



نمره برتر

nomrebartar.com

نمره برتر ، یک سایت آموزشی متفاوت

گروه بررسی کنندگان: استاد ایمانلو و استاد مهربانو و دیگر اساتید گروه

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی (۳)

رشته علوم تجربی

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

12

حل تمرینات و کادر کلاس ها ریاضی ۳ تجربی

تهیه و تنظیم: زهرا شمس

کاري از گروه تلگرامي فقط ریاضی ۳ تجربی

به مدیریت: استاد ایمانلو

گروه بررسی کنندگان: استاد ایمانلو و استاد مهربانو و دیگر اساتید گروه



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	ریاضی (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۱
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	سیدمحمد رضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	رضا حیدری‌قزljحه، زهرا رحیمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سیدصالحی، آناهیتا کمیجانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
شناسه افزوده آماده‌سازی:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان:	احمد رضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - مریم نصرتی (صفحه‌آرا) - مریم کیوان (طراح جلد) - فاطمه رئیس‌یان فیروزآباد (رسم) - بهناز بهبود، سورش سعادت‌مندی، علی نجمی، علی مظاهری‌نظری‌فر، فریبا سیر و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
ناشر:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
سال انتشار و نوبت چاپ:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص» چاپ اول ۱۳۹۷

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۷-۴

ISBN: 978-964-05-3117-4

گروه بررسی کنندگان: استاد ایمانلو و استاد مهربانو و دیگر اساتید گروه

فرزندان عزیزم بکوشید که
با تمام وجود به استقلال
فرهنگی برسیم.

یک لحظه از خدا غافل
نباشید، غفلت از مبدأ
قدرت انسان را به هلاکت
می‌رساند.

امام خمینی
«قدس سرّه الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از این کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست



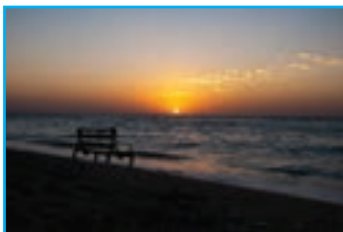
فصل ۱- تابع | ۱

- درس اول - توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی | ۲
- درس دوم - ترکیب توابع | ۱۱
- درس سوم - تابع وارون | ۲۴



فصل ۲- مثلثات | ۳۱

- درس اول - تناوب و تاثرانت | ۳۲
- درس دوم - معادلات مثلثاتی | ۴۲



فصل ۳- حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت | ۴۹

- درس اول - حد بی‌نهایت | ۵۰
- درس دوم - حد در بی‌نهایت | ۵۸



فصل ۴- مشتق | ۶۵

- درس اول - آشنایی با مفهوم مشتق | ۶۶
- درس دوم - مشتق پذیری و پیوستگی | ۷۷
- درس سوم - آهنگ تغییر | ۹۳



فصل ۵- کاربرد مشتق | ۱۰۱

- درس اول - اکستریم‌های تابع | ۱۰۲
- درس دوم - بهینه‌سازی | ۱۱۳



فصل ۶- هندسه | ۱۲۱

- درس اول - تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی | ۱۲۲
- درس دوم - دایره | ۱۳۴



فصل ۷- احتمال | ۱۴۳

- قانون احتمال کل | ۱۴۴

مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود. زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که گاهی پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود. ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و

موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد. مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار^۱ و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۲ دارد به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

۱- mathrde@gmail.com

۲- <http://math-dept.talif.sch.ir>

1 تابع

فصل



عکاس: سپید مهدی حسینی

پل سفید - اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانه کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

ترکیب توابع

تابع وارون

درس اول

درس دوم

درس سوم

درس اول

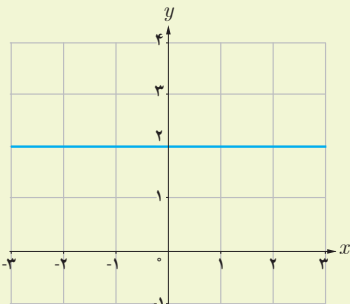
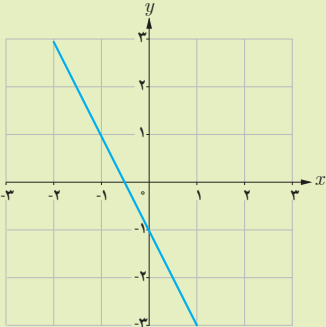
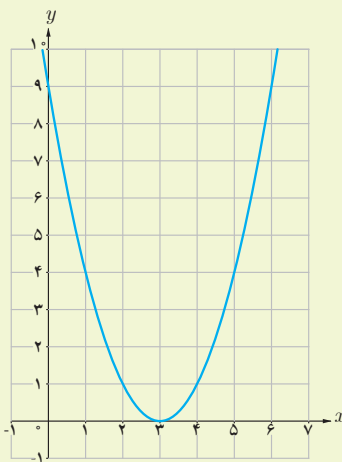
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند. هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{5}x^2$$

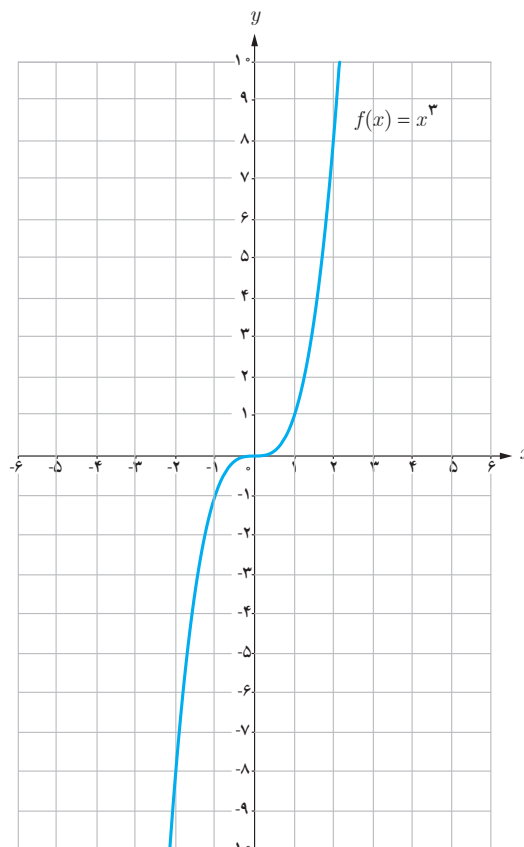
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه دوم
ضابطه کلی	$f(x) = b$	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$f(x) = 2$ 	$f(x) = -2x - 1$ 	$f(x) = x^2 - 6x + 9$ 

تابع درجه ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



خواندنی

الگوی کلی لانه زنبور عسل به صورت یک شش ضلعی است که در دور اول با شش تا شش ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r) = 3r^2 - 3r + 1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r = 1, 2, 3$ به دست آورید؟

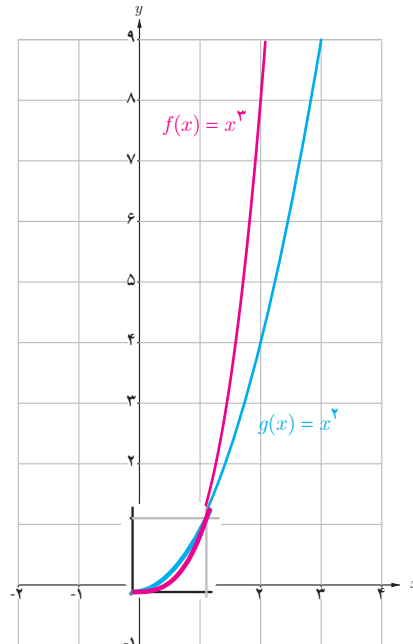
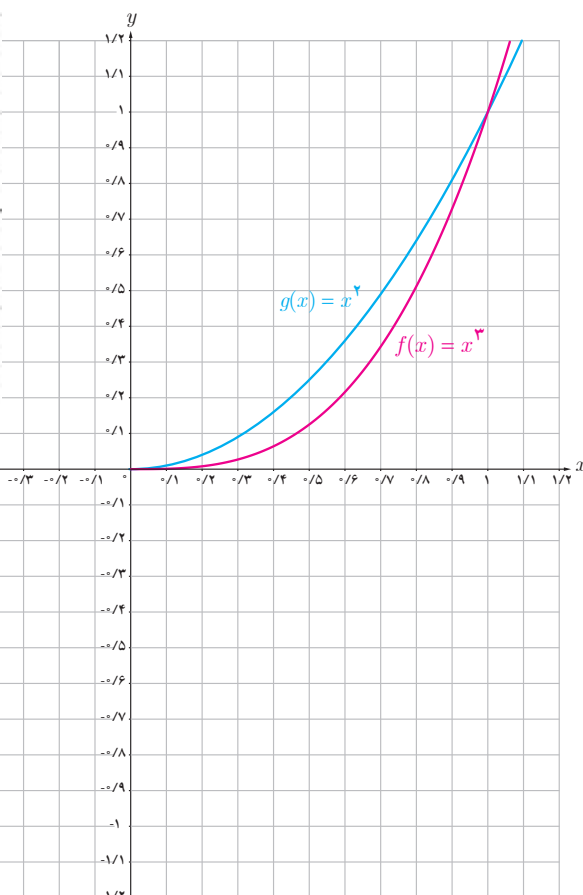
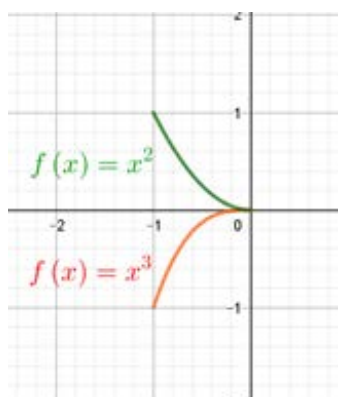


الف: خیر، برای مقادیر بین صفر و یک نمودار x^3 پایین نمودار x^2 قرار دارد

فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ که برای اعداد نامنفی رسم شده اند:

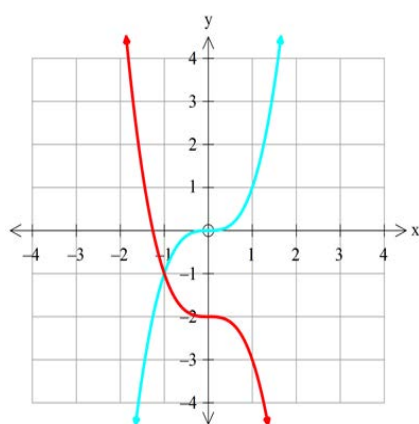
الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x) = x^2$ بالای نمودار $g(x) = x^3$ قرار دارد؟ (ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.



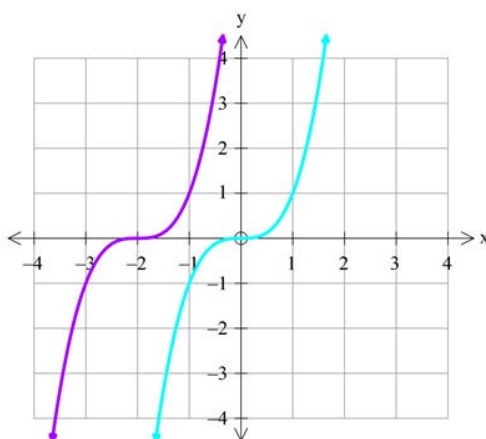
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

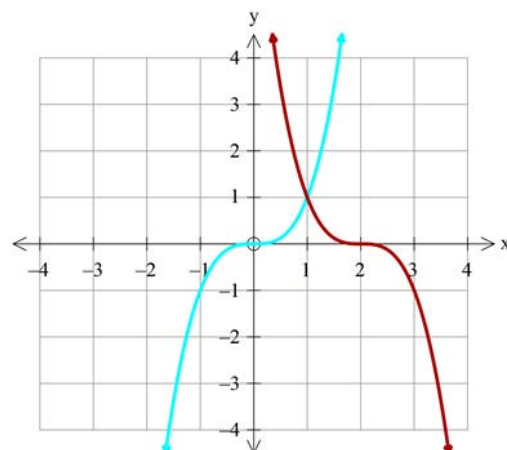
الف) $y = -x^2 - 2$



ب) $y = (x + 2)^2$



پ) $y = -(x - 2)^2$



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

۶ الف) $y = (x-1)^3 + 2$

۷ ت) $y = (x+1)^3 - 1$

۴ ج) $y = x^3 + 1$

۹ ب) $y = (x-2)^3$

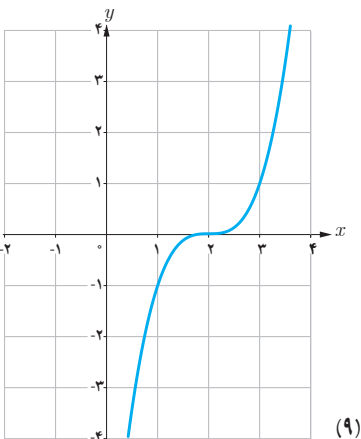
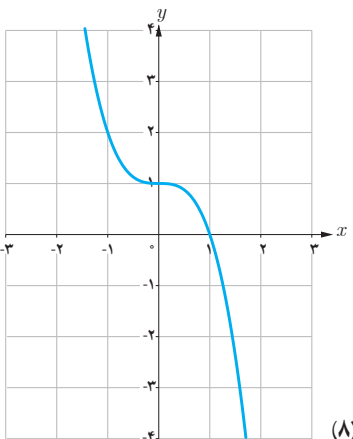
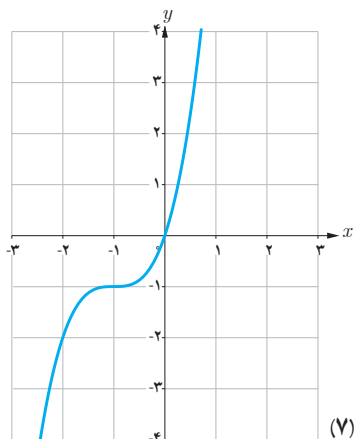
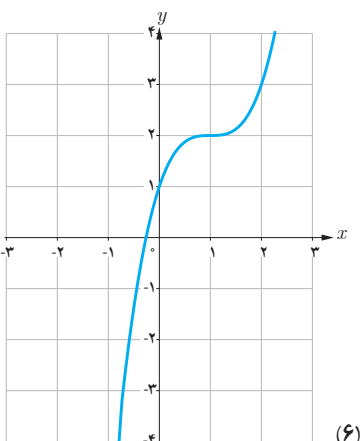
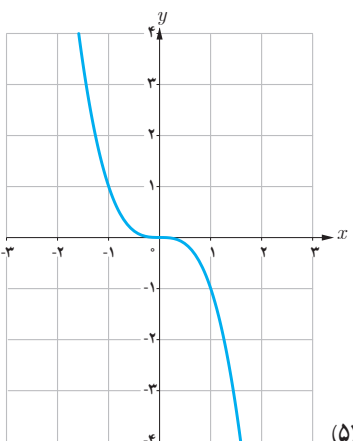
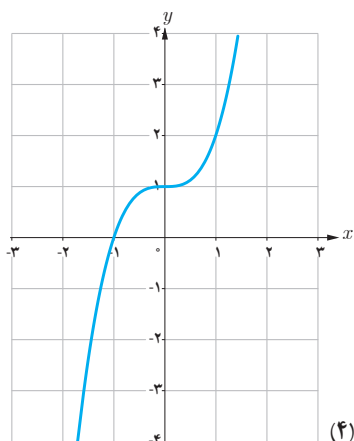
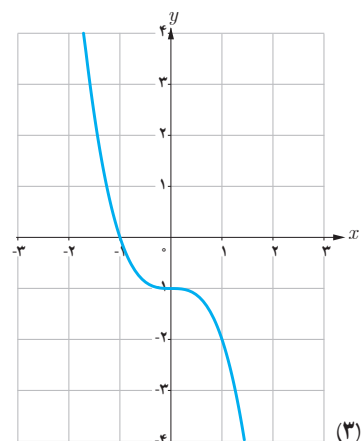
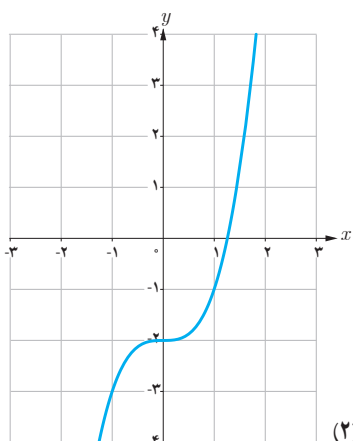
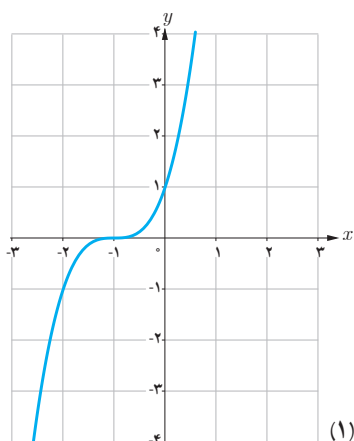
۵ ث) $y = -x^3$

۳ ح) $y = -x^3 - 1$

۸ پ) $y = -x^3 + 1$

۱ ج) $y = (x+1)^3$

۲ خ) $y = x^3 - 2$



توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

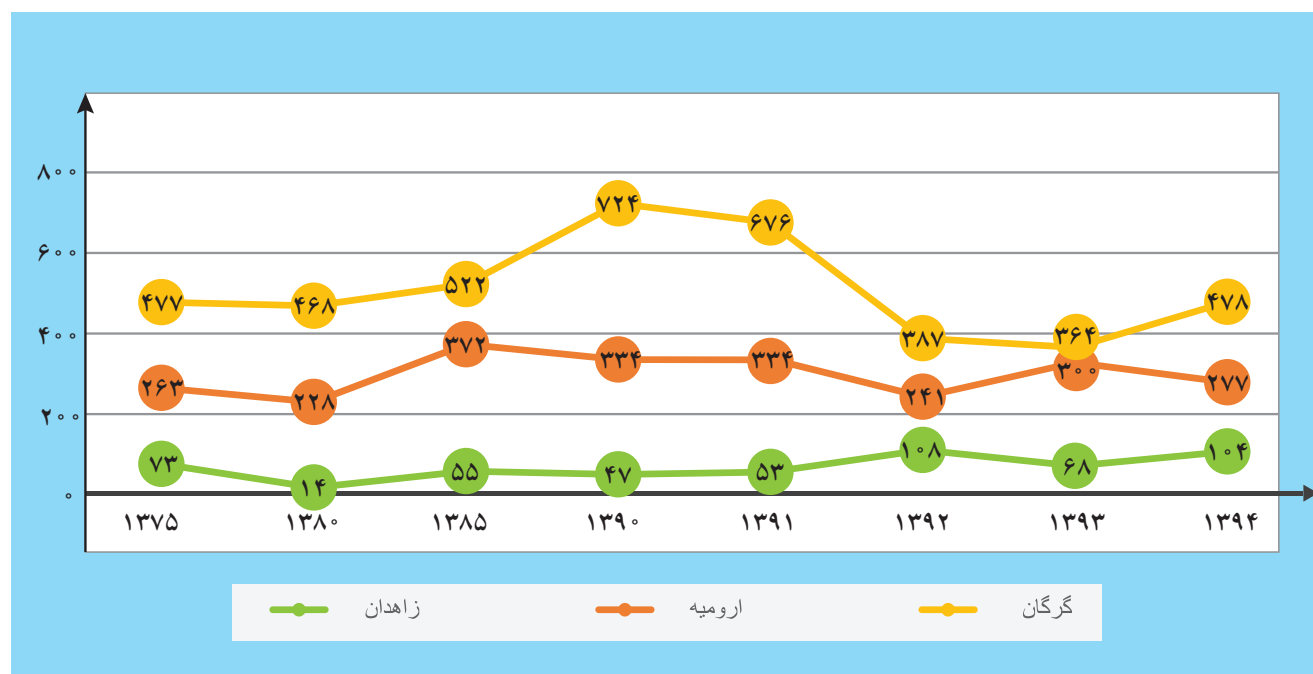
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

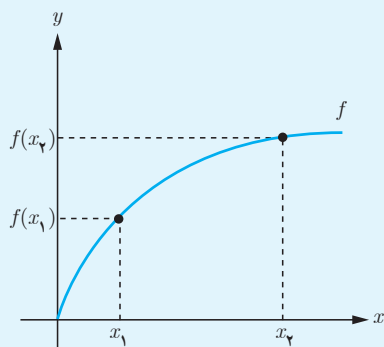
از سال ۱۳۸۰ تا سال ۱۳۹۰

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

در بازه زمانی ۹۱ تا ۹۲ و بازه زمانی ۹۳ تا ۹۴

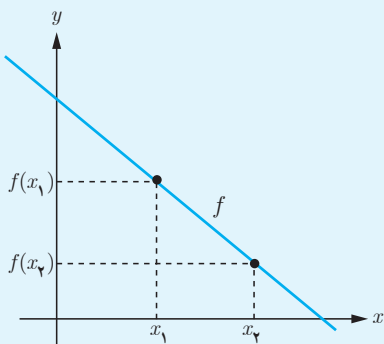


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)^۱



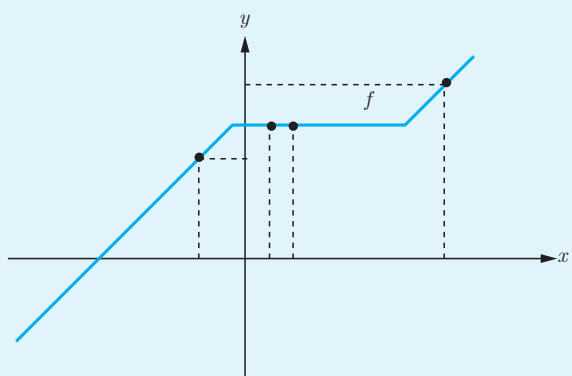
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



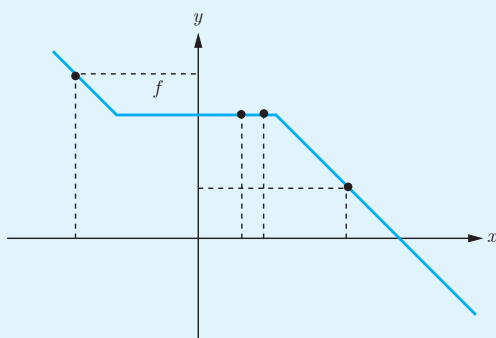
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

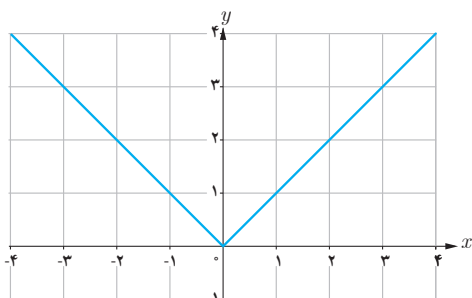


تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

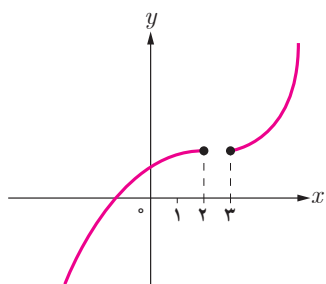


ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

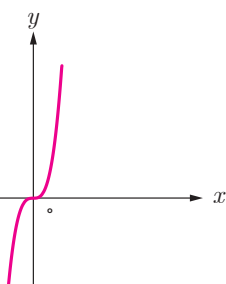
مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

کار در کلاس

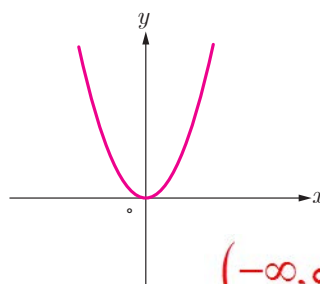
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



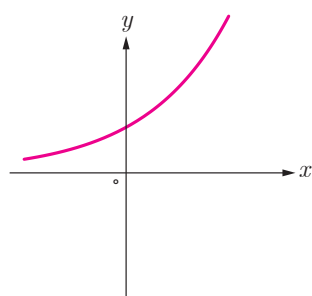
(الف) صعودی



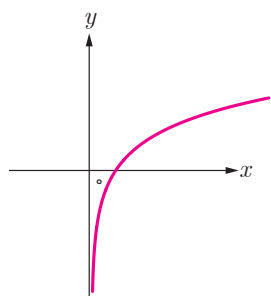
(ب) اکیداً صعودی



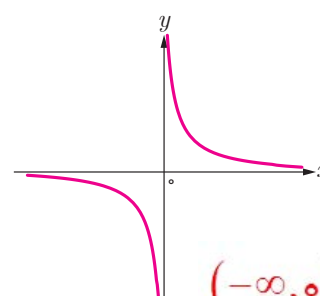
(پ) اکیداً نزولی $(-\infty, 0]$
اکیداً صعودی $[0, +\infty)$



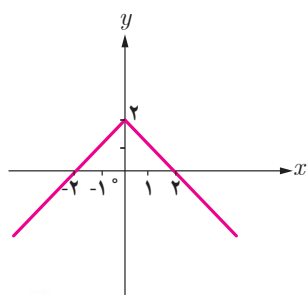
(ت) اکیداً صعودی



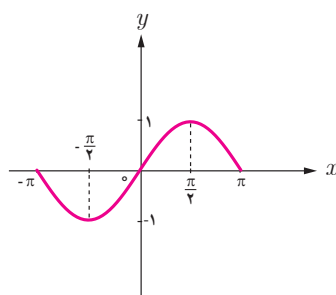
(ث) اکیداً صعودی



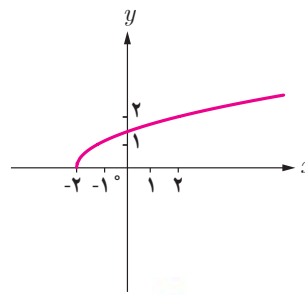
(ج) اکیداً نزولی (نزولی) $(-\infty, 0)$
اکیداً نزولی (نزولی) $(0, +\infty)$



