

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

حسابان (۲)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

شامل:

نمونه سوال و درسنامه مختصر

تهیه و تنظیم:

فاطمه سرابی

حسابان ۲ دوازدهم ریاضی



تبدیل نمودار توابع

انتقال عمودی و افقی



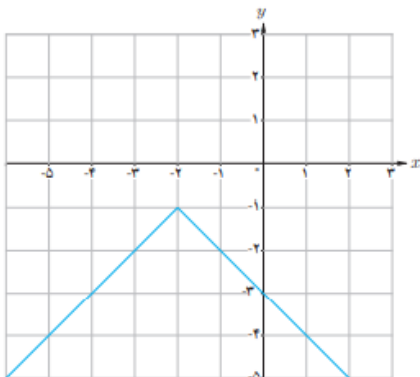
فرض کنید تابع $y = f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y = f(x) + k$ باید تابع $y = f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت بالا منتقل کنیم و برای رسم $y = f(x) - k$ باید تابع $y = f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت پایین بیاوریم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی عرض نقاط تابع قبلی است و این تغییرات موافق با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x) + 2$ ما هم باید همان $+2$ را روی عرض ها اعمال کنیم.

فرض کنید تابع $y = f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y = f(x + k)$ باید تابع $y = f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ منتقل کنیم و برای رسم $y = f(x - k)$ باید تابع $y = f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت راست بیاوریم. در واقع همیشه با y موافق هستیم.

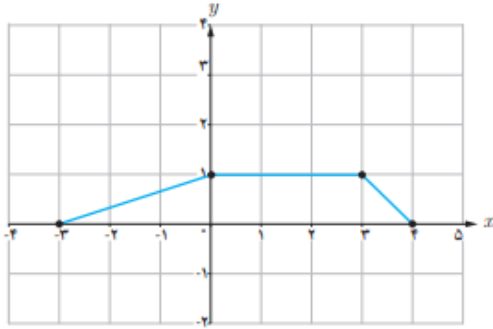
پس تغییرات تابع جدید فقط روی طول نقاط تابع قبلی است و این تغییرات مخالف با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x + 2)$ ما باید -2 را روی طول ها اعمال کنیم. در واقع همیشه با x لج میکنیم. ☺

📖 **مثال** - نمودار تابع f داده شده است. از روی آن تابع $g(x) = f(x - 1)$ و $h(x) = f(x) - 1$ را رسم کنید.





مثال - از روی نمودار تابع f نمودار تابع $y = f(x - 2) + 1$ را رسم کنید.



انبساط و انقباض عمودی



برای رسم تابع $y = kf(x)$ ($k > 0$) از روی تابع $y = f(x)$ به این صورت عمل میکنیم که تمام y ها را k برابر می کنیم.

اگر $k > 1$ باشد این عمل را انبساط عمودی و اگر $0 < k < 1$ باشد، این کار را انقباض عمودی میگوییم.

کماکان روی حرف قبلی که در مورد y کاری که خواسته را انجام میدهیم ، هستیم.

انبساط و انقباض افقی



برای رسم تابع $y = f(kx)$ ($k > 0$) از روی تابع $y = f(x)$ به این صورت عمل می کنیم که تمام کارهایی که انجام

داده را برعکس عمل میکنیم. مثلا برای رسم تابع $y = f(2x)$ تمام طولها را تقسیم بر ۲ میکنیم و برای رسم

$$y = f\left(\frac{x}{3}\right) \text{ باید تمام } x \text{ ها را ضرب در } 3 \text{ کنیم.}$$

یادتان هست که ما همیشه میگفتیم x موجودی لجاز است؟

اگر $k > 1$ باشد انقباض افقی و اگر $0 < k < 1$ باشد انبساط افقی میگوییم.





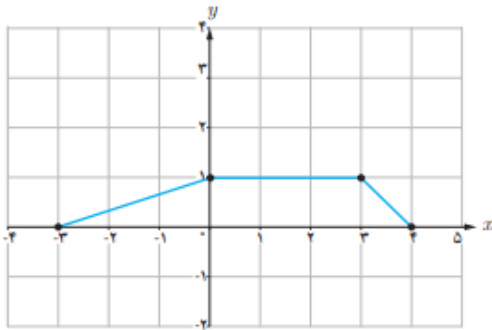
در واقع هر کاری که روی X انجام دهیم جزو انبساط یا انقباض افقی حساب میشود و هر کاری روی Y انجام دهیم جزو انبساط و انقباض عمودی حساب میشود.

