حسابان ۲

پایه ی دوازدهم « رشته ی ریاضی و فیزیک »

فصل ۳ : حدهای نامتناهی و حد در بینهایت

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اوّل : حدهای نامتناهی

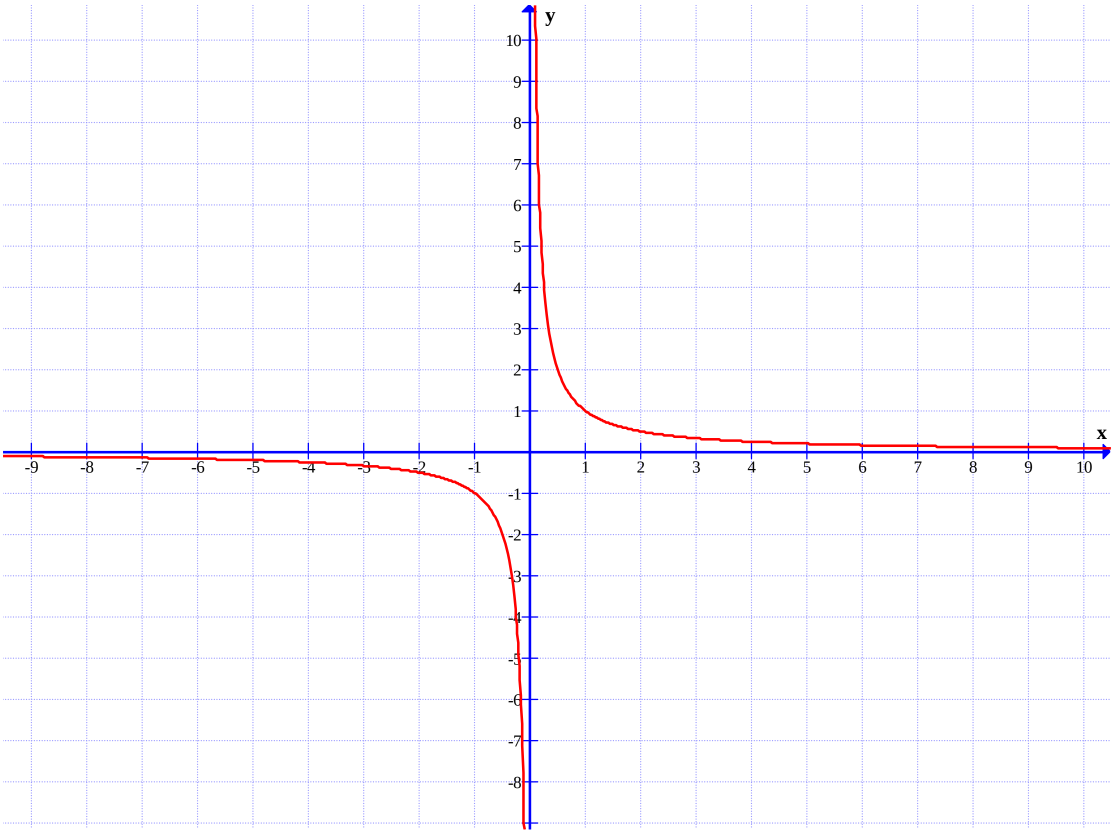
در سال گذشته با مفهوم حد تابع در یک نقطه، آشنا شده اید. دیدیم که اگر تابع در همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد[1] و مقادیر x را از دو طرف به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم، در صورتی که مقدار تابع $f(x)$ به عدد معلوم l نزدیک شود. گویند، تابع در a حد دارد و می نویسند:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

در این درس با رفتار برخی دیگر توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می شویم.

حدهای نامتناهی

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ می باشد.



[1] . این همسایگی می تواند، محذوف باشد.

همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبتی که دلخواهی که در نظر بگیریم بزرگتر کرد به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to \circ^+} f(x) = +\infty$$

توجه داشته باشید که این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگتر باشد.

همچنین در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی کاهش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد منفی که دلخواهی که در نظر بگیریم کوچکتر کرد به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to \circ^-} f(x) = -\infty$$

باز تأکید می شود که این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و منفی بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد منفی می تواند کوچکتر باشد.

با درک توصیف های فوق برای نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ می توان حدهای یک طرفه نامتناهی را بدین شکل تعریف کرد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

به طور مشابه می توان حد های یک طرفه‌ی $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ را تعریف کرد. در تمرین زیر جای خالی مربوط به این دو حد را تکمیل کنید.

تمرین ۱ : جای خالی را کامل کنید.

الف : فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

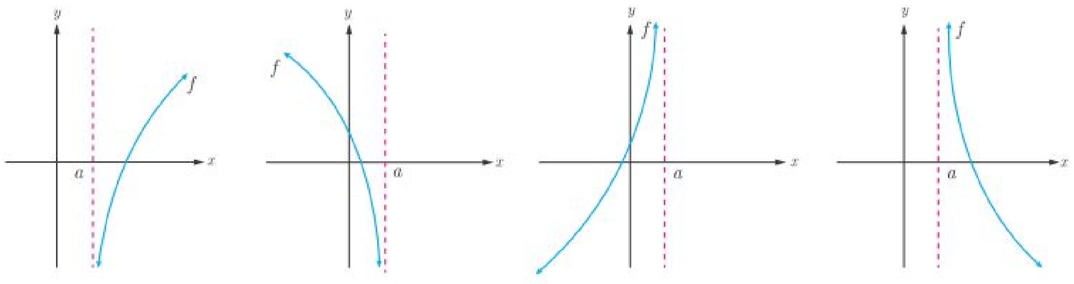
بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد ...... کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت .... به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

ب : فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی .... نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت .... به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

پس از ملاحظه و درک تعاریف مربوط به حدهای یک طرفه‌ی نامتناهی، در شکل های زیر این حالت ها را مشاهده می کنید.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

تمرین ۲ : نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{x-۱}$ را رسم کنید. در مورد حد زیر بحث کنید.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=$$

تمرین۳ : نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$

تمری۴ : نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$

تمرین ۵ : نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را در فاصله‌ی $(۰,\pi)$ رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=$

***

تعریف حدهای نامتناهی

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ مشاهده کردید که $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

لذا می توان گفت که با نزدیک کردن x به اندازه‌ی کافی به صفر (از سمت راست و از سمت چپ)، مقادیر $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد. بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد نامتناهی است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

اکنون **حدهای نامتناهی** را به صورت زیر تعریف می کنیم.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