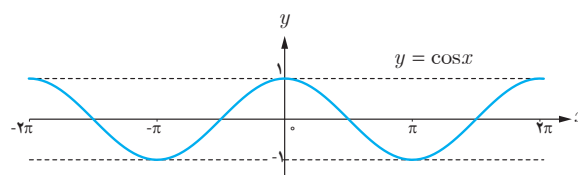
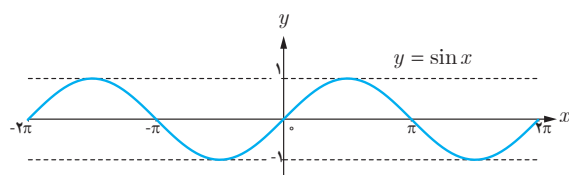
(چ) صعودی $(-\infty, 0]$
نزولی $[0, +\infty)$



(ح) در بازه‌های $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ، $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ نزولی و در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است

(خ) اکیداً صعودی $[-2, +\infty)$

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

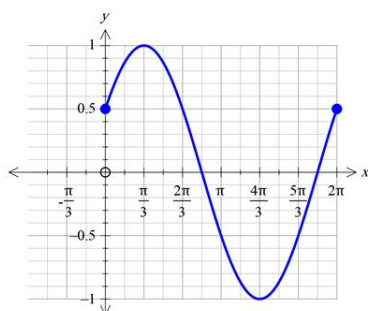


x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

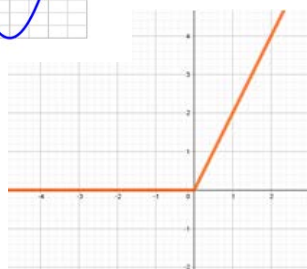
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$



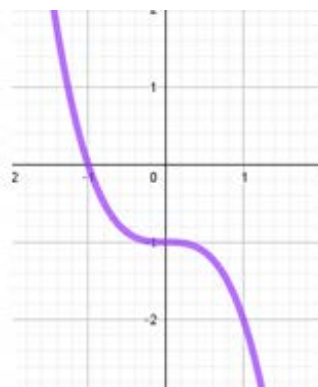
در بازه‌های $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ صعودی و در بازه $[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$ نزولی

ب) $g(x) = x + |x|$



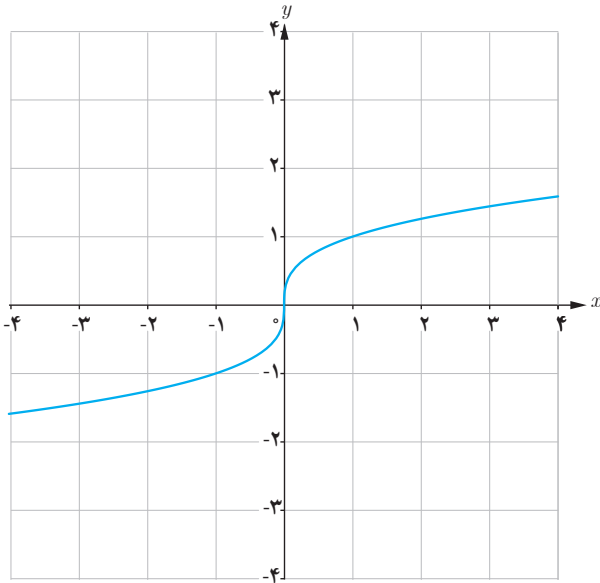
در $\mathbb{R}$ صعودی
ب: در $\mathbb{R} \geq 0$ اکیداً صعودی
در $\mathbb{R} \leq 0$ ثابت

پ) $t(x) = -x^3 - 1$



اکیداً نزولی

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.
الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ **اکیداً صعودی**

ب) این تابع یک به یک است؟ **بله**

پ) آیا تابعی جواد درد کاه‌کیدصه‌اعوی‌دا اکیداً نزولی باشد ولی

یک به یک نباشد؟

خیر، طبق تعریف دو ایکس متمایز دارای تصاویر متمایز هستند پس یک به یک می‌باشند

تمرین

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y = (x-1)^3 - 1$

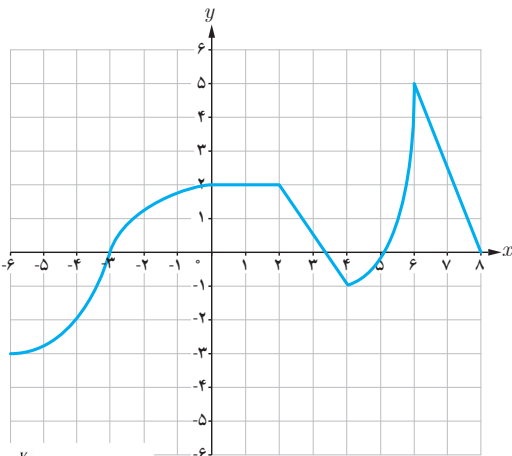
ب) $y = (x+2)^3 - 2$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی

صعودی، نزولی یا ثابت است؟



$x \in (-\infty, 0] \cup [4, 6]$ **صعودی**

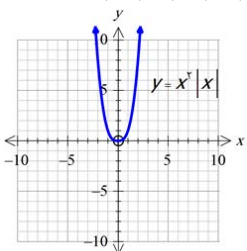
$x \in [2, 4] \cup [6, 8]$ **نزولی**

$x \in [0, 2]$ **ثابت**

۴ تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵ تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟ **صفر**

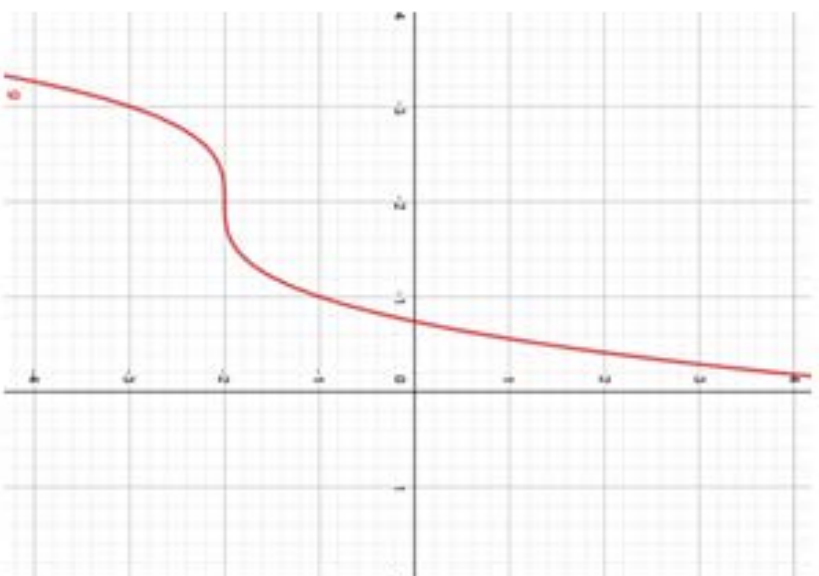
۶ تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.



$\begin{cases} y = 3^x \\ y = x^3 \end{cases}$ **اکیداً صعودی**

$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = -x^3 \end{cases}$ **اکیداً نزولی**

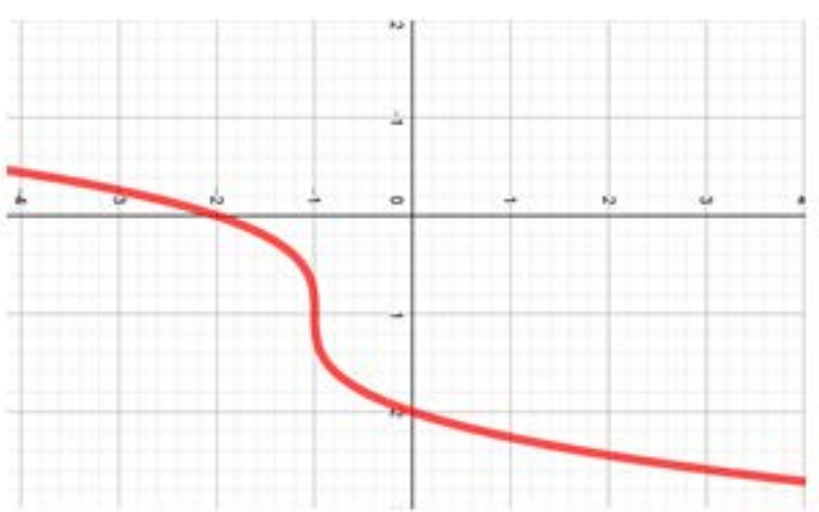
ب.



$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

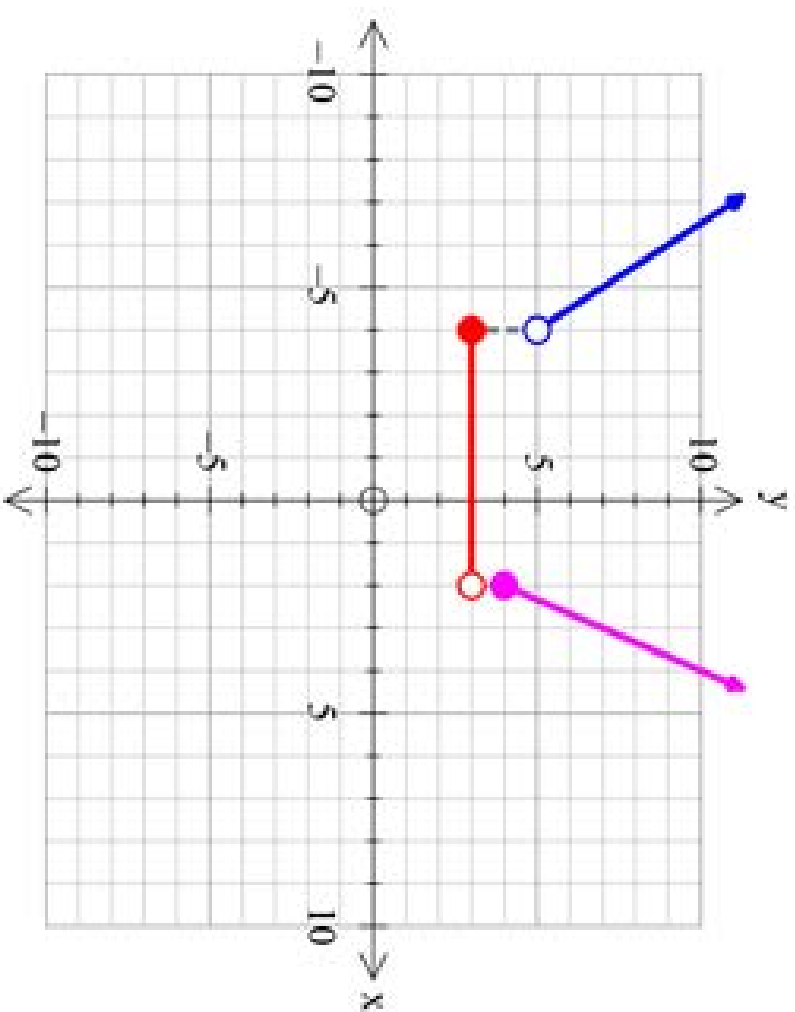
ج. الف



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

مرکز



$$x \in [p, +\infty)$$

صعودی

$$x \in (-\infty, -k)$$

نزولی

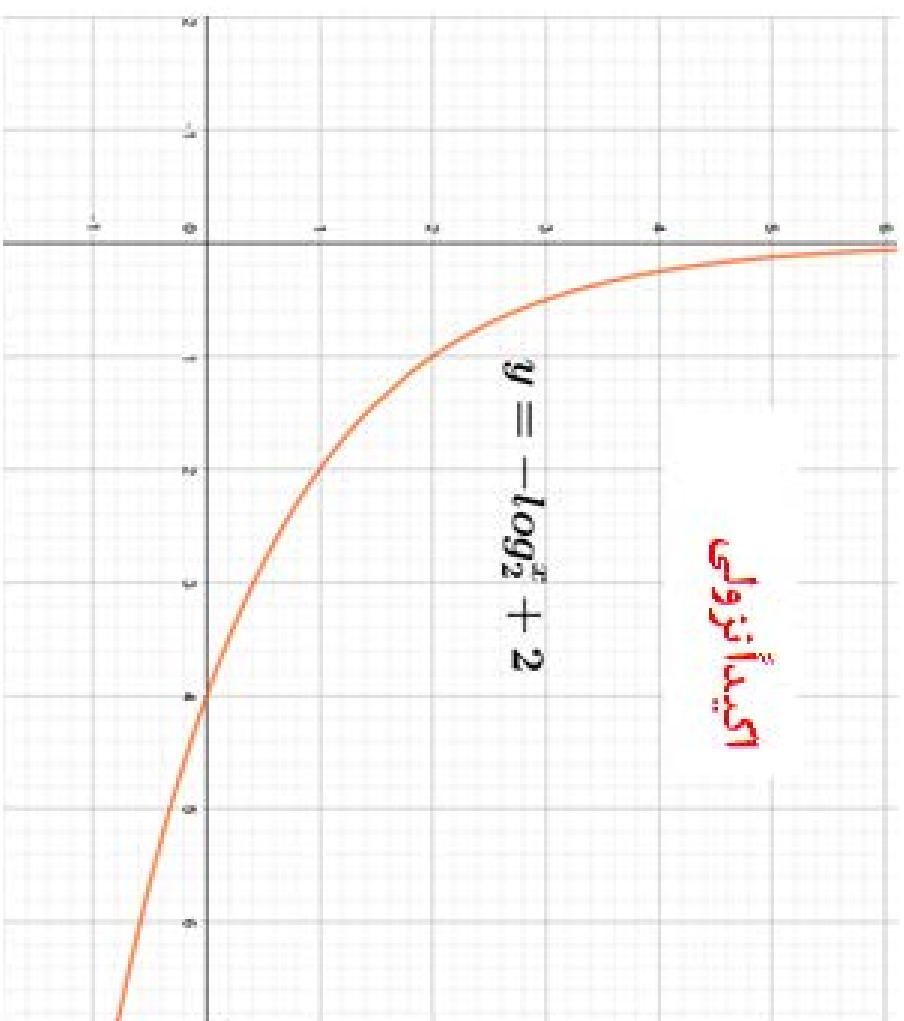
$$x \in [-k, p)$$

ثابت

مرکز ۴:

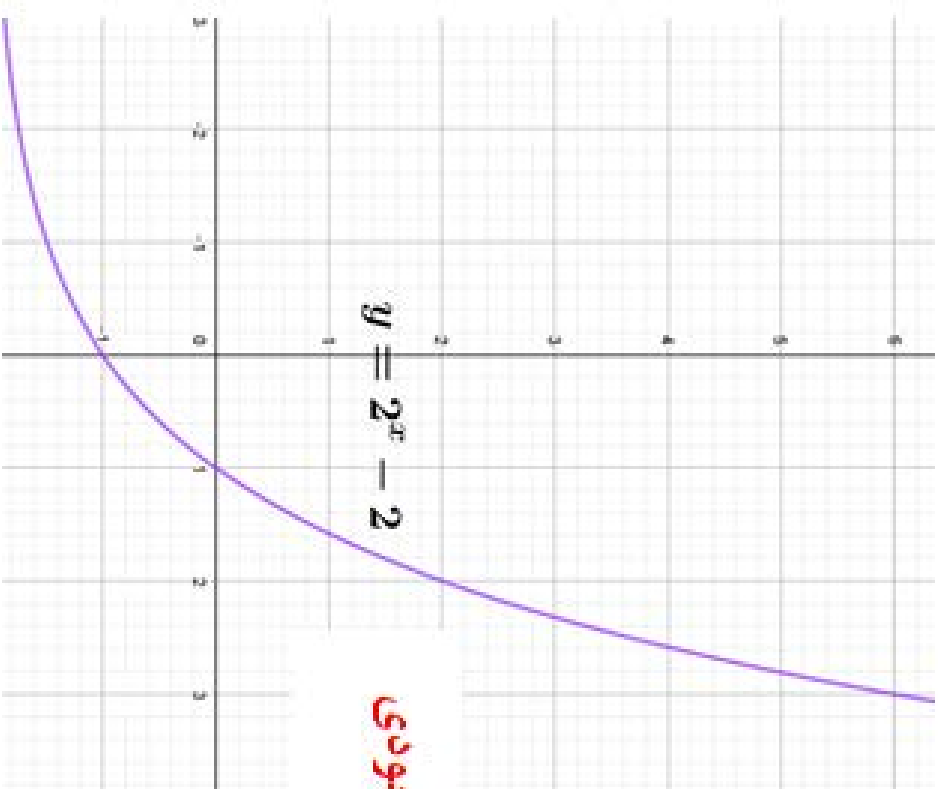
اگریداً نزولی

$$y = -\log_2 x + 2$$



اگریداً صعودی

$$y = 2^x - 2$$



در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است}).$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10° درجه سانتی گراد است.

$$d(1) = 4 \times 1 + 2 = 6$$

دمای غذایی که یک ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۶ است

$$d(3) = 4 \times 3 + 2 = 14$$

دمای غذایی که سه ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۴ است

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2° درجه سانتی گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 500; \quad 2 \leq d \leq 14$$

که در این تابع، d دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه سانتی گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 500 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10° درجه سانتی گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$$n(2) = 20 \times 2^2 - 80 \times 2 + 500 = 420 \quad \dots \text{تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای } 2^\circ \text{ درجه، } 420 \text{ تا است.}$$

$$n(3) = 20 \times 3^2 - 80 \times 3 + 500 = 440 \quad \dots \text{تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای } 3^\circ \text{ درجه، } 440 \text{ تا است.}$$

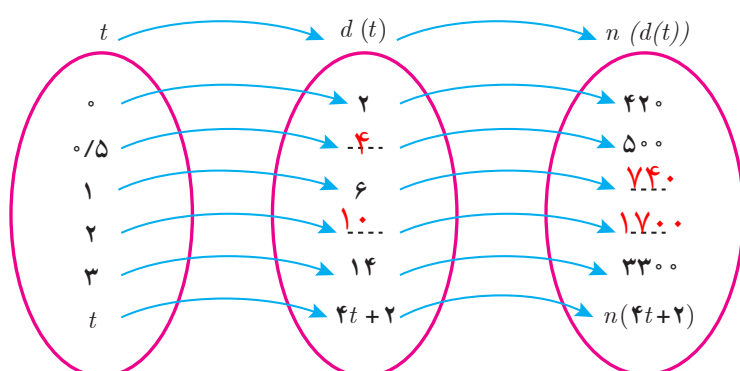
به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر:

$$\text{تعداد باکتری‌ها} \xrightarrow{n} \text{دما} \xrightarrow{d} \text{زمان}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی که به میزان 2° ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 1700 تا است.

t	$d(t) = 4t + 2$	$n(d(t)) = n(4t + 2)$
۰	$d(0) = 2$	$n(d(0)) = n(2) = 420$
۰/۵	$d(0/5) = 0.4$	$n(d(0/5)) = n(0.4) = 500$
۱	$d(1) = 6$	$n(d(1)) = n(6) = 740$
۲	$d(2) = 10$	$n(d(2)) = n(10) = 1700$
۳	$d(3) = 14$	$n(d(3)) = n(14) = 3300$

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است. آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟ به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

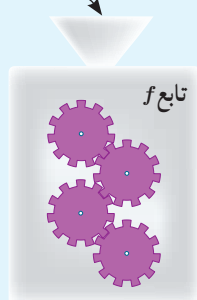
$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500 = 20(16t^2 + 16t + 4) - 320t - 160 + 500 = 320t^2 + 420t + 180 \quad 0 \leq t \leq 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

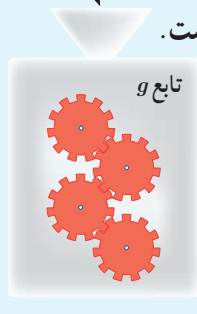
مرحله اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

x باید در دامنه تابع f باشد.



$f(x)$ باید در دامنه تابع g باشد.

مرحله دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.



اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می نامیم، به عبارت دیگر:

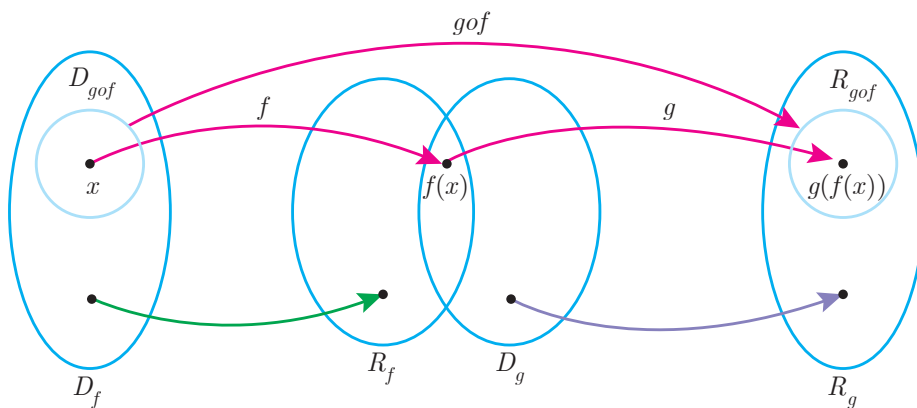
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

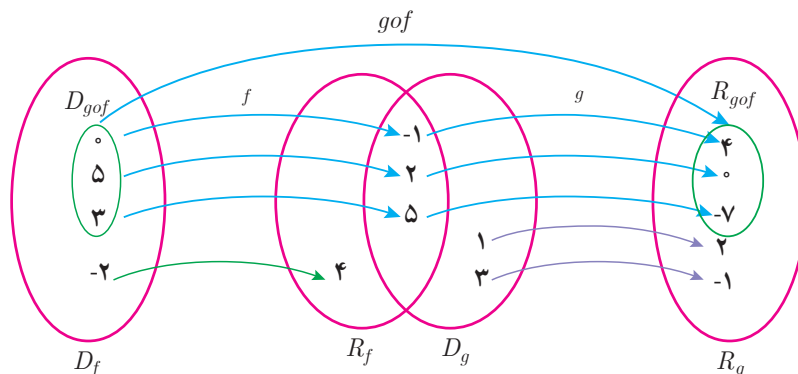
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ ، تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (g \circ f)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) : \text{تعریف نشده} \end{aligned} \right\} \rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$



با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$	x	$g(x)$
-۳	-۷	-۳	۸
-۲	-۵	-۲	۳
-۱	-۳	-۱	۰
۰	-۱	۰	-۱
۱	۳	۱	۰
۲	۵	۲	۳
۳	۵	۳	۸

$$\text{الف) } (fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۰) = -۱$$

$$\text{ب) } (fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(۰) = -۱$$

$$\text{پ) } (gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۰$$

$$\text{ت) } (gog)(-۲) = g(g(-۲)) = g(۳) = ۸$$

$$\text{ث) } (gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۵) \quad \text{تعریف نشده.}$$

$$\text{ج) } (fof)(۱) = f(f(۱)) = f(۳) = ۵$$

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع gof را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $0 \leq x-1$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$ ، بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{2x^2-1-1} = \sqrt{2x^2-2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع fog و gof را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر: دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنه تابع gof با توجه به ضابطه آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به دست آورید.

$$\text{fog}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right) = \frac{\mu}{\mathbf{g}(\mathbf{x}) - 1} = \frac{\mu}{\frac{\mu}{\mathbf{x}} - 1} = \frac{\mu\mathbf{x}}{\mu - \mathbf{x}}$$

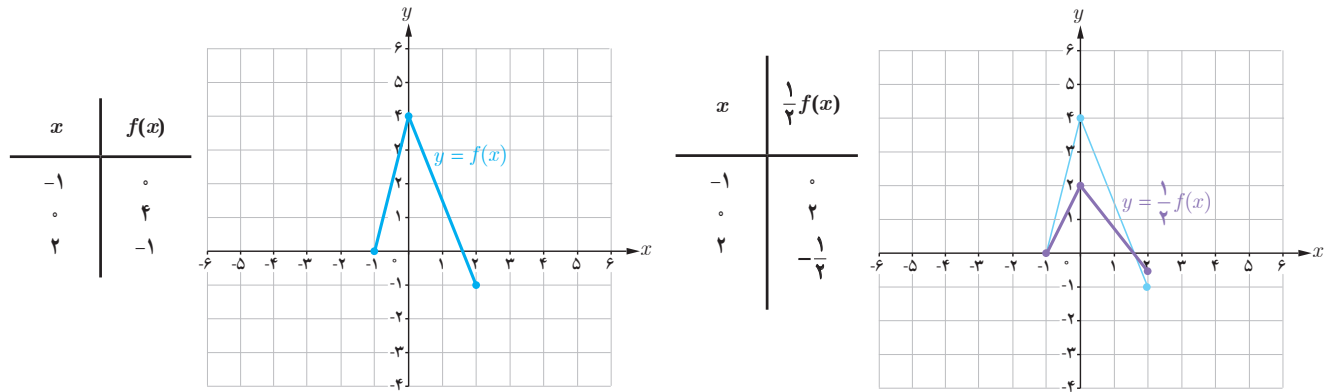
$$D_{\mathbf{f}} = \mathbb{R} - \{1\}, D_{\mathbf{g}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{\text{fog}} = \left\{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{g}} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in D_{\mathbf{f}}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{\mu}{\mathbf{x}} \in \mathbb{R} - \{1\}\right\} = \mathbb{R} - \{0, \mu\}$$

«تبدیل نمودار توابع»

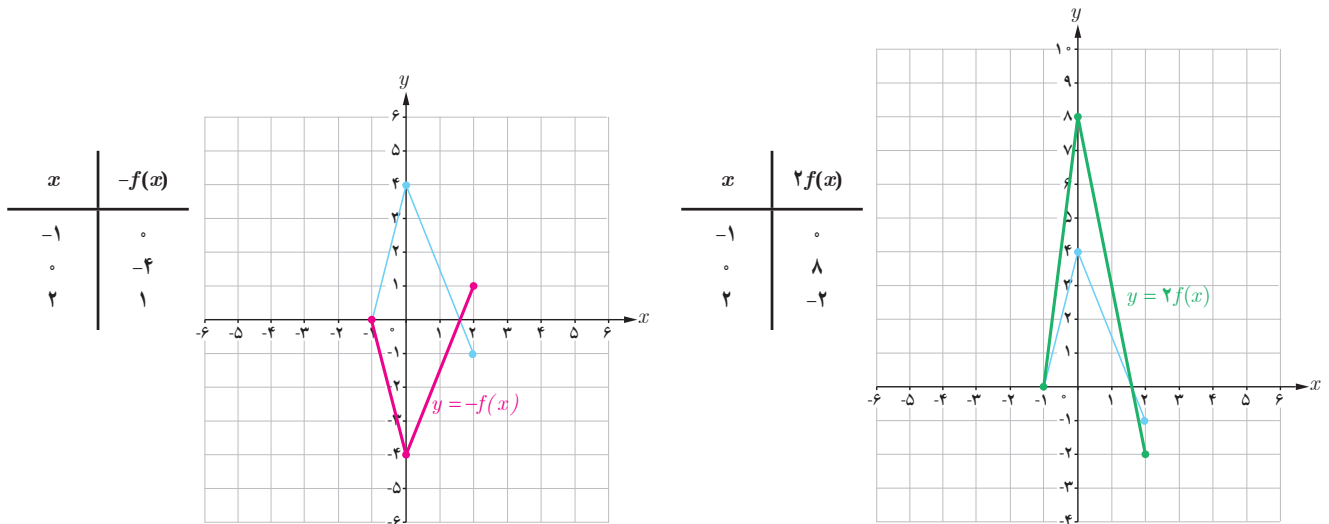
یادآوری: همان طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{4}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.