📖 **مثال** - درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است. دی ۹۸ تجربی

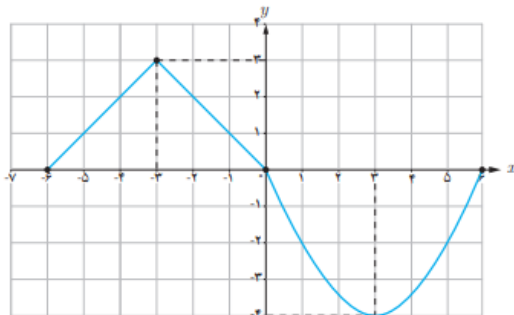
دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.

📖 **مثال** - نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x)$ و $h(x) = f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.



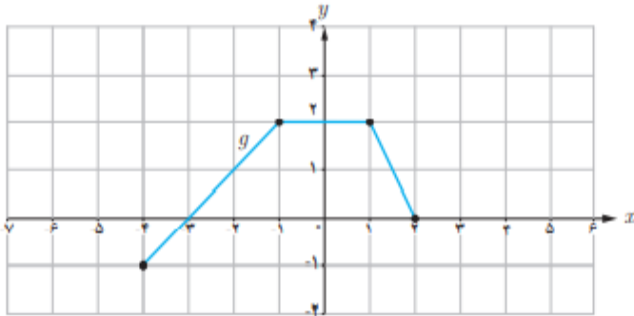
📖 **مثال** - از روی نمودار تابع f که رسم شده است ابتدا نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کنید سپس دامنه و

برد تابع g را بیابید.

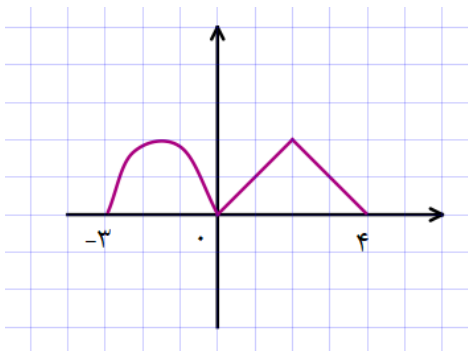




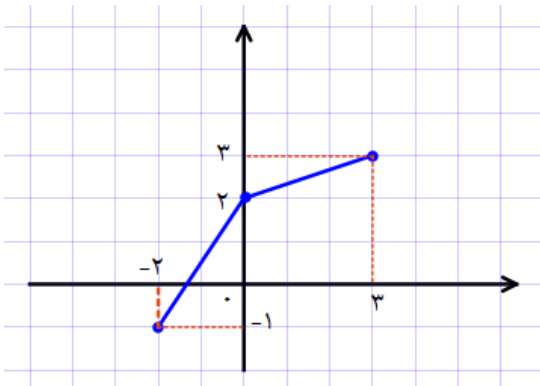
مثال - تابع g داده شده است. از روی آن نمودار $f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ را رسم کنید.



مثال - تابع f داده شده است. نمودار تابع $y = 2f(x)$ را رسم کنید.

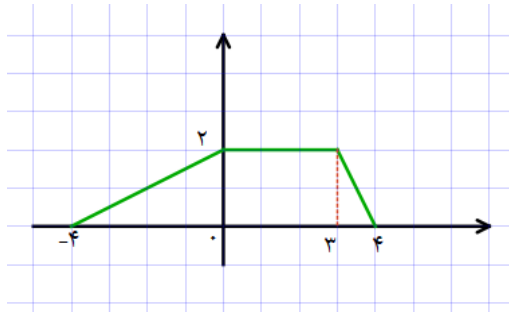


مثال - با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را رسم کنید.

