۱ – اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\ 5 & 4|A|^2\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3-2)$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\ 5 & 4|A|^2\end{bmatrix}$$

$$|A|=20|A|^3-5|A|\to 20|A|^3-6|A|=0\to 2|A|\,(10|A|^2-3)=0$$

$$\to\begin{cases}|A|=0\to |A|^3-2=-2\\ |A|=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{+}|A|^3-2=\dfrac{3}{10}\sqrt{\dfrac{3}{10}}-2\\ \xrightarrow{-}|A|^3-2=-\dfrac{3}{10}\sqrt{\dfrac{3}{10}}-2\end{cases}\end{cases}$$

۲ – فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}$، یک ماتریس ۲ × ۳ مانند C را طوری پیدا کنید که $A+B-C=O_{3\times 2}$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}$$

$$A+B-C=O_{3\times 2}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-2&0\\4&-1\\9&9\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=C$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}-2&0\\4&-1\\9&9\end{bmatrix}$$

۳ – قضیه ی ۱ را ثابت کنید.

پاسخ:

اثبات ۱ :

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ باشند داریم:

$$\begin{cases}A+B=[d_{ij}]_{m\times n},d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\\ B+A=[d'_{ij}]_{m\times n},d'_{ij}=b_{ij}+a_{ij}\end{cases}\Rightarrow d_{ij}=d'_{ij}\Rightarrow [d_{ij}]_{m\times n}=[d'_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow A+B=B+A$$

اثبات ۲ : اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ باشند داریم:

$$A+B=[d_{ij}]_{m\times n}=D\qquad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$B+C=[d'_{ij}]_{m\times n}=D'\qquad d'_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$$

$$A+(B+C)=A+D'=[a_{ij}]_{m\times n}+[d'_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+d'_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$$

$$(A+B)+C=D+C=[d_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n}$$

با مقایسه روابط فوق می یابیم:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

اثبات ۳: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، $\bar{O}=[e_{ij}]_{m\times n}$ باشد می دانیم $e_{ij}=0$ است.

$$A+\bar{O}=[a_{ij}]_{m\times n}+[e_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+e_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

اثبات ۴: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ باشد می دانیم $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ است.

$$A+(-A)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+(-a_{ij})]_{m\times n}=[۰]_{m\times n}=\bar{O}$$

اثبات ۵:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

$$B=[b_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow rB=[rb_{ij}]_{m\times n}$$

$$rA+rB=[ra_{ij}+rb_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}$$

از طرفی

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$
$$\Rightarrow r(A+B)=r[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}$$

با مقایسه روابط فوق می توان فهمید $r(A+B)=rA+rB$

اثبات ۶:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow (r+s)A=(r+s)[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,(r+s)a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}+sa_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}+[sa_{ij}]_{m\times n}$$

$$=r[a_{ij}]_{m\times n}+s[a_{ij}]_{m\times n}=rA+sA$$

اثبات ۷:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow (rs)A=(rs)[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,(rs)a_{ij}]_{m\times n}=[r(sa_{ij})]_{m\times n}=r[sa_{ij}]_{m\times n}=r(sA)$$

اثبات ۸:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow ۱\times A=۱\times[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,۱\times a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

۴– اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}$ **نشان دهید** $CA=C,AC=A,AB=BA=O$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}$$

$$AB=BA=O\Longrightarrow\begin{cases}AB=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}\\[2ex] BA=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}\end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=BA=\bar{O}$$

$$AC=A\Rightarrow AC=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow AC=A$$

$$CA=C\Rightarrow CA=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow CA=C$$

۵ – فرض کنید d,c,b,a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A=\begin{array}{c}\\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$. آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم A^2 را پیدا کنید؟

پاسخ:

می د انیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases} a=mb\\ b=nc\end{cases}\Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال a_{12} یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و a_{24} یعنی هر واحد از b چند واحد از d است بنابراین $a_{12}\times a_{24}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار a_{14} می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطه فوق اگر $A^2=[m_{ij}]_{4\times 4}$ باشد

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{4}a_{ij}=4a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های A ایجاد شوند.