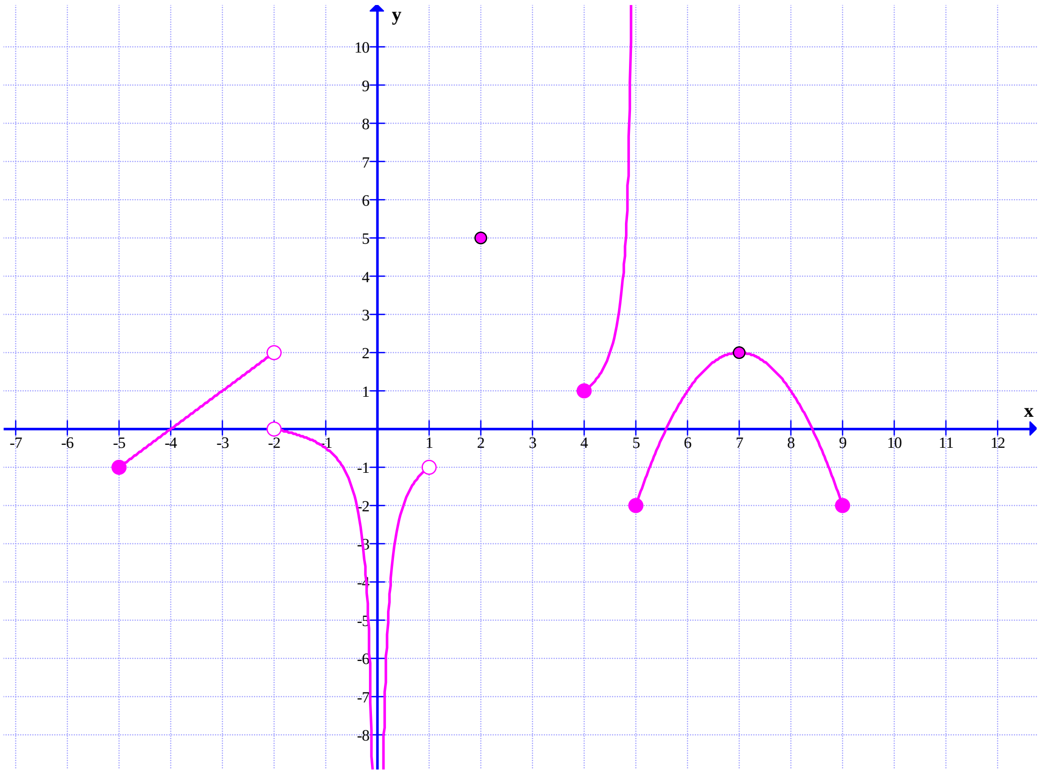
یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تمرین۶ : نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=$ ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=$

اکنون می خواهیم مروری کلی بر حد توابع در یک نقطه ، داشته باشیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : نمودار تابع f در شکل زیر را در نظر بگیرید و به موارد زیر توجه کنید.



۱ : $\lim\limits_{x\to -۵} f(x)$ موجود نیست، زیرا با اینکه $\lim\limits_{x\to(-۵)^+} f(x)=-۱$ ولی $\lim\limits_{x\to(-۵)^-} f(x)$ وجود ندارد.

۲ : $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ موجود نیست، زیرا حد راست و چپ هر دو موجود ولی مساوی نیستند.

حد راست $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=۰$ حد چپ $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=۲$

۳ : $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود نیست. حد راست و چپ هر دو بی‌کران هستند.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-\infty$ و حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$

۵ : $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ موجود نیست. زیرا با اینکه $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$ ولی $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ وجود ندارد.

۶ : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ تعریف نمی شود. زیرا تابع در همسایگی ۲ تعریف نمی شود.

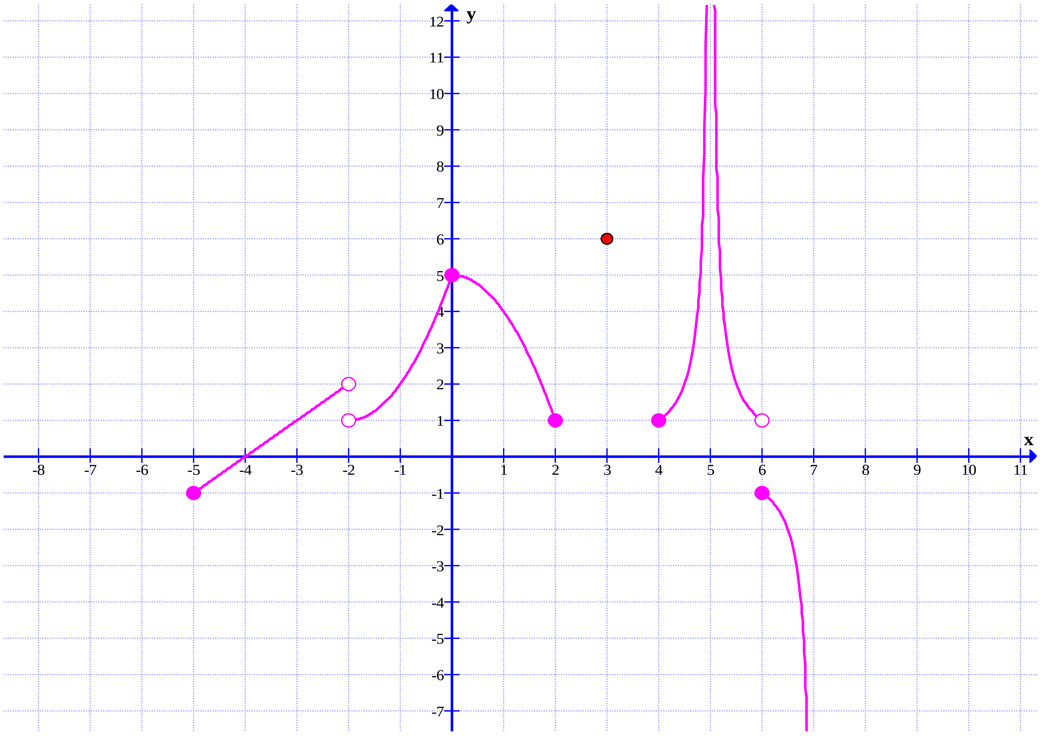
۷ : $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ موجود نیست. زیرا با اینکه $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۱$ ولی $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)$ وجود ندارد.

۸: $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ وجود ندارد. زیرا $\lim\limits_{x\to ۵^+} f(x) = -۲$ و $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x) = +\infty$

۹: $\lim\limits_{x\to ۷} f(x) = ۲$ زیرا $\lim\limits_{x\to ۷^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۷^-} f(x) = ۲$

۱۰: $\lim\limits_{x\to ۹} f(x)$ موجود نیست. زیرا با اینکه $\lim\limits_{x\to ۹^-} f(x) = -۲$ ولی $\lim\limits_{x\to ۹^+} f(x)$ وجود ندارد.

تمرین۷ : با توجه شکل زیر وجود حد تابع در نقاط داده شده را بررسی کنید.



۱) $\lim\limits_{x\to -۵} f(x) =$

۲) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x) =$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) =$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$

۵) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) =$

۶) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) =$

۷) $\lim\limits_{x\to ۶} f(x) =$

۸) $\lim\limits_{x\to ۷} f(x) =$

قضایای حدهای بی نهایت

در این قسمت، چند قضیه‌ی مهم در مورد حدهای بی نهایت ، بدون اثبات بیان می کنیم.

قضیه‌ی ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ در صورتی که n زوج باشد.

ج) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ در صورتی که n فرد باشد.

مثال : با توجه به قضیه ی فوق می توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$ در صورتی که n زوج باشد.

ج) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ در صورتی که n فرد باشد.

قضیه‌ی ۲ :

الف : اگر $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ و برعکس

ب : اگر $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ و برعکس

مثال :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \end{cases} \to \lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

قضیه‌ی ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه :

الف : اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب : اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ج : اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

د : اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x\to a^+$ و $x\to a^-$) نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x+۱}{۴-x^۲}$ را به دست آورید.