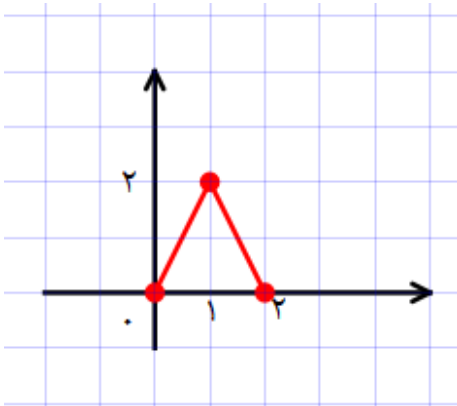




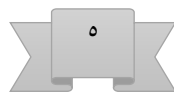
مثال - با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار تابع $y = \frac{1}{4}f(4x) - 2$ را رسم کنید.



مثال - با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار تابع $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.



مثال - نمودار تابع $y = -\sin x$ و $y = \sin 2x$ را از روی $y = \sin x$ رسم کنید. (با انتقال)





مثال - نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ داده شده است. نمودارهای

$$g(x) = 2f(x) + 1 \text{ و } h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ را رسم کنید.}$$

قرینه نسبت به محورهای مختصات

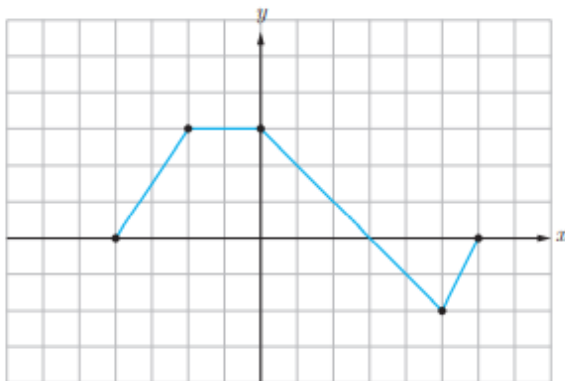


برای رسم تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنید. و برای رسم تابع

$y = -f(x)$ کافی است نمودار تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.

مثال - نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. از روی آن نمودار تابع های $g(x) = f(-x)$ و

$h(x) = -f(x) + 2$ را بکشید.





نکته مهم در رسم توابع



برای رسم تابع $y = af(bx + c) + d$ باید مراحل زیر را به ترتیب انجام داد:

۱- تابع را در راستای محور طولها ابتدا c واحد برعکس عمل کنید. (یعنی اگر c مثبت بود عقب برویم و اگر c منفی بود جلو برویم.)

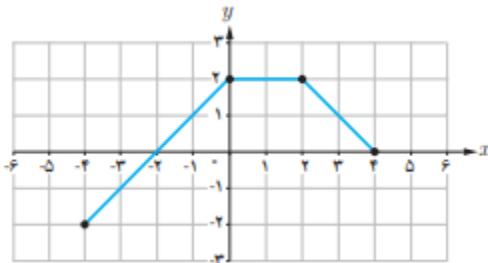
۲- طول نقاط را بر b تقسیم کنید.

تا اینجا کار هر کاری که روی x انجام شده بود را برعکس قوانین که ابتدا ضرب و تقسیم بود و سپس جمع و منها، انجام دادیم. یعنی اول جمع و منها را اعمال کردیم و سپس ضرب و تقسیم.

۳- عرض نقاط را در a ضرب کنید.

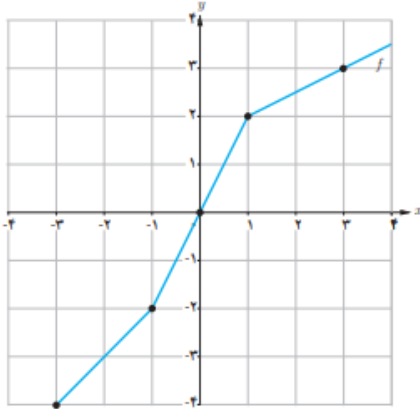
۴- تابع را در راستای محور عرضها d واحد بالا ببرید.

مثال - تابع داده شده است. با استفاده از آن تابع $y = 2f(3x - 1) + 4$ را رسم کنید.





مثال - تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار تابع $y = -f(2x - 4) + 3$ را رسم کنید.



مثال - نقطه $(2, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نقطه متناظر آن روی نمودار منحنی

$$y = 2f(2x) + 1$$

را محاسبه کنید.