۶ – کارخانه ای سه محصول c,b,a را به دو بازار n,m می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A=\begin{array}{c}\\ m\\ n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a & b & c\end{array}\\ \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\end{array}$$

نمایش داده شده است. ماتریس های $B=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1/8\\3/5\\2/5\end{bmatrix}$ به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از c,b,a را نشان می دهند. درآیه های هر یک از ماتریس های $AB-AC,AC,AB$ را تعبیر کنید.

پاسخ:

$$AB=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22500\\15000\end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار m را نشان می دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار n را نشان می دهد.

$$AC=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1/8\\3/5\\2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19750\\13100\end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار m و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار n می باشد.

$$AB-AC=\begin{bmatrix}2250\\1900\end{bmatrix}$$

می دانیم سود یعنی از قیمت فروش تمام شده را کم می کنیم پس ۲۲۵۰ میزان سود فروش محصولات در بازار m و عدد ۱۹۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار n را نشان می دهد.

۷ – اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ نشان دهید $A^2-4A-5I_3=O$ ،

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\qquad A^2-4A-5I_3=0$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

بی نام

$$۴A=\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}\qquad ۵I_۳=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A-۵I_۳=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

۸ – اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه ی $A^{۱۰}$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$
$$A^۲=I\Rightarrow (A^۲)^۵=I^۵\Rightarrow A^{۱۰}=I$$

۹ – اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$، به کمک محاسبه ی توان های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n=O$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=۰\Rightarrow n=۳$$

در اینجاست ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۰ – به کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix}\sqrt{۳}&-۱\\۱&\sqrt{۳}\end{bmatrix}^{۶۰۰}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{۳}&-۱\\۱&\sqrt{۳}\end{bmatrix}$$
$$A=۲\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\\frac{۱}{۲}&\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{۶})&-\sin(\frac{\pi}{۶})\\\sin(\frac{\pi}{۶})&\cos(\frac{\pi}{۶})\end{bmatrix}\Rightarrow A=۲R\frac{\pi}{۶}$$
$$R_\theta^n=R_{n\theta}\Rightarrow A^{۶۰۰}=۲^{۶۰۰}\times R_{۶۰۰\times\frac{\pi}{۶}}=۲^{۶۰۰}\times\underbrace{R_{۱۰۰\pi}}_{R_{۲\pi}}=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=۲^{۶۰۰}I=\begin{bmatrix}۲^{۶۰۰}&۰\\۰&۲^{۶۰۰}\end{bmatrix}$$

۱۱ – فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۵&۷\\۲&-۱&۳\\۴&۵&-۲\end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

سطر اول:

$$۱\times(۲-۱۵)-۵(-۴-۱۲)+۷(۱۰+۴)=-۱۳+۸۰+۹۸=۱۶۵$$

سطر دوم:

$$-۲(-۱۰-۳۵)+(-۱)(-۲-۲۸)-۳(۵-۲۰)=۹۰+۳۰+۴۵=۱۶۵$$

سطر سوم:

$$+۴(۱۵+۷)-۵(۳-۱۴)+(-۲)(-۱-۱۰)=۱۶۵$$

ستون اول:

$$+۱(۲-۱۵)-۲(-۱۰-۳۵)+۴(۱۵+۷)=۱۶۵$$

ستون دوم:

$$-۵(-۴-۱۲)+(-۱)(-۲-۲۸)-۵(۳-۱۴)=۱۶۵$$

ستون سوم:

$$+۷(۱۰+۴)-۳(۵-۲۰)-۲(-۱-۱۰)=۱۶۵$$

ساروس

$$\begin{vmatrix}1&5&7\\2&-1&3\\4&5&-2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&5&7\\2&-1&3\\4&5&-2\end{vmatrix}=(2+60+70)-(-28-20+15)=132+33=165$$

۱۲ – قضیه ی ۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

باید $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$ قرار دهیم $|A|,|B|$ را با بسط بیابیم و در یکدیگر ضرب کنیم سپس ماتریس AB را تشکیل دهیم و دترمینان آن را نیز با بسط بیابیم پس از مقایسه آنها خواهیم داشت $|AB|=|A|\times|B|$

۱۳ – فرض کنید بتوان یک ماتریس 3×3 مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 نوشت. ثابت کنید $|A|=0$.