برای رسم نمودار $y=\frac{1}{4}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{4}$ ضرب می کنیم.

از آنجایی که ریشه های معادله $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور x ها یکسان است.

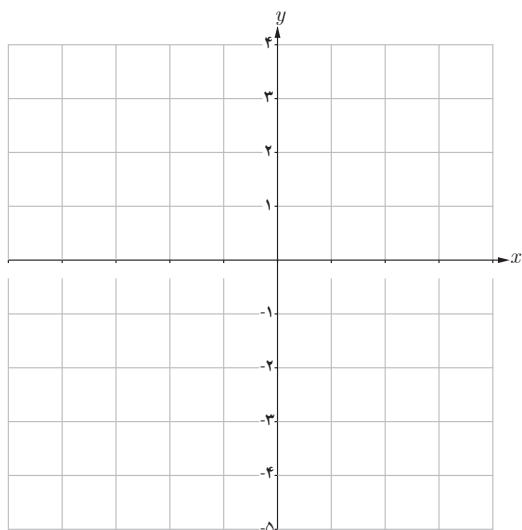


برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می کنیم.

برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در 2 ضرب می کنیم.

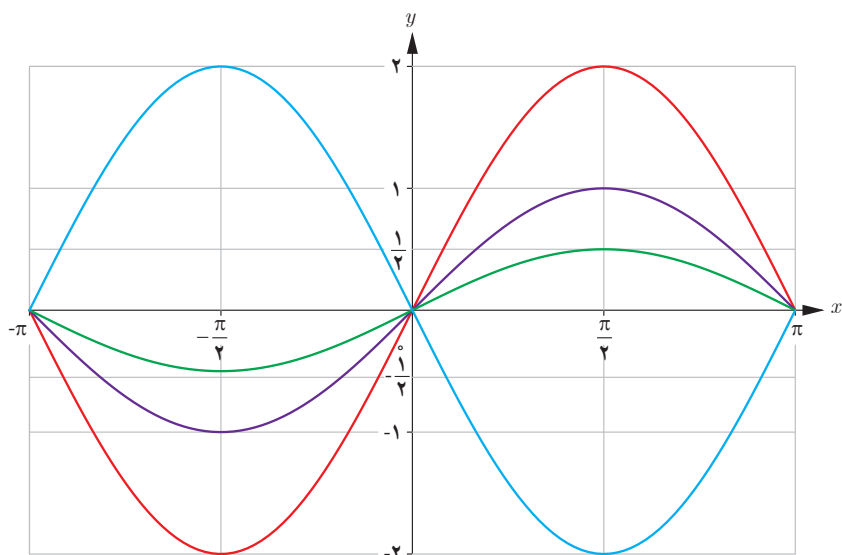
دامنه تابع با ضابطه تابع $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{3}|x - 2|$ و $k(x) = -\frac{1}{3}|x - 2|$ را رسم کنید.

کار در کلاس



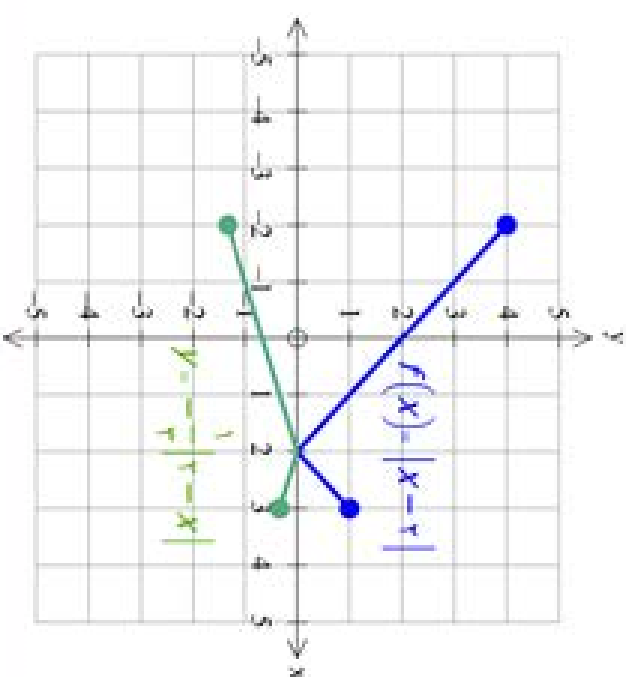
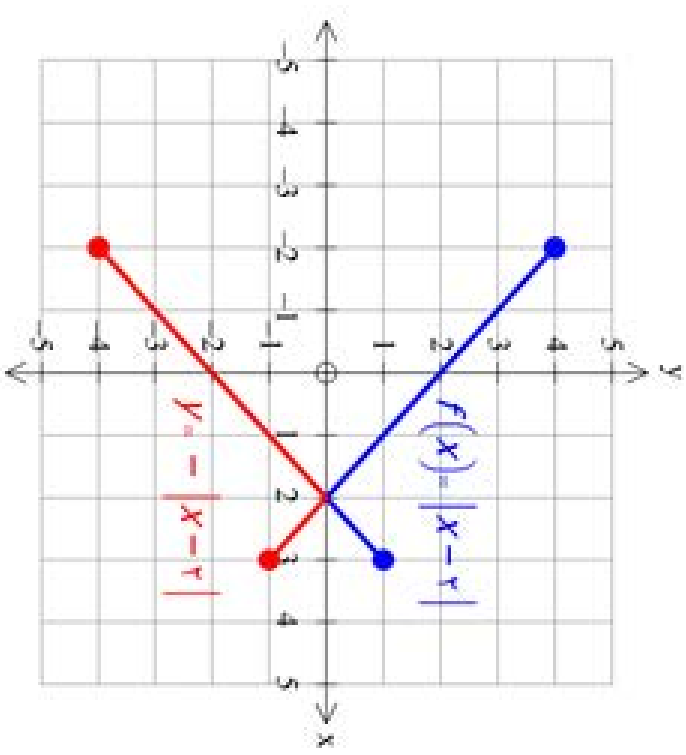
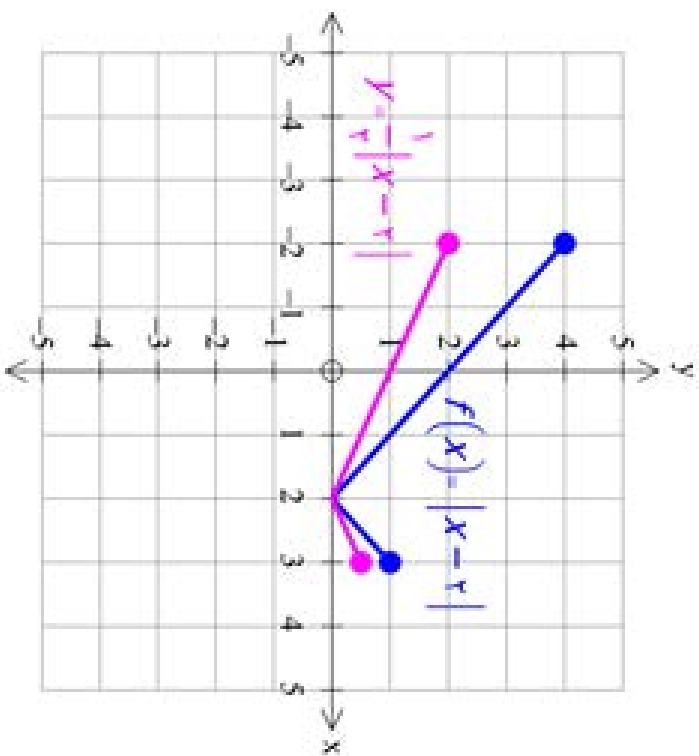
در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$ ، $y = -2 \sin x$ و

$y = \frac{1}{2} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

$y = \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-1, 1]$
$y = 2 \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-2, 2]$
$y = -2 \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-2, 2]$
$y = \frac{1}{2} \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



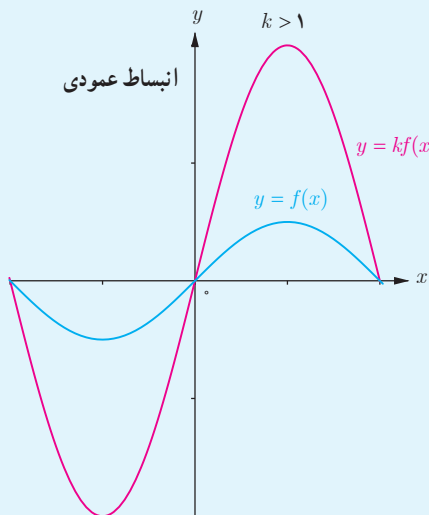
بیلاقات تالش



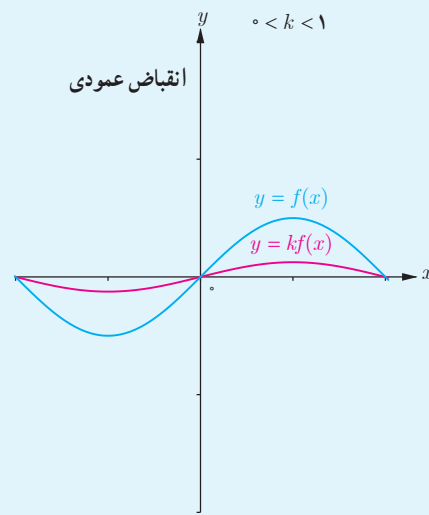
می توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = kf(x)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد.

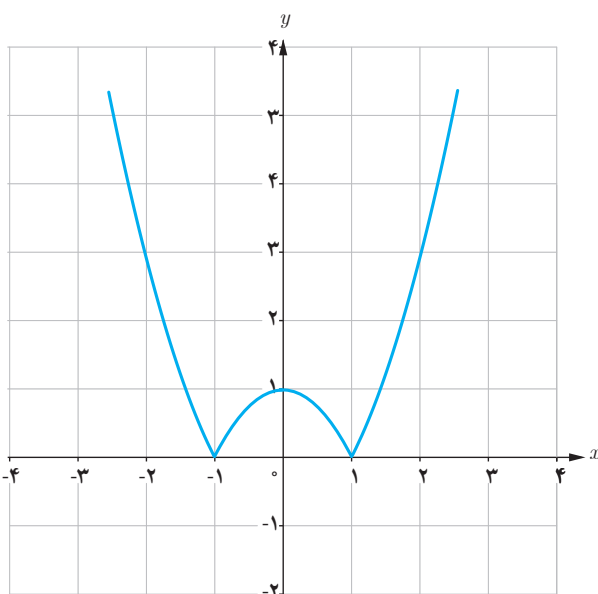
اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انبساط عمودی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انقباض عمودی یافته است.



رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت هایی که نمودار f زیر محور x ها است، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال: تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ را بررسی می‌کنیم. ضابطه تابع $y = f(2x)$ به صورت $f(2x) = 2x + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$-4 \leq 2x \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(2x): D = [-2, 0]$$

همچنین ضابطه تابع $y = f(\frac{x}{2})$ به صورت $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

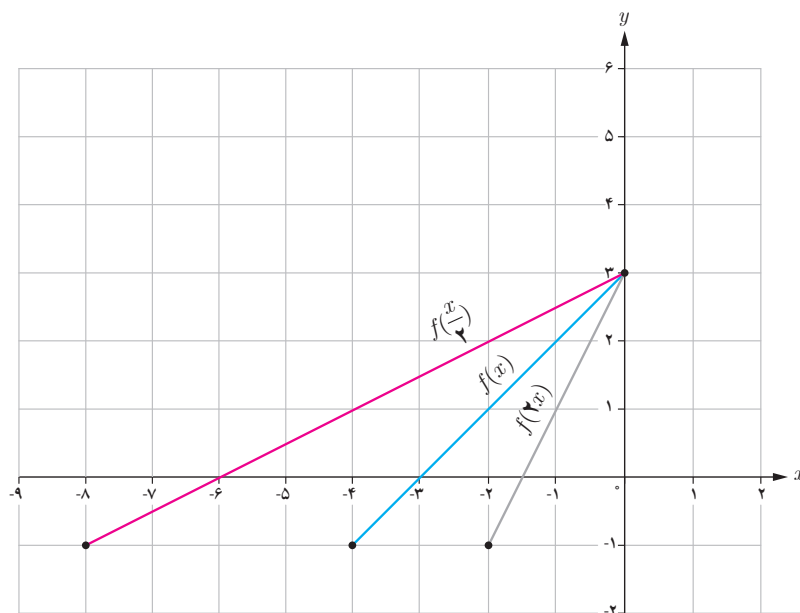
$$-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \rightarrow -8 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(\frac{x}{2}): D = [-8, 0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x + 3$	-1	0	1	2	3

x	-2	-1/2	-1	-3/2	0
$f(2x) = 2x + 3$	-1	0	1	2	3

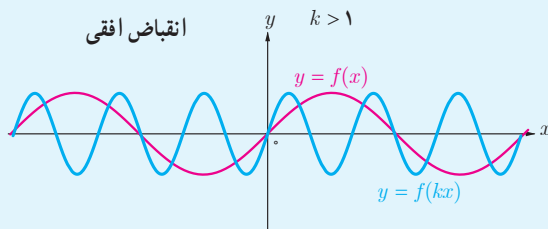
x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$	-1	0	1	2	3



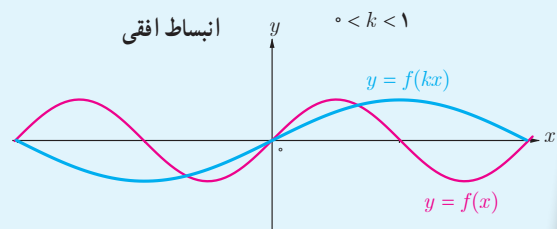
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(\frac{x}{2})$ و $f(2x)$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 0$ ، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.
اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضرب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

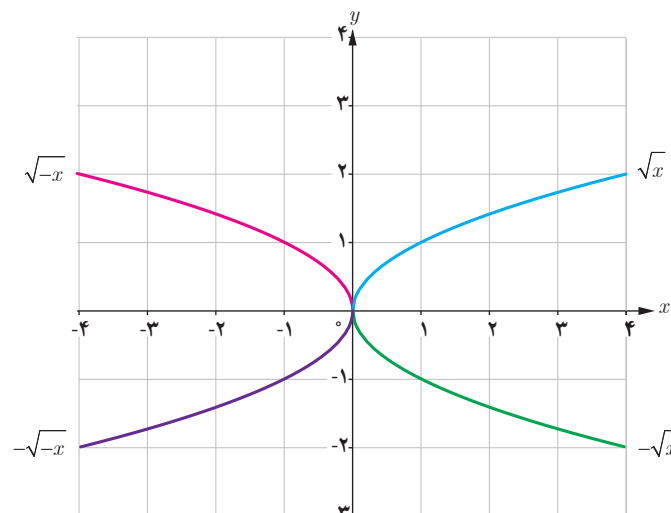
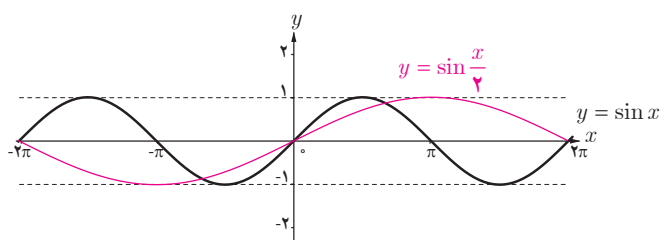
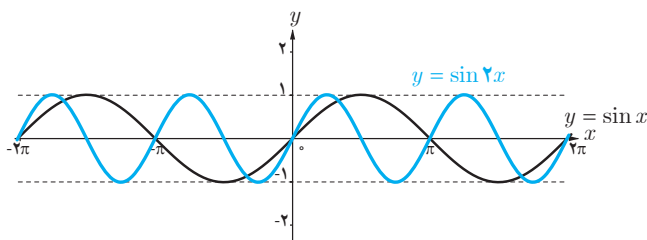


اگر $k > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin \frac{x}{2}$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار تابع $y=\sin \frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.

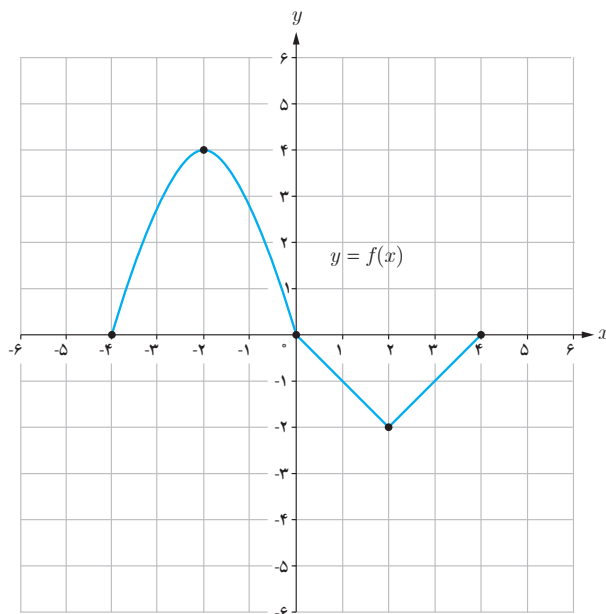


نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

$\sqrt{x}$	$D=[0, +\infty)$	$R=[0, +\infty)$
$-\sqrt{x}$	$D=[0, +\infty)$	$R=(-\infty, 0]$
$-\sqrt{-x}$	$D=(-\infty, 0]$	$R=(-\infty, 0]$
$\sqrt{-x}$	$D=(-\infty, 0]$	$R=[0, +\infty)$

نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

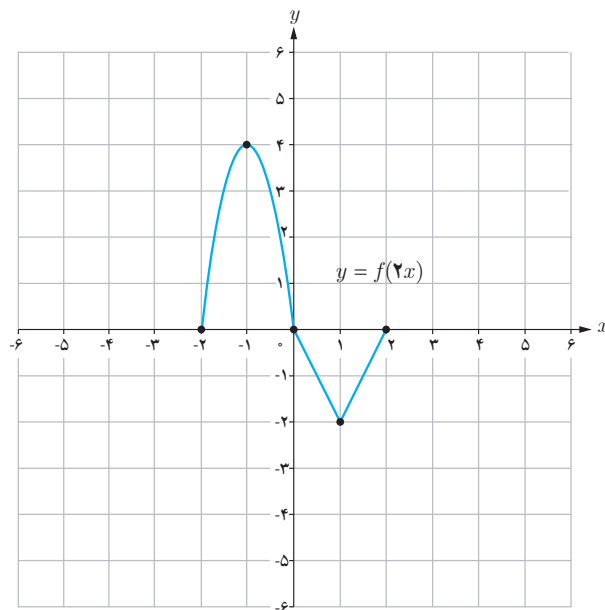


الف) برای تعیین دامنه $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $y=f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید. برای رسم نمودار $f(2x)$ ، طول نقاط یا همان x ها باید محاسبه شود.

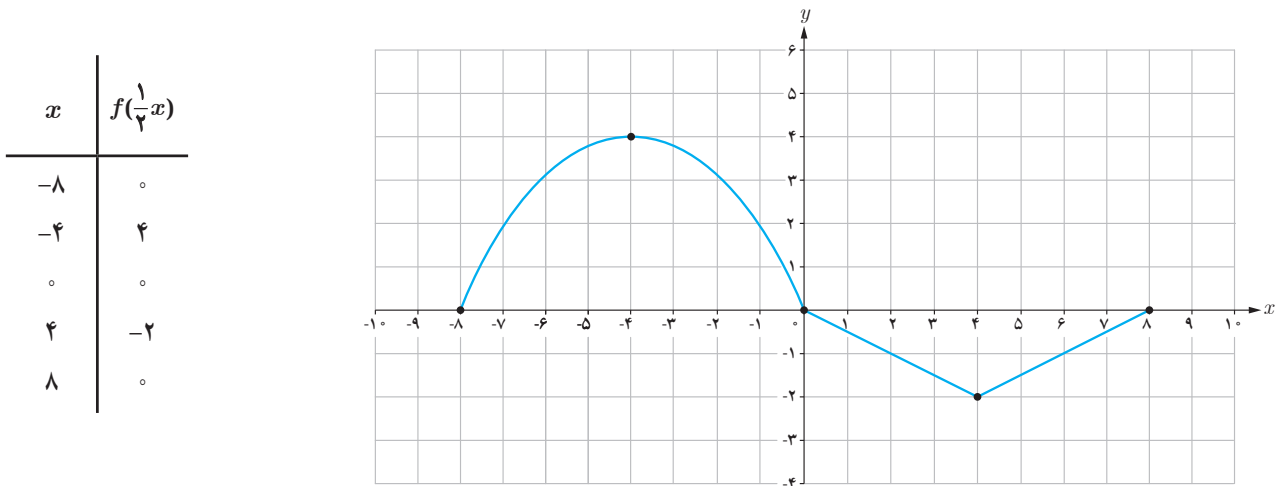
x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2, 0)$
-1	-2	4	$(-1, 4)$
0	0	0	$(0, 0)$
1	2	-2	$(1, -2)$
2	4	0	$(2, 0)$



ب) برای تعیین دامنه $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$$

پس دامنه تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است :

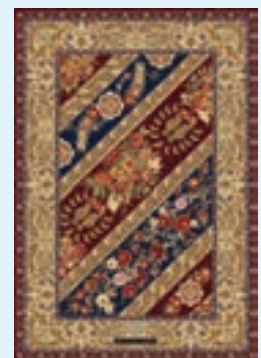


همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y = f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y = f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y = f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در 2 ضرب می کنیم.