مثال - اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $[-1, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x - 1)$ را بیابید.

مثال - نقطه $(-3, 4)$ روی منحنی $y = f(x - 1) - 4$ قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(x)$

را محاسبه کنید.





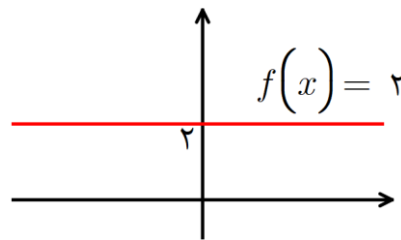
توابع چند جمله ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ را که در آن ضرایب اعداد حقیقی و n

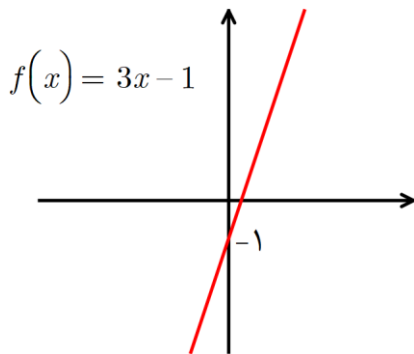


یک عدد صحیح نامنفی باشد را یک چند جمله ای میگوییم. اگر $a_n \neq 0$ باشد چند جمله ای را درجه n میگوییم.

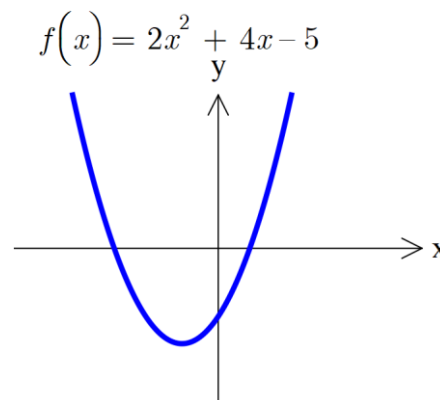
تابع هایی که تا به حال با آنها آشنا شده ایم:



۱- درجه صفر (تابع ثابت)



۲- تابع درجه ۱ (خط راست)



۳- تابع درجه ۲ (سه می)

۴- تابع درجه ۳

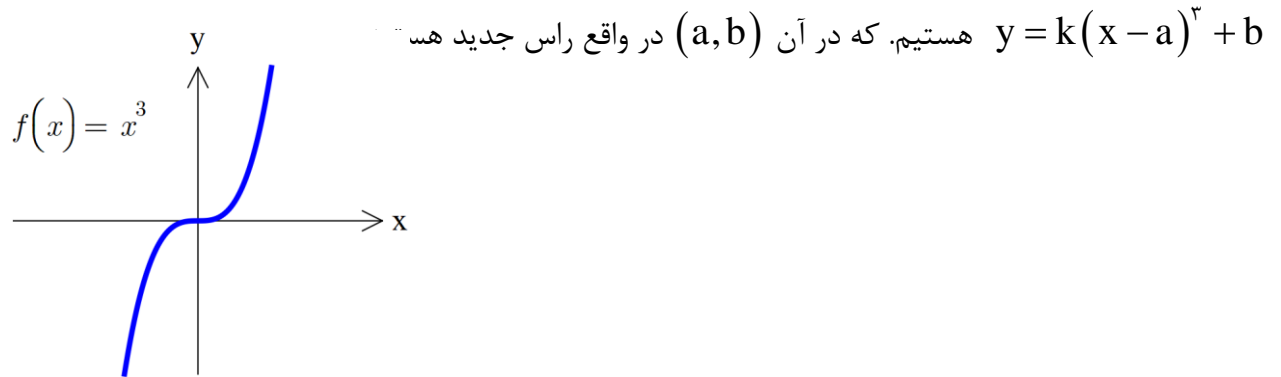
امسال قصد داریم با تابع درجه ۳ آشنا شویم که انواع مختلف دارد. حالت کلی تابع درجه ۳ به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$





اما در کتاب پیش رو تنها توابعی را رسم میکنیم که شکل پایه ی آنها $y = x^3$ است سپس با انتقال هایی که آموخته ایم انواع دیگر آن را رسم می کنیم. پس در حالت کلی قادر به رسم توابعی به صورت



مثال - تابع های خواسته شده را رسم کنید.