حل : چون $\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+۱)=۲+۱=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-}(۴-x^۲)=۴-۴=۰$ پس طبق قضیه

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{۴-x^۲}=+\infty$$

توجه : وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ ، یعنی این که حاصل حد صفر مطلق نمی باشد. بلکه عدد بسیار بسیار نزدیک صفر می باشد که برخی آن را صفر حدی می نامند. به همین دلیل است که گفته می شود که در حد توابع کسری وقتی صورت عددی غیر صفر و مخرج صفر حدی باشد، حد ، بی نهایت می شود و علامت آن را با توجه به علامت صورت و مخرج تعیین می کنند. برای مثال بعضی برای محاسبه‌ی حد زیر به شکل زیر عمل می کنند.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{۴-x^۲}=\frac{۲+۱}{۴-(۲^-)^۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

به نمونه های زیر نیز توجه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^+-۲}=\frac{۵}{۰^+}=+\infty \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^--۲}=\frac{۵}{۰^-}=-\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^+-۲}=\frac{-۵}{۰^+}=-\infty \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^--۲}=\frac{-۵}{۰^-}=+\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۷}{x-۳}=\frac{۳-۷}{۳^+-۳}=\frac{-۴}{۰^+}=-\infty$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۵^+}\frac{x-۲}{[x]-۵}=\frac{۵-۲}{[۵^+]-۵}=\frac{۳}{۵-۵}=\frac{۳}{۰}$$ نامعین(مخرج صفر مطلق است)

صفر حدی و صفر مطلق

برای درک مفهوم حدهای نامتناهی ، لازم است تفاوت صفر حدی و صفر مطلق را بدانیم.

صفر مطلق : همان عدد صفر است که مبدأ اعداد حقیقی است.

صفر حدی : عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر است.

بر این اساس

۱ : اگر مخرج کسری صفر مطلق باشد. این کسر تعریف نشده (نامعین) می باشد. برای مثال کسر $\frac{۵}{۰}$ نامعین است.

۲ : اگر مخرج کسری صفرحدی باشد. این کسر یک عدد بسیار بزرگ مثبت و یا بسیار بزرگ منفی خواهد شد. مانند :

الف) $\frac{۵}{۰^+}=+\infty$ ب) $\frac{۵}{۰^-}=-\infty$ ج) $\frac{-۵}{۰^+}=-\infty$ د) $\frac{-۵}{۰^-}=+\infty$

۳ : اگر صورت و مخرج کسری صفر مطلق باشد.آن کسر تعریف نشده است ولی اگر صورت و مخرج آن صفر حدی باشند، گویند حد مبهم است و قابل محاسبه می باشد.

مثال : حاصل $\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل : وقتی x در همسایگی راست صفر باشد، صورت کسر برابر ۱- و مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق قضیه، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}=-\infty$$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به صورت مبهم $(\frac{0}{0})$ در می آید و چون $x\neq -1$ پس می توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد. یعنی:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=+\infty$$

تمرین ۱۶: مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]-1}{x-[x]}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]+1}{x-2}$

تمرین ۱۷: مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to 4}\frac{(-1)^{[x]}}{x-4}$$

تمرین برای حل: حد های زیر را محاسبه کنید.

۱۸) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-x}{x+2}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]-2}{x-2}$

۲۰) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

قضیه‌ی ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ (یا $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$)

آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x\to a^+$ و $x\to a^-$) نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{x+۱}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل : می دانیم که تابع تانژانت در همسایگی $\dfrac{\pi}{۲}$ رفتار بی کران دارد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \tan x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} (x+۱) = \dfrac{\pi}{۲}+۱ \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \frac{x+۱}{\tan x} = ۰$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \tan x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} (x+۱) = \dfrac{\pi}{۲}+۱ \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \frac{x+۱}{\tan x} = ۰$$

لذا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{x+۱}{\tan x} = ۰$

توجه : در حالت کسری، اگر صورت کسر عدد غیر صفر و مخرج کسر بینهایت شود، آن کسر بسیار بسیار کوچک (صفر حدی) می باشد. مانند حالت های زیر:

$$\frac{۲}{+\infty} = ۰ \quad و \quad \frac{۲}{-\infty} = ۰ \quad و \quad \frac{-۲}{+\infty} = ۰ \quad و \quad \frac{-۲}{-\infty} = ۰$$

قضیه‌ی ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \neq ۰$ آنگاه

الف : $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = +\infty$

ب : اگر $L > ۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = +\infty$

ج : اگر $L < ۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = -\infty$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x\to a^+$ و $x\to a^-$) نیز برقرار است.

مثال ۱ : توابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}}$ و $g(x)=x+۱$ را در نظر بگیرید.

الف : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ را به دست آورید.

ب : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)+g(x))$ را محاسبه کنید.

پ : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)\times g(x))$ را محاسبه کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\to \lim_{x\to ۰} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad g(x)=x+۱\to \lim_{x\to ۰} g(x)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۰} f(x)+\lim_{x\to ۰} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to ۰} f(x)\times \lim_{x\to ۰} g(x)=+\infty$$

مثال ۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(۲x+۱+\dfrac{۱}{x^{۲}})$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{x+\sin^{۲}x}{x^{۲}}$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}(۲x+۱+\frac{۱}{x^{۲}})=\underbrace{\lim_{x\to ۰}(۲x+۱)}_{۱}+\underbrace{\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x^{۲}})}_{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x+\sin^{۲}x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{x^{۲}}+\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}=\underbrace{\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}}_{۱}=+\infty$$

قضیه‌ی ۶ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\neq ۰$ آنگاه

الف : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=-\infty$

ب : اگر $L>۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=-\infty$

ج : اگر $L<۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=+\infty$

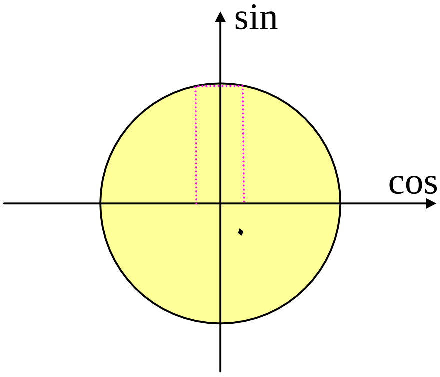
تمرین برای حل : حدود زیر را به دست آورید.

۲۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \left(\dfrac{x+۱}{x-۱}\right)$ **۲۳)** $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} \dfrac{x+۱}{x^۲+۴x+۴}$

۲۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \left(\dfrac{x^۲+x}{x^۲}\right)$ **۲۵)** $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{۲-\cos ۲x}{x^۲}$

تمرین ۲۶ : نشان دهید که تابع $f(x)=\tan x$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{۲}$ دارای حد نیست.

حل:



$x\to \left(\dfrac{\pi}{۲}\right)^+ \to x>\dfrac{\pi}{۲} \to \cos x<۰$ ربع دوّم

$x\to \left(\dfrac{\pi}{۲}\right)^- \to x<\dfrac{\pi}{۲} \to \cos x>۰$ ربع اوّل

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \tan x = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \sin x}_{۱} \times \underbrace{\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{۱}{\cos x}}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \tan x = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \sin x}_{۱} \times \underbrace{\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \frac{۱}{\cos x}}_{+\infty} = +\infty$$

توجه کنید که با توجه به نمودار تانژانت در همسایگی $\dfrac{\pi}{۲}$ این نتایج نیز مورد تأیید هستند.