دامنه تابع $y = f(kx)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y = f(kx)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

خواندنی

فرش بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش هایی را بر روی آثارشان جلوه گر می سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می کنند. در این طراحی ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می شود.



$$f \circ g = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\} \quad g \circ f = \{(5, 5)\}$$

تمرین

۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳ اگر $f(x) = 3x - 4$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

۵ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنجشنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

پہلے مرحلہ

(الف)

$$f(x) = x^r - \alpha \qquad g(x) = \sqrt{x + \beta}$$

$$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = [-\beta, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-\beta, +\infty) \mid \sqrt{x + \beta} \in \mathbb{R}\} = \sqrt{x + \beta} \in \mathbb{R} \qquad \rightarrow D_{f \circ g} = [-\beta, +\infty) \cap \mathbb{R} = [-\beta, +\infty)$$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = (g(x))^r - \alpha = \left(\sqrt{x + \beta}\right)^r - \alpha = x + 1$$

$$f(X) = \sqrt{\mu - \mu_X}$$

$$g(X) = \frac{\varsigma}{\mu_X + \Delta}$$

$$D_f = \left(-\infty, \frac{\mu}{\mu}\right]$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{\Delta}{\mu}\right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{X \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\Delta}{\mu}\right\} \mid \frac{\varsigma}{\mu_X + \Delta} \in \left(-\infty, \frac{\mu}{\mu}\right]\right\} = \left(-\infty, \frac{\Delta}{\mu}\right) \cup \left[\mu, +\infty\right)$$

$$(f \circ g)_{(X)} = f(g(X)) = \sqrt{\mu - \mu g(X)} = \sqrt{\mu - \mu \left(\frac{\varsigma}{\mu_X - \Delta}\right)} = \sqrt{\frac{9X - \mu \nu}{\mu_X - \Delta}}$$

$$f(x) = \sqrt{x+p} \qquad g(x) = \sqrt{x^r-1}$$

$$D_f = [-p, +\infty) \qquad D_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in [-p, +\infty) \mid \sqrt{x+p} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} = [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x+p} \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+p} \geq 1 \rightarrow x+p \geq 1 \Rightarrow x \geq 1-p \Rightarrow x \in [1, +\infty)$$

همواره نادرست است

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^r - 1} = \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R} \cap [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z}) = [2k\pi, 2k\pi + \pi]_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\sin x \geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))} = \sqrt{\sin x}$$

پیش فرض:

$$f(g(X)) = wX^r - sX + 1 \quad f(X) = wX - r$$

$$f(g(X)) = w(g(X)) - sX + 1 \Rightarrow wX^r - sX + 1 = w(g(X)) - r \Rightarrow w(g(X)) = wX^r - sX + 1 + r$$

$$\Rightarrow \boxed{g(X) = X^r - \mu_X + s}$$

پانچ سوین ۴:

الف) فادرست

$$(\text{fog})_{(\Delta)} = f(g(\Delta)) = g(\Delta)^p - \mu = \left(\sqrt{X^p - \mu}\right)^p - \mu = \left(\sqrt{\Delta^p - \mu}\right)^p - \mu = \mu \mid - \mu = 1 \vee$$

ب) فادرست

$$\begin{cases} f_{(x)} = \mu_X \\ g_{(x)} = \mu_X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{fog}_{(x)} = f(g_{(x)}) = \mu(\mu_X) = \xi_X \\ \text{gof}_{(x)} = g(f_{(x)}) = \mu(\mu_X) = \xi_X \end{cases} \rightarrow \text{fog}_{(x)} = \text{gof}_{(x)}$$

پ) درست

$$(\text{fog})_{(\mu)} = f(g(\mu)) = f(\nu) = \Delta$$

$$\begin{cases} (\text{fog})_{(\Delta)} = f(g(\Delta)) = \sqrt{\mu \times \Delta - 1} = \sqrt{9} = \mu \\ g_{(\mu)} = \mu \times \mu - 1 = \mu \end{cases}$$

ت) درست

پایخ سوال ۵:

الف) مقرون به صفره است

$$f_{(x)} = X - \frac{\mu}{10} - X = -\frac{\lambda}{X} = -\frac{4}{X} \quad (X > 0) \quad g_{(x)} = X - \mu = 150000 \quad X > 150000$$

$$g(f_{(x)}) = f_{(x)} - \mu = 150000 = -\frac{4}{X} - \mu = 150000$$

$$\frac{\lambda_0}{100} \times \mu = 150000 - \mu = 150000$$

$$f(g_{(x)}) = f_{(x - \mu)} = -\frac{4}{X - \mu} = -\frac{4}{X - 150000}$$

$$\frac{\lambda_0}{100} (\mu = 150000 - \mu) = 150000$$

ب)

پہلے ترین ۴:

$$\begin{cases} \text{fog}_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \sqrt[p]{\mu X^r - \mu X + 1} & \times \\ \text{gof}_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = \mu \sqrt[p]{X^r} - \mu \sqrt[p]{X} + 1 & \times \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} \text{fog}_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \left(\mu X^r - \mu X + 1\right)^{\diamond} & \checkmark \\ \text{gof}_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = \mu \left(X^{\diamond}\right)^r - \mu X^{\diamond} + 1 = \mu X^{r\diamond} - \mu X^{\diamond} + 1 & \times \end{cases}$$

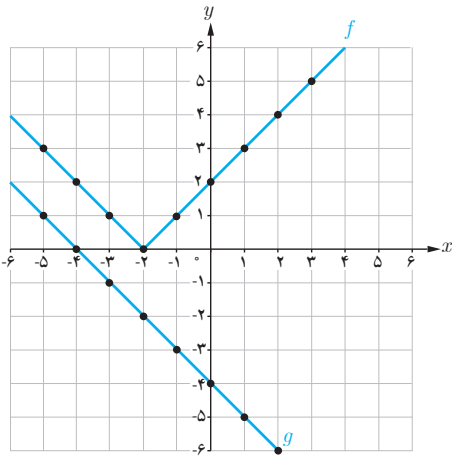
(ب)

پہلے ترین ۷:

$$\begin{aligned} h_{(x)} &= \sqrt[p]{X^r + 1} \rightarrow f_{(x)} = X^r + 1, g_{(x)} = \sqrt[p]{X} \\ l_{(x)} &= \sqrt{X^r + 1} \rightarrow f_{(x)} = X^r + \mathbf{O}, g_{(x)} = \sqrt{X} \end{aligned}$$

(ب)

خیر منحصر بقدر نیست



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = -6$

پ) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(-5) = 3$

ت) $(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(0) = -5$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(fog)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(gof)(x) = -5$

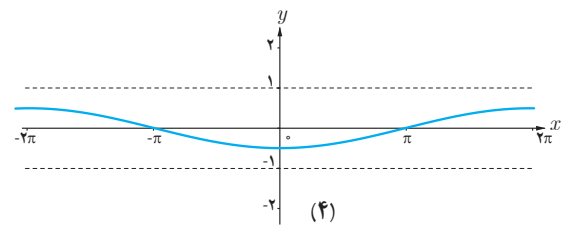
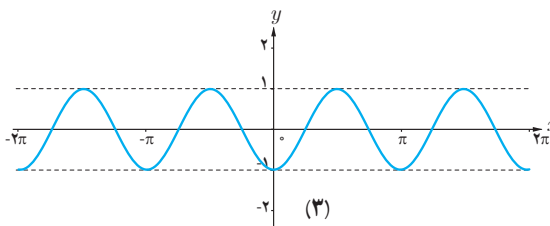
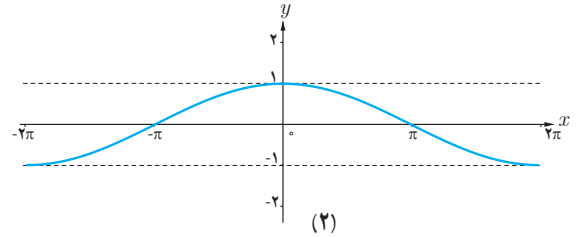
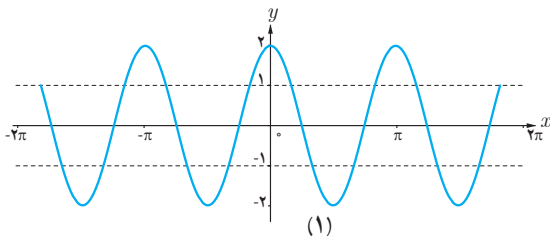
۱۰ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$ ۴

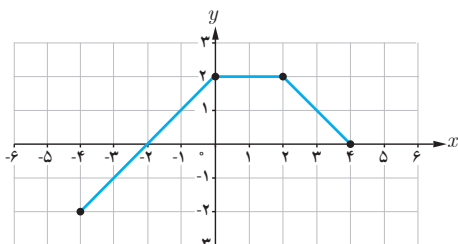
ب) $y = 2 \cos 2x$ ۱

پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ ۲

ت) $y = -\cos 2x$ ۳



۱۱ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



۱۲ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

الف) مثال ۹:

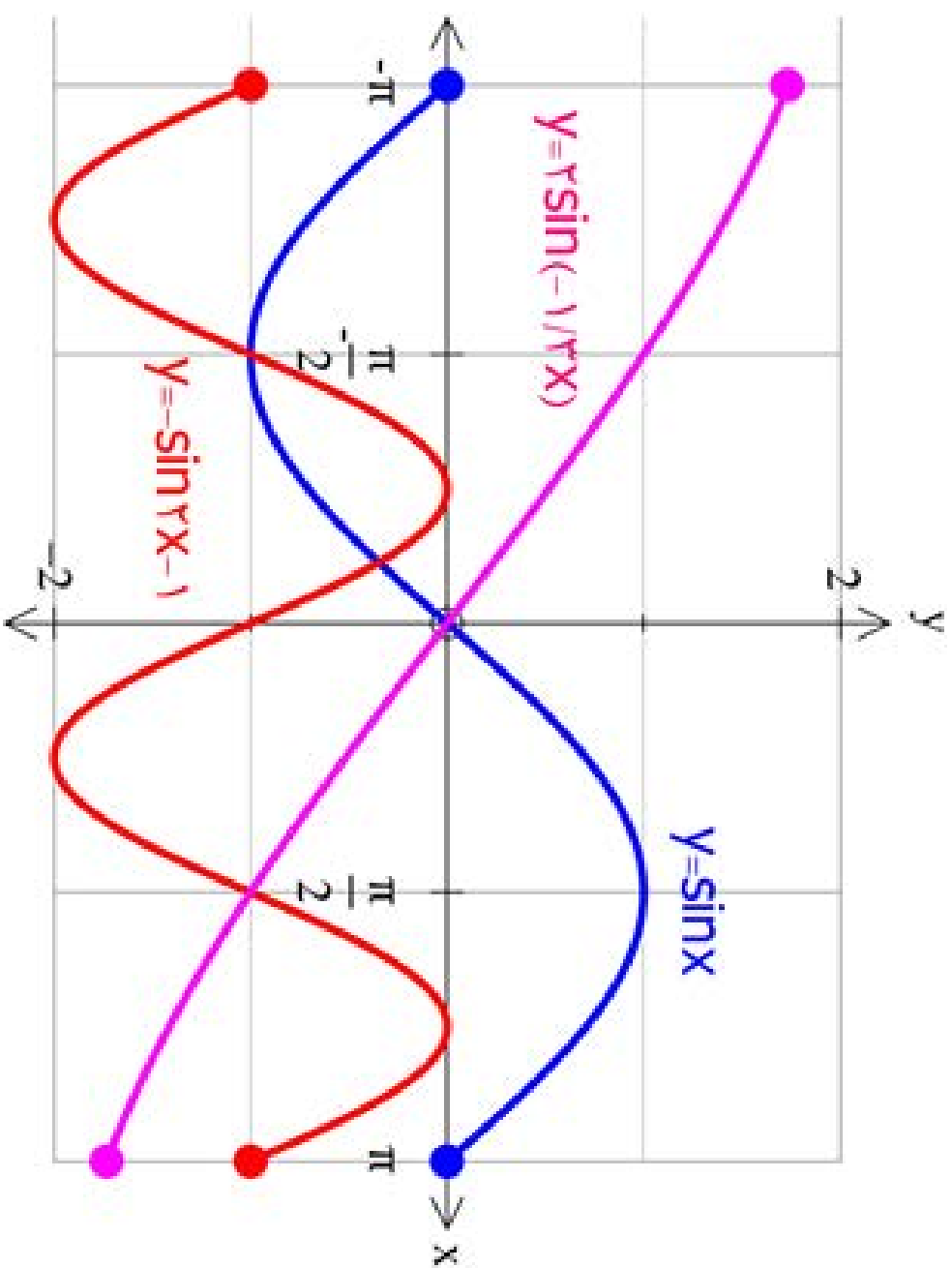
$$f(X) = \mu_X - \Delta; g(X) = X^r - \mu_X + \Lambda \rightarrow \begin{cases} f(g(X)) = \gamma \\ \mu(X^r - \mu_X + \Lambda) - \Delta \end{cases} \Rightarrow \mu_X^r - \zeta_X + 1 = \gamma$$

$$\Rightarrow \mu_X^r - \zeta_X + \mu = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} X=1 \\ X=\mu \end{cases}$$

ب)

$$f(X) = \mu_X^r + X - 1; g(X) = 1 - \mu_X \rightarrow \begin{cases} g(f(X)) = -\Delta \\ 1 - \mu(\mu_X^r + X - 1) \end{cases} \Rightarrow -\zeta_X^r - \mu_X + \mu = -\Delta$$

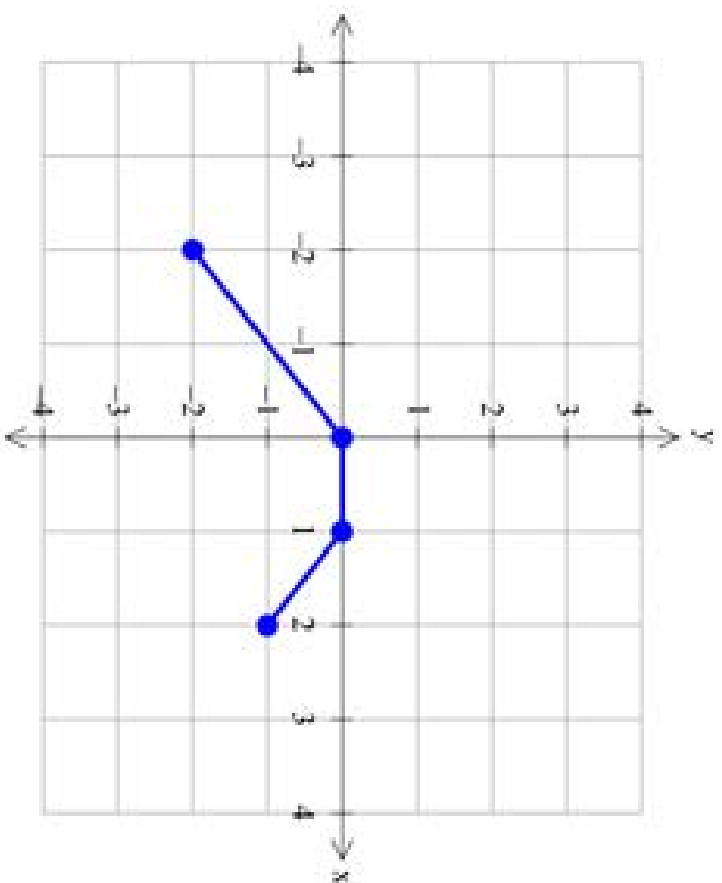
$$\Rightarrow -\zeta_X^r - \mu_X + \Lambda = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} X=1 \\ X = \frac{\Lambda}{\zeta} = \frac{\mu}{\mu} \end{cases}$$



$$y = \frac{1}{\mu} f(\mu x) - 1 \quad (1) \quad \text{مربع}$$

$$y = \frac{1}{\mu} f(\mu x) - 1 \quad \mu x = t \rightarrow t = \frac{1}{\mu} x$$

$\frac{1}{\mu} \times (-\mu)$	$\frac{1}{\mu} (-1)$	$\frac{1}{\mu} (0)$	$\frac{1}{\mu} (\mu)$
$\frac{1}{\mu} (-1) - 1$	$\frac{1}{\mu} (0) - 1$	$\frac{1}{\mu} (\mu) - 1$	$\frac{1}{\mu} (0) - 1$
$\Rightarrow$	-1	-1	0
μ	-1	0	1
μ	0	0	-1

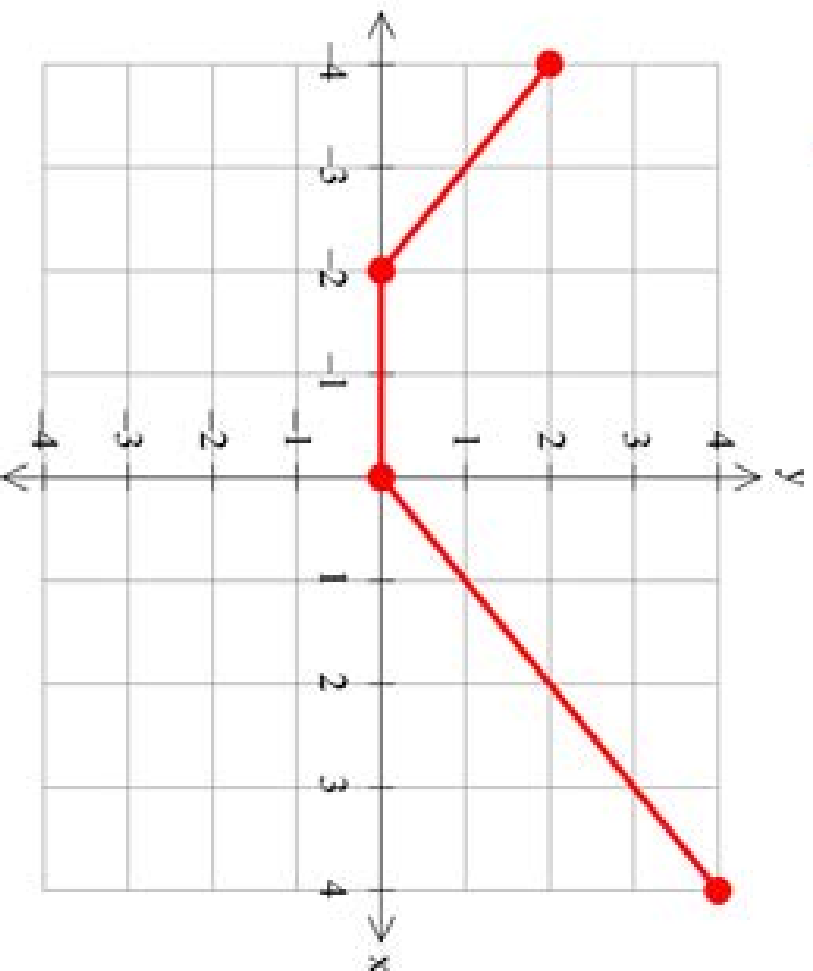


$$y = \begin{cases} x & -\mu \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 & 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \mu] \quad R = [-\mu, 0]$$

$$y = -f(-x) + \mu(Y) \quad \text{منحنى}$$

$-(-\mu)$	$-(-\mu)$	$-(0)$	$-(\mu)$	$-(\mu)$
$-(-\mu) + \mu$	$-(0) + \mu$	$-(\mu) + \mu$	$-(\mu) + \mu$	$-(0) + \mu$
$\Rightarrow$				
μ	μ	0	$-\mu$	$-\mu$
μ	μ	0	0	μ



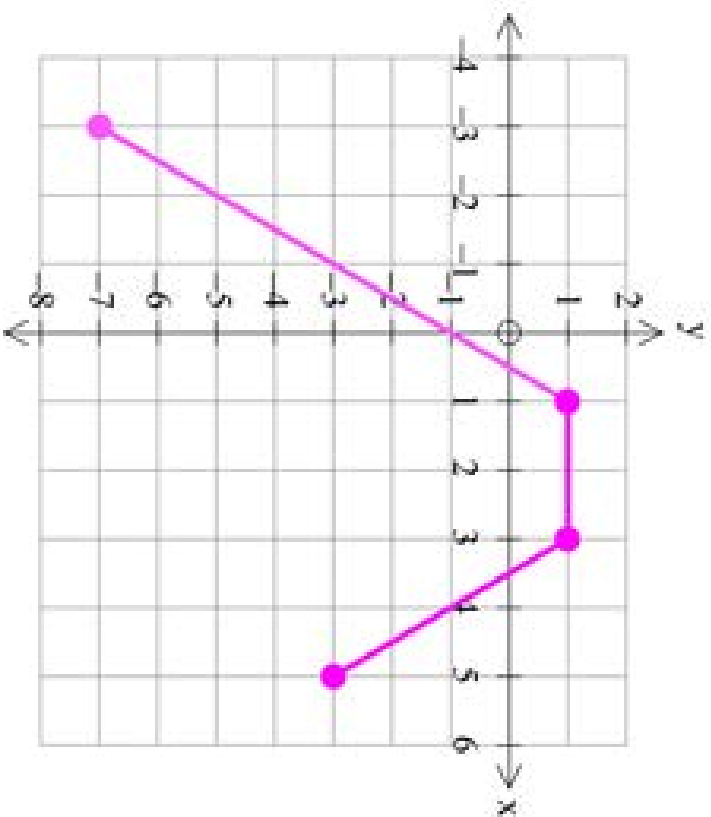
$$y = \begin{cases} -x - \mu & -\mu \leq x \leq -\mu \\ 0 & -\mu \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \mu]$$

$$R = [0, \mu]$$

$$y = \mu f(x-1) - \mu(Y)$$

$(-K)+1$	$(-P)+1$	$(0)+1$	$(P)+1$	$(K)+1$	$\Rightarrow$	$-\mu$	-1	1	μ	Δ
$\mu(-P)-\mu$	$\mu(P)-\mu$	$\mu(0)-\mu$	$\mu(P)-\mu$	$\mu(P)-\mu$		$-V$	$-\mu$	1	1	$-\mu$



$$y = \begin{cases} \mu X - 1 & -\mu \leq X \leq 1 \\ 1 & 1 \leq X \leq \mu \\ -\mu X + V & \mu \leq X \leq \Delta \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \Delta] \quad R = [-V, 1]$$

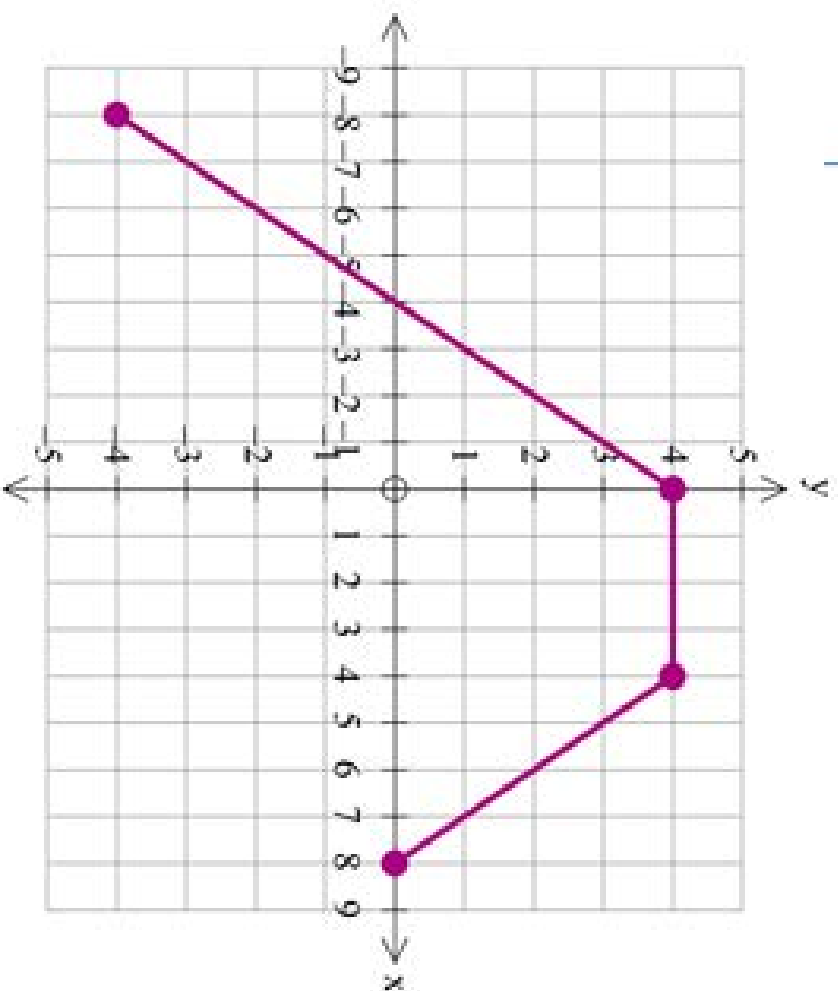
$$y = \mu f\left(\frac{1}{\mu}x\right) \quad (*)$$

نقطة

$\mu(-\mu)$	$\mu(-\mu)$	$\mu(0)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(0)$
$\mu(-\mu)$	$\mu(0)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(0)$	

$$\Rightarrow$$

$-\mu$	$-\mu$	0	μ	μ	μ	0
$-\mu$	0	μ	μ	0		



$$y = \begin{cases} x + \mu & -\mu \leq x \leq 0 \\ -x + \mu & 0 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \mu]$$

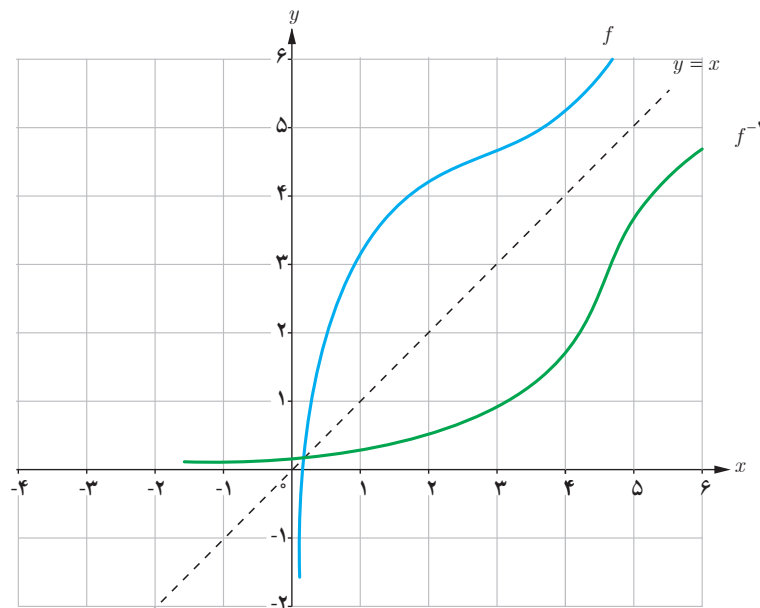
$$R = [-\mu, \mu]$$

یادآوری

همان طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک به یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (fof^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow fof^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (fof^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

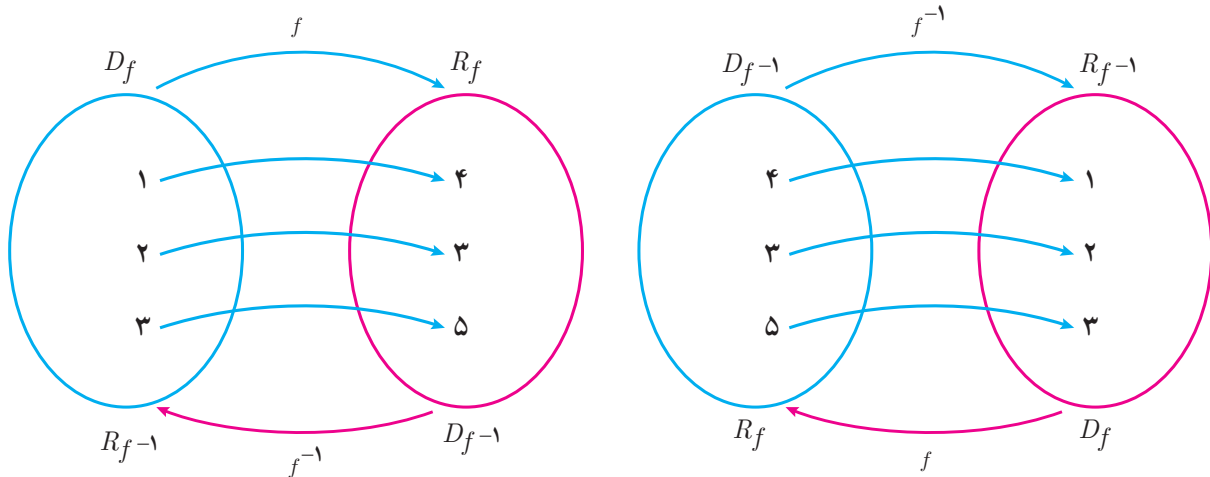
$$(fof^{-1})(x) = x$$

همچنین :

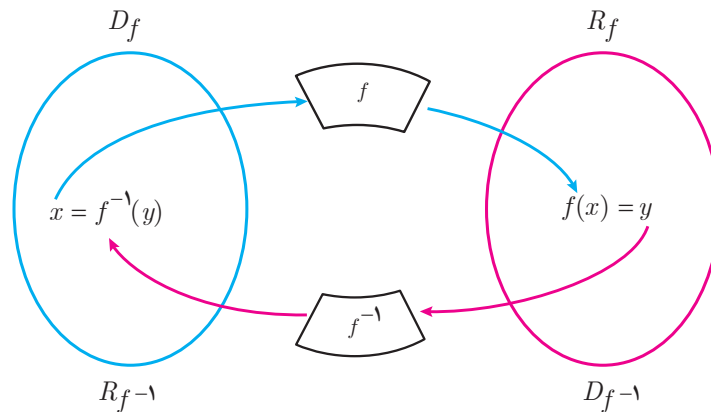
$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم :



به طور کلی اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد.



اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که :

$$(f \circ g)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g \quad (\text{الف})$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \quad (\text{ب})$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x+4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

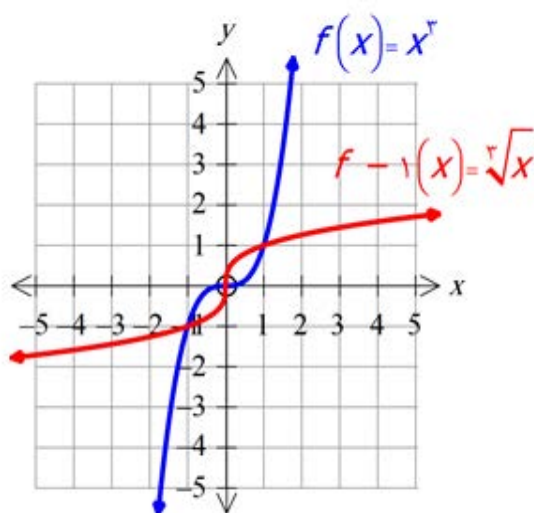
بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع به یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.^۱

$$\begin{array}{l} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_2^3 \end{array} \xrightarrow{y_1 = y_2} x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟



$$f(x) = x^3 \xrightarrow{y \leftrightarrow x} x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

۱- توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، x^2 و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی ها الزامی است.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید. تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

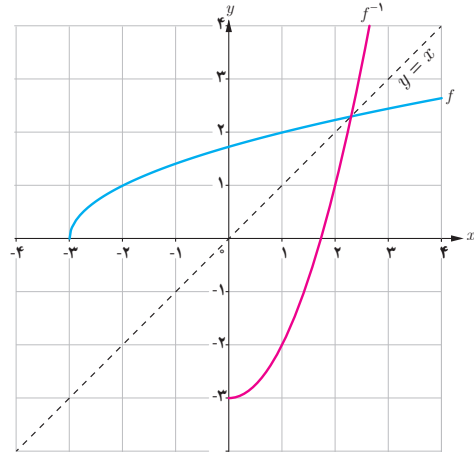
$$y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(y) = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$



کار در کلاس

ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

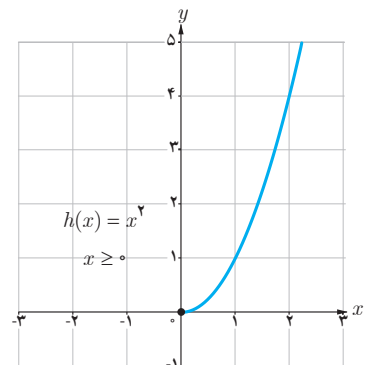
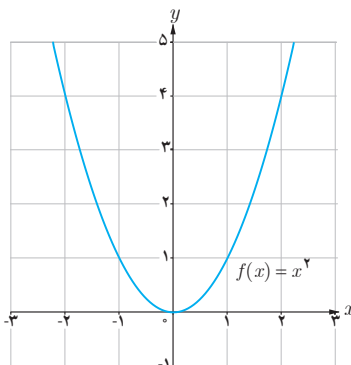
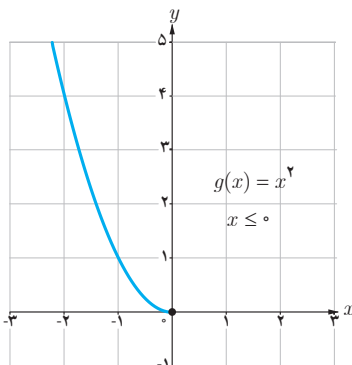
الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$ یا زیر مجموعه هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می آید.



حل کاردر کلاس الف)

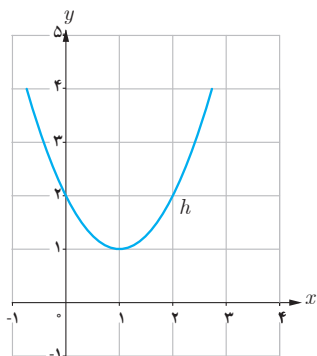
$$\underbrace{f(X) = -\frac{1}{\mu}X + \mu}_{D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = -\frac{1}{\mu}Y + \mu \rightarrow -\frac{1}{\mu}Y = X - \mu \rightarrow Y = -\mu X + \mu \rightarrow \underbrace{f^{-1}(X) = -\mu X + \mu}_{D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} = \mathbb{R}}$$

ب)

$$\underbrace{g(X) = 1 + \sqrt{X - \mu}}_{D_g = [\mu, +\infty) \quad R_g = [1, +\infty)} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = 1 + \sqrt{Y - \mu} \rightarrow \sqrt{Y - \mu} = X - 1 \rightarrow Y - \mu = (X - 1)^2 \rightarrow \underbrace{g^{-1}(X) = (X - 1)^2 + \mu}_{D_{g^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{g^{-1}} = [\mu, +\infty)}$$

پ)

$$\underbrace{h(X) = X^\mu + 1}_{D_h = [0, +\infty) \quad R_h = [1, +\infty)} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = Y^\mu + 1 \rightarrow Y^\mu = X - 1 \rightarrow Y = \sqrt[\mu]{X - 1} \rightarrow \underbrace{h^{-1}(X) = \sqrt[\mu]{X - 1}}_{D_{h^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{h^{-1}} = [0, +\infty)}$$



مثال: نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک به یک به دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است.

در تابع k ، x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$(x-1)^2 = y-1$$

$$x-1 = \pm\sqrt{y-1}$$

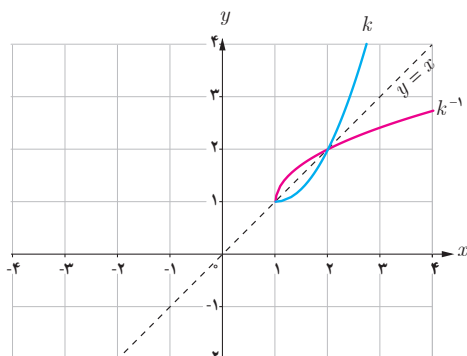
$$x = \pm\sqrt{y-1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

جواب منفی غیر قابل قبول است. (چرا؟)

زیرا دامنه k اعداد مثبت بزرگتر مساوی یک است

نمودار توابع k و k^{-1} به صورت زیر است:



باغ ارم شیراز

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$
 ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

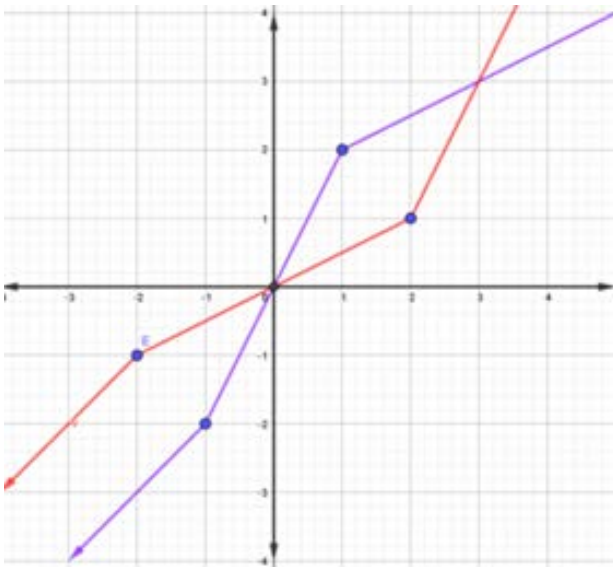
۲ در مورد هر یک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$
 ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8 + x^2 ; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها به دو روش متفاوت توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$
 ب) $g(x) = -x^2$
 پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$



۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

معرفه

$$f(X) = \frac{-\lambda X + \mu}{\mu} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = \frac{-\lambda Y + \mu}{\mu} \rightarrow -\lambda Y = \mu X - \mu \rightarrow$$

$$Y = \frac{-\mu X + \mu}{\lambda} \rightarrow f^{-1}(X) = \frac{-\mu X + \mu}{\lambda}$$

$$g(X) = -\mathfrak{O} - \sqrt{\mu X + 1} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = -\mathfrak{O} - \sqrt{\mu Y + 1} \rightarrow \sqrt{\mu Y + 1} = X + \mathfrak{O}$$

$$\rightarrow \mu Y + 1 = (X + \mathfrak{O})^r \rightarrow \mu Y = (X + \mathfrak{O})^r - 1 \rightarrow Y = \frac{(X + \mathfrak{O})^r - 1}{\mu} \rightarrow g^{-1}(X) = \frac{(X + \mathfrak{O})^r - 1}{\mu}$$

الف)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\cancel{\frac{1}{p}} \left(-\frac{\mu x + \varsigma}{\cancel{1}} \right) - \mu = x + \mu - \mu = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{\mu \left(\frac{-\cancel{V}x}{\mu} - \mu \right) + \varsigma}{V} = \frac{Vx - \varsigma + \varsigma}{V} = x$$

ب)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{\lambda + x^p} - \lambda = -\sqrt{x^p} = -|x| \xrightarrow{x \leq 0} = -(-x) = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \left(-\sqrt{x - \lambda} \right)^p + \lambda = x - \lambda + \lambda = x$$

مرین ۲:

$$f(X)=\frac{q}{\Delta}X+\mu\mu\overset{y\leftrightarrow X}{\longrightarrow}X=\frac{q}{\Delta}y+\mu\mu\Rightarrow \Delta X=qy+1\circ\circ\rightarrow qy=\Delta X-1\circ\circ\rightarrow y=\frac{\Delta}{q}X-\frac{1}{q}\circ\circ\rightarrow f^{-1}(X)=\frac{\Delta}{q}X-\frac{1}{q}\circ$$

میزان تغییرات درجه نسبت به فارینهایت را نشان می دهد

مرین ۳:

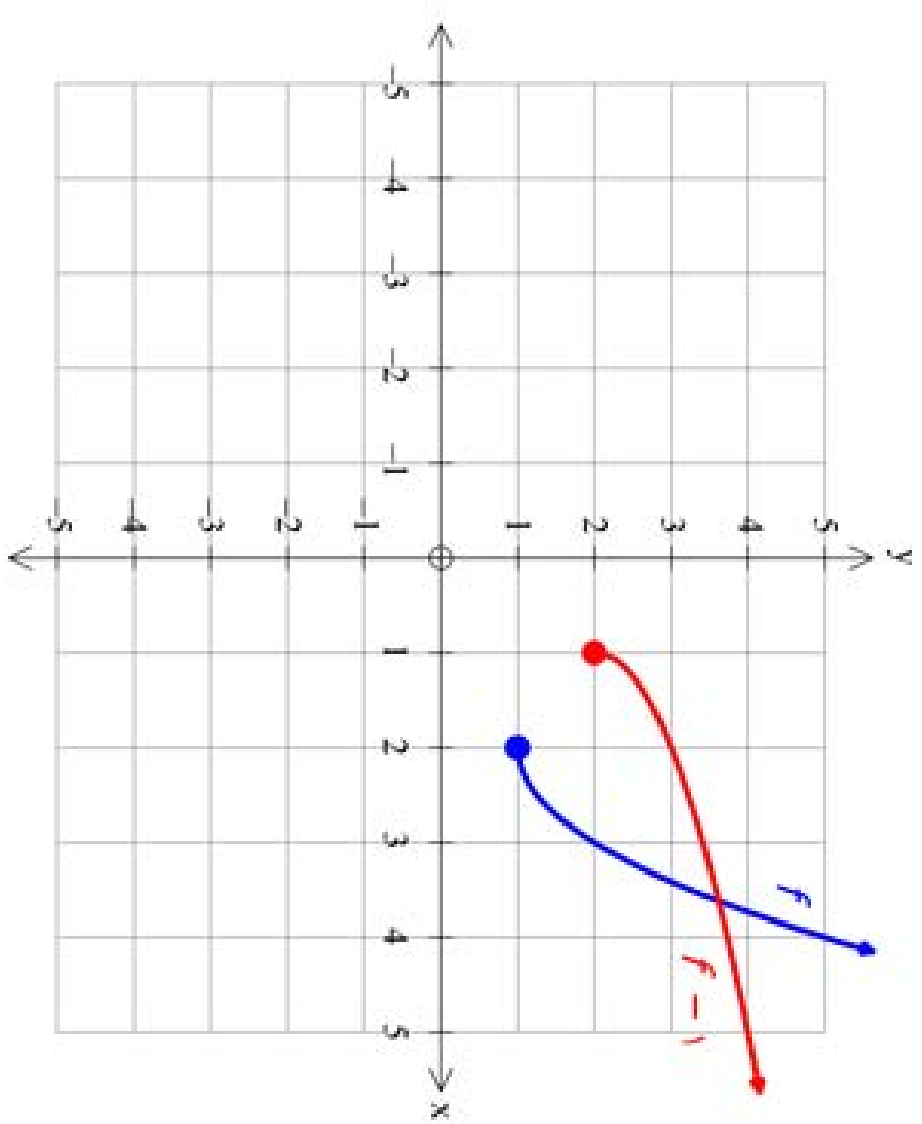
$$f(X)=|X| \hspace{1cm} X\geq 0 \hspace{1cm} \text{ب) } X\leq 0 \hspace{1cm} g(X)=-X^r$$

$$h(X)=(X+\mu)^r-1 \hspace{1cm} X\geq 0 \hspace{1cm} \text{پ) } X\leq 0$$

$$f(x) = x^p - px + \alpha = (x-p)^p + 1 \quad D_f = [p, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$y = (x-p)^p + 1 \rightarrow y-1 = (x-p)^p \Rightarrow x-p = \pm \sqrt[p]{y-1} \Rightarrow x = \pm \sqrt[p]{y-1} + p$$

$$\xrightarrow{x \geq p} f^{-1}(x) = \sqrt[p]{x-1} + p \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [p, +\infty)$$



جواب:

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(s) = f^{-1} \left(\underbrace{f^{-1}(s)}_{\Lambda(s+\mu)=v\mu} \right) = f^{-1}(s) = \Lambda(v\mu + \mu) = s \circ \circ \quad \text{الف)}$$

ب)

$$(f \circ g)^{-1}(\Delta) = \sqrt[m]{\Lambda \times \Delta + \mu\mu} = \sqrt[m]{s\mu} = \mu$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(x^{\mu}\right) = -\frac{1}{\Lambda}x^{\mu} - \mu \rightarrow y + \mu = -\frac{1}{\Lambda}x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} = \Lambda y + \mu\mu \rightarrow x = \sqrt[m]{\Lambda y + \mu\mu}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[m]{\Lambda x + \mu\mu}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\Delta) = g^{-1} \left(\underbrace{f^{-1}(\Delta)}_{\Lambda(\Delta+\mu)=s\mu} \right) = g^{-1}(s\mu) = \sqrt[m]{s\mu} = \mu \quad \text{ت)}$$

سوال: تحت چه شرایطی تابع f معکوس خودی شود؟

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0, ad-bc \neq 0$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow cxy + dy = ax + b \rightarrow x(cy - a) = -dy + b \rightarrow x = \frac{-dy + b}{cy - a} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow \begin{cases} a = -d \\ d = -a \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} = D_{f^{-1}}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \cdot f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) = \frac{a\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) + b}{c\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) + d} = \frac{-adx + ab + bcx - ab}{-dcx + bc + dcx - ad} \xrightarrow[\frac{c}{c}]{x \neq \frac{a}{c}} \frac{-adx + ab + bcx - ab}{bc - ad \neq 0} \rightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{-d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - a} = \frac{-adx - bd + bcx + db}{cax + cb - acx - ad} \xrightarrow[\frac{c}{c}]{x \neq \frac{d}{c}} \frac{-bc + ad \neq 0}{cx + d} \rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

گروه بررسی کنندگان: استاد ایمانلو و استاد مهربانو و دیگر اساتید گروه



روستای رهلی داغلار — آذربایجان شرقی

۲ مثلثات

فصل



اشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تانژانت

درس اول

معادلات مثلثاتی

درس دوم

تعریف: تابع f را متناوب گوئیم هرگاه عدد حقیقی و مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

$$x \in D_f \text{ که } T \text{ را دوره تناوب می نامیم و در بسیاری موارد دنبال کمترین } \rightarrow \begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

مقدار آن می باشیم. با این تعریف چیزی که دستگیرمان می شود این است که است که دامنه نمی

تواند از بالا یا پایین محدود باشد این جمله منزله آن است که $D_f = \mathbb{R}$ بلکه اگر $x_0 \in D_f$ آنگاه قطعاً

$(x_0 + T) \notin D_f$ مانند تابع $f(x) = \tan x$ که نقاطی به فاصله دوره تناوب از یکدیگر با هم تعریف

شده هستند یا با هم تعریف نشده بنابر این انتظار متناوب بودن توابعی مانند $f(x) = \sin \sqrt{x}$ یا

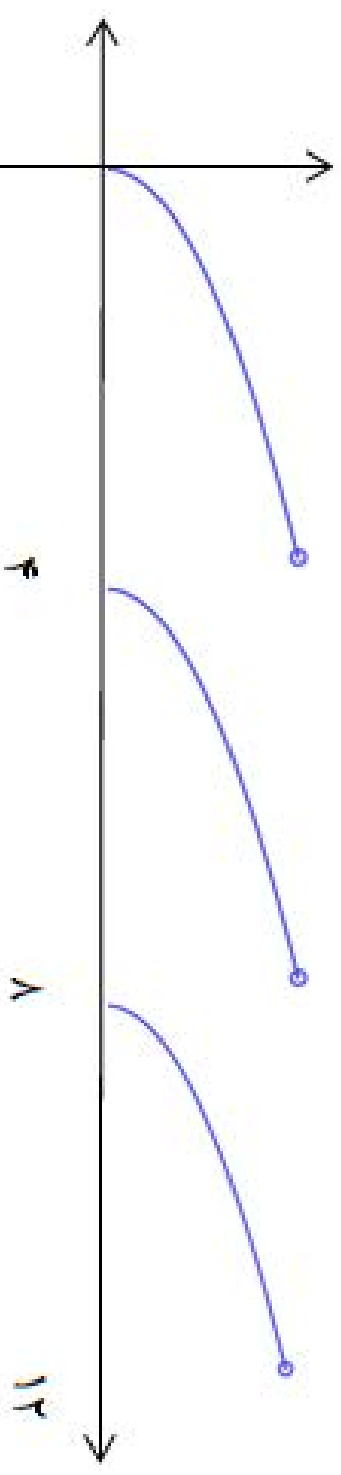
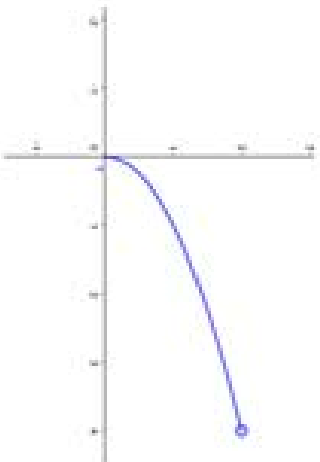
$$f(x) = \tan \sqrt{x^r - 5x + 6}$$

را نداشته باشیم.

اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیر صفر آن نیز می توانند دوره تناوب محسوب شوند اما اگر بتوانیم کوچکترین آنرا پیدا کنیم به آن دوره تناوب اصلی گوئیم مثلاً π را می تواند دوره تناوب برای $f(x) = \sin x$ و 2π و 5π و ... نیز دوره تناوب می گردند اما مایلیم عددی کوچکتر از π را مانند 2π را دوره تناوب اصلی این تابع معرفی می کنیم هرچند که ممکن است تابعی متناوب باشد اما کوچکترین دوره تناوب آن پیدا نشود مانند توابع ثابت $c = f(x)$ بطوریکه $k = f(x + T)$ که T می تواند هر عدد حقیقی باشد.

مثال: تابع f در بازه $[0.4]$ بصورت $f(x) = \sqrt{x}$ تعریف شده است اگر تابع g متناوب شده تابع f باشد

آنگاه $g(1397)$ چیست؟



$$g(1397) = g\left(\underbrace{1397}_{1397 \times 4} + 1\right) = g(1) = f(1) = \sqrt{1} = 1$$

مثال: اگر تابع $f(x) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1}$ (بطول ۵) را متناوب نماییم قانون تابع در فاصله $[-\mu, \mu]$ چه خواهد شد؟

حل: چون طول دوره تناوب ۵ می باشد پس دوره تناوب می تواند ۱ هم باشد یعنی دو دوره تناوب

$$f(x) = f(x - \mu \times 5) \quad \mu < x \leq 1\mu \Rightarrow -\mu < \underbrace{x-1}_=t \leq \mu \Rightarrow -\mu < t \leq \mu \quad x-1=t \rightarrow x=t+1$$

$$f(t) = f(x) \rightarrow f(x-1) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1} \rightarrow f(t) = \frac{\mu(t+1) + 1}{\mu(t+1) - 1} = \frac{\mu t + \mu + 1}{\mu t + 1 - \mu}$$

نکته: اگر T دوره تناوب اصلی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه T دوره تناوب اصلی

باشد اما دوره تناوب اصلی نیز می باشد $a - f(x), \frac{a}{f(x)}, f(x) + a, f(a + x), (a \neq 0)af(x), -f(x)$

$$(ax) \quad T \frac{1}{|a|} \text{ : برابر است با } (a \neq 0)$$

بنابر این دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی 2π می باشد.

$$f(x) = -\Delta \sin\left(x + \frac{\pi}{\varphi}\right) \quad g(x) = \frac{\mu}{\cos(x - \mu)} \quad h(x) = \sqrt{\Delta} \sin(-x - \sqrt{\Delta})$$

و دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی π می باشد.

$$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{\mu}\right) \quad g(x) = -\sqrt{\mu} \cotan\left(-x + \frac{\pi}{\varphi}\right)$$

سوال: ثابت کنید تابع $y = \sin x$ دوره تناوب اصلی کوچکتر 2π از ندارد.

اثبات: از برهان خلف استفاده می کنیم فرض می کنیم دوره تناوب کوچکتری مانند T' داشته باشد
یعنی $0 < T' < 2\pi$ و $f(x + T') = f(x)$ در اینصورت داریم

$$f(x + T') = f(x) \Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \rightarrow \sin x \cdot \cos T' + \cos x \cdot \sin T' = (\sin x)(1)$$

از آنجاییکه x را می توانیم هر کمائی بگیریم در نظر می گیریم $x = \frac{\pi}{2}$

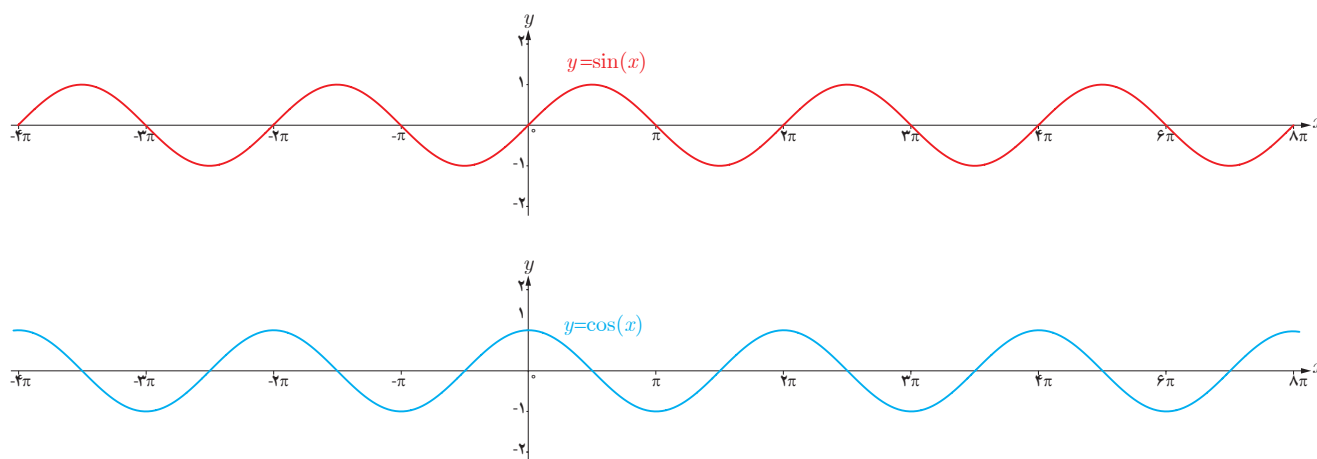
$$\begin{aligned} f(x + T') &= f(x) \Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \xrightarrow{=1} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos T' + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin T' = \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)(1) \rightarrow \cos T' = 1 \\ &\rightarrow T' = 0 \end{aligned}$$

$$\cancel{0 < T' < 2\pi}$$

درس اول

تناوب و تائزانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π ، ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تذکر: برای تعیین دوره تناوب باید تابع را حتی الامکان ساده کرد.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = \sin \mu x - \cos \Delta x$$

$$\begin{cases} \sin \mu x & T_1 = \frac{\mu \pi}{\mu} \\ \cos \Delta x & T_p = \frac{\mu \pi}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow T = \mu \pi$$

$$\mu) h(x) = \sin \mu x - \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \sin \mu x & T_1 = \frac{\mu \pi}{\mu} = \pi \\ \cos \pi x & T_p = \frac{\mu \pi}{\pi} = \mu \end{cases}$$