ب) $g(x) = 2x^3 + 1$

الف) $f(x) = (x - 1)^3$

ت) $k(x) = -x^3 - 2$

پ) $h(x) = -2(x - 2)^3$

ج) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

ث) $F(x) = -(x + 3)^3$

ح) $h(x) = x(x^2 - 6) + 4(3x - 1)$

چ) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$





مثال - تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ را در بازه $(0, 1)$ با دقت با هم مقایسه کنید.

مثال - نمودار تابع $f(x) = x^3 - 2$ چند بار خط $y = x$ را قطع میکند؟

مثال - دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ را رسم کنید و جواب نامعادله $f(x) > g(x)$ را بنویسید.

مثال - درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $(0, 1)$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ است.

مثال - درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. تیر ۹۹

نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ است.

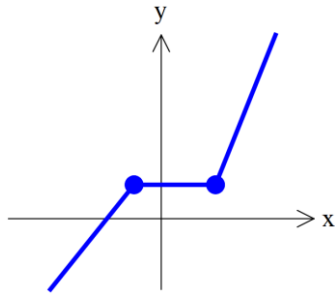




توابع صعودی و نزولی توابع صعودی اکید و نزولی اکید

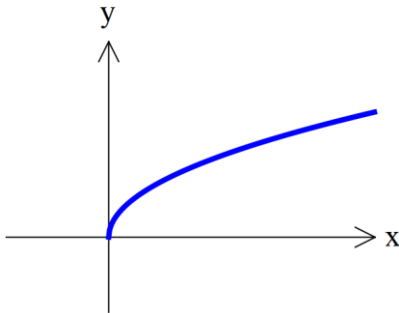


الف) تابع صعودی



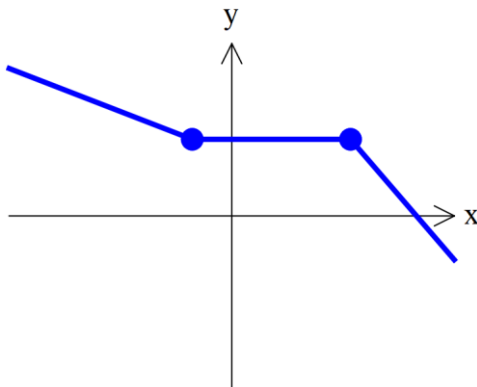
اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ تابع را صعودی میگوییم

ب) تابع اکیداً صعودی



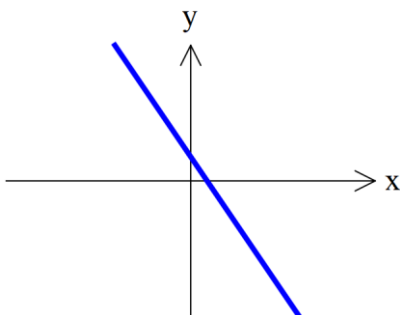
اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ تابع را اکیداً صعودی میگوییم.

پ) تابع نزولی



برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ تابع را نزولی میگوییم.

ت) تابع اکیداً نزولی



برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ تابع را اکیداً نزولی میگوییم





نکته: تابعی که در کل بازه صعودی یا نزولی باشد را **یکنوا** میگوییم و تابعی که در

یک بازه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد را **اکیداً یکنوا** میگوییم.

مثال - درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود. دی ۹۷، خرداد ۹۹

ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه خود اکیداً یکنوا است. تیر ۹۸

پ) تابع $f(x) = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است. شهریور ۹۸

مثال - در جای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.

الف) تابع $y = (x + 1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی، نزولی) است. خرداد ۹۸

ب) تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است. تیر ۹۸

پ) تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع نامیده میشود. دی ۹۸

ت) اگر تابع $f(x) = ax + b$ هم صعودی هم نزولی باشد مقدار a برابر است با:

ج) تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ همواره تابعی و تابع $y = \log_2^x$ همواره تابعی است. (صعودی - نزولی)

چ) اگر تابع f در بازه $[a, b]$ اکیداً یکنوا باشد. نمودار f محور x ها را حداکثر در نقطه قطع می کند.





