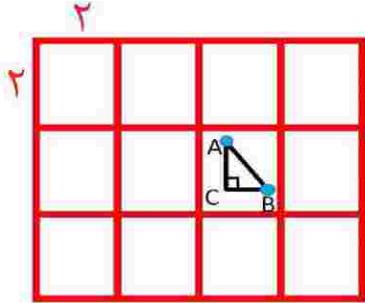
مجموعه A را به ۱۲ زیرمجموعه به شکل زیر افزایش می‌کنیم:

$$\begin{array}{llllll} A_1 = \{5, 85\} & A_7 = \{9, 81\} & A_3 = \{13, 77\} & A_4 = \{17, 73\} & A_5 = \{21, 69\} & A_6 = \{25, 65\} \\ A_9 = \{29, 61\} & A_8 = \{33, 57\} & A_9 = \{37, 53\} & A_{10} = \{41, 49\} & A_{11} = \{45\} & A_{12} = \{1\} \end{array}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، مجموع اعداد درون زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر 90 است.

زیرمجموعه‌های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم که می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه 2 کبوتر انتخاب خواهد شد، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیرمجموعه هستند. واضح است که مجموع آن دو برابر 90 است.

۱۳ نقطه درون یک مستطیل 8×6 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.



طبق شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع 2 تقسیم می‌کنیم و هر کدام از آنها را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم.

در صورتی که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم، می‌خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد.

حال طبق قضیه فیثاغورث:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \xrightarrow{AC < 2, BC < 2} AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

۱۴ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

پنج نقطه با مختصات‌های صحیح را به عنوان ۵ کبوتر معرفی می‌کنیم.

برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ وجود دارد، که این‌به عنوان چهار لانه در نظر گرفته شوند،

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند یعنی، حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات شبیه هم خواهند بود.

پس مجموع طول های آنها زوج و مجموع عرض های آنها نیز زوج است، در نتیجه مختصات نقطه‌ی وسط صحیح خواهد شد.

جزوه های بیشتر (کلیک کنید) :

ا گام به گام دوازدهم || جزوه آموزشی دوازدهم || نمونه سوالات درسی



جهت دانلود جدید ترین مطالب بر روی پایه خود روی لینک های زیر کلیک کنید.

ابتدایی

اول ✓ دوم ✓ سوم ✓ پنجم ✓ چهارم ✓ ششم ✓

متوسطه اول

✓ هفتم ✓ هشتم ✓ نهم

متوسطه دوم

✓ دهم ✓ یازدهم ✓ دوازدهم