۲ عدد گویا و π عددی گنگ هستند پس نمی

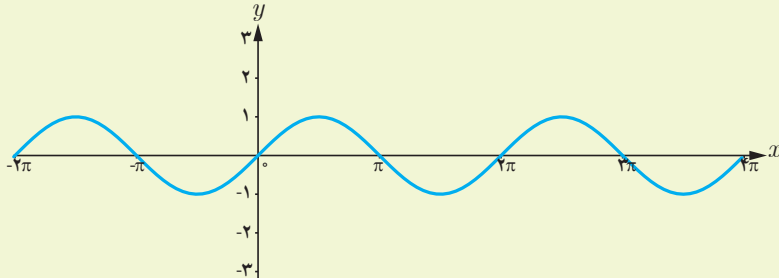
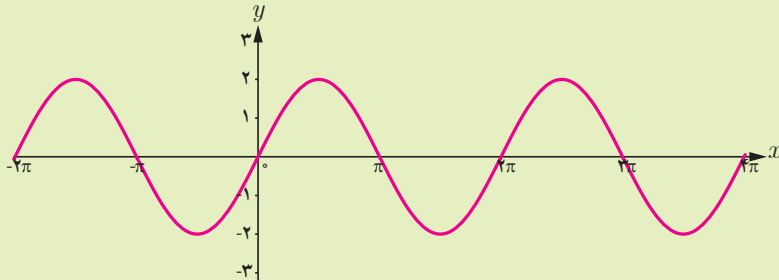
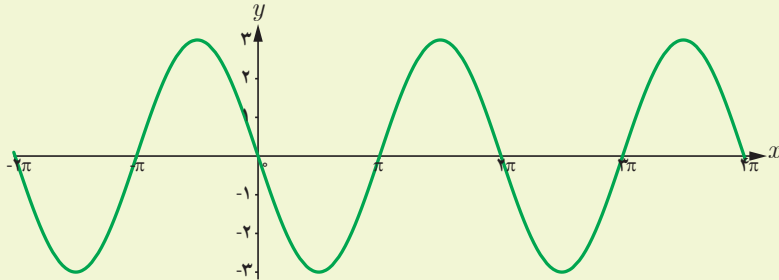
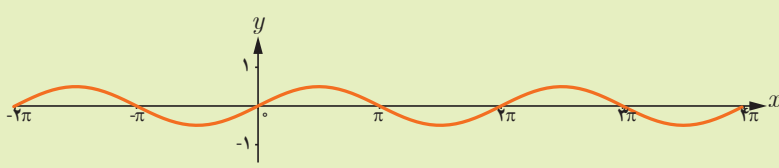
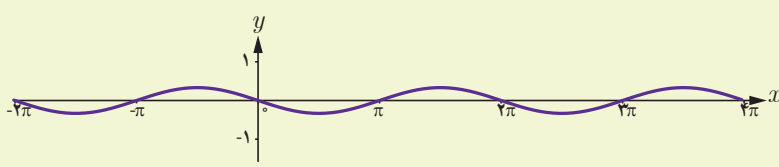
توان ک.م.م پیدا کرد

$$\mu) g(x) = \cos^r \Delta x - \tan^r \epsilon x + \sin^q \eta x$$

$$\begin{cases} \cos^r \Delta x & T_1 = \frac{\pi}{\Delta} \\ \tan^r \epsilon x & T_p = \frac{\pi}{\epsilon} \Rightarrow T = \frac{\mu \pi}{\mu} \\ \sin^q \eta x & T_p = \frac{\mu \pi}{\eta} \end{cases}$$

$$\mu) s(x) = \frac{\mu \sin x - \mu \cos x}{\epsilon \sin x + \Delta \cos x}$$

$$s(x) = \frac{\frac{\mu \sin x - \mu \cos x}{\cos x}}{\frac{\epsilon \sin x + \Delta \cos x}{\cos x}} = \frac{\mu \tan x - \mu}{\epsilon \tan x + \Delta} \rightarrow T = \pi$$

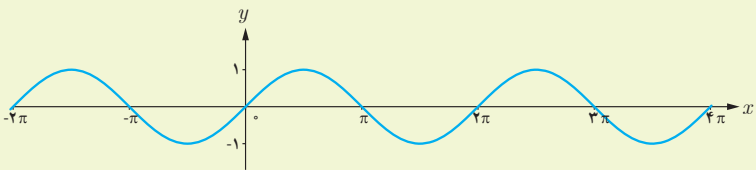
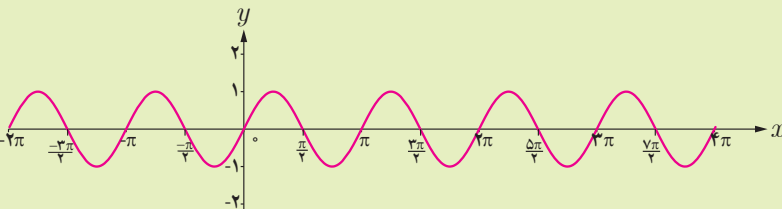
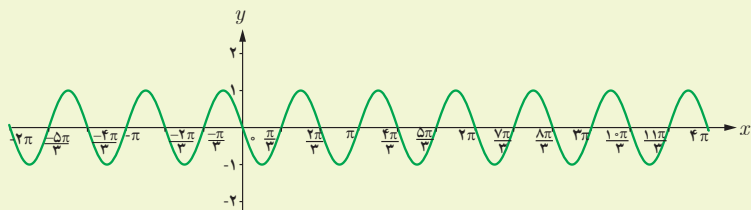
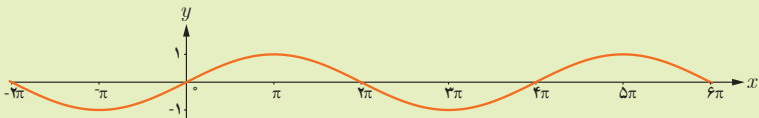
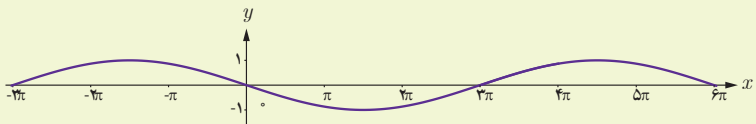
تابع	نمودار تابع	ماکزیم	مینیم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = 2 \sin x$		۲	-۲	2π
$y = -3 \sin x$		۳	-۳	2π
$y = \frac{1}{2} \sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π
$y = -\frac{1}{3} \sin x$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید. 2π

2π

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π
$y = \sin(-3x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \sin \frac{x}{2}$		۱	-۱	4π
$y = \sin(-\frac{x}{3})$		۱	-۱	6π

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

نکاتی در مورد توابع متناوب :

۱- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{r_{n-1}}(ax+d)$, $\cos^{r_{n-1}}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد $(a \neq 0, n \in \mathbb{Z})$

۲- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{r_n}(ax+d)$, $\cos^{r_n}(ax+d)$, $\tan^n(ax+d)$, $\cotan^n(ax+d)$

برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد

۳- اگر g تابعی متناوب با دوره تناوب T و f تابعی دلخواه باشد آنگاه تابع fog در صورت معین بودن

متناوب خواهد بود که دوره تناوب اصلی آن T و یا کوچکتر از T می باشد. چنانچه f تابعی یک به یک

باشد دوره تناوب اصلی fog همان T است (کوچکتر نمی شود)

۴- اگر f متناوب با دوره تناوب T_1 و g تابعی متناوب با دوره تناوب T_2 باشد در صورتیکه T کوچکترین مضرب

مشترک T_1 و T_2 باشد آنگاه دوره تناوب توابع $f \pm g$, $f \times g$, $f - \frac{f}{g}$ حد اکثر T می گردد. (و شاید کوچکتر از T)

مراحل رسم تابع $y = a \sin(bx + c) + d$

$$y = \sin x - 1$$

تابع شناخته شده است که از مبدا مختصات بصورت صعودی جدا شده و دوره تناوب آن $\frac{2\pi}{1}$ می باشد.

$$y = \sin(bx) - 1$$

باز هم از مبدا معتصات می گذرد که اگر $b > 0$ باشد صعودی و اگر $b < 0$ نزولی خارج می شوند .

$(\sin - \Delta x = -\sin \Delta x)$ که همچنان $\min = -1, \max = 1$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

$$y = \sin(bx + c) - 1$$

همان نمودار $y = \sin(bx)$ می باشد که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست حرکت می کنیم

$\min = -1, \max = 1$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

$$y = a \sin x - 4$$

همان نمودار $y = \sin x$ می باشد که با توجه به ضریب a خواهیم داشت. $\min = -|a|$, $\max = |a|$

که در مبدأ مختصات اگر $a > 0$ باشد صعودی و اگر $a < 0$ نزولی عبور می کند

$$y = a \sin (bx) - 5$$

مانند هر حله دوم دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد که $\min = -|a|$, $\max = |a|$ می باشد.

$$y = a \underbrace{\sin(bx + c)}_{g(x)}$$

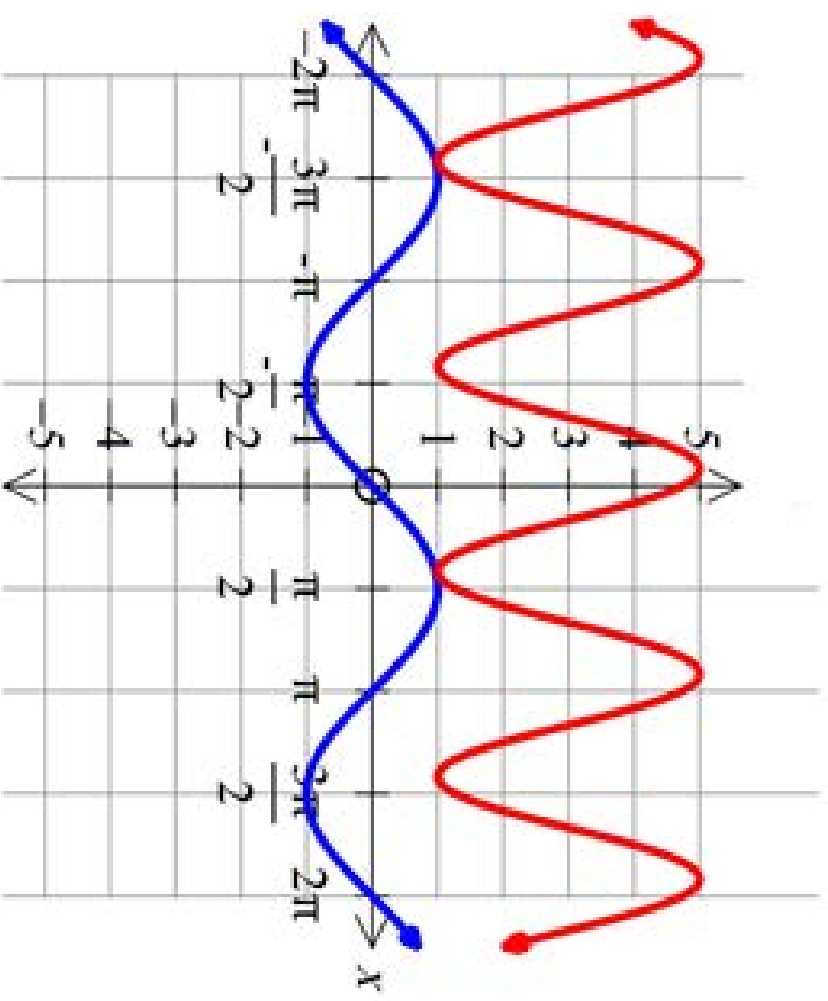
مانند نمودار $g(x) = \sin(bx + c)$ می باشد که بستگی به مقدار و علامت a ممکن است ماگزیمم

ومی نیمه غیر از 1 - داشته باشیم و از مبدأ خارج شود

$$y = a \sin(bx + c) + d - y$$

همان نمودار $g(x) = a \sin(bx + c)$ می باشد به اندازه d به سمت بالا یا پایین حرکت کرده است.

نمودار تابع $g(x) = -\mu \sin\left(\mu x - \frac{\pi}{\mu}\right) + \mu$ را رسم کنید با انتقال



سوال: در یک شهر در آبان ماه بطور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما ۳۲ درجه سانتیگراد و حداقل ۲۰ درجه سانتیگراد است یک معادله سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$C = \frac{w\mu + \mu_o}{\mu} = \mu \zeta \quad a = \frac{w\mu - \mu_o}{\mu} = \zeta \quad \frac{\mu\pi}{b} = \mu\epsilon \Rightarrow b = \frac{\mu\pi}{\mu\epsilon} = \frac{\pi}{1\mu}$$

$$y = \zeta \sin\left(\frac{\pi}{1\mu}x\right) + \mu\zeta$$

سوال: در یک مخزن آب شهری از یک طرف آب وارد می شود و پس از تصفیه آب از راه دیگر خارج می

شود ارتفاع ب در این مخزن طبق یک رابطه سینوسی است که هر روز تکرار می شود اگر در ساعت ۳ صبح

ارتفاع آن صانگزیسم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه کمتر داشته باشیم معادله این تابع

را بنویسید. در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است؟

$$a = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta - \delta}{\Delta} = \mu / \Delta \quad c = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta + \delta}{\Delta} = 1 + \delta / \Delta \quad \frac{T}{\mu} = 1 \Delta - \mu = 1 \mu \rightarrow T = \mu \mu = \frac{\mu \pi}{b} \rightarrow b = \frac{\pi}{1 \mu}$$

$$\max(\mu, 1 \Delta) \rightarrow 1 \Delta = \mu / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times \mu + \alpha\right) + 1 + \delta / \Delta \rightarrow \mu / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{\mu} + \alpha\right) = \mu / \Delta \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{\mu} + \alpha\right) = 1 = \sin \frac{\pi}{\mu}$$

$$\frac{\pi}{\mu} + \alpha = \frac{\pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\mu}$$

$$\min(1 \Delta, \delta) \rightarrow \delta = \mu / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \Delta + \alpha\right) + 1 + \delta / \Delta \rightarrow \mu / \Delta \sin\left(\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha\right) = -\mu / \Delta \rightarrow \sin\left(\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha\right) = -1 = \sin \frac{\mu \pi}{\mu}$$

$$\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha = \frac{\mu \pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\mu}$$

$$t = 1 \mu \rightarrow y = \mu / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \mu + \frac{\pi}{\mu}\right) + 1 + \delta / \Delta = \mu / \Delta \left(-\sin \frac{\pi}{\mu}\right) + 1 + \delta / \Delta = -\mu / \Delta \times \delta / \mu + 1 + \delta / \Delta = \mu / \mu$$

سوال: جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله $\Delta p(t) = 2000 \cos \frac{\pi t}{\Delta} + 8000$ باشد که $p(t)$ می باشد

تعداد یا جمعیت در سال t می باشد دوره تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم و می نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آنرا رسم کنید (در یک دوره تناوب) معادله را بر حسب سینوس بنویسید.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\Delta}} = 10 \Delta$$

زمانی ماگزیمم رخ میدهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

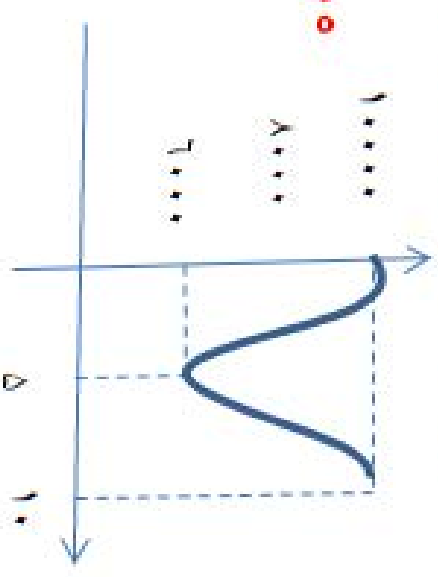
$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{\Delta} = 1 \Rightarrow p(0) = 2000 \times 1 + 8000 = 10000 \\ t = 10 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{\Delta} = \cos \pi = 1 \Rightarrow p(10) = 2000 \times 1 + 8000 = 10000 \end{cases}$$

یا هر مضربی از ۱۰

می نیمم زمانی رخ میدهد که کسینوس کمترین مقدار خود یعنی ۱- برگرداند یعنی در نقاط $5k + 5$

$$t = 5 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{\Delta} = \cos \pi = -1 \Rightarrow p(5) = 2000 \times -1 + 8000 = 6000$$

$$p(t) = 2000 \sin \left(\frac{\pi}{10} t - \frac{\pi}{2} \right) + 8000$$



سوال: معادله ولتاژ یک دستگاه خانگی بر حسب تابع $\cos$ نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره تناوب) $\frac{1}{60}$ می

باشد بطوریکه تغییرات ولتاژ در بازه $[70, 170]$ است معادله این ولتاژ را بنویسید.

$$y = p(t) = a \cos(bt) + c, \frac{b\pi}{2} = \frac{1}{60} \Rightarrow b = 120\pi$$

$$a = \frac{170 - (-170)}{2} = 170 \quad c = \frac{170 + (-170)}{2} = 0$$

$$p(t) = 170 \cos(120\pi t)$$

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.
مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

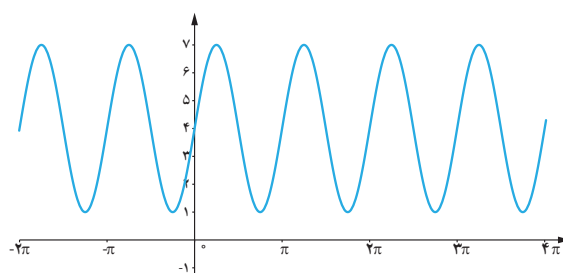
الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

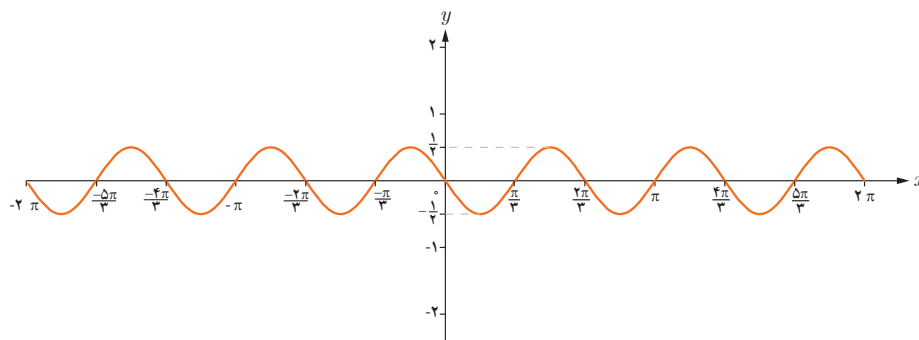
پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

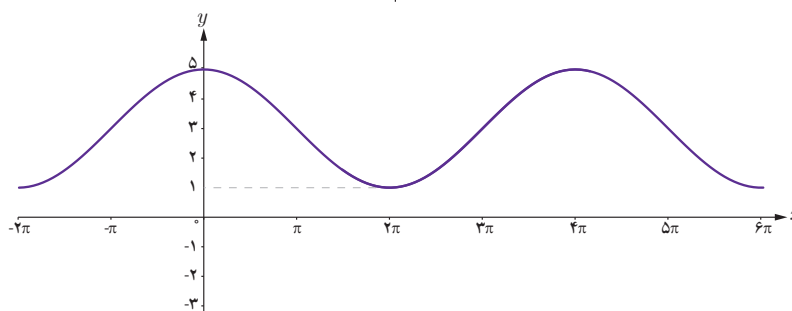
مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



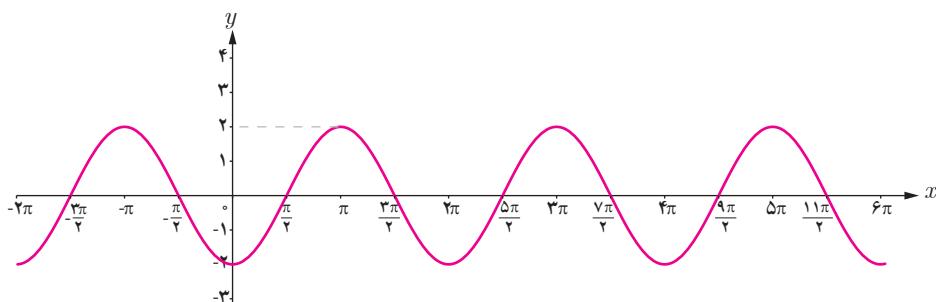
الف)



(ب)



(پ)



(ت)

حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و

طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محوره های x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است :

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

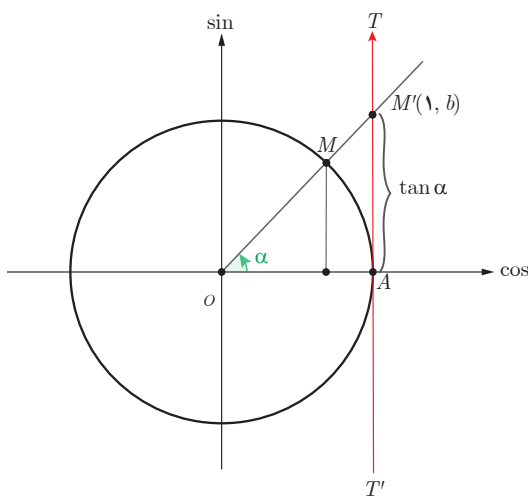
ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{3} \sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2 \cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار

دارد، مقداری منفی است؟

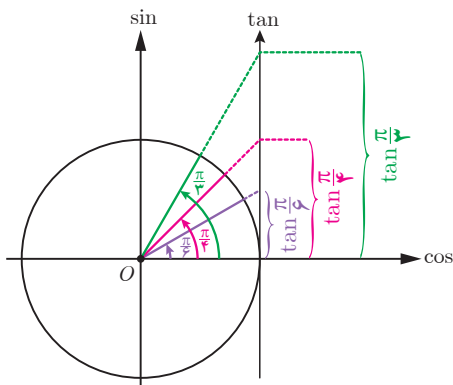
چون در ناحیه اول و سوم سینوس و کسینوس هم علامت هستند ولی در ناحیه های دوم و چهارم مختلف علامه هستند
ب) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

خیر

خیر

تغییرات تانژانت

فعالیت



با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوايا			
افزایشی یا کاهش	افزایشی..	افزایشی..	افزایشی..
بازه تغییرات	$\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < \alpha < \frac{11\pi}{6}$

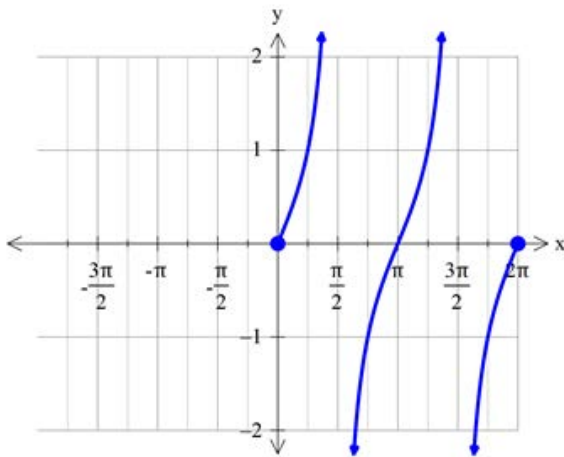
پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\searrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$



کار در کلاس

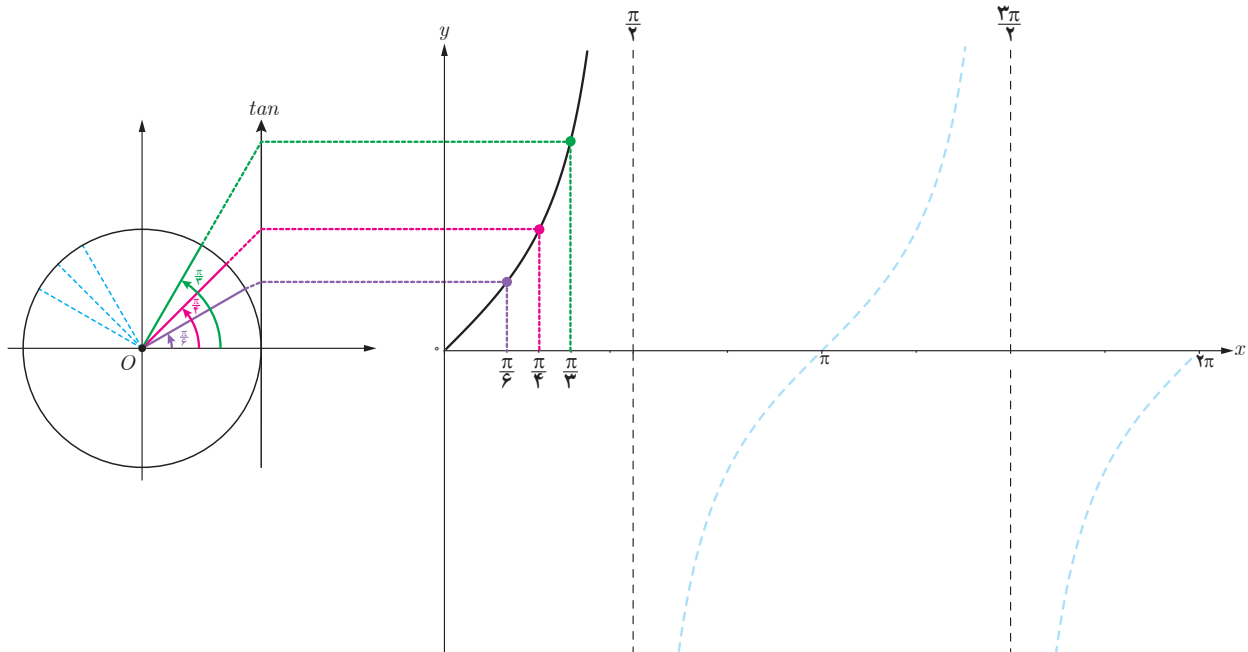
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

تابع در دامنه خود همواره صعودی است

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل $\tan$ مدنظر نیست.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 3x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