مثال - تابع $f(x) = 2x^2 + 8x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. کمترین مقدار a را بیابید.

مثال - تابع $f(x) = (k^2 - 1)^x$ نزولی است. حدود k را بیابید.

مثال - نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی، نزولی و ثابت است؟

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < 2 \\ -1 & -2 < x < 1 \\ 2x - 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال - حدود k را طوری بیابید که تابع $f(x) = kx^2 + 4x - 2$ در بازه $[1, +\infty)$ ، نزولی باشد.





مثال - تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x > 1 \\ -3x + 2 & x \leq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید در کدام

بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است.

مثال - نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. نمودار هر کدام را رسم کنید.

الف $f(x) = -2 - 5x$ (ب) $g(x) = x^2 - 6x + 1$ (پ) $h(x) = \sqrt{5}$

مثال - هر گاه تابع $f = \{(2, -3), (-1, 5), (0, k), (1, 2)\}$ نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

مثال - نموداری رسم کنید که تمام ویژگی های زیر را داشته باشد.

الف) $f(2) = 1$

ب) روی اعداد نامنفی ثابت باشد.

پ) روی بازه $[-4, 0]$ اکیداً صعودی باشد.

ت) روی بازه $[-4, -\infty)$ اکیداً نزولی باشد.





مثال - نموداری رسم کنید که تمام ویژگی های زیر را داشته باشد.

الف) $f(-2) = 3$

ب) روی اعداد منفی ثابت باشد.

پ) روی بازه $[0, 3]$ اکیداً صعودی باشد.

ت) روی بازه $(3, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد.

مثال - تابع $f(x) = x^2 - 4$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی است؟

مثال - تابع $f(x) = |x| - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی نزولی است؟

اگر تابع f صعودی باشد و $f(a) < f(b)$ میتوان نتیجه گرفت $a < b$



اگر تابع f نزولی باشد و $f(a) < f(b)$ میتوان نتیجه گرفت $a > b$

مثال - تابع f نزولی است و میدانیم $f(3x - 2) < f(4 - x)$ حدود x را بیابید.





مثال - در نامعادله روبرو حدود X را بیابید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leq 2^{-4x+5}$$

مثال - اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \leq \frac{1}{64}$ حدود x کدام است. دی ۹۸

مثال - نامعادله $\log(\Delta x - 1) \leq \log(2 - 3x)$ را حل کرده و جواب را روی محور نشان دهید.

مثال - نامعادله روبرو را حل کنید. شهریور ۹۸

$$\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$$

مثال - نامعادله را حل کنید

$$\log_{\frac{3}{5}} \frac{2x+1}{3} \leq \log_{\frac{2}{5}} \frac{4x-1}{2}$$





مثال - یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = \log_7 x$

ب) $y = \log_7 (x + 1)$

مثال - اگر تابع در بازه ای اکیداً صعودی باشد آیا صعودی هم هست؟

اگر تابعی در بازه ای صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی هم هست؟

رسم توابع قدرمطلق $|f(x)|$

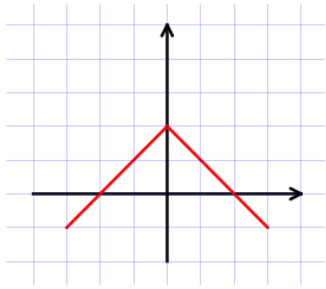


برای رسم این نوع توابع باید ابتدا تابع داخل قدرمطلق را رسم کنیم. (هنگام رسم محل تلاقی با محور طولها و عرضها خیلی مهم و تاثیر گذار است.)

سپس قرینه ی قسمتی از منحنی که زیر محور X هاست را نسبت به محور X ها رسم می کنیم و سپس قسمت های پایین را پاک می کنیم.

مثال - تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی است؟





مثال - نمودار تابع f داده شده است. از روی آن نمودار $y = -|f(x)|$ را بکشید.

مثال - نمودار تابع را رسم کنید. (مرحله به مرحله) $f(x) = |\sqrt{x+2} - 1|$

مثال - تابع $f(x) = -|x+2| + 4$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی تابع را در $(-\infty + 3)$ مشخص کنید.

نکته: اگر تابعی در یک بازه اکیدا یکنوا باشد وارون پذیر است.