تمرین برای حل :

۲۷ : با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حد های زیر را نشان دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^{۲}}}{x^{۲}}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^{۴}}=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

د) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{x+۲}{۲x-۶}=-\infty$

۲۸ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{۲x}{x^{۲}-۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{x^{۲}+۲x-۱}{x^{۲}+x-۱۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{۲}{۱-\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\dfrac{۲}{۱-\cos x}$

***

مجانب قائم

فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد، خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

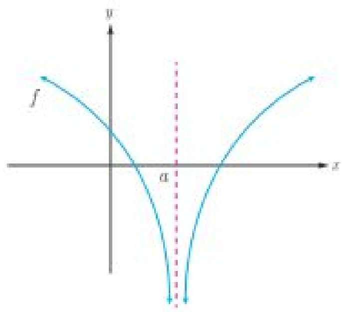
الف) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$

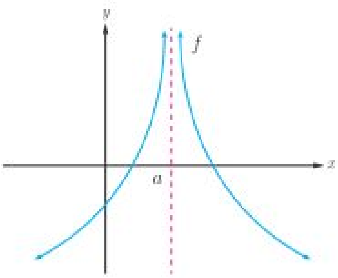
د) $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$

در هر یک از شکل های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



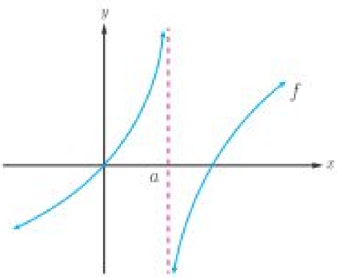
$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$



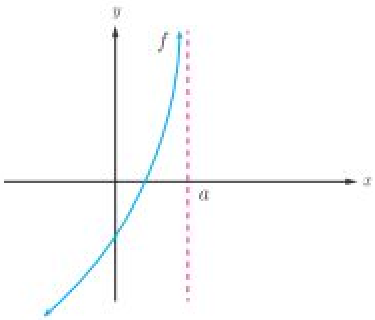
$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$

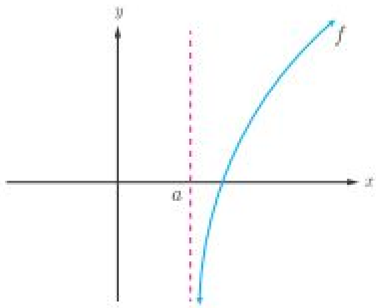
$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty$





$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

برای مثال خط $x = \frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ است.

توجه : اگر برد تابعی بین دو عدد حقیقی محدود باشد، آن تابع دارای مجانب قائم نیست. برای مثال چون برد تابع $f(x) = \sin x$ به صورت $[-۱,۱]$ می باشد. پس این تابع هیچگاه مجانب قائم ندارد.

برای محاسبه‌ی مجانب قائم در توابع کسری، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم، ریشه های مخرج مجانب قائم تابع f هستند، به شرط اینکه این ریشه ها ، صورت را صفر نکنند[2].

مثال : مجانب یا مجانب های قائم تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۲x + ۲}{x^۳ - ۸}$$

حل :

$$x^۳ - ۸ = ۰ \rightarrow x = ۲$$

لذا خط $x = ۲$ مجانب قائم است.

مثال : مجانب یا مجانب های قائم تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ + ۲x - ۳}$$

حل :

$$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \rightarrow (x+۳)(x-۱) = ۰ \rightarrow x = -۳ \;,\; x = ۱$$

---

[2] . در صورتی که صورت کسر توسط این ریشه صفر شود، حالت $\frac{۰}{۰}$ اتفاق می افتد که بعد از رفع ابهام، اگر حاصل حد تابع f در $x = a$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، باز هم خط $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

خط $x=-۳$ مجانب قائم است ولی خط $x=۱$ مجانب قائم نیست، چون ریشه‌ی صورت نیز می باشد و به ازای آن حد تابع بی کران نمی شود.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x^۲+۲x-۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x+۳)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۲}{x+۳}=\frac{۳}{۴}$$

مثال : مجانب های قائم تابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x^۲+|x|}{x^۲-|x|}$$

حل:

$$x^۲-|x|=۰\to x^۲=|x|\to\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

$$D_f=R-\{۰,۱,-۱\}$$

و چون $x=۰$ ریشه‌ی صورت است لذا فقط دو خط $x=۱$ و $x=-۱$ مجانب قائم هستند.

مثال : مجانب های قائم تابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

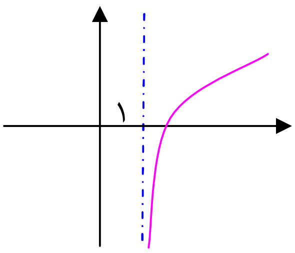
$$f(x)=\log^{x-۱}$$

حل:

$$f(x)=\log^{x-۱}$$

$$x-۱>۰\to x>۱\to D_f=(۱,+\infty)$$

$$x-۱=۰\to x=۱$$



تمرین برای حل :

۲۹ : مجانب یا مجانب های قائم تابع های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۳}+\frac{۵}{x^۲-۹}$

ب) $g(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-x-۶}$

ج) $h(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x}$ د) $k(x)=\dfrac{x^{۲}+x}{x^{۲}-x}$

۳۰ : کدام یک از خطوط زیر $x=-۱$ و $x=۳$ مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}$ مـی باشـند؟ چرا؟

۳۱ : نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی $R-\{-۱,۱\}$ آن بوده و دارای دو مجانب قائم می باشد.

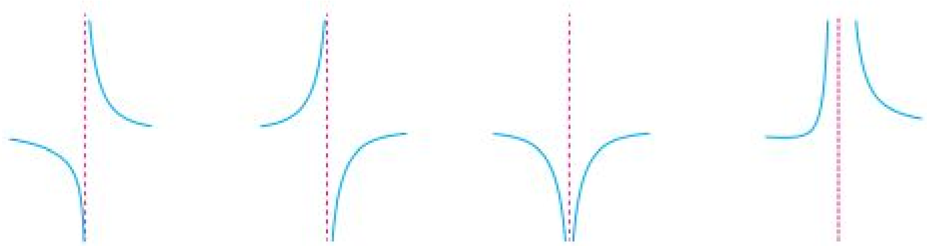
۳۲ : نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی $R-\{-۲,۳\}$ آن بوده و دارای یک مجانب قائم می باشد.

۳۳ : نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی $[-۲,۲]-\{۱\}$ آن بوده و دارای مجانب قائم می باشد.