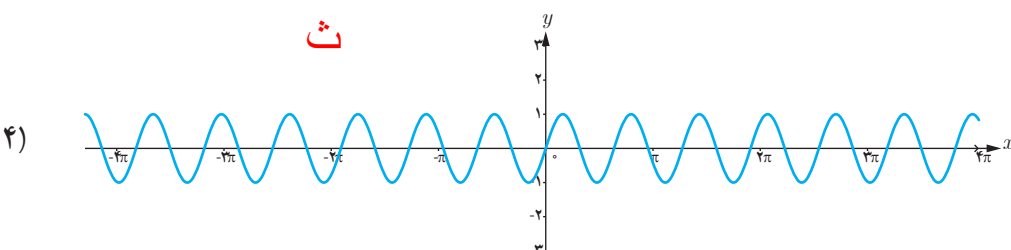
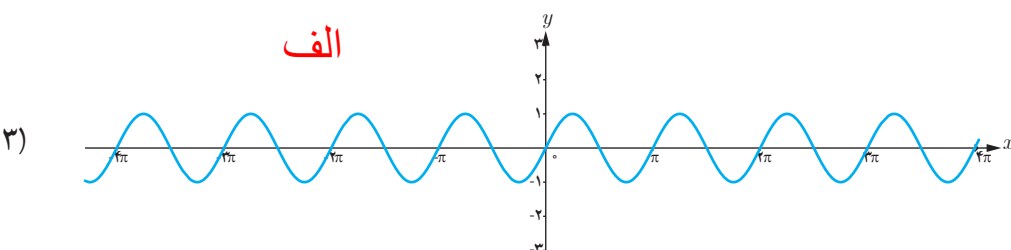
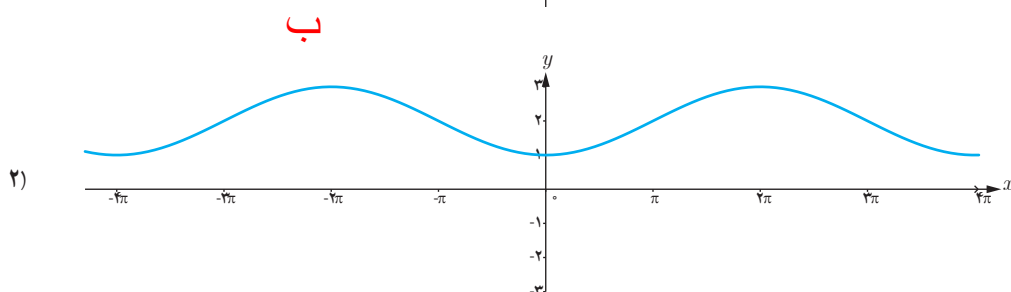
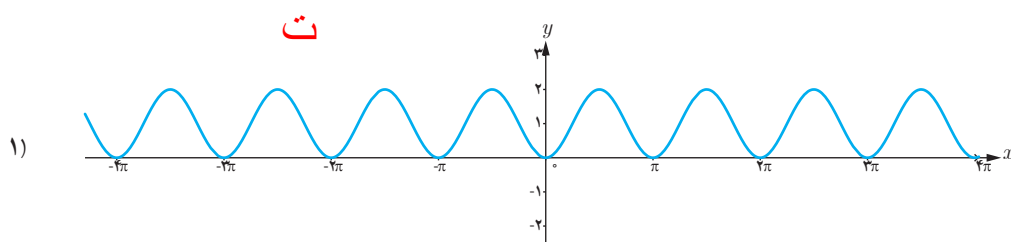
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{\pi} x$

پ) $y = \sin 2x$

ت) $y = 1 - \cos 2x$



حل تمرین صفحه ۴۰ تمرین ۸:

$$y = 1 + \rho \sin \sqrt{x} \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\sqrt{x}|} = \frac{\rho \pi}{\sqrt{x}} \quad \begin{array}{l} \max = |1| + 1 = 2 \\ \min = -|1| + 1 = -1 \end{array}$$

$$y = \sqrt{\rho} - \cos \frac{\pi}{\rho} x \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} = \frac{\rho \pi}{\left| \frac{\pi}{\rho} \right|} = \rho \quad \begin{array}{l} \max = |-1| + \sqrt{\rho} = 1 + \sqrt{\rho} \\ \min = -|-1| + \sqrt{\rho} = -1 + \sqrt{\rho} \end{array}$$

$$y = -\pi \sin \left(\frac{x}{\rho} \right) - \rho \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{\left| \frac{1}{\rho} \right|} = \rho \pi \quad \begin{array}{l} \max = |-\pi| - \rho = \pi - \rho \\ \min = -|-\pi| - \rho = -\pi - \rho \end{array}$$

$$y = -\frac{\rho}{\rho} \cos \rho x \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\rho|} = -\frac{\rho}{\rho} \pi \quad \begin{array}{l} \max = \left| -\frac{\rho}{\rho} \right| = -\frac{\rho}{\rho} \\ \min = -\left| -\frac{\rho}{\rho} \right| = -\frac{\rho}{\rho} \end{array}$$

۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

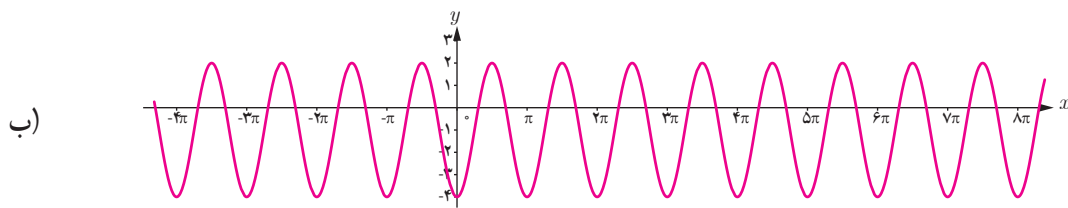
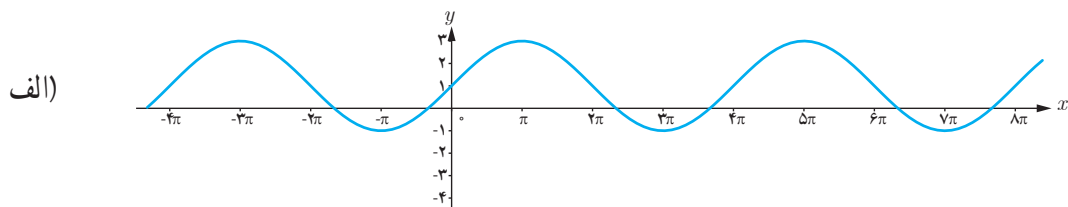
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. **نادرست**

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید :

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	2π
sin	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	تن	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن

تمرین ۳:

$$y = a \sin bx + c \quad \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$T = \pi \quad \max = \mu \quad \min = -\mu \Rightarrow a = \frac{\mu - (-\mu)}{\mu} = \mu \quad c = \frac{\mu + (-\mu)}{\mu} = 0 \quad \pi = \frac{\mu \pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \mu \sin \mu x$$

$$T = \mu \quad \max = 9 \quad \min = \mu \Rightarrow a = \frac{9 - \mu}{\mu} = \mu \quad c = \frac{9 + \mu}{\mu} = 5 \quad \mu = \frac{\mu \pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{\mu}{\pi} \Rightarrow y = \mu \sin \frac{\mu \pi}{\mu} x + 5$$

$$T = \pi \pi \quad \max = -1 \quad \min = -\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{-1 - (-\sqrt{2})}{\mu} = \mu \quad c = \frac{-1 + (-\sqrt{2})}{\mu} = -\pi \quad \pi \pi = \frac{\mu \pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{1}{\mu} \Rightarrow y = \mu \sin \left(\frac{1}{\mu} x \right) - \pi$$

$$T = \frac{\pi}{\mu} \quad \max = 1 \quad \min = -1 \Rightarrow a = \frac{1 - (-1)}{\mu} = 1 \quad c = \frac{1 + (-1)}{\mu} = 0 \quad \frac{\pi}{\mu} = \frac{\mu \pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \sin (\mu x)$$

حل تمرين ٤: الف)

$$\max = \rho, \min = -1, T = \pi$$

$$C = \frac{\rho + (-1)}{\rho} = 1, a = \frac{\rho - (-1)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\pi} = \rho$$

$$y = \rho \sin\left(\frac{1}{\rho}x\right) + 1$$

$$\max = \rho, \min = -\rho, T = \pi$$

$$C = \frac{\rho + (-\rho)}{\rho} = -1, a = \frac{\rho - (-\rho)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\pi} = \rho$$

ب)

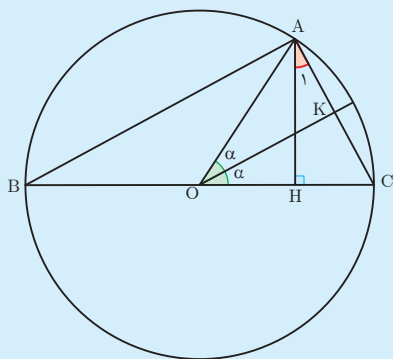
$$y = \rho \cos(\rho x) - 1$$

درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن^۱.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin \alpha \quad (۱)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$. همچنین از مجموع زوایای $\triangle ABC$ به دست می‌آید:

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $\triangle AHC$ داریم:

$$\triangle AHC: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $\triangle OAC$ و $\triangle AHC$ به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAC: AH = \sin 2\alpha \\ \triangle AHC: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(۱)} AH = 2\sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در $\triangle OAH$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $\triangle AHC$ داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2\sin \alpha) = 2\sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

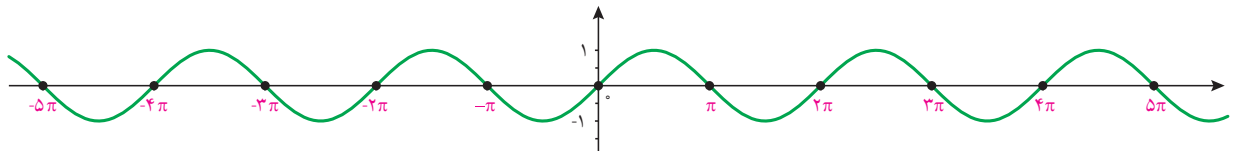
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

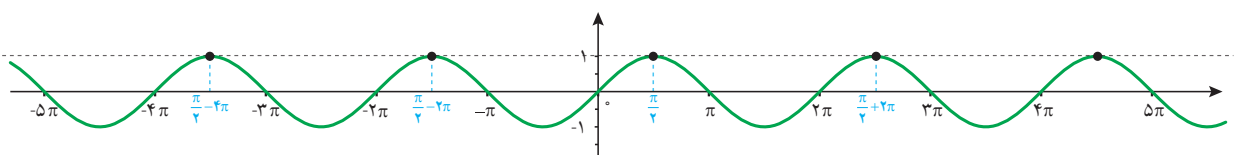
معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{6} - 4\pi, \frac{\pi}{6} - 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \frac{\pi}{6} + 4\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

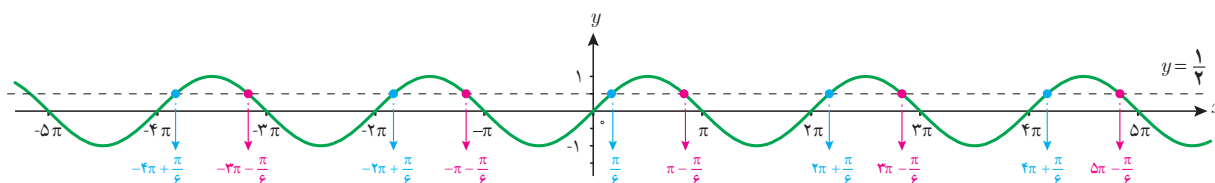
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$$

فعالیت

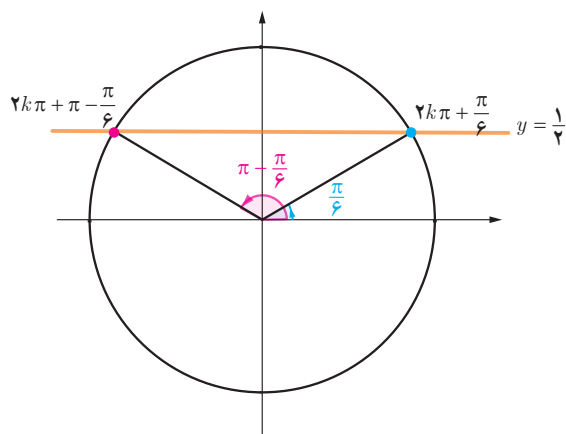
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



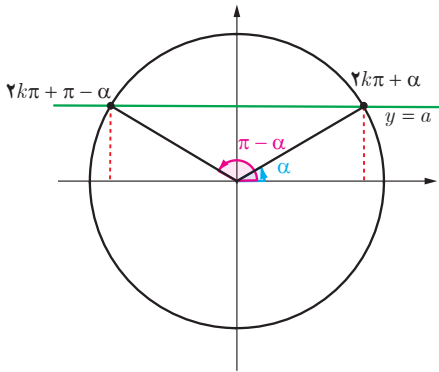
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **این معادله بی شمار جواب دارد**

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



$$\frac{\pi}{6}, \dots, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, \text{هم انتها با } \frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, -\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, \text{هم انتها با } \pi - \frac{\pi}{6}$$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ب) } \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

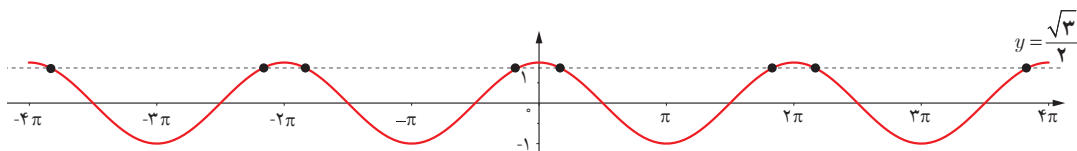
معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

فعالیت

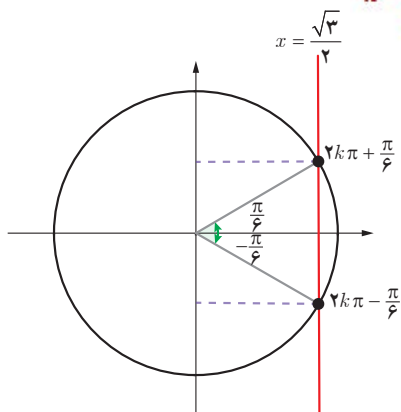
نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله

را بیابید. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



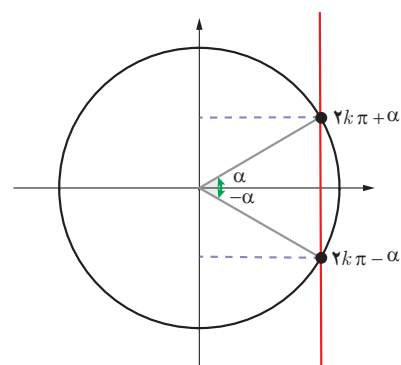
$$x = \frac{\pi}{6}, x = 2\pi - \frac{\pi}{6}, x = 2\pi + \frac{\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$$

الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.



ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{ب:} \quad \frac{\pi}{6} &\Rightarrow \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} &\Rightarrow -\frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{6}, -4\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, -2\pi - \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

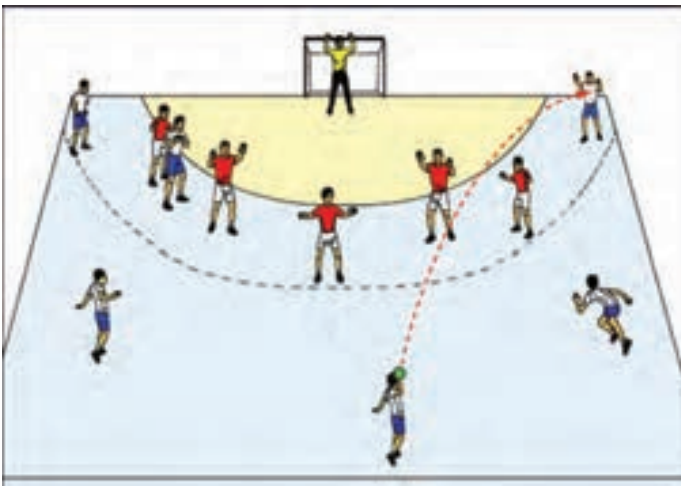
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می آید :

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین مثبت یک و منفی یک می باشد

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x$

ب) $\cos x = \cos 2x$

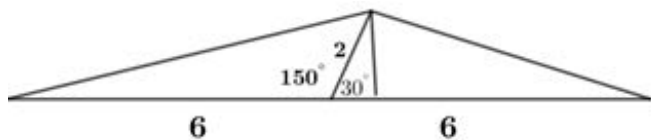
ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C = 3 \rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \rightarrow C = 30^\circ, 150^\circ$$

حل تمرین صفحه ۴۸:

(الف)

$$\sin^r \alpha = 1 - \left(\frac{\Delta}{1 \mu} \right)^r = \frac{1 \mu^r}{1 \epsilon^r} \rightarrow \sin \alpha = \frac{1 \mu}{1 \mu}$$

$$\cos^r \alpha = \mu \cos^r \alpha - 1 = \mu \times \frac{\mu \Delta}{1 \epsilon^r} - 1 = -\frac{1 \mu}{1 \epsilon^r}$$

(ب)

$$\sin^r \alpha = \mu \sin \alpha, \cos \alpha = \mu \times \frac{1 \mu}{1 \mu} \times \frac{\Delta}{1 \mu} = \frac{1 \mu}{1 \epsilon}$$

حل تمرین ۳:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{p}}{p}}{2} = \frac{p - \sqrt{p}}{2p} \rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{p - \sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{p}}{p}}{2} = \frac{p + \sqrt{p}}{2p} \rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{p + \sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

$$\sin \frac{\pi}{\mu} = \sin \mu x$$

(الف)

$$1 = \sin \mu x \rightarrow \mu x = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu}$$

(ب)

$$\cos \mu x - \cos x + 1 = 0$$

$$\mu \cos^{\mu} x - 1 - \cos x + 1 \rightarrow \cos x (\mu \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \mu \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{\mu} = \cos \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \mu k \pi \pm \frac{\pi}{\mu} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \mu x \rightarrow \begin{cases} x = \mu k \pi + \mu x \rightarrow x = -\mu k \pi \\ x = \mu k \pi - \mu x \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(ث)

$$\cos \mu x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - \mu \sin^r x - \sin x = 0 \rightarrow \mu \sin^r x + \sin x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sin x = t} & t^r + t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{5} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \mu k \pi - \frac{\pi}{\mu} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

(ث)

$$\cos^r x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow 1 - \sin^r x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow \sin^r x + \sin x - \frac{1}{\mu} = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sin x = t} & t^r + t - \frac{1}{\mu} = 0 \rightarrow \Delta = 1 + \frac{4}{\mu} = \frac{\mu + 4}{\mu} \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{\mu + 4}{\mu}}}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{5} \\ \sin x = -\frac{1}{\mu} \quad \text{غير ممكن} \end{array} \right. \end{aligned}$$

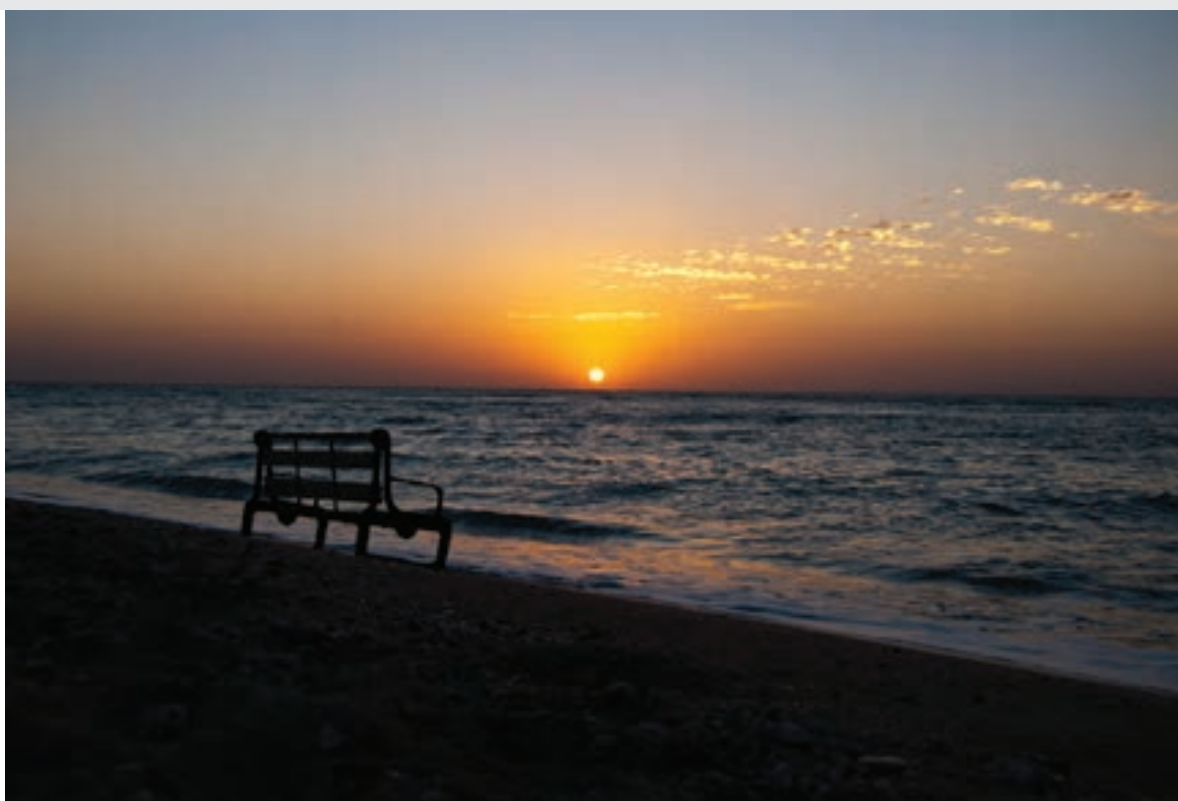
$$\sin X - \cos \mu X = 0$$

$$\sin X = \cos \mu X = \sin \left(\frac{\pi}{\mu} - \mu X \right) \rightarrow \begin{cases} X = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} - \mu X \rightarrow X = \frac{\mu k \pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu} \\ X = \mu k \pi + \pi - \left(\frac{\pi}{\mu} - \mu X \right) \rightarrow X = -\mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \end{cases}$$

(c)

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

۳



عکاس: سپیده‌مهدی حسینی

▲ جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهده دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهده طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهای برای آن دیده نمی‌شود!

حد بی نهایت

درس اول

حد در بی نهایت

درس دوم

درس اول

حد بی نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی نهایت و حد در بی نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش نیازها باید ارائه گردد.

بخش پذیری چندجمله ای ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(2x^2 - 6x) \\ \hline x + 1 \\ -(x - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

۱ الف) چندجمله ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم

کرده ایم. جاهای خالی را پر کنید :

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = 4$.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید. $f(3) = 2(9) - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$

ت) $f(3)$ و R چه رابطه ای با هم دارند؟ **برابرند**

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + 1) + 4$

۲ الف) اکنون می خواهیم در حالت کلی چندجمله ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad x - a \\ \hline Q(x) \\ \hline R \end{array}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = \underbrace{(a - a)Q(a)}_0 + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

نتیجه حاضر را می توان برای تجزیه چندجمله ای ها به کار برد.

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad \quad 3x + 1 \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline R = 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم داریم: $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + -2 + 1 + 1 = 0$$

۲ چندجمله‌ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟ **بله**

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش پذیر است.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 1 = -16 + 20 + 6 - 1 = 0 \Rightarrow R=0$$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

۱- در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجه صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجه حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب های دو جمله به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x + 2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(-x^2 - 2x) \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x = 8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4 + 4 + 4) = 96$$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

حد نامتناهی

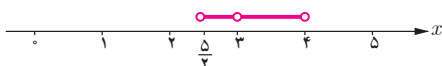
تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می شود.



مثال: مجموعه $\{3\} - (\frac{5}{4}, 4)$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

کار در کلاس صفحه ۵۴: الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{x^p - 1}{x^p + px} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{\cancel{(x + \frac{1}{p})} (x - \frac{1}{p})}{\cancel{x (x + \frac{1}{p})}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{(x - \frac{1}{p})}{x} = \frac{-\frac{2}{p}}{-\frac{1}{p}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{px^p - px + 1}{px^p + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{1}{p}\right)} (px - \frac{1}{p})}{\cancel{\left(x - \frac{1}{p}\right)} (px + p)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{(px - \frac{1}{p})}{(px + p)} = \frac{0}{2} = 0$$

ب)

ب)

$$\lim_{x \rightarrow \mu} \frac{x^r - \Delta x + \epsilon}{\mu x^r - 1 \mu x^r + \mu \epsilon x - 9} = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{\cancel{(x - \mu)} (x - \mu)}{\cancel{(x - \mu)} (x - \mu)} = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = \frac{1}{0}$$

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت

هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیر منفی به صفر میل می کند وحد صورت

هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \mu^+} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \mu^-} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = -\infty \end{cases}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r - 1}{x + \sqrt{\mu x + \mu}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{\mu x + \mu})}{(x + \sqrt{\mu x + \mu})(x - \sqrt{\mu x + \mu})(x - \sqrt{\mu x + \mu})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1) \cancel{(x + 1)} (x - \sqrt{\mu x + \mu})}{(x - \mu) \cancel{(x + 1)}} = \frac{+\mu}{-\mu} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^p + x - p} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}^{x^p - x}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+p)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{5}$$

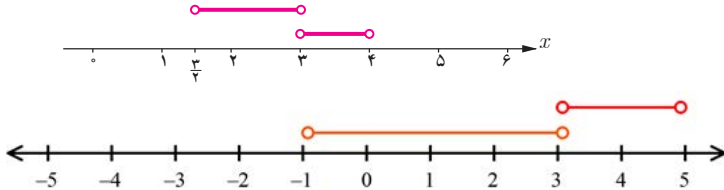
3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[p]{x} + 1}{x^p + px + p} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[p]{x} + 1)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)}{\cancel{(x+1)}(x+p)(\cancel{x+1})(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+p)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \frac{1}{p^2}$$

4

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0, x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.



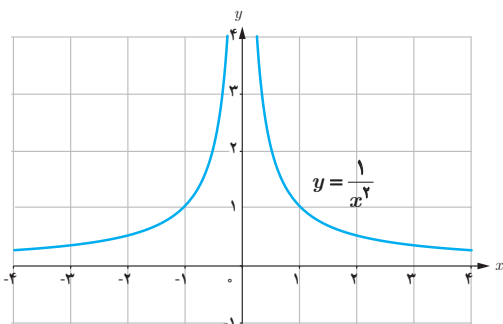
همسایگی راست $(3, 5)$ و همسایگی چپ $(-1, 3)$

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	10000	1000000	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	1000000	...	100	25

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ به هر اندازه دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقادیرهای بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

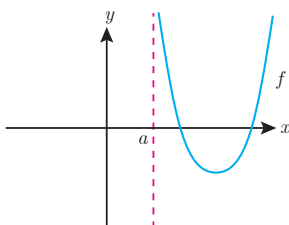
همسایگی محذوف

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی **کوچکتر** ... کرد، مشروط بر آنکه x به قدر **کافی** ... به a نزدیک اختیار شود.

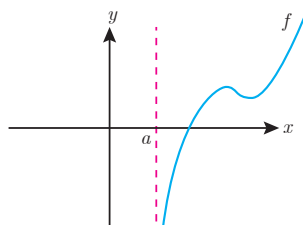
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

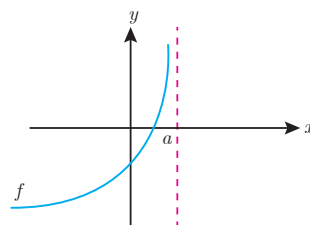
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل های زیر دقت کنید.