مثال - تابع $y = x^2$ را رسم کنید و وارون پذیری آن را بررسی کرده و وارون آن را رسم کنید.





مثال - تابع $y = (x - 1)^3 + 2$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید و در صورت وارون پذیر بودن نمودار و ضابطه f^{-1} را مشخص کنید.

مثال - وارون تابع $f(x) = -(x + 1)^2 + 2$ را در صورت وجود یافته و نمودار f, f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید.

بخش پذیری چند جمله ای ها



فرض کنید چند جمله ای $f(x)$ داده شده است و باقیمانده تقسیم آن بر $x - a$ را می‌خواهیم.

$$R = f(a) \text{ باقیمانده } \rightarrow x = a \rightarrow x - a = 0$$

یعنی اگر ریشه مقسوم علیه را در چند جمله ای داده شده قرار دهیم باقیمانده به دست می‌آید.

نتیجه: اگر در تقسیم $f(x)$ بر $x - a$ داشته باشیم $f(a) = 0$ انگاه می‌گوییم چند جمله ای بر $x - a$ بخش پذیر است.





مثال: باقیمانده تقسیم چند جمله ای $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ را بر $x - 1$ بیابید.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دی ۹۸

چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله ای $x + 2$ بخش پذیر است.

مثال: چند جمله ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f(x)$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

پ) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل هایش بنویسید.

مثال: آیا چند جمله ای $x^3 + 3x^2 - 4x - 6$ بر $x + 1$ بخش پذیر است؟

مثال: باقیمانده تقسیم $p(x) = x^4 - kx^3 + 2x^2 + 3$ بر $x - 2$ برابر -5 است مقدار k را بیابید.





مثال: اگر باقیمانده تقسیم $p(x+1) = 4x^2 - mx^2 - 3x + 2$ بر $x+1$ برابر ۴

باشد، مقدار m چقدر است؟

مثال: اگر $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x+1$ بخشپذیر باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را بیابید. خرداد ۹۸

مثال: در تقسیم چند جمله ای $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1$ بر $x-1$ خارج قسمت $q(x)$ و باقیمانده برابر ۳ است.

باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x+2$ چقدر است؟

مثال: مقادیر a, b را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد و باقی

مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد. دی ۹۸





مثال: چند جمله ای $p(x) = ax^3 + x^2 - x + b$ بر $x^2 - 3x + 2$ بخش پذیر است.

مقادیر a, b را محاسبه کنید.

مثال - مقادیر را چنان بیابید که چند جمله ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد. تیر ۹۹ و

شهریور ۹۸

تجزیه دوجمله ای ها به صورت $x^n \pm a^n$



در تجزیه باید ابتدا دقت کنیم که آیا عبارت داده شده قابل تجزیه هست یا خیر. یعنی اول باقیمانده را حساب کنیم. مثلا اگر

از ما خواسته باشند عبارت $x^4 + 1$ را بر حسب عامل $x - 1$ تجزیه کنید در جواب باید بگوییم عبارت داده شده بر $x - 1$

بخش پذیر نیست پس قابل تجزیه کردن هم نیست.

(الف) اگر n زوج باشد: $x^n + a^n$ قابل تجزیه نیست اما:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1})$$

(ب) اگر n فرد باشد عبارت $x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر نیست اما:





$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1})$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1})$$

تجزیه $x^n - a^n$:

حال سوال اصلی اینجاست چگونه این فرمول ها را حفظ کنیم. ابتدا بررسی کنید قابل تجزیه هست یا خیر. در گام دوم اگر علامت بین در $x^n \pm a^n$ با علامت بین در $x \pm a$ هم علامت باشد پرانتز دوم تمام علامت ها مثبت ها در غیر این صورت یکی در میان مثبت و منفی است.

مثال - عبارت $x^4 - 1$ را بر حسب $x + 1$ بنویسید.

مثال - عبارت $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید. خرداد ۹۸

$$\frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - x}$$

مثال - به کمک اتحادها ساده کنید.

مثال - ساده شده $A = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{2}$ به ازای $x = \sqrt[5]{3}$ چند برابر $\frac{2}{1 - \sqrt[5]{3}}$ است؟