۳۴ : نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۳}+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

۳۵ : نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۳۶ : کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}-۲x+۱}$ را در همسایگی $x=۱$ نمایش می دهد؟



(ت)   (پ)   (ب)   (الف)

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

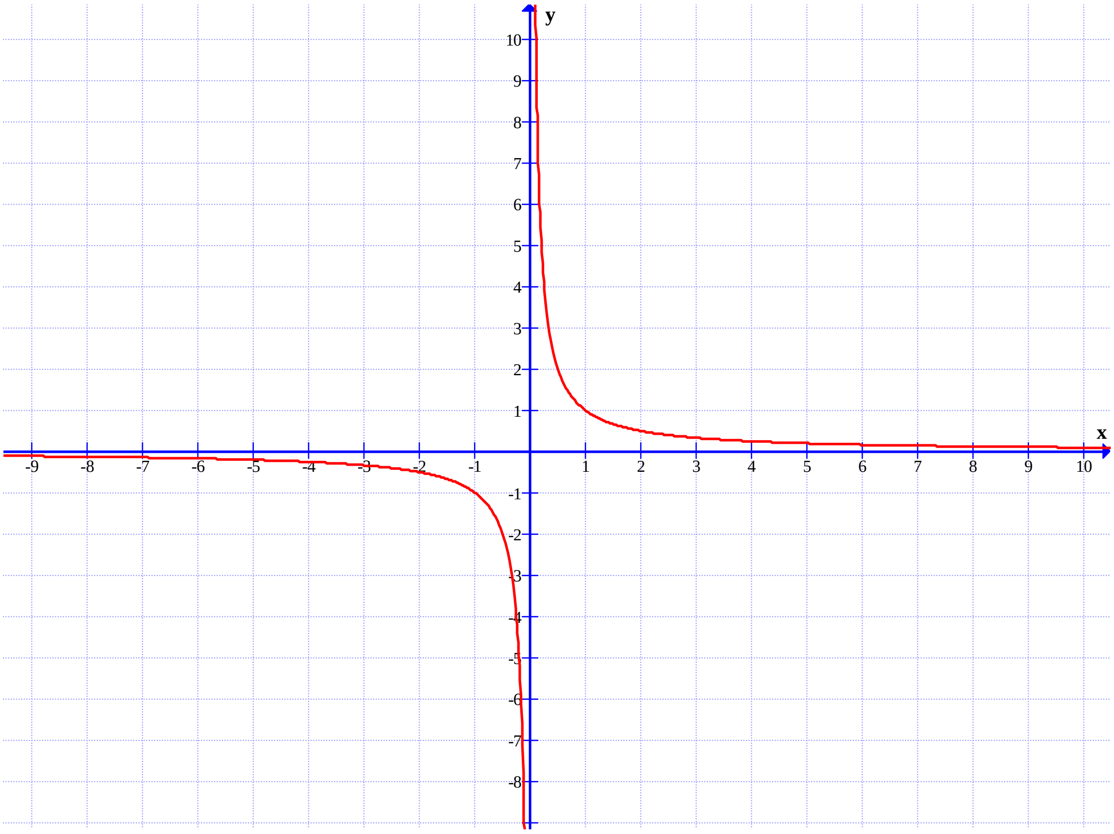
استان خوزستان

درس دوّم : حد دربینهایت

در این درس می خواهیم رفتار تابع را وقتی که متغیر x به سمت بی نهایت (بی انتها) میـل کنـد، را بررسـی کنیم. در این حالت گویند با حد در بینهایت سروکار داریم.

حد در بی نهایت

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می باشد.



همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت راست بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=۰$$

همچنین به کمک همین نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت چپ کوچک شود، مقادیر $f(x)$ نیز به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

و به طور خلاصه نوشته می شود که :

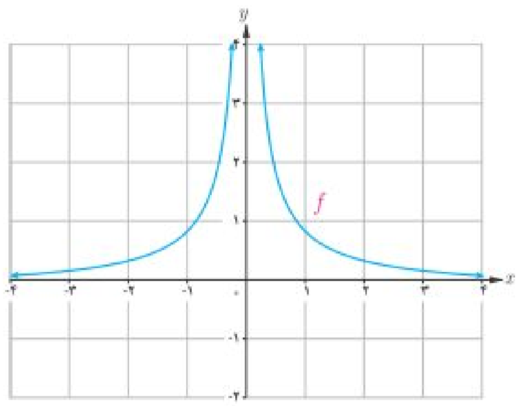
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

اکنون به **تعاریف** زیر توجه کنید.

الف: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

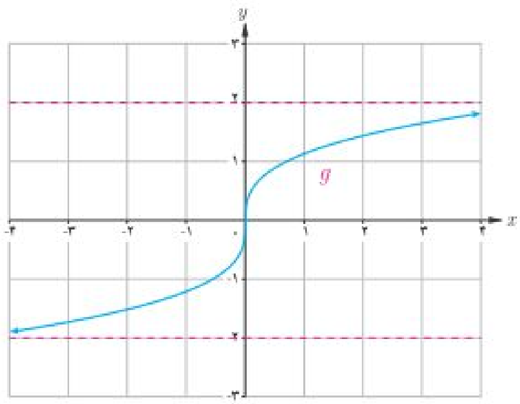
ب: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

تمرین ۱ : با استفاده از نمودار های f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

حال پس از آشنایی با مفهوم حد در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=0$$

مثال :

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2}}{x^2}=0$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{2x^3}=0$

قضیه۲ : اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_2$ آنگاه :

الف) $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_1+L_2$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_1-L_2$

ج) $\lim_{x\to+\infty}(f\times g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\times\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_1\times L_2$

د) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to+\infty}f(x)}{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad ;\quad L_2\neq 0$

تذکر : قضیه‌ی فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند، نیز برقرار است.

مثال :

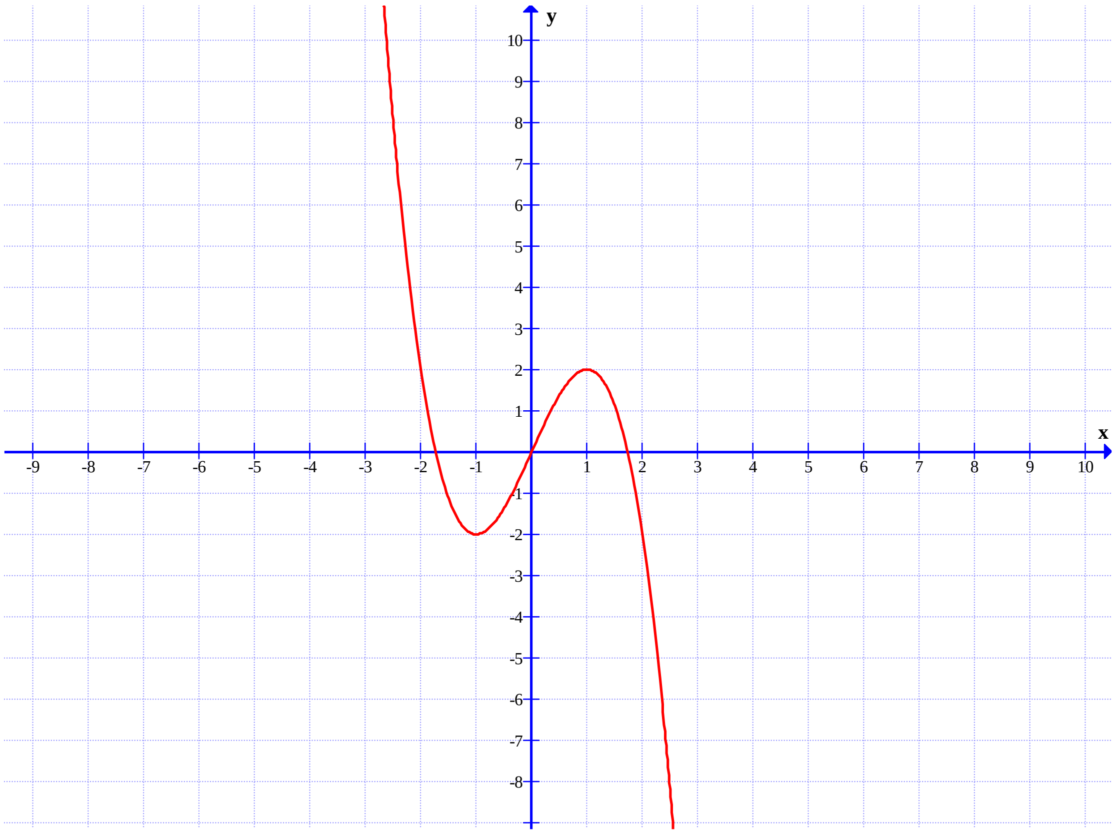
الف) $\lim_{x\to+\infty}(3+\frac{5}{x^3})=\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^3}=3+0=3$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x}+4}=\frac{\lim_{x\to-\infty}2+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}4}=\frac{2+0}{0+4}=\frac{1}{2}$