پاسخ:

فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}x&y\\p&q\\r&s\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A=B\times C\Rightarrow|A|=|BC|=\left|\begin{bmatrix}x&y\\p&q\\r&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}x&y&0\\p&q&0\\r&s&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix}x&y&0\\p&q&0\\r&s&0\end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{bmatrix}\right|=0\times0=0$$

۱۴ – فرض کنید λ,μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ها، مقدار دترمینان ماتریس $A=[\lambda i+\mu j]_{3\times3}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+\mu&\lambda+2\mu&\lambda+3\mu\\2\lambda+\mu&2\lambda+2\mu&2\lambda+3\mu\\3\lambda+\mu&3\lambda+2\mu&3\lambda+3\mu\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{سطر اول را به سطر سوم}}\begin{vmatrix}\lambda+\mu&\lambda+2\mu&\lambda+3\mu\\2\lambda+\mu&2\lambda+2\mu&2\lambda+3\mu\\4\lambda+2\mu&4\lambda+4\mu&4\lambda+6\mu\end{vmatrix}=0$$

اگر در یک ماتریس، دو سطر مساوی داشته باشیم دترمینان آن ماتریس مساوی صفر است.

۱۵ – اگر $A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2),C=(c_1,c_2)$ رووس یک مثلث از صفحه ی $\mathbb{R}^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

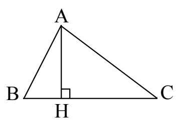
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

پاسخ:

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله A از خط BC

ابتدا معادله خط BC را می نویسیم.



$$\begin{cases}B(b_1,b_2)\\C(c_1,c_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}\\y-b_2=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}(x-b_1)\Rightarrow(y-b_2)(c_1-b_1)=(c_2-b_2)(x-b_1)\end{cases}$$

$$|AH|=\frac{|(a_2-b_2)(c_1-b_1)-(c_2-b_2)(a_1-b_1)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}=\frac{|a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}$$

از طرفی $|BC|=\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|AH|\times|BC|=\frac{۱}{۲}|a_۱(b_۲-c_۲)-b_۱(a_۲-c_۲)+c_۱(a_۲-b_۲)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=a_۱(b_۲-c_۲)-b_۱(a_۲-c_۲)+c_۱(a_۲-b_۲)$$

بنابراین نصف این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۱۶ – نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ **معادله ی خطی است که از نقاط** $(c,d),(a,b)$ **در** $\mathbb{R}^۲$ **می گذرد.**

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰\Rightarrow +x(b-d)-y(a-c)+۱(ad-bc)=۰$$
$$\Rightarrow AX+By+C=۰$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می کنیم

$A(a,b)\Rightarrow\begin{vmatrix} a & b & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ برقرار است

$B(c,d)\Rightarrow\begin{vmatrix} c & d & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ برقرار است

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $B(c,d),A(a,b)$ عبور می کند.

۱۷ – اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ **مفروض باشد، حاصل** $A^۳$ **را به دست آورید.**

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ:

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-۲)^۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳^۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴^۳ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

۱۸ – دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۱ & -۱ & -۲ \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow |A|=\underbrace{(۴-۹-۸)}_{-۱۳}-\underbrace{(۳-۱۲-۸)}_{-۱۷}=۴$$

۱۹ – دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ **را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

پاسخ:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=d\underbrace{\begin{vmatrix} b & c\\ b & c\end{vmatrix}}_{0}-e\underbrace{\begin{vmatrix} a & c\\ a & c\end{vmatrix}}_{0}+f\underbrace{\begin{vmatrix} a & b\\ a & b\end{vmatrix}}_{0}=0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۰- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این‌صورت ماتریس A را مشخص کنید.

پاسخ:

$$a_{ij}=\begin{cases} 7 & i=j\\ i+j & i>j\\ i^2 & i<j\end{cases}$$

$$A=[a_{ij}]_{3\times 4}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 4 & 4\\ 4 & 5 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=B\rightarrow\begin{bmatrix} 2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases} 2x-y=3\\ 2x+y=5\end{cases}\rightarrow\begin{matrix} x=2\\ y=1\end{matrix}$$

$$z=-2$$

$$\rightarrow x+y+z=2+1+(-2)=1$$

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

پاسخ:

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a\\ b-3 & -2b-2\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$-8+2a=0\rightarrow a=4$$

$$b-3=0\rightarrow b=3$$

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ حاصل A^3 و A^7 را بیابید.