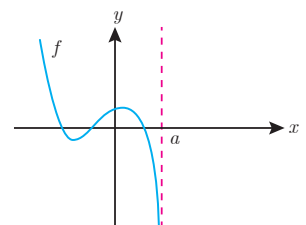
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود.

بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ و یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنابر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

۱- در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty \times \infty$ و $\infty - \infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

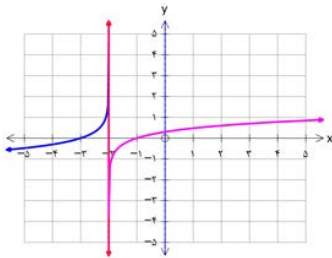
پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

۲. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و



$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.

تمرین

۱. الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۳. حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$

۴. حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{4}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x$

ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵. الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

حل کار در کلاس صفحه ۵۷:

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu x}{x - \infty} = \frac{1}{\infty} = -\infty$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu x}{x - \infty} = \frac{1}{\infty} = +\infty$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^\mu} = \frac{-1}{\infty} = -\infty$$

$$\text{ت)} \quad \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{1}{|x - \mu|} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\text{ث)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\mu}} \frac{[x]}{\mu x + 1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sin^\mu x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد

صورت هم در ۵ برابر ۱۰ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد

صورت هم در ۵ برابر ۱۰ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی صفر همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند

و صورت هم برابر ۱- است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۳ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و ح

صورت هم برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{\mu}$ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند

و صورت هم $-1 = \left[\frac{-1}{\mu} \right] = -1$ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت

هم در صفر برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$X+1=0\rightarrow X=-1$$

$$f(-1)=p(-1)^r+(-1)^r+1=-p+1+1=0\rightarrow \boxed{R=0}$$

ب.

$$pX^r+X^r+1\quad \left| X+1 \right.$$

$$\underline{-\left(pX^r+pX^r\right)}\qquad pX^r-X+1$$

$$-X^r+1$$

$$\underline{-\left(-X^r-X\right)}\qquad f(X)=(X+1)\left(pX^r-X+1\right)$$

$$X+1$$

$$\underline{-\left(X+1\right)}$$

$$0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\mu}} \frac{\mu x^{\mu} - x}{\mu x^{\mu} - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\mu}} \frac{\cancel{\mu x \left(x - \frac{1}{\mu} \right)}}{\cancel{\mu x \left(x - \frac{1}{\mu} \right)} (\mu x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\mu}} \frac{x}{(\mu x + 1)} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\mu} - \mu x^{\mu} - \mu x - 0}{x^{\mu} - \mu 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(x - 0)} (x^{\mu} + x - 1)}{\cancel{(x - 0)} (x + 0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\mu} + x - 1}{(x + 0)} = \frac{\mu 0 + 0 - 1}{1 0} = \frac{\mu 9}{1 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{x^{\mu} + \mu x - \mu}{x^{\mu} + \mu x^{\mu} + x + \mu} = \lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{\cancel{(x + \mu)} (x - 1)}{\cancel{(x + \mu)} (x^{\mu} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{x - 1}{x^{\mu} + 1} = \frac{-0}{1 \vee}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{px-1}}{x^p - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{px-1}}{x^p - x} \times \frac{x + \sqrt{px-1}}{x + \sqrt{px-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - px + 1}{x(x-1)(x + \sqrt{px-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{x(x-1)}(x + \sqrt{px-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x(x + \sqrt{px-1})} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^p - q}{p - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x-p)(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{(p - \sqrt{x+1})(p + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cancel{(x-p)}(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{\underbrace{p^2 - x - 1}_{-\cancel{(x-p)}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{-1} = \frac{p \times p}{-1} = -p^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{px+1}{\sqrt[p]{x}+p} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{p(x+1)(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)}{(\sqrt[p]{x}+p)(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{p\cancel{(x+1)}(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)}{\cancel{(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} p(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p) = p(p + p \times p + p) = p^2$$

تمرین ۴:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و صورت برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر به صفر میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{(x+5)^2} = \frac{9}{-} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\infty$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۹ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x-3)^2} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $+\infty$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{px + 1}{(px + 1)^p} = \frac{-1}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{p}$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت حاصلش برابر -1 است که عددی منفی است پس حد عبارت

برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1 - \Delta x}{x^p - q} = \frac{1 - 1\Delta}{-9} = \frac{-1\Delta}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی 3 به ازای مقادیر مثبت صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر -14 یک عددی منفی است پس حد

عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow (-p)^-} \frac{-px}{x^p - q} = \frac{-p(-p)}{-} = \frac{p^2}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی -2 به ازای مقادیر منفی صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر 6 یک عددی مثبت است پس حد

عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ به صفر از سمت منفی میل می کند و صورت

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت منفی ها به صفر مثبت

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = +\infty$$

میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی مثبت

است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت مثبت ها به صفر

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = -\infty$$

منفی میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی

مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت چپ به صفر منفی میل می

کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت

برابر $+\infty$ است

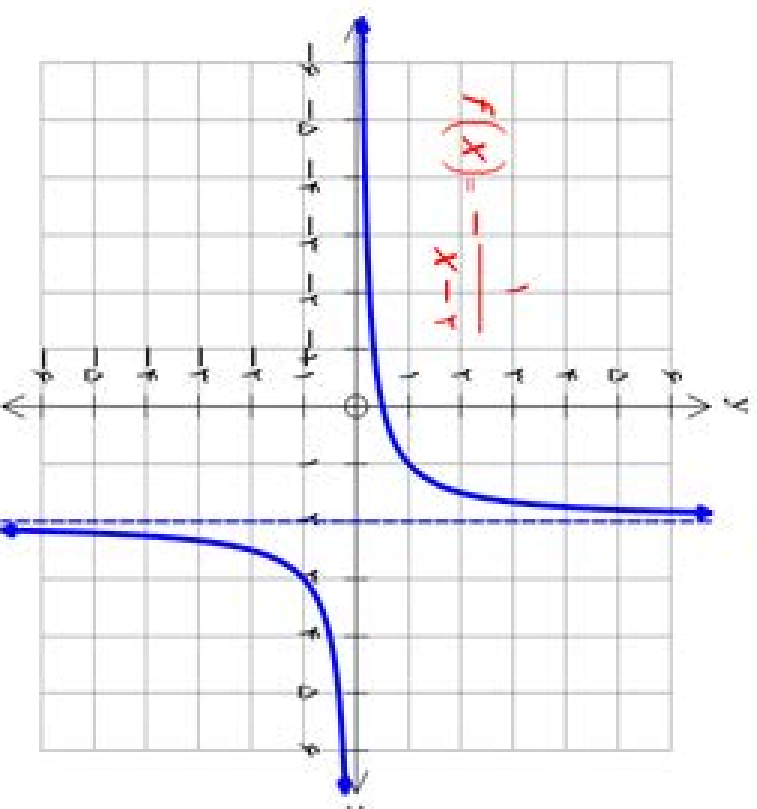
$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{[x] - p}{x - p} = \frac{[p] - p}{p - p} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

نمونه ۵: الف: حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هر عدد

مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هر عدد مثبت دلخواهی کوچکتر است.

پ)



درس دوم

حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	$\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$	...

$$1 - \frac{1}{2^n} \quad 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

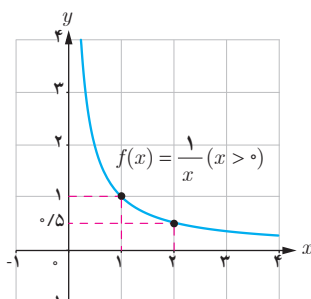
الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟

تقریباً کل سطح مربع رنگ می‌شود

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.



x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ?$

از جدول دیده می شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.00001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 100000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.000001 باشد؟
با این شرایط می گوییم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می توان گفت:

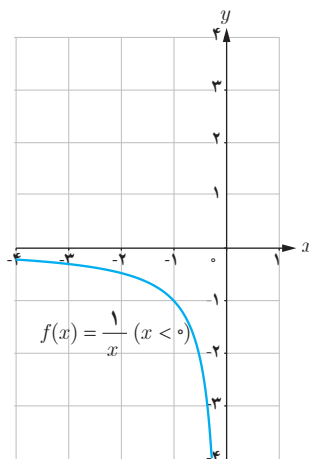
اگر تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار **دلخواه**، می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر **کافی**، کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$	$\dots$	-1000000	-100000	-10000	-1000
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow ?$	$\dots$	-0.000001	-0.00001	-0.0001	-0.001



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0) \quad (\text{پ})$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{7 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$$

۲) الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حل کار در کلاس صفحه ۴۰: سوال ۱:

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\mu X + \mu}{X - 1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{X} \left(\mu - \frac{\mu}{X} \right)}{\cancel{X} \left(1 - \frac{1}{X} \right)} = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \mu - \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\mu}{X}}{\lim_{X \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X}} = \frac{\mu - 0}{1 - 0} = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - \Delta t^r}{t^r + \mu t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1 - \Delta t^r}{t^r}}{\frac{t^r + \mu t}{t^r}} = \frac{\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t^r} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta}{\lim_{t \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mu}{t}} = \frac{0 - \Delta}{1 + 0} = -\Delta$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu - \mu X} = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \mu - \lim_{X \rightarrow +\infty} \mu X} = \frac{1}{\mu - \mu} = -\frac{1}{\mu}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1 \circ \circ X^r + \mu X}{X^r + \Delta} = 1 \circ \circ \quad \text{ب.}$$

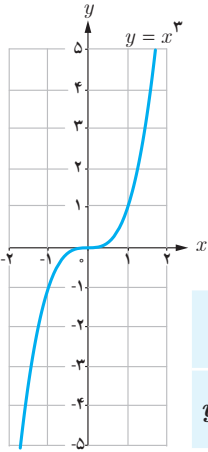
$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{-X + \Delta} = -1$$

سوال ۲: الف)

حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-100000000	-10000000	10000000	100000000	1000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

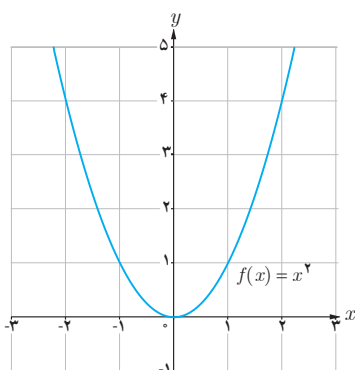
به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.

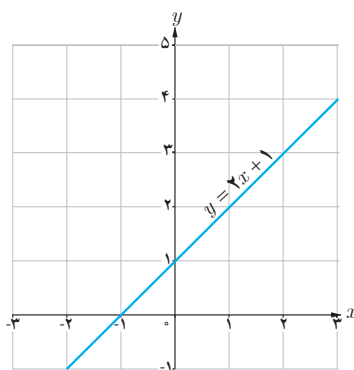
تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



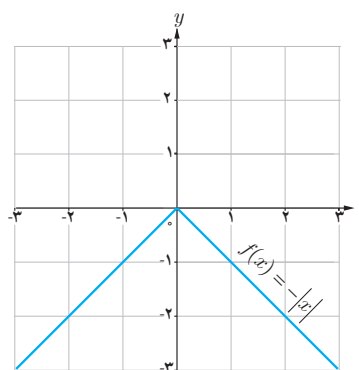
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



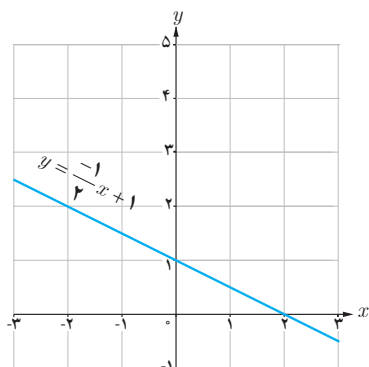
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



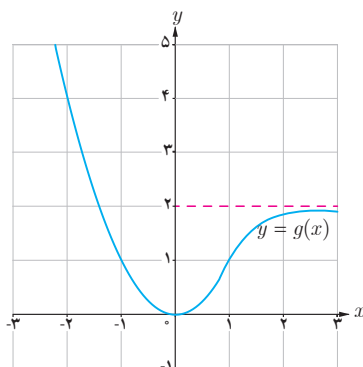
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



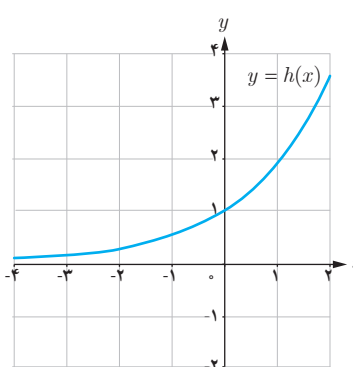
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{1}{2}x + 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x + 1) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

تمرین

۱) نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

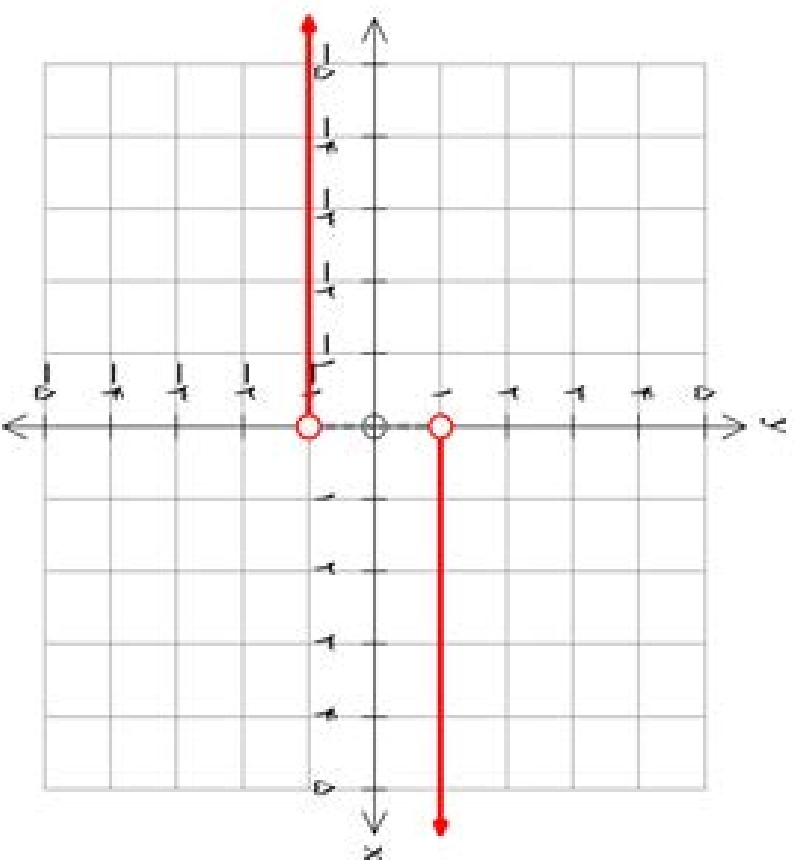
مثلی کار در کلاس صفحه ۲۶۳:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{X^{\mu}} - \mathcal{O}_X + \mu}{\nu_{X^{\mu}} - 1 \mid X^{\mu} - \mathcal{F}_X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{X^{\mu}}}{\nu_{X^{\mu}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\mu}{\nu}$$

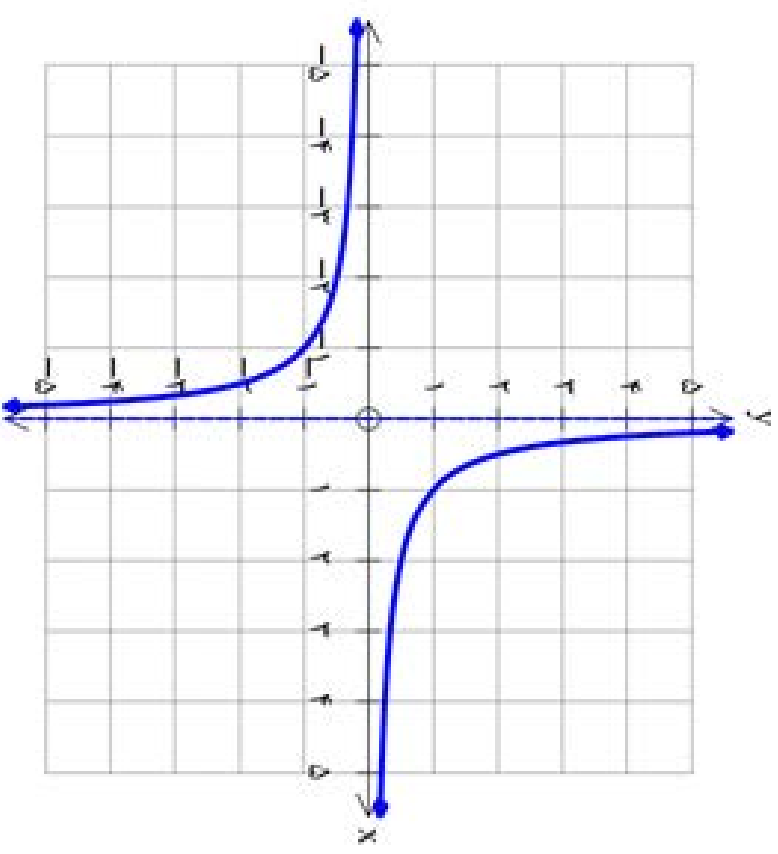
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{O}_X + \mu}{X^{\mu} + X - \Lambda} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{O}_X}{X^{\mu}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{O}}{X^{\mu}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\mu_{X^{\nu}} + \mathcal{O}_{X^{\mu}}}{\mu_{X^{\mu}} + \mathfrak{q}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\mu_{X^{\nu}}}{\mu_{X^{\mu}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\mu_{X^{\mu}} \right) = -\mu(+\infty) = -\infty$$

حل تمرین صفحه ۵۳: تمرین ۸:



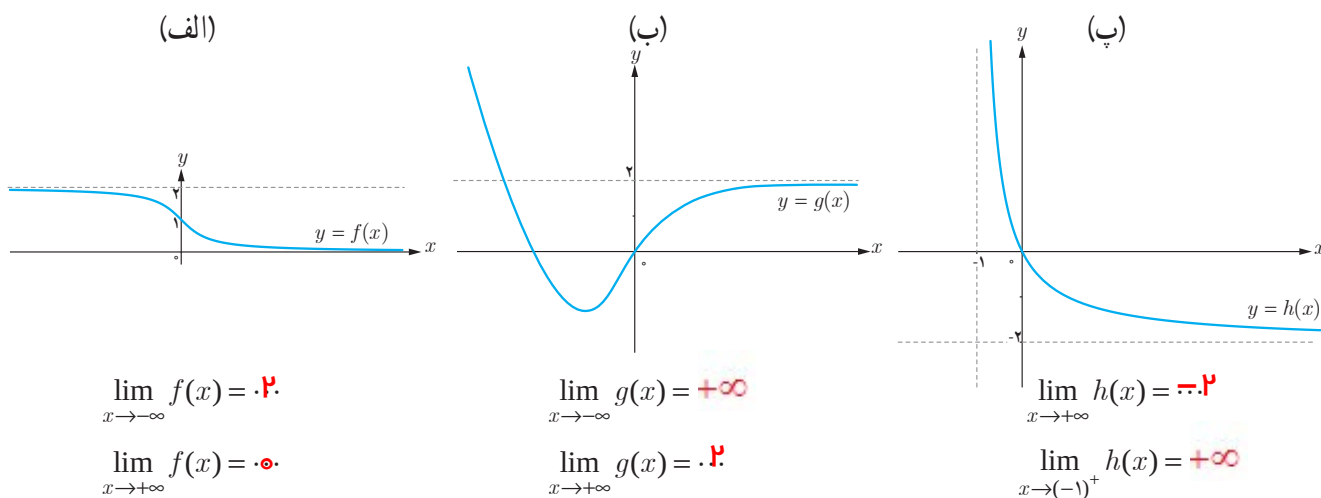
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$



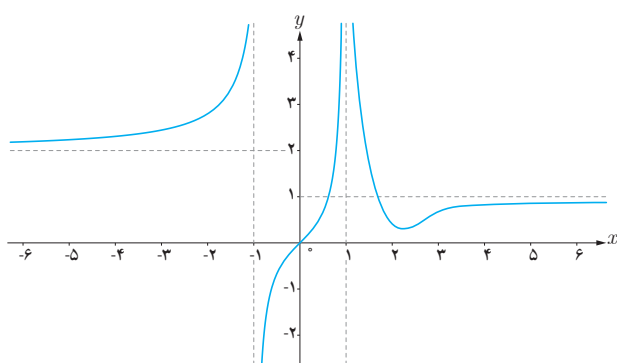
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$
 پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{4}x^3 + 7x^2 - 6)$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

سرين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(q + \frac{y}{x^p} \right) = q + 0 = q$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} x^p + vx^p - s \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} x^p \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{pX - p} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{pX} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p + \frac{1}{x^p}}{\frac{p}{x} - 0} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(p + \frac{1}{x^p} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p}{x} - 0 \right)} = \frac{p}{-0} = -\frac{p}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{pX - 1}{pX + 1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (pX)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (pX)} = \frac{p}{p}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{pX^p - pX + 1}{X^p + 0X - p} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (pX^p)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (X^p)} = p$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\mu_X^{\mathcal{O}} - \mathfrak{f}_X^{\mu} - X}{X^p - \mathcal{O}X + 1} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\mu_X^{\mathcal{O}} \right)}{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(X^p \right)} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \mu_X^{\mu} = -\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{X^p + X}{\mu - X} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(X^p \right)}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-X \right)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-X \right) = -\infty$$

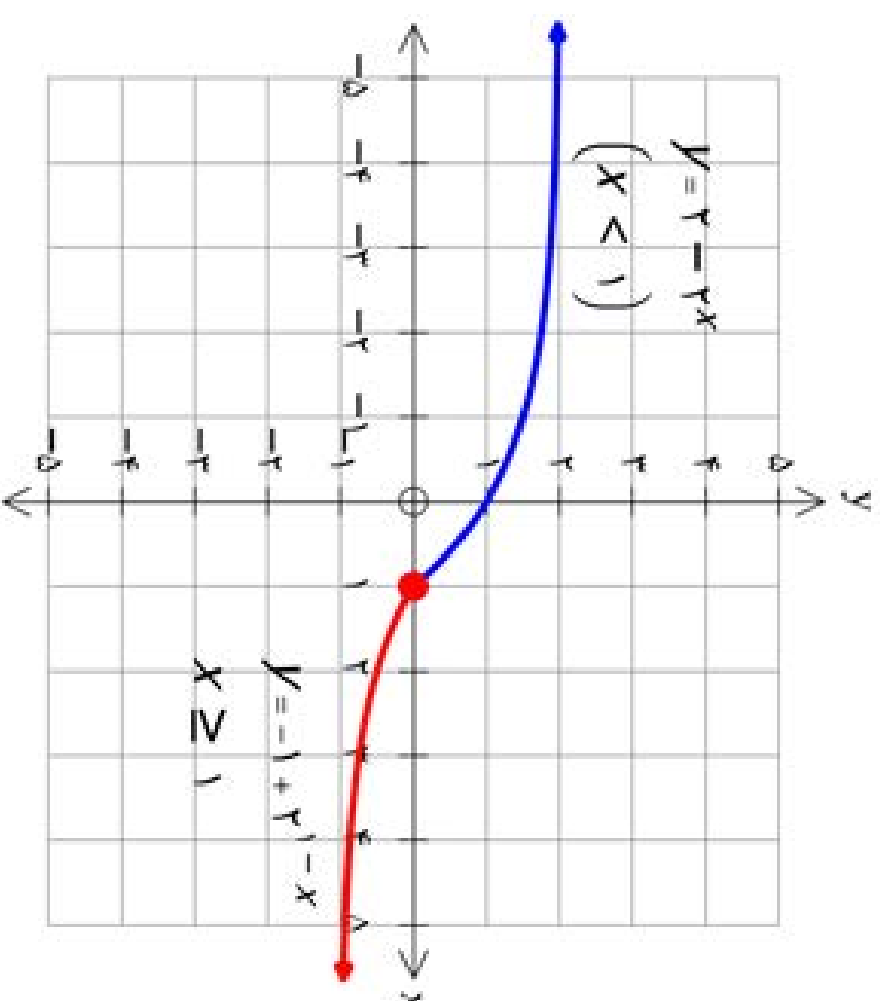
$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\mathfrak{f}_X^{\mu} + VX - \mathfrak{q}}{\mu_X^{\mu} - \mathfrak{k}_X^p + X} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(-\mathfrak{f}_X^{\mu} \right)}{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\mu_X^{\mu} \right)} = -\mu$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\mu_X + 1}{\mathfrak{k}} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\mu_X \right)}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \mathfrak{k}} = \frac{1}{\mu} \left(+\infty \right) = +\infty$$

سریع ۵: الف) اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۱-

نزدیک کرد

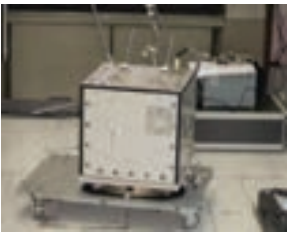
اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۲ نزدیک کرد
(ب)



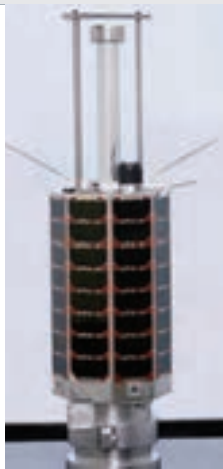
ماهور از طلوع



ماهور از آمدن



ماهور از رمدا



ماهور بهر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق پذیری و پیوستگی

آهنگ تغییر

درس اول

درس دوم

درس سوم



جزوه های بیشتر (کلیک کنید) :

گام به گام دوازدهم | جزوه آموزشی دوازدهم | نمونه سوالات درسی

جهت دانلود جدید ترین مطالب بر روی پایه خود روی لینک های زیر کلیک کنید.



ابتدایی

اول ✓ دوم ✓ سوم ✓ چهارم ✓ پنجم ✓ ششم ✓

متوسطه اول

هفتم ✓ هشتم ✓ نهم ✓

متوسطه دوم

دهم ✓ یازدهم ✓ دوازدهم ✓