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه‌ی حد توابع ممکن است وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، مقدار های $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند یا از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند.

به شکل های زیر توجه کنید و تساوی های زیر را کامل کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

اکنون به تعاریف زیر توجه کنید.

الف : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

ج : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

د : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

به مثال های زیر توجه نمایید.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید[1].

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-۲x^۳)=-۲(+\infty)^۳=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۳x^۴)=۳(-\infty)^۴=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-۵x^۳)=-۵(-\infty)^۳=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-۲x^۳)=-۲(-\infty)^۳=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-۳x^۲)=-۳(\pm\infty)^۲=-\infty$

حال پس از آشنایی با مفهوم حد نامتناهی در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱ : فرض کنید که a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، در این صورت

الف : اگر n زوج باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n=+\infty$

ب : اگر n فرد باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

مثلاً :

$$\lim_{x\to+\infty} x^۵=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} x^۴=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} x^۳=-\infty$$

[1] . توجه داشته باشید، این نحوه‌ی نوشتن از نظر ریاضی ایراد دارد، ولی برای تعیین علامت حاصل لازم است.

قضیه ۲ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to+\infty} f(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to+\infty} f(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

تذکر : این قضیه برای $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ به طور مشابه برقرار است.

قضیه ۳ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to-\infty} f(x)\times\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to-\infty} f(x)\times\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$

تذکر : این قضیه برای $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ به طور مشابه برقرار است.

و به طور کلی قضیه‌ی فوق را می توان به شکل جدول زیر تعمیم داد.

	n فرد	n زوج
a مثبت	$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=+\infty$
a منفی	$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=-\infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=-\infty$

اکنون با توجه به این قضیه، مثال زیر را می توان عنوان کرد.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to+\infty}(-۲x^۳)=-\infty$

۲) $\lim_{x\to-\infty}(۳x^۴)=+\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty}(-۵x^۳)=+\infty$

۴) $\lim_{x\to-\infty}(-۲x^۶)=-\infty$

۵) $\lim_{x\to\pm\infty}(-۳x^۲)=-\infty$

۶) $\lim_{x\to-\infty}(۵x^۳)=-\infty$

به کمک قضایای قبل می توان حد توابع چند جمله ای در بی نهایت را نیز محاسبه کرد. به **مثال** زیر توجه کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}(۳x^۴+۲x^۲-۵x+۷)=\lim_{x\to-\infty}x^۴(۳+\frac{۲}{x^۲}-\frac{۵}{x^۳}+\frac{۷}{x^۴})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^۴\times\lim_{x\to-\infty}(۳+\frac{۲}{x^۲}-\frac{۵}{x^۳}+\frac{۷}{x^۴})=(+\infty)\times(۳+۰+۰+۰)=+\infty$$

با این روش می توان حد هر تابع چند جمله ای را به دست آورد. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه ۴ : حد هر چند جمله ای به صورت

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+a_{n-۲}x^{n-۲}+...+a_۱x+a_۰$$

در $\pm\infty$ برابر حدجمله ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

به استدلال زیر توجه کنید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+a_{n-۲}x^{n-۲}+...+a_۱x^۱+a_۰)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^n(a_n+\frac{a_{n-۱}}{x}+\frac{a_{n-۲}}{x^۲}+...+\frac{a_۱}{x^{n-۱}}+\frac{a_۰}{x^n})$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^n\times\lim_{x\to\pm\infty}(a_n+\frac{a_{n-۱}}{x}+\frac{a_{n-۲}}{x^۲}+...+\frac{a_۱}{x^{n-۱}}+\frac{a_۰}{x^n})$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^n\times(a_n+۰+۰+...+۰+۰)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

لذا در حد توابع چند جمله ای، با توجه به روش فاکتورگیری نتیجه می شود، که حد تابع چند جمله ای ، با حد جمله ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. از این به بعد در یک چند جمله ای ، جمله ای که دارای بیشترین توان باشد، را **جمله‌ی ارشد** نام گذاری می کنیم.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}(-۵x^۷+۳x^۴-۲)=\lim_{x\to+\infty}(-۵x^۷)=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}(۳x-۴x^۲-۷)=\lim_{x\to+\infty}(-۴x^۲)=-\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty}(۳x+۵x^۲-x^۳-۲)=\lim_{x\to-\infty}(-x^۳)=+\infty$$

تمرین۲ : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}(-۲x^۳+x-۱)$ ب) $\lim_{x\to+\infty}(۳-۲x-۵x^۴)$

به طور مشابه برای محاسبه‌ی حد توابع کسری[2]، مانند توابع چند جمله ای ، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می کنیم به استدلال زیر توجه کنید.

در محاسبه ی حد توابع کسری نظیر $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ وقتی که $x\to\pm\infty$ به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}q(x)}=\frac{a\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^n}{b\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^m}=\frac{a}{b}\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-m}$$

که در آن ax^n جمله‌ی ارشد صورت و bx^m جمله‌ی ارشد مخرج فرض شده است.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^۳+۷x-۲}{۵-۳x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۳}{-۳x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-۳}=-\frac{۱}{۳}(-\infty)=+\infty$$

---

[2]. تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۴-۵x^۲+۷x}{۲x^۲+۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۵x^۲}{۲x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۵}{۲}=\frac{-۵}{۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳-۲}{۵x-۳x^۴+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳}{-۳x^۴}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲}{-۳x}=\frac{۲}{-۳(-\infty)}=۰$$

$$۴)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳+۷x+۱}{x-۳x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳}{-۳x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x}{-۳}=-\frac{۴}{۳}(+\infty)=-\infty$$

نتیجه می شود که در محاسبه‌ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.