پاسخ:

$$A^2=AA=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$A^2=I\xrightarrow{\times A}A^3=A$$

$$A^2=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}A^6=I\xrightarrow{\times A}A^7=A$$

۲۴- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

پاسخ:

الف) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

$$\xrightarrow{AB=BA}A^2+2AB+B^2$$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2\xrightarrow{AB=BA}A^2-B^2$

۲۵- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

پاسخ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}}_{C}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\ ,\ AC=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید $AB=AC$ اما $B\neq C$ می‌باشد.

۲۶ – دوماتریس ۳ × ۳ مانند A و B مثال برنید که $A\neq \overline{O}$ و $B\neq \overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۷ – وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت وارون $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}\to A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۴ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

۲۸ – نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

پاسخ:

کافیست نشان دهیم: $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

۲۹ – قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پاسخ:

فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B=C$.

$AB=BA=I$: طبق فرض

$AC=CA=I$: طبق فرض

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

۳۰ – دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}\to\underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X=A^{-۱}B$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\begin{matrix} \to x=۳ \\ \to y=۲ \end{matrix}$$

۳۱ – اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۵\end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}\rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}&-\frac{۳}{۷}\\-\frac{۲}{۷}&\frac{۴}{۷}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۵&-۱\end{bmatrix}\rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱&۳\\-۵&-۲\end{bmatrix}\rightarrow ۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۷}&\frac{۹}{۱۷}\\-\frac{۱۵}{۱۷}&-\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow ۲A^{-۱}-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۱۷}&-\frac{۳}{۷}-\frac{۹}{۱۷}\\-\frac{۲}{۷}+\frac{۱۵}{۱۷}&\frac{۴}{۷}+\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۰۶}{۱۱۹}&-\frac{۱۱۴}{۱۱۹}\\\frac{۷۱}{۱۱۹}&\frac{۱۱۰}{۱۱۹}\end{bmatrix}$$

۳۲- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\۴&۲\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\۴&۲\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}۳x-۵y=۱\\۴x+۲y=۱۰\end{cases}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲&۵\\-۴&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}&\frac{۵}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}&\frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B\rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}&\frac{۵}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}&\frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}+\frac{۵۰}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}+\frac{۳۰}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵۲}{۲۶}\\\frac{۲۶}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{matrix}x=۲\\y=۱\end{matrix}$$

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

پاسخ:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\-\frac{۳}{۴}&\frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^{-۱}|=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴})-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})\rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}\ \ (۱)$$

$$|A|=(۵\times۲)-(۳\times۲)=۱۰-۶=۴\ \ (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

۳۴- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\۲x+y=۸\end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\۲x+y=۸\end{cases}\qquad \frac{۳}{۲}\neq-\frac{۵}{۱}$$

پس دستگاه یک جواب منحصربه فرد دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۳&-۵\\۲&۱\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}-۱\\۸\end{bmatrix}}_{B}\rightarrow\ X=A^{-۱}B$$

$$A^{-1} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ -\frac{۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ -\frac{۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۱۳} + \frac{۴۰}{۱۳} \\ \frac{۲}{۱۳} + \frac{۲۴}{۱۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳۹}{۱۳} \\ \frac{۲۶}{۱۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = ۳ \\ y = ۲ \end{matrix}$$

۳۵- به‌ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

پاسخ:

شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{۱} \neq \frac{۳}{-۲} \rightarrow \boxed{k \neq -\frac{۳}{۲}}$$

بی نام

نمره برتر

NOMREBARTAR.COM

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سواالت درسی تمامی مقاطع

جزوه های بیشتر (کلیک کنید) :

| گام به گام دوازدهم | | جزوه آموزشی دوازدهم | | نمونه سوالات درسی |

جهت دانلود جدید ترین مطالب بر روی **پایه خود** روی لینک های زیر **کلیک کنید**.

ابتدایی

اول دوم سوم چهارم پنجم ششم

متوسطه اول

هفتم هشتم نهم

متوسطه دوم

دهم یازدهم دوازدهم