الف) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت می شود. مانند مثال های ۱ و ۴ فوق

ب) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می شود. مانند مثال ۳ فوق

ج) توان جمله‌ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت ضریب های جملات ارشد می شود. مانند مثال ۲ فوق

تمرین۳ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+۲x^۳-۲}{۵x-۳x^۴+۱}$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۳-۷x+۱}{۲x^۲-x+۳}$

ج) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۳+x-۱}{۶x^۳-۲x+۱}$

د) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}$

برای محاسبه‌ی حد تابع رادیکالی با فرجه‌ی ۲ (اصم)، با توجه به روش فاکتورگیری هم ارزی های زیر حاصل می شود. این هم ارزی ها را **هم ارزی های نیوتن** می نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را **هم ارز** گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^۲+bx+c}\equiv\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^۲+bx+c}\equiv-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

مثال : حدهای زیر را حساب کنید.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-7x+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4}\left(x+\frac{-7}{2(4)}\right)=\lim_{x\to+\infty}2x=2(+\infty)=+\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+1}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9}\left(x+\frac{-1}{2(9)}\right)=-\lim_{x\to-\infty}3x=-3(-\infty)=+\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9}\left(x+\frac{0}{2(9)}\right)=-\lim_{x\to-\infty}3x=-3(-\infty)=+\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1}\left(x+\frac{-1}{2(1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{-4x^2+5x+3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{-4}\left(x+\frac{5}{2(-4)}\right)=$$ حد ندارد.

تمرین برای حل :

۴ : حد های زیر را محاسبه کنید.

$$1-4)\ \lim_{x\to-\infty}(5x-9x^4-x+1)$$

$$2-4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2x^3-2}{5x-3x^4+1}$$

$$3-4)\ \lim_{t\to-\infty}\frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$$

$$4-4)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-x+5\right)$$

$$5-4)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{9x^2-x}}{5-6x}$$

$$6-4)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}-7x}{6x-\sqrt{9x^2+5}}$$

$$7-4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-\sqrt{x^2+7x-1}}{5x+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$8-4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+\sqrt{x^2+1}}{6x+\sqrt{4x^2-1}}$$

۵ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-8x}{3x+5}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-۲x+۵}-\sqrt{x^۲+۲x+۷})$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^۲+۳}}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$

۶: مقدار k را به قسمی تعیین کنید که حد تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۴+x^۳-۱}{kx^۴+x^۲+۱}$ وقتی که $x\to+\infty$ برابر۴ باشد.

۷ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx^۲-۵}{۲x^n-۳x-۲}=۱$

۸ : مقدار k را چنان بیابید. $\lim\limits_{x\to-\infty}[۲x-۱+\sqrt{۴x^۲+kx+۱}]=۵$ (جواب $k=-۲۴$)

۹ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x\to+\infty}[mx+n+\sqrt{x^۲-۴x-۳}]=۲$

(جواب $n=۴$ و $m=-۱$)

۱۰: اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-۲)x^۳+۲x^۲+۳}{bx^۲+۱}+۳=۵$ مقدار a و b را به دست آورید.

۱۱ : اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^۳}{ax^n}=۰$ آنگاه حداقل مقدار n را تعیین کنید. $(n\in N)$

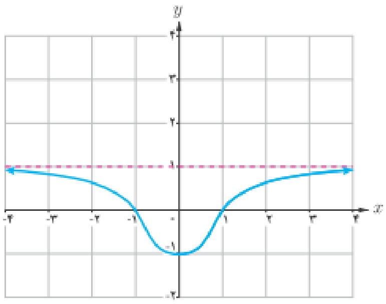
***

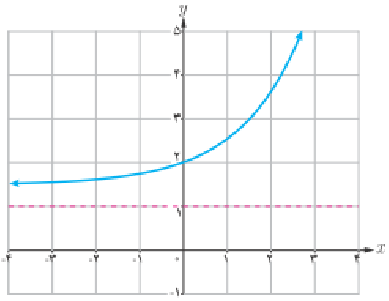
مجانب افقی تابع

خط $y = L$ را مجانب نمودار $y = f(x)$ می نامیم، هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

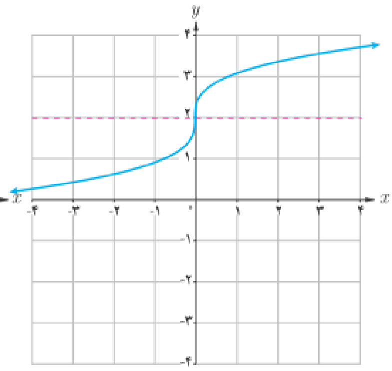
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

به عنوان مثال ، در هر یک از شکل های زیر خط $y = ۱$ مجانب افقی نمودار ها است. چرا؟

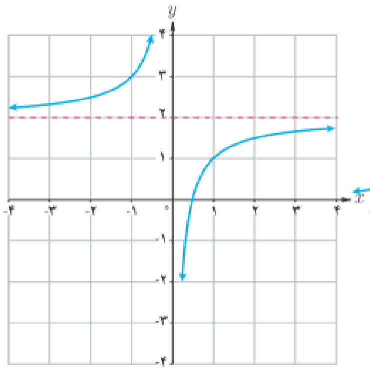




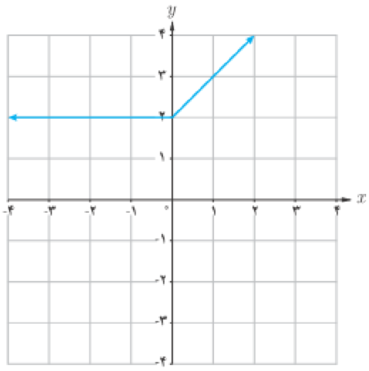
تمرین۱۲ : کدام یک از نمودار توابع زیر دارای مجانب افقی است؟ آن را مشخص کنید.



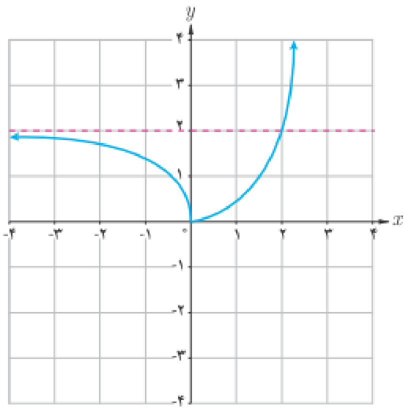
الف



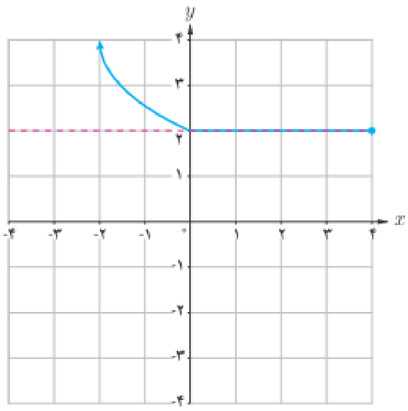
ب



پ



ت



ث

توجه :

۱ : اگر دامنه‌ی تابعی بین دو عدد حقیقی محدود باشد، آن تابع دارای مجانب قائم نیست.

۲ : طبق تعریف ، تابع ثابت در صورت محدود نبودن دامنه‌ی آن ، مجانب افقی خودش می باشد.

برای محاسبه‌ی مجانب افقی یک تابع، کافی است که حد تابع را در بی نهایت (مثبت یا منفی یا هر دو) محاسبه کنیم و در صورتی که این حد عدد حقیقی L شود، معادله‌ی $y=L$ مجانب افقی تابع است.

مثال : مجانب های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را به دست آورید.

حل : چون

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۲x-۱}{x+۱}=-\infty$$

و

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{۲x-۱}{x+۱}=+\infty$$

پس خط $x=-۱$ (که همان ریشه‌ی مخرج تابع است.) مجانب قائم نمودار تابع می باشد.

از طرفی چون :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x+۱}=۲$$

پس خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع است.

تمرین۱۳ : مجانب های افقی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۲) $f(x)=\frac{۱-x^۳}{۲+۳x^۳}$

۳) $f(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x+۵}}$

۴) $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲-۱}$

حل ۱:

$$۱-x^۲>۰\to -x^۲>-۱\to x^۲<۱\to -۱<x<۱$$
$$\to D_f=(-۱,۱)-\{۰\}$$

دامنه‌ی تابع محدود است، پس x نمی تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند، پس تابع مجانب افقی ندارد.

حل ۲:

$$D_f = R$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱ - x^۳}{۲ + ۳x^۳} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^۳}{۳x^۳} = -\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه خط $y = -\frac{۱}{۳}$ مجانب افقی است.

حل ۳:

$$x^۲ + ۲x + ۵ = ۰ \to (x^۲ + ۲x + ۴) + ۱ = ۰ \to (x + ۲)^۲ + ۱ = ۰ \to (x + ۲)^۲ = -۱$$

معادله ریشه ندارد و عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است. لذا $D_f = R$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x + \frac{۲}{۲})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-(x + \frac{۲}{۲})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -۱$$

پس خط های $y = ۱$ و $y = -۱$ مجانب های افقی هستند.

حل ۴:

$$۴x^۲ - ۱ \geq ۰ \to ۴x^۲ \geq ۱ \to x^۲ \geq \frac{۱}{۴} \to x \geq \frac{۱}{۲} \vee x \leq -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (۲x + \sqrt{۴x^۲ - ۱}) = \lim_{x \to +\infty} (۲x + \sqrt{۲}(x + \frac{۰}{۴}))$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (۲x + ۲x) = \lim_{x \to +\infty} ۴x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (۲x + \sqrt{۴x^۲ - ۱}) = \lim_{x \to -\infty} (۲x + \sqrt{۲}(x + \frac{۰}{۲}))$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (۲x - ۲x) = ۰$$

پس تابع در شاخه‌ی $+\infty$ مجانب افقی ندارد ولی در شاخه‌ی $-\infty$ مجانب افقی دارد و خط $y = ۰$ مجانب افقی آن است.

توجه : در توابع کسری اگر درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، تابع مجانب افقی ندارد.

تمرین۱۴ : معادله‌ی مجانب های افقی تابع $y=\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-x+2}+\frac{4}{x}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x^2+4x\geq 0 \rightarrow x\leq -4 \quad \vee \quad x\geq 0 \\ -x+2=0 \rightarrow x=2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1}(x+\frac{4}{2})}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)=-1+0=-1$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{1}(x+\frac{4}{2})}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x-2}{-x+2}+\frac{4}{x}\right)=1+0=1$$

لذا دو خط $y=1$ و $y=-1$ مجانب افقی هستند.

تمرین۱۵ : معادلات مجانب های قائم و افقی تابع $y=\frac{3x+5}{|x|-2}$ را بیابید.

حل:

$$D=R-\{\pm 2\}$$

$$|x|-2=0 \rightarrow |x|=2 \rightarrow x=\pm 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{|x|-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{|x|-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x}=-3$$

چون $x=2$ و $x=-2$ ریشه‌ی صورت نیستند لذا تابع چهار مجانب دارد. خطوط $x=2$ و $x=-2$ مجانب قائم و خطوط $y=3$ و $y=-3$ مجانب افقی هستند.

تمرین۱۶: مقدار n و m را طوری بیابید که خط $y=۲$ وقتی $x \to +\infty$ یک مجانب افقی نمودار تابع زیر باشد.

$$f(x)=mx+n+\sqrt{۴x^{۲}-۴۸x+۵}$$

حل:

$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[mx+n+\sqrt{۴}(x+\frac{-۴۸}{۸})]=\lim_{x\to+\infty}(mx+n+۲x-۱۲)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(m+۲)x+(n-۱۲)]\equiv ۲ \to \left\langle \begin{array}{l} m+۲=۰ \to m=-۲ \\ n-۱۲=۲ \to n=۱۴ \end{array} \right.$$

***

تمرین برای حل :

۱۷ : مجانب های افقی و قائم تابع های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱۵-۱) $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۲}-۱}$

۱۵-۲) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

۱۵-۳) $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{x+۱}$

۱۵-۴) $f(x)=x^{۳}$

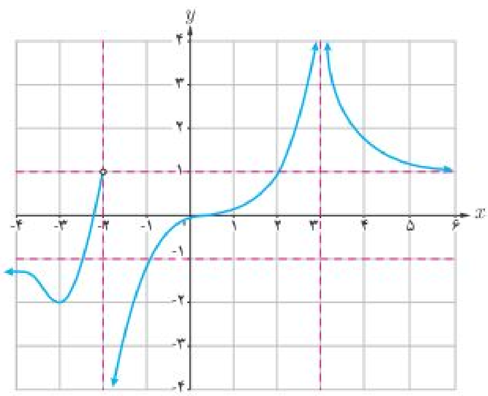
۱۵-۵) $f(x)=\dfrac{۱-۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}$

۱۵-۶) $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}-۴}$

۱۵-۷) $f(x)=\dfrac{۲x}{۱+x^{۲}}$

۱۵-۸) $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^{۲}-۸x+۱}$

۱۸ : برای تابع f که نمودار آن در داده شده است. موارد زیر را پاسخ دهید.



الف : حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف – ۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$

الف –۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)$

الف – ۳) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

الف – ۴) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)$

الف – ۵) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x)$

الف – ۶) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$

الف – ۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

الف – ۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ب : مجانب های افقی و قائم تابع را بنویسید.

۱۹ : برای هر مورد، نمودار تابعی را رسم کنید.

الف : نمودار تابع دارای دو مجانب افقی است.

ب : تابع دارای دو مجانب قائم و یک مجانب افقی است.

ج : نمودار تابع مجانب افقی را قطع کند.

د : نمودار تابع مجانب قائم را قطع کند.

۲۰ : نمودار تابعی را رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

الف : $f(۱) = f(-۲) = ۰$

ب : $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = -\infty$

پ : خط $y = -۱$ مجانب افقی آن است.

۲۱ : خطوط $x = ۲$ و $x = \frac{۳}{۲}$ و $y = ۴$ مجانب های تابع به معادله‌ی زیر می باشند. مقادیر n و m و b و a را بیابید.

$$f(x) = \frac{(a-۴)x^۳ + (b-۱)x^۲ + ۴x - ۱}{۲x^۲ + mx + n}$$

۲۲ : ضابطه تابعی بنویسید که مجانب قائم خود را قطع کند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x < ۰ \\ \sqrt{x} & x \geq ۰ \end{cases}$